ÇOK KATLI ANALİTİK FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARININ ÖZELİKLERİ

Kevser SAYICIER

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK KATLI ANALİTİK FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARININ ÖZELİKLERİ

KEVSER SAYICIER
0009-0008-4067-9325

Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2025
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÇOK KATLI ANALİTİK FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARININ ÖZELİKLERİ

Kevser SAYICIER

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Bu tez, açık birim disk $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ içinde tanımlı çok katlı analitik fonksiyonların bazı yeni alt sınıflarının özelliklerini incelemektedir. Çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezin amacı ve kapsamı ortaya konmuştur. İkinci bölümde, çalışmanın ilerleyen kısımlarında kullanılacak temel tanım ve teoremler sunularak kuramsal bir zemin hazırlanmıştır. Üçüncü bölümde, açık birim disk üzerinde tanımlı çok katlı analitik fonksiyonların diferansiyel yardımıyla tanımlanan belirli alt sınıfları için yöntem ve kullanılan teknik araçlar açıklanmıştır. Bu bağlamda, özellikle $\mathcal{A}_p(\rho, \alpha, \Delta; v)$ sınıfı ele alınarak bu sınıfa ait fonksiyonların konvekslik özellikleri, katsayı sınırları, büyüme tahminleri ve yıldızıllık koşulları detaylı biçimde incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise $\mathcal{B}_p(\rho, \alpha, \Delta; v)$ sınıfı üzerine odaklanılmış; bu sınıfa ait fonksiyonların ekstrem noktaları, kesin katsayı sınırları ve bazı yardımcı lineer operatörlerin bu sınıfa etkisi değerlendirilmiştir. Ayrıca bu iki sınıf arasında geçiş ilişkileri kurularak bazı kapsama ve içerme özellikleri ortaya konmuştur.

Beşinci ve son bölümde, elde edilen tüm bulgular genel bir değerlendirme çerçevesinde tartışılmış ve gelecekte yapılabilecek olası çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur. Bu çalışma, Geometrik Fonksiyonlar Teorisi alanında çok katlı fonksiyonların yapısal ve geometrik özelliklerine yönelik katkılar sunmakta, özellikle yıldızıl ve konveks fonksiyon sınıflarının genelleştirilmesine ilişkin yeni yaklaşımlar getirmektedir.

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, yalınkat fonksiyon, çok katlı fonksiyon, katsayı problemi, yarıçap problemi.
2025, v + 41 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

PROPERTİES OF SOME SUBCLASSES OF MULTİVALENT ANALYTİC FUNCTİONS

Kevser SAYICIER

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

This thesis investigates certain new subclasses of multivalent analytic functions defined in the open unit disk $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$. The thesis is composed of five chapters.

In the first chapter, the aim and scope of the thesis are stated. The second chapter provides the fundamental definitions and theorems that form the theoretical basis of the study. In the third chapter, methods and technical tools are presented for the analysis of certain differential-based subclasses of multivalent analytic functions in the unit disk. In particular, the class $\mathcal{A}_p(\rho, \alpha, \Delta; v)$ is examined in detail with respect to its convexity properties, coefficient estimates, growth bounds, and starlikeness conditions.

The fourth chapter focuses on the class $\mathcal{B}_p(\rho, \alpha, \Delta; v)$, where the extremal points, sharp coefficient bounds, and the influence of some auxiliary linear operators are analyzed. Relationships between these two function classes are also discussed to identify inclusion and subordination properties.

In the fifth and final chapter, all findings are evaluated within a general framework and recommendations for future studies are provided. This study contributes to the structural and geometric analysis of multivalent functions in the field of Geometric Function Theory and introduces new approaches particularly related to the generalization of starlike and convex function classes.

Key words: Analytic function, univalent function, multivalent function, coefficient problem, radius problem.
2025, v + 41 pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans dönemim boyunca ilgisi ve bilgisi ile bana yol gösteren, karşılaştığım zorluklarda desteğini her zaman hissettiğim, danıştığım her şeyde tüm içtenliği ve güler yüzüyle yardımcı olmaya çalışan, iyi ki tanıdım dediğim danışman hocam Sayın Prof. Dr. Sibel Yalçın TOKGÖZ'e,

hayatım boyunca aldığım her kararda destekleriyle yanımda olan, sevgilerini ve emeklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen hayattaki en büyük şansım olan çok kıymetli anne ve babama, bu süreçte moral ve motivasyonuyla her zaman yanımda olan canım kız kardeşime, başardığımı görmek için beni hep destekleyip arkamda duran aileme ve dostlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Kevser SAYICIER
…/…/…….

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ v
1. GİRİŞ 1
2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ARAŞTIRMASI 2
3. MATERYAL VE YÖNTEM 6
3.1. $\mathcal{A}(\rho, \alpha, \Delta; v)$ Sınıfı 6
4. BULGULAR 18
4.1. $\mathcal{B}_p(\rho, \alpha, \Delta; v)$ Sınıfı ve Ekstrem Noktaları 18
4.2. $\mathcal{B}_p(\rho, \alpha, \Delta; v)$ Sınıfına Etki Eden Yardımcı Lineer Operatörler İçin Sınırlar 26
5. TARTIŞMA VE SONUÇ 34
KAYNAKLAR 40
ÖZGEÇMİŞ 41

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathcal{U}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < 1\}$, Açık birim disk
$\mathcal{A}$	$\mathcal{U}$ açık birim diskinde normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{P}$	Reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{A}_p$	$\mathcal{U}$ açık birim diskinde analitik ve $f(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k$ şeklinde seri açılımına sahip fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}$	$\mathcal{U}$ açık birim diskinde normalize edilmiş analitik ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*$	$\mathcal{U}$ açık birim diskinde analitik, ünivalent ve yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*(\Delta)$	$\mathcal{U}$ da analitik, ünivalent Δ mertebeli yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}_p^*(\Delta)$	$Re\left(\frac{z f'(z)}{f(z)}\right) > \Delta, (0 \le \Delta < p; z \in \mathcal{U})$ şartını sağlayan $f \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonlarının sınıfı
$\mathcal{K}$	$\mathcal{U}$ açık birim diskinde analitik, ünivalent ve konveks fonksiyonların sınıfı
$\mu(x)$	$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{C} : \lvert x\rvert = 1\}$ kümesi üzerinde olasılık ölçümü
$\mathcal{A}(\rho, \alpha, \Delta)$	$Re\{\rho f'(z) + \alpha z f''(z)\} > \Delta$ şartını sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarının alt sınıfı
$\mathcal{A}_p(\rho, \alpha, \Delta; v)$	$Re\left\{\rho \frac{f^{(v)}(z)}{z^{p-v}} + \alpha \frac{f^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}\right\} > \Delta$ şartını sağlayan $f \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonlarının alt sınıfı
$\mathcal{B}_p(\rho, \alpha, \Delta; v)$	$Re\left\{\rho \frac{f^{(v)}(z)}{z^{p-v}} + \alpha \frac{f^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}} + \left(\frac{\alpha-\rho}{2}\right)\frac{f^{(v+2)}(z)}{z^{p-v-2}}\right\} > \Delta$, eşitsizliğini sağlayan $f \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonlarının alt sınıfı

1. GİRİŞ

Analitik fonksiyonlar ve alt sınıflarının geometrik özelliklerinin incelenmesi, Geometrik Fonksiyonlar Teorisi'nin temel çalışma alanlarından biridir. Özellikle çok katlı analitik fonksiyonlar üzerine yapılan çalışmalar, konvekslik, yıldızıllık, kapsama ve katsayı eşitsizlikleri gibi kavramların genişletilmesi açısından önemli katkılar sağlamaktadır. Açık birim disk üzerinde tanımlı çok katlı analitik fonksiyonların belirli diferansiyel eşitsizlikler yardımıyla tanımlanan alt sınıflarının incelenmesi, hem fonksiyonların geometrik özelliklerinin belirlenmesine hem de bu sınıflar arasındaki ilişkilerin ortaya konmasına imkân tanımaktadır.

Bu çalışmada, diferansiyel eşitsizlikler yardımıyla tanımlanan çok katlı normalize edilmiş analitik fonksiyon sınıflarının sağladığı eşitsizlikler ile geometrik özellikleri arasındaki ilişki ele alınmış, bu fonksiyon sınıflarının yıldızıllık, konvekslik gibi geometrik özelliklerinin belirlenmesine yönelik yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca, iki fonksiyon sınıfı arasında kapsama bağıntısı kurulabilmesi için sağlanması gereken şartlar araştırılarak, bu kapsama ilişkilerinin teorik alt yapısı ortaya konmuştur.

Bu kapsamda tezde, "Diferansiyel eşitsizlik yardımıyla tanımlanan çok katlı normalize edilmiş analitik fonksiyon sınıflarının sağladığı eşitsizlikler ile geometrik özellikleri arasındaki ilişki nedir?" ve "İki sınıf arasında kapsama bağıntısı olması için sağlanması gereken şartlar nelerdir?" sorularına odaklanılarak, yeni bulgular literatürdeki mevcut sonuçlarla ilişkilendirilmiş ve ilgili fonksiyon sınıflarına ait katsayı tahminleri, ekstrem noktalar ve yarıçap problemleri üzerinde durulmuştur. Bu tez çalışmasının, Geometrik Fonksiyonlar Teorisi alanına katkı sağlaması ve ilgili fonksiyon sınıfları ile ilgili yapılacak sonraki çalışmalara referans teşkil etmesi amaçlanmaktadır.

2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde teze temel oluşturan ve diğer bölümlerde kullanılacağı için verilmesi gerekli olan teorem ve tanımlar verildi.

2.1. Tanım. $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ biçiminde gösterilen küme, $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde açık birim disk olarak isimlendirilir.

2.2. Tanım. $\mathbb{C}$ kompleks düzlemin boş olmayan, açık ve bağlantılı $\mathcal{D}$ alt kümesine bölge denir.

2.3. Tanım $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve bu bölgede analitik olan $\digamma$ için $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ olmak üzere

$$\digamma(z_1) = \digamma(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$$

oluyorsa $\digamma$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ de ünivalenttir denir.

2.4. Tanım. $\digamma$, $\mathcal{D}$ de tanımlı kompleks değişkenli bir fonksiyon ve $z_0 \in \mathcal{D}$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\digamma(z) - \digamma(z_0)}{z - z_0}$$

limit değeri mevcut ise $\digamma$, z_0 noktasından diferansiyellenebilirdir. Bu $\digamma$ fonksiyonu z_0 noktasının belirli bir komşuluğunda bulunan bütün noktalarda diferansiyellenebiliyor ise $\digamma$, z_0 noktasında analitiktir denir.

2.5. Tanım. $\mathcal{A}$, $\mathcal{U}$ da analitik ve $\digamma(0) = \digamma'(0) - 1 = 0$ biçiminde normalize edilmiş $\digamma$ fonksiyonlarının sınıfı olsun. O zaman $\mathcal{A}$ sınıfına dahil $\forall \digamma$ fonksiyonu,

$$\digamma(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k + \cdots = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \qquad (2.1)$$

biçimdedir. Ayrıca, $\mathcal{A}$ sınıfına ait ünivalent fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}$ ile ifade edilir.

2.6. Tanım. $z \in \mathcal{U}$ için $\mathcal{U}$ da analitik, $\phi(0) = 1$ ve $Re\{\phi(z)\} > 0$ olan

$$\phi(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots + p_k z^k + \cdots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k$$

biçiminde tanımlı fonksiyonlara reel kısmı pozitif analitik fonksiyon denir ve bu sınıflar $\mathcal{P}$ ile gösterilir.

2.7. Tanım. ϕ, $\mathcal{U}$ da analitik fonksiyon ve $\phi(0) = 1$ eşitliği olsun. $\mathcal{U}$ da $Re\{\phi(z)\} > 0$ olabilmesi için gerek ve yeter şart,

$$\phi(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + xz}{1 - xz} d\mu(x)$$

eşitliği sağlanacak biçimde $[0,2\pi]$ aralığı üzerinde tanımlı ve $\mu(2\pi) - \mu(0) = Re\phi(0) = 1$ özelliğinde azalmayan bir μ fonksiyonu vardır.

2.8. Tanım. $\mathcal{U}$ da analitik ve $p = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$\phi(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \qquad (2.2)$$

biçimindeki ϕ fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{A}_p$ ile gösterilir.

2.9. Lemma. ϕ, $\forall z \in \mathcal{U}$ için, $|\phi(z)| < 1$, $\phi(0) = 0$ özelliğinde analitik bir fonksiyon olsun. O zaman, $|\phi(z)| < |z|$ ve $|\phi'(0)| \leq 1$ dir.

2.10. Tanım. $\mathfrak{w}$, $z \in \mathcal{U}$ için $|\mathfrak{w}(z)| < 1$ ve $\mathfrak{w}(0) = 0$ özelliğinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\mathfrak{w}$ ya Schwarz fonksiyonu denir.

2.11. Lemma. $\mathfrak{w}$, $\mathcal{U}$ da analitik bir fonksiyon ve $\mathfrak{w}(0) = 0$ özelliğinde olsun. $|\mathfrak{w}(z)|$ maksimum değerini $|z| < r < 1$ çemberinde bir $z_0 \in \mathcal{U}$ noktasında alıyorsa $m \geq 1$ gerçel sayısı için $z_0\mathfrak{w}'(z_0) = m\mathfrak{w}(z_0)$ eşitliği sağlanır (Jack, 1971).

2.12. Tanım. $\mathcal{D}$ kompleks düzlemde bir bölge ve $w_0 \in \mathcal{D}$ olsun. $\forall w \in \mathcal{D}$ noktasını w_0 noktasına birleştiren doğru parçası $\mathcal{D}$ de ise $\mathcal{D}$ bölgesine w_0 noktasına göre yıldızıl bölge denir (Goodman, 1983).

2.13. Tanım. $\not{f}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ yu w_0 noktasına göre yıldızıl bölgeye resmediyorsa $\not{f}$ fonksiyonuna w_0 noktasına göre yıldızıl adı verilir. Ayrıca, $w_0 = 0$ özelliğinde ise $\not{f}$ fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon adı verilir (Alexander, 1915). Analitik, ünivalent ve yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir.

2.14. Tanım. $\not{f} \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $0 \leq \Delta < 1$ ve $z \in \mathcal{U}$ için

$$Re\left\{\frac{z\not{f}'(z)}{\not{f}(z)}\right\} > \Delta \tag{2.3}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, $\not{f}$ fonksiyonuna $\mathcal{U}$ da Δ-mertebeli yıldızıl fonksiyon adı verilir. Bu özelliğe sahip tüm fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*(\Delta)$ ile gösterilir (Robertson, 1936).

2.15. Tanım. $\not{f} \in A_p$ fonksiyonu

$$Re\left\{\frac{z\not{f}'(z)}{\not{f}(z)}\right\} > \Delta \quad (0 \leq \Delta < p;\ z \in \mathcal{U})$$

şartını sağlıyorsa, $\not{f}$ fonksiyonuna $\mathcal{U}$ da Δ mertebeli p-katlı yıldızıl fonksiyon adı verilir. Bu özelliğe sahip tüm fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}_p^*(\Delta)$ ile gösterilir.

2.16. Tanım. $\forall w_1, w_2 \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ için w_1 ve w_2 noktalarını birleştiren doğru parçası $\mathcal{D}$ içinde kalıyorsa, yani $\forall t \in [0,1]$ için

$$tw_1 + (1-t)w_2 \in \mathcal{D}$$

ise $\mathcal{D}$ bölgesine konvekstir denir (Alexander, 1915).

2.17. Tanım. $\mathcal{U}$ yu konveks bölgeye resmeden ve $\mathcal{U}$ da analitik olan $\digamma$ fonksiyonuna konveks fonksiyon adı verilir (Alexander, 1915). $\mathcal{S}$ sınıfındaki konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}$ ile gösterilir.

2.18. Lemma. $\digamma \in \mathcal{A}_p$ için

$$Re\left\{\frac{z\digamma^{(v)}(z)}{\digamma^{(v-1)}(z)}\right\} > 0, (v = 1, \dots, p; z \in \mathcal{U}) \tag{2.4}$$

ise $\digamma \in \mathcal{S}(v-1)$ dir (Shi ve Wang, 2014).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde $\mathcal{U}$ da çok katlı analitik fonksiyonların diferansiyel yardımı ile tanımlanan alt sınıflarına ait katsayı sınırları ve ekstrem noktaları gibi özellikler verildi. Detaylı bilgi için, Gao ve Zhou (2007), Silverman (1994), Wang vd. (2006), Owa vd. (2007) kaynakları incelenebilir.

3.1. $\mathcal{A}(\rho, \alpha, \Delta; v)$ Sınıfı

3.1.1. Tanım. $v = 0,1,2, \dots, p-1$ olmak üzere $\rho > 0, \alpha > 0$ ve $0 \leq \Delta < \frac{p!\{\rho+(p-v)\alpha\}}{(p-v)!}$ için

$$Re\left\{\rho \frac{f^{(v)}(z)}{z^{p-v}} + \alpha \frac{f^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}\right\} > \Delta \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{3.1}$$

eşitsizliğini sağlayan f analitik fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{A}_p(\rho, \alpha, \Delta; v)$ ile gösterilir (Owa vd., 2007).

Ayrıca, (3.1) eşitsizliğinde $p = 1$ ve $v = 1$ seçilerek $\rho > \Delta \geq 0$ ve $\alpha \geq 0$ için

$$Re\{\rho f'(z) + \alpha z f''(z)\} > \Delta \tag{3.2}$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}(\rho, \alpha, \Delta)$ ile gösterilir.

3.1.2. Tanım. (3.1) eşitsizliğinde $p = 1$ ve $v = 0$ seçilerek elde edilen

$$Re\left\{\rho \frac{f(z)}{z} + \alpha f'(z)\right\} > \Delta \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{3.3}$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{A}_1(\rho, \alpha, \Delta; 0)$ şeklinde gösterilir (Wang vd., 2006).

3.1.3. Teorem. $\mathcal{A}_p(\rho,\alpha,\Delta;v)$ sınıfı konvekstir.

İspat. $\digamma$ ve $\mathcal{g}$ fonksiyonları $\mathcal{A}_p(\rho,\alpha,\Delta;v)$ sınıfında ve $0 \le t \le 1$ eşitsizliği için

$$\mathrm{F}(z) = (1-t)\digamma(z) + t\mathcal{g}(z) \tag{3.4}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} &Re\left\{\rho\frac{\mathrm{F}^{(v)}(z)}{z^{p-v}} + \alpha\frac{\mathrm{F}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}\right\} \\ &\quad = Re\left\{\rho\frac{(1-t)\digamma^{(v)}(z) + t\mathcal{g}^{(v)}(z)}{z^{p-v}}\right. \\ &\quad \left. + \alpha\frac{(1-t)\digamma^{(v+1)}(z) + t\mathcal{g}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}\right\} \\ &\quad = (1-t)Re\left\{\rho\frac{\digamma^{(v)}(z)}{z^{p-v}} + \alpha\frac{\digamma^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}\right\} \\ &\quad + tRe\left\{\rho\frac{\mathcal{g}^{(v)}(z)}{z^{p-v}} + \alpha\frac{\mathcal{g}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}\right\} \\ &\quad > (1-t)\Delta + t\Delta = \Delta \end{aligned} \tag{3.5}$$

olduğundan $\mathrm{F}(z) \in \mathcal{A}_p(\rho,\alpha,\Delta;v)$ dır. Dolayısıyla $\mathcal{A}_p(\rho,\alpha,\Delta;v)$ sınıfı konvekstir.

3.1.4. Teorem. Bir $\digamma \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonunun $\mathcal{A}_p(\rho,\alpha,\Delta;v)$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart $\mu(x)$, $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$ kümesi üzerinde olasılık ölçümü ve $\delta = \frac{p!\{\rho+(p-v)\alpha\}}{(p-v)!}$ olmak üzere $\digamma$ nin

$$\digamma(z) = z^p + 2(\delta-\Delta)\int_{|x|=1}\left(\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(k-v)!}{k!\,[\rho+(k-v)\alpha]}x^{k-p}z^k\right)d\mu(x) \tag{3.6}$$

şeklinde olmasıdır.

İspat. $\not{f}(z) \in \mathcal{A}_p(\rho, \alpha, \Delta; v)$ için $\delta = \frac{p!\{\rho+(p-v)\alpha\}}{(p-v)!}$ olmak üzere

$$\mathrm{F}(z) = \frac{\left(\rho \frac{\not{f}^{(v)}(z)}{z^{p-v}} + \alpha \frac{\not{f}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}\right) - \Delta}{\delta - \Delta} \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde F, $\mathcal{U}$ da analitik $\mathrm{F}(0) = 1$ ve $Re\mathrm{F}(z) > 0$ olduğundan

$$\mathrm{F}(z) = \frac{\left(\rho \frac{\not{f}^{(v)}(z)}{z^{p-v}} + \alpha \frac{\not{f}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}\right) - \Delta}{\delta - \Delta} = \int_{|x|=1} \frac{1+xz}{1-xz} d\mu(x) \tag{3.8}$$

dir. (3.8) denkleminden

$$\begin{aligned} &\alpha\left(\frac{\rho}{\alpha}\not{f}^{(v)}(z) + z\not{f}^{(v+1)}(z)\right) \\ &\qquad = \Delta z^{p-v} + (\delta - \Delta) z^{p-v} \int_{|x|=1} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2x^k z^k\right) d\mu(x) \end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} &z^{\frac{\rho}{\alpha}-1}\left(\frac{\rho}{\alpha}\not{f}^{(v)}(z) + z\not{f}^{(v+1)}(z)\right) \\ &\qquad = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{\rho}{\alpha}-1}\left\{\delta z^{p-v} + (\delta - \Delta) \int_{|x|=1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2x^k z^{k+p-v}\right) d\mu(x)\right\} \end{aligned} \tag{3.10}$$

olduğu görülür.(3.10) eşitliğinin sağ ve sol tarafının integrali alınarak

$$\int_0^z \zeta^{\frac{\rho}{\alpha}-1}\left(\frac{\rho}{\alpha}\not{f}^{(v)}(\zeta)+\zeta\not{f}^{(v+1)}(\zeta)\right)d\zeta$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_{|x|=1}\left\{\int_0^z\left(\delta\zeta^{p-v+\frac{\rho}{\alpha}-1}\right.\right. \tag{3.11}$$

$$\left.\left.+2(\delta-\Delta)\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^k\zeta^{k+p-v+\frac{\rho}{\alpha}-1}\right)\right)d\zeta\right\}d\mu(x)$$

yani

$$z^{\frac{\rho}{\alpha}}\not{f}^{(v)}(z)=\frac{\delta}{\rho+(p-v)\alpha}z^{p-v+\frac{\rho}{\alpha}}+2(\delta-\Delta)$$

$$\times\int_{|x|=1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{\rho+(k+p-v)\alpha}z^{k+p-v+\frac{\rho}{\alpha}}\right)d\mu(x) \tag{3.12}$$

dir. Bu,

$$\not{f}^{(v)}(z)=\frac{p!}{(p-v)!}z^{p-v}+2(\delta-\Delta)$$

$$\times\int_{|x|=1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{\rho+(k+p-v)\alpha}z^{k+p-v}\right)d\mu(x) \tag{3.13}$$

olduğu sonucunu verir. (3.13) eşitliğinin sağ ve sol tarafının integrali alınırak

$$\int_0^z \not{f}^{(v)}(\zeta)d\zeta=\frac{p!}{(p-v)!}\int_0^z\zeta^{p-v}d\zeta+2(\delta-\Delta)$$

$$\times\int_{|x|=1}\left\{\int_0^z\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{\rho+(k+p-v)\alpha}\zeta^{k+p-v}\right)d\zeta\right\}d\mu(x) \tag{3.14}$$

veya

$$\mathcal{f}^{(v-1)}(z) - \mathcal{f}^{(v-1)}(0) = \frac{p!}{(p-v+1)!} z^{p-j+1} + 2(\delta - \Delta)$$
$$\times \int_{|x|=1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\{\rho + (k+p-v)\alpha\}(k+p-v+1)} z^{k+p-v+1} \right) d\mu(x) \tag{3.15}$$

olur. Böylece

$$\mathcal{f}^{(v-1)}(z) = \frac{p!}{(p-v+1)!} z^{p-v+1} + 2(\delta - \Delta)$$
$$\times \int_{|x|=1} \left(\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{x^{k-p}}{\{\rho + (k-v)\alpha\}(k-v+1)} z^{k-v+1} \right) d\mu(x) \tag{3.16}$$

elde edilir. (3.16) için aynı metot uygulanırsa

$$\mathcal{f}^{(v-2)}(z) = \frac{p!}{(p-v+2)!} z^{p-v+2} + 2(\delta - \Delta)$$
$$\times \int_{|x|=1} \left(\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{x^{k-p}}{\{\rho + (k-v)\alpha\}(k-v+1)(k-v+2)} z^{k-v+2} \right) d\mu(x) \tag{3.17}$$

bulunur. (3.17) nin her iki tarafının $(v-2)$ defa integralinin alınması ve $\mathcal{f}^{(v)}(0) = 0$ $(v = 0, 1, 2, \dots, p-1)$ olduğunun gözönünde bulundurulması ile

$$\mathcal{f}(z) = z^p + 2(\delta - \Delta) \int_{|x|=1} \left(\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(k-v)!}{k!\,[\rho + (k-v)\alpha]} x^{k-p} z^k \right) d\mu(x) \tag{3.18}$$

sonucuna varılır. Bu Teorem 3.1.4 ün ispatını tamamlar.

Teorem 3.1.4 de $p = 1$ ve $v = 0$ seçilerek aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.1.5. Sonuç. Bir $f(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun $\mathcal{A}_1(\rho, \alpha, \Delta; 0)$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = z + 2(\rho + \alpha - \Delta) \int_{|x|=1} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\rho + k\alpha} x^{k-1} z^k \right) d\mu(x) \tag{3.19}$$

olmasıdır. Burada $\mu(x)$, $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$ kümesi üzerinde olasılık ölçümü ve $0 \leq \Delta < \rho + \alpha$ dır.

3.1.6. Sonuç. $f(z) \in \mathcal{A}_p(\rho, \alpha, \Delta; v)$ ise $\delta = \frac{p!(\rho+(p-v)\alpha)}{(p-v)!}$ için

$$|a_k| \leq \frac{2(\delta - \Delta)(k-v)!}{k!\,(\rho + (k-v)\alpha)} \quad (k \geq p+1), \tag{3.20}$$

dır. Eşitlik

$$f(z) = z^p + 2(\delta - \Delta) \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(k-v)!}{k!\,[\rho + (k-v)\alpha]} z^k \tag{3.21}$$

fonksiyonu için sağlanır.

3.1.7. Sonuç. $f(z) \in \mathcal{A}_p(\rho, \alpha, \Delta; v)$ ise $z \in \mathcal{U}$ ve $v = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ için

$$max\left\{0, \frac{p!}{(p-v)!}|z|^{p-v} - 2(\delta-\Delta)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho+(k+p-v)\alpha}|z|^{k+p-v}\right)\right\}$$

$$\leq \left|f^{(v)}(z)\right| \leq \frac{p!}{(p-v)!}|z|^{p-v} + 2(\delta-\Delta) \tag{3.22}$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho+(k+p-v)\alpha}|z|^{k+p-v}\right)$$

dır.

3.1.8. Teorem. Bir $\digamma(z) \in \mathcal{A}_p(\rho, \alpha, \Delta; v)$ fonksiyonu $0 \leq \Delta < p$ ve $0 \leq \Delta < \frac{p!(\rho+(p-v)\alpha)}{(p-v)!}$ için

$$r_0 = \inf_{k\geq p+1}\left(\frac{(k-2)!\,p(p-\mu)(\rho+(k-v)\alpha)}{(k-v)!\,2(\delta-\Delta)(k-\mu)}\right)^{\frac{1}{k-p}} \tag{3.23}$$

olmak üzere $|z| < r_0$ diskinde

$$\left|\frac{z\digamma'(z)}{\digamma(z)} - p\right| < p-\mu \tag{3.24}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu takdirde $\digamma(z)$, $|z| < r_0$ için μ mertebeli p-katlı yıldızıldır.

İspat. $\digamma \in \mathcal{A}_p(\rho, \alpha, \Delta; v)$ için

$$\begin{aligned}\left|\frac{z\digamma'(z)}{\digamma(z)} - p\right| &= \left|\frac{z\digamma'(z) - p\digamma(z)}{\digamma(z)}\right| \\ &= \left|\frac{\sum_{k=p+1}^{\infty}(k-p)a_k z^k}{z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k}\right| \\ &\leq \frac{\sum_{k=p+1}^{\infty}(k-p)|a_k||z|^k}{|z|^p - \sum_{k=p+1}^{\infty}|a_k||z|^k} \\ &= \frac{\sum_{k=p+1}^{\infty}(k-p)|a_k||z|^{k-p}}{1 - \sum_{k=p+1}^{\infty}|a_k||z|^{k-p}}\end{aligned} \tag{3.25}$$

dır. Şimdi

$$\sum_{k=p+1}^{\infty}(k-\mu)\,|a_k||z|^{k-p} < p-\mu \tag{3.26}$$

ise yani Sonuç 3.1.6 dan

$$\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{2(\delta-\Delta)(k-\mu)(k-v)!}{k!\{\rho+(k-v)\alpha\}}|z|^{k-p} < p-\mu \tag{3.27}$$

ise

$$\frac{\sum_{k=p+1}^{\infty}(k-p)|a_k||z|^{k-p}}{1-\sum_{k=p+1}^{\infty}|a_k||z|^{k-p}} < p-\mu. \tag{3.28}$$

olur. Ayrıca

$$p-\mu = p(p-\mu)\sum_{k=p+1}^{\infty}1/k(k-1) \tag{3.29}$$

olduğu dikkate alınırsa (3.28) eşitsizliği

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{2(\delta-\Delta)(k-\mu)(k-v)!}{k!\{\rho+(k-v)\alpha\}}|z|^{k-p} < p(p-\mu)\sum_{k=p+1}^{\infty} 1/k(k-1) \tag{3.30}$$

biçimde olur. Böylece bütün $k \geq p+1$ için

$$|z|^{k-p} < \frac{(k-2)!\,p(p-\mu)\{\rho+(k-v)\alpha\}}{(k-v)!\,2(\delta-\Delta)(k-\mu)} \tag{3.31}$$

ise

$$\left|\frac{z\not{f}'(z)}{\not{f}(z)} - p\right| < p-\mu \tag{3.32}$$

olur. Böylece

$$|z| < \inf_{k\geq p+1}\left(\frac{(k-2)!\,p(p-\mu)(\rho+(k-v)\alpha)}{(k-v)!\,2(\delta-\Delta)(k-\mu)}\right)^{\frac{1}{k-p}} \tag{3.33}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.8 de $p=1$ ve $v=0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.1.9. Sonuç. $\not{f}(z) \in \mathcal{A}_1(\rho,\alpha,\Delta;0)$ ise $0 \leq \mu < 1$ ve $0 \leq \Delta < \rho+\alpha$ olmak üzere

$$|z| < \inf_{k\geq 2}\left(\frac{(\rho+k\alpha)(1-\mu)}{2k(k-1)(k-\mu)(\rho+\alpha-\Delta)}\right)^{1/(k-1)} \tag{3.34}$$

için

$$\left|\frac{z\not{f}'(z)}{\not{f}(z)}-1\right|<1-\mu \tag{3.35}$$

dir.

3.1.10. Teorem. $v=0,1,2,3,\dots,p-1$ için $\not{f}(z)\in A_p(\rho,\alpha,\Delta;v+1)$ ise $0<\alpha<\rho$ ve $0\le\Delta<p!\frac{[\rho+(p-v-1)\alpha]}{(p-v-1)!}$ için

$$\not{f}(z)\in\mathcal{A}_p\left(\rho-\alpha,\alpha,\frac{1+4\Delta}{4(p-v)};v\right) \tag{3.36}$$

dir.

İspat. $\not{f}(z)\in\mathcal{A}_p(\rho,\alpha,\Delta;v+1)$ ve $A=\frac{1}{2}+\frac{(1+4\Delta)}{4(p-v)}$ için $\mathfrak{w}(z)\neq 1$ fonksiyonu

$$(\rho-\alpha)\frac{\not{f}^{(v)}(z)}{z^{p-v}}+\alpha\frac{\not{f}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}=\frac{\mathfrak{w}(z)}{1-\mathfrak{w}(z)}+A \tag{3.37}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde

$$(\rho-\alpha)\not{f}^{(v)}(z)+\alpha z\not{f}^{(v+1)}(z)=\frac{z^{p-v}\mathfrak{w}(z)}{1-\mathfrak{w}(z)}+Az^{p-v} \tag{3.38}$$

elde edilir. (3.38) den

$$\rho\not{f}^{(v+1)}(z)+\alpha z\not{f}^{(v+2)}(z) = (p-v)Az^{p-v-1}+\frac{(p-v)z^{p-v-1}\mathfrak{w}(z)}{1-\mathfrak{w}(z)}+\frac{z^{p-v}\mathfrak{w}'(z)}{\left(1-\mathfrak{w}(z)\right)^2} \tag{3.39}$$

veya

$$\rho\frac{\digamma^{(v+1)}(z)}{z^{p-1-v}}+\alpha\frac{\digamma^{(v+2)}(z)}{z^{p-2-v}}=(p-v)A+\frac{(p-v)\mathfrak{w}(z)}{1-\mathfrak{w}(z)}+\frac{z\mathfrak{w}'(z)}{\left(1-\mathfrak{w}(z)\right)^2} \tag{3.40}$$

elde edilir. Böylece $\digamma(z)\in\mathcal{A}_p(\rho,\alpha,\Delta;v+1)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned}Re\left\{\rho\frac{\digamma^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}+\alpha\frac{\digamma^{(v+2)}(z)}{z^{p-v-1}}\right\}&\\ =(p-v)A+(p-v)Re\left(\frac{\mathfrak{w}(z)}{1-\mathfrak{w}(z)}\right)+Re\left\{\frac{z\mathfrak{w}'(z)}{(1-\mathfrak{w}(z))^2}\right\}&\\ >\Delta&\end{aligned} \tag{3.41}$$

eşitsizliğini $z\in\mathcal{U}$ için sağlar. $\mathfrak{w}(z)$, $\mathfrak{w}(0)=0$ ve $\mathcal{U}$ da analitik olduğundan

$$\max_{|z|\le|z_0|}|\mathfrak{w}(z)|=|\mathfrak{w}(z_0)|=1 \tag{3.42}$$

olacak şekilde $z_0\in\mathcal{U}$ varsa Lemma 2.11 den

$$\mathfrak{w}(z_0)=e^{i\theta},z_0\mathfrak{w}'(z_0)=m\mathfrak{w}(z_0)=me^{i\theta}\ (m\ge1) \tag{3.43}$$

dir. Bu özellikteki bir $z_0\in\mathcal{U}$ için

$$\begin{aligned}&Re\left\{\rho\frac{\digamma^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}+\alpha\frac{\digamma^{(v+2)}(z)}{z^{p-v-1}}\right\}\\ &=(p-v)A+(p-v)Re\left(\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)+Re\left\{\frac{me^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})^2}\right\}\\ &=(p-v)A-\frac{1}{2}(p-v)+\frac{m}{2}\frac{1}{\cos\theta-1}\\ &\le(p-v)A-\frac{1}{2}(p-v)+\frac{1}{2(\cos\theta-1)}\\ &\le(p-v)A-\frac{1}{2}(p-v)-\frac{1}{4}\\ &=(p-v)\left[\frac{1}{2}+\frac{1+4\Delta}{4(p-v)}\right]-\frac{1}{2}(p-v)-\frac{1}{4}=\Delta\end{aligned} \tag{3.44}$$

olur ki bu (3.41) eşitsizliği ile çelişir. Bu nedenle $|\mathfrak{w}(z_0)| = 1$ olacak şekilde bir $z_0 \in \mathcal{U}$ yoktur. Dolayısıyla bütün $z \in \mathcal{U}$ noktaları için $|\mathfrak{w}(z)| < 1$ dir.
$|\mathfrak{w}(z)| < 1$ için

$$Re\big(\mathfrak{w}(z)/\big(1-\mathfrak{w}(z)\big)\big) > -1\ /2\ \ (z \in \mathcal{U}) \tag{3.45}$$

olduğundan

$$Re\left\{(\rho-\alpha)\frac{\not{f}^{(v)}(z)}{z^{p-v}} + \alpha\frac{\not{f}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}\right\} > -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1+4\Delta}{4(p-v)} = \frac{1+4\Delta}{4(p-v)} \tag{3.46}$$

olur ki bu da $\not{f}(z) \in \mathcal{A}_p\left(\rho-\alpha, \alpha, \frac{1+4\Delta}{4(p-v)}; v\right)$ olduğunu gösterir.
Teorem 3.1.10 da $p = 1$ ve $v = 0$ için aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.1.11. Sonuç. $0 < \alpha < \rho$ ve $0 \le \Delta < \rho$ için $\not{f}(z) \in \mathcal{A}_1(\rho, \alpha, \Delta; 1)$ ise

$$\not{f}(z) \in \mathcal{A}_1\left(\rho-\alpha, \alpha, \frac{1+4\Delta}{4}; 0\right) \tag{3.47}$$

dır.

4. BULGULAR

Bu bölümde $\mathcal{B}_p(\rho,\alpha,\Delta;v)$ sınıfı için ekstrem noktalar ve kesin katsayı sınırları belirlenecektir. Bu önemli sonuçlar, $\mathcal{B}_p(\rho,\alpha,\Delta;v)$ için distorsiyon ve büyüme tahminleri, $\mathcal{B}_p(\rho,\alpha,\Delta;v)$ ye etki eden yardımcı lineer operatörler için sınırlar gibi, yıldızıllık koşulunu belirlemeye yarayan önemli bilgilerin elde edilmesini sağlar.

4.1. $\mathcal{B}_p(\rho,\alpha,\Delta;v)$ Sınıfı ve Ekstrem Noktaları

4.1.1. Tanım. $v=0,1,2,\dots,p-1$ olmak üzere $\rho>0,\alpha>0,0\le\Delta<\frac{p!\{\rho+(p-v)\alpha\}}{(p-v)!}$ için

$$Re\left\{\rho\frac{f^{(v)}(z)}{z^{p-v}}+\alpha\frac{f^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}+\left(\frac{\alpha-\rho}{2}\right)\frac{f^{(v+2)}(z)}{z^{p-v-2}}\right\}>\Delta\quad(z\in\mathcal{U}) \tag{4.1}$$

eşitsizliğini sağlayan $f\in\mathcal{A}_p$ fonksiyonlarının oluşturduğu alt sınıfa $\mathcal{B}_p(\rho,\alpha,\Delta;v)$ sınıfı denir (Refai, 2019).

4.1.2. Lemma.

i. $f(z)\in\mathcal{B}_p(v,v+2,\Delta;v)\Leftrightarrow zf'(z)\in\mathcal{B}_p(1,1,\Delta;v)$

dır.

ii. $f(z)\in\mathcal{B}_p(1,2,\Delta;1)\Leftrightarrow zf'(z)\in\mathcal{B}_p(0,1,\Delta;0)$

dır.

İspat. $\digamma(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k$ olsun. O halde

$$\digamma^{(v)}(z) = \frac{p!}{(p-v)!} z^{p-v} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{k!}{(k-v)!} a_k z^{k-v} \tag{4.2}$$

dır. (4.2) eşitliği kullanılarak

$$z\digamma'(z) \in \mathcal{B}_p(1,1,\Delta;v) \Leftrightarrow Re\left\{\frac{p!\,p(p-v)}{(p-v)!} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{k!\,k(k-v+1)}{(k-v)!} a_k z^{k-p}\right\} > \Delta$$

$$\Leftrightarrow \digamma(z) \in \mathcal{B}_p(v, v+2, \Delta; v)$$

dır. Böylece (i) nin ispatı tamamlanır.

$$\digamma(z) \in \mathcal{B}_p(1,2,\Delta;1) \Leftrightarrow Re\left\{\frac{\digamma'(z)}{z^{p-1}} + 2\frac{\digamma''(z)}{z^{p-2}} + \frac{\digamma'''(z)}{2z^{p-3}}\right\} > \Delta$$

$$\Leftrightarrow z\digamma'(z) \in \mathcal{B}_p(0,1,\Delta;0)$$

dır. Böylece (ii) nin ispatı tamamlanır.

4.1.3. Teorem. $\digamma \in A_p$ fonksiyonunun $\mathcal{B}_p(\rho,\alpha,\Delta;v)$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart $\sigma = p!\left\{\frac{\rho+(p-v)\alpha+(p-v)(p-v-1)(\alpha-\rho)/2}{(p-v)!}\right\}$ ve $\mu(x)$, $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{C}: |x| = 1\}$ üzerinde olasılık ölçümü olmak üzere $\digamma$ nin

$$\digamma(z) = z^p + 4(\sigma - \Delta)\int_{|x|=1}\left(\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(k-v)!x^{k-p}z^k}{k!(k-v+1)\{(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho\}}\right)d\mu(x) \tag{4.3}$$

şeklinde olmasıdır.

İspat. $\sigma = p!\left\{\frac{\rho+(p-v)\alpha+(p-v)(p-v-1)(\alpha-\rho)/2}{(p-v)!}\right\}$ olmak üzere

$$\mathrm{F}(z) = \frac{\rho\frac{f^{(v)}(z)}{z^{p-v}} + \alpha\frac{f^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}} + (\alpha-\rho)\frac{f^{(v+2)}(z)}{2z^{p-v-2}} - \Delta}{\sigma - \Delta}$$

fonksiyonu tanımlansın. $\mathrm{F}(0) = 1$ ve $Re\mathrm{F}(z) > 0$ olduğundan $\mathrm{F}(z)$ için

$$\mathrm{F}(z) = \int_{|x|=1} \frac{1+xz}{1-xz} d\mu(x) \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.4) eşitliği

$$\rho f^{(v)}(z) + \alpha f^{(v+1)}(z) + \frac{1}{2}(\alpha-\rho)z^2 f^{(v+2)}(z) = \Delta z^{p-v} + (\sigma-\Delta)z^{p-v}\int_{|x|=1}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2x^k z^k\right) d\mu(x)$$

ifadesine denk olduğundan $\alpha \neq \rho$ için

$$\frac{2\rho}{\alpha-\rho}\left(zf^{(v)}(z)\right)' + \left(z^2 f^{(v+1)}(z)\right)' = \frac{2}{\alpha-\rho}\left\{\sigma z^{p-v} + 2(\sigma-\Delta)\int_{|x|=1}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k z^{k+p-v}\right) d\mu(x)\right\}' \tag{4.5}$$

dir. (4.5) eşitliğinin sağ ve sol tarafının 0 dan z ye integrali alınarak

$$\frac{2\rho}{\alpha-\rho}z\not{f}^{(v)}(z)+z^2\not{f}^{(v+1)}(z)$$
$$=\frac{2}{\alpha-\rho}\left\{\frac{\sigma z^{p-v+1}}{p-v+1}\right.$$
$$\left.+2(\sigma-\Delta)\int_{|x|=1}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k z^{k+p-v+1}}{k+p-v+1}\right)d\mu(x)\right\} \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) eşitliğinin sağ ve sol tarafı $z^{\frac{2\rho}{\alpha-\rho}-2}$ ile çarpılarak

$$\left(z^{\frac{2\rho}{\alpha-\rho}}\left[\not{f}^{(v)}(z)-\frac{p!}{(p-v)!}z^{p-v}\right]\right)'=\frac{4(\sigma-\Delta)}{\alpha-\rho}\int_{|x|=1}\frac{x^k z^{\frac{2\rho}{\alpha-\rho}+k+p-v-1}}{k+p-v+1}d\mu(x) \tag{4.7}$$

bulunur. $\frac{2\rho}{\alpha-\rho}+p-v+1>0$ ise (4.7) nin 0 dan z ye integrali alınırsa

$$\not{f}^{(v)}(z)=\frac{p!}{(p-v)!}z^{p-v}$$
$$+\int_{|x|=1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(\sigma-\Delta)x^k z^{k+p-v}}{(k+p-v+1)\{(\alpha-\rho)(k+p-v)+2\rho\}}d\mu(x) \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.8) in sağ ve sol tarafının integrali alınırsa

$$\not{f}^{(v-1)}(z)-\not{f}^{(v-1)}(0)=\frac{p!}{(p-v+1)!}z^{p-v+1}$$
$$+4(\sigma-\Delta)\int_{|x|=1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k z^{k+p-v+1}}{(k+p-v+1)^2\{(\alpha-\rho)(k+p-v)+2\rho\}}\right)d\mu(x) \tag{4.9}$$

elde edilir. Böylece

$$\not{f}^{(v-1)}(z) = \frac{p!}{(p-v+1)!} z^{p-v+1} + \int_{|x|=1} \left(\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{4(\sigma-\Delta) x^{k-p} z^{k-v+1}}{(k-v+1)^2 \{(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho\}} d\mu(x) \right) \tag{4.10}$$

olur. (4.10) için aynı metot uygulanırsa

$$\not{f}^{(v-2)}(z) = \frac{p!}{(p-v+2)!} z^{p-v+2} + 4(\sigma-\Delta) \times \int_{|x|=1} \left(\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{x^{k-p} z^{k-v+2}}{(k-v+1)^2 (k-v+2) \{(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho\}} \right) d\mu(x) \tag{4.11}$$

elde edilir.

$\not{f}^{(p)}(0) = p!$ ve $v = 0, 1, \ldots, p-1$ için $\not{f}^{(v)}(0) = 0$ olduğundan (4.11) eşitliğinin her iki tarafının $(v-2)$ defa integrali alınarak (4.3) bulunur. $\alpha = \rho = 1$ ise $v = 0, 1, \ldots, p$ için $\mathcal{B}_p(1, 1, \Delta; v)$ ye eşit olan $\mathcal{A}_p(1, 1, \Delta; v)$ sınıfı için verilen

$$\not{f}(z) = z^p + 2\left(\frac{p!\,(p-v+1)}{(p-v)!} - \Delta \right) \times \int_{|x|=1} \left(\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(k-v)!}{k!\,(k-v+1)} x^{k-p} z^k \right) d\mu(x) \tag{4.12}$$

fonksiyonu elde edilir. Bu, Teorem 4.1.3 ün ispatını tamamlar.

4.1.4. Uyarı. Teorem 4.1.3 aşağıda verilen özel durumları üretir.

a. (4.3) de $\rho = \alpha = p = v = 1$ ise (Silverman, 1994, Teorem 1) de elde edilen bir sonuç olan $\not{f}(z) = \int_{|x|=1} \left[\int_0^z \left(\frac{(2\Delta-1)t + 2(\alpha-1)\bar{x}\log(1-xt)}{t} \right) dt \right] d\mu(t)$ elde edilir.

b. (4.3) de de $\rho = \alpha = 1$ ve $v = 0$ ise (Wang vd., 2006, Teorem 2.1) de verilen sonuç elde edilir.

c. (4.3) de $\rho = 0, \alpha = 1, p = 1$ ve $v = 0$ ise (Gao vd., 2007, Teorem 1) de verilen $\mathcal{f}(z) = z + 4(1-\Delta)\int_{|x|=1}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^{k-1}z^k}{k(k+1)}\right)d\mu(x)$ elde edilir.

4.1.5. Sonuç. $\mathcal{B}_p(\rho, \alpha, \Delta; v)$ sınıfının ekstrem noktaları

$$\mathcal{f}_x(z) = z^p + 4(\sigma-\Delta)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(k-v)!x^{k-p}z^k}{k!(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]}, (|x|=1) \tag{4.13}$$

fonksiyonlarıdır.

İspat. $\mathcal{f}_x(z)$ notasyonu kullanılarak (4.3)

$$\mathcal{f}_\mu(z) = \int_{|x|=1}\mathcal{f}_x(z)d\mu(x)$$

olarak yazılabilir.

Teorem 4.1.3 den $\mu \longrightarrow \mathcal{f}_\mu$ dönüşümü bire birdir, dolayısıyla iddia edilen eşitlik yazılabilir.

Teorem 4.1.3 de $p = 1$ ve $v = 0$ alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.1.6. Sonuç. Bir $\mathcal{f} \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun $\mathcal{B}_1(\rho, \alpha, \Delta; 0)$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart $\mu(x)$, $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{C}: |x| = 1\}$ üzerinde olasılık ölçümü ve $\Delta < \rho + \alpha$ olmak üzere

$$\mathcal{f}(z) = z + 4(\rho+\alpha-\Delta)\int_{|x|=1}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^{k-1}z^k}{(k+1)[(\alpha-\rho)k+2\rho]}\right)d\mu(x) \tag{4.14}$$

olmasıdır.

Teorem 4.1.3 de $p = 1$ ve $v = 1$ alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.1.7. Sonuç. $\not{f} \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun $\mathcal{B}_1(\rho, \alpha, \Delta; 1)$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart $\mu(x)$, $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{C}: |x| = 1\}$ üzerinde olasılık ölçümü ve $\Delta < \rho$ olmak üzere

$$\not{f}(z) = z + 4(\alpha - \Delta) \int_{|x|=1} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1} z^k}{k^2[(\alpha - \rho)(k-1) + 2\rho]} \right) d\mu(x) \qquad (4.15)$$

olmasıdır.

4.1.8. Sonuç. $f \in \mathcal{B}_p(\rho, \alpha, \Delta; v)$ ise $k \geq p + 1$ için

$$|a_k| \leq \frac{4(\sigma - \Delta)(k-v)!}{k!\,(k-v+1)[(\alpha - \rho)(k-v) + 2\rho]}$$

dir. Burada $\sigma = \frac{p!\left[\rho + (p-v)\alpha + \frac{(p-v)(p-v-1)(\alpha-\rho)}{2}\right]}{(p-v)!}$ dir.

Sonuç kesindir, eşitlik (4.13) ile verilen fonksiyon için sağlanır.

4.1.9. Uyarı. $\rho = \alpha = p = v = 1$ için Sonuç 4.1.8 (Silverman, 1994) de verilen katsayı sınırlarını verir.

4.1.10. Sonuç. $\not{f} \in \mathcal{B}_p(\rho, \alpha, \Delta; v)$ ve $z \in \mathcal{U}$ ise

$$max\left\{0, \frac{p!\,|z|^{p-v}}{(p-v)!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(\sigma - \Delta)|z|^{k+p-v}}{(k+p-v+1)[(\alpha - \rho)(k+p-v) + 2\rho]}\right\} \leq \left|f^{(v)}(z)\right|$$
$$\leq \frac{p!\,|z|^{p-v}}{(p-v)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(\sigma - \Delta)|z|^{k+p-v}}{(k+p-v+1)[(\alpha - \rho)(k+p-v) + 2\rho]}$$

dır.

Sonuç 4.1.10 da $p = 1, \alpha = 3, \rho = 1$ alınır ve $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ olduğu kullanılarak sırasıyla $v = 0$ ve $v = 1$ için aşağıdaki iki sonuç elde edilir.

4.1.11. Uyarı.

$$Re\left\{\frac{f(z)}{z} + 3f'(z) + zf''(z)\right\} > \Delta, \qquad (\Delta < 4, z \in \mathcal{U})$$

ise

$$|f(z)| < 1 + (4 - \Delta)\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{2}\right), \qquad (z \in \mathcal{U})$$

dir.

4.1.12. Uyarı.

$$Re\{f'(z) + 3zf''(z) + z^2 f'''(z)\} > \Delta, \qquad (\Delta < 1, z \in \mathcal{U})$$

ise

$$|f'(z)| < 1 + (1 - \Delta)\left(\frac{\pi^2}{3} - 2\right), \qquad (z \in \mathcal{U})$$

dir.

4.2. $\mathcal{B}_p(\rho,\alpha,\Delta;v)$ Sınıfına Etki Eden Yardımcı Lineer Operatörler İçin Sınırlar

Bu bölümde $\frac{\digamma^{(v)}(z)}{z^{p-v}}, \frac{\digamma^{(v-1)}(z)}{z^{p-v+1}}, \frac{\digamma^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}$ lineer operatörlerinin reel kısımları için kesin sınırlar verildi. Bu sınırlar $\mathcal{B}_p(\rho,\alpha,\Delta;v)$ sınıfındaki p-katlı yıldızıl fonksiyonları belirlemede ve ünivalentlik kriterini bulmada önemli rol oynamaktadır.

4.2.1. Teorem. $\digamma \in \mathcal{B}_p(\rho,\alpha,\Delta;v)$ ve $|z| \le r$ ise $v = 0,1,\dots,p$ olmak üzere

$$Re\left\{\frac{\digamma^{(v)}(z)}{z^{p-v}}\right\} \ge \frac{p!}{(p-v)!} + 4(\sigma-\Delta)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(-r)^{k-p}}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]} > \frac{p!}{(p-v)!} + \sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{4(\sigma-\Delta)(-1)^{k-p}}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]} \tag{4.16}$$

ve

$$Re\left\{\frac{\digamma^{(v)}(z)}{z^{p-v}}\right\} \le \frac{p!}{(p-v)!} + 4(\sigma-\Delta)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{r^{k-p}}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]} < \frac{p!}{(p-v)!} + 4(\sigma-\Delta)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{1}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]}$$

dır. Eşitsizliklerin her ikisi de kesindir.

İspat.

$$g(z) = z^p + 4(\sigma-\Delta)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(k-v)!}{k!\,(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]}z^k \tag{4.17}$$

ekstrem noktasını dikkate almak yeterlidir.

Durum 1: $p+1-v+\frac{2\rho}{\alpha-\rho} > 0$ ise (4.8) den

$$\frac{g^{(v)}(z)}{z^{p-v}} = \frac{p!}{(p-v)!} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{4(\sigma-\Delta)z^{k-p}}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]}$$
$$= \frac{p!}{(p-v)!} + \frac{4(\sigma-\Delta)}{\alpha-\rho} \int_0^1 \int_0^1 s^{p+1-v} t^{\frac{2\rho}{\alpha-\rho}+p-v} \frac{z}{1-stz} ds\, dt \tag{4.18}$$

dir. Bu takdirde

$$Re\left\{\frac{g^{(v)}(z)}{z^{p-v}}\right\} = \frac{p!}{(p-v)!}$$
$$+ \frac{4(\sigma-\Delta)}{\alpha-\rho} \int_0^1 \int_0^1 s^{p+1-v} t^{\frac{2\rho}{\alpha-\rho}+p-v} Re\left\{\frac{z}{1-stz}\right\} ds\, dt \tag{4.19}$$

dır. $k(z) = \frac{z}{1-\beta z}$, $0 \le \beta \le 1$, $\mathcal{U}$ da konveks, $k(\bar{z}) = \overline{k(z)}$ ve $k(z)$ reel ekseni reel eksene dönüştürdüğünden

$$\frac{-r}{1+\beta r} \le Re\left\{\frac{z}{1-\beta z}\right\} \le \frac{r}{1-\beta r}, (|z| \le r) \tag{4.20}$$

elde edilir. Ayrıca (4.20) in (4.19) a uygulanması ve integralin bir kuvvet serisine genişletilmesi ile

$$Re\left\{\frac{g^{(v)}(z)}{z^{p-v}}\right\} = \frac{p!}{(p-v)!}$$
$$+ \frac{4(\sigma-\Delta)}{\alpha-\rho} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=p+1}^{\infty} s^{k-v} t^{\frac{2\rho}{\alpha-\rho}+k-v-1} (-r)^{k-p}\, ds\, dt \tag{4.21}$$

elde edilir. İntegrallerin hesaplanmasıyla

$$Re\left\{\frac{g^{(v)}(z)}{z^{p-v}}\right\} \ge \frac{p!}{(p-v)!} + 4(\sigma-\Delta) \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(-r)^{k-p}}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]}$$
$$> \frac{p!}{(p-v)!} 4(\sigma-\Delta) \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-p}}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]}$$

bulunur. Diğer yandan (4.20) kullanılarak

$$Re\left\{\frac{\mathcal{g}^{(v)}(z)}{z^{p-v}}\right\} \leq \frac{p!}{(p-v)!} + 4(\sigma-\Delta)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{r^{k-p}}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]}$$
$$< \frac{p!}{(p-v)!} + 4(\sigma-\Delta)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{1}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]}$$

elde edilir. Kesinlik (4.17) den elde edilir.

Durum 2: $\rho = \alpha = 1$ ise

$$\mathcal{h}(z) = z^p + 2\left(\frac{p!\,(p-v+1)}{(p-v)!} - \Delta\right)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(k-v)!}{k!\,(k-v+1)}z^k \tag{4.22}$$

ekstrem noktası gözönüne alınsın. $\mathcal{h}(z)$ fonksiyonu için $\mathcal{g}(z)$ ye benzer teknik uygulanırsa

$$Re\left\{\frac{\mathcal{h}^{(v)}(z)}{z^{p-v}}\right\} \geq \frac{p!}{(p-v)!} + 2\left(\frac{p!\,(p-v+1)}{(p-v)!} - \Delta\right)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(-r)^{k-p}}{k-v+1}$$
$$> \frac{p!}{(p-v)!} + 2\left(\frac{p!\,(p-v+1)}{(p-v)!} - \Delta\right)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-p}}{k-v+1}$$

ve

$$Re\left\{\frac{\mathcal{h}^{(v)}(z)}{z^{p-v}}\right\} \leq \frac{p!}{(p-v)!} + 2\left(\frac{p!\,(p-v+1)}{(p-v)!} - \Delta\right)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{r^{k-p}}{k-v+1}$$
$$< \frac{p!}{(p-v)!} + 2\left(\frac{p!\,(p-v+1)}{(p-v)!} - \Delta\right)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{1^{k-p}}{k-v+1}$$

elde edilir. Eşitsizliklerin kesin olduğu (4.22) den görülür. Bu, Teorem 4.2.1 in ispatını tamamlar.

4.2.2. Uyarı. Teorem 4.2.1 de $\rho = \alpha = 1$ ise (Shi ve Wang., 2014, Lemma 5) deki sonuç elde edilir.

4.2.3. Sonuç. $\mathfrak{f} \in \mathcal{B}_1(1,1,\Delta;1)$ ise

$$Re\{\mathfrak{f}'(z)\} > 1 + 2(1-\Delta)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = (1-\Delta)(2\ln 2 - 1) + \Delta$$

dır (Ali, 1994), (Gao, 1992), (Gao ve Zhau, 2007), (Silverman, 1994).

4.2.4. Sonuç. $\Delta \geq \Delta_0$ için $\mathcal{B}_1(\rho,\alpha,\Delta;1) \subset \mathcal{S}$ dir. Burada

$$\Delta_0 = \rho + \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{[(\alpha-\rho)k+2\rho](k+1)}\right)^{-1} \tag{4.23}$$

dır. Bu sonuç $\Delta < \Delta_0$ için sağlanmaz.

İspat. $f \in \mathcal{B}_1(\rho,\alpha,\Delta;1)$ olsun. (4.16) eşitsizliği gereği

$$\begin{aligned} Re\{\mathfrak{f}'(z)\} &> 1 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{4(\rho-\Delta)(-1)^{k-1}}{k[(\alpha-\rho)(k-1)+2\rho]} \\ &= 1 + 4(\rho-\Delta)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{[(\alpha-\rho)k+2\rho](k+1)} \geq 0 \end{aligned}$$

olduğundan $\mathfrak{f} \in \mathcal{S}$ dir yani, $\Delta \geq \Delta_0$ ise $\mathcal{B}_1(\rho,\alpha,\Delta;1) \subset \mathcal{S}$ dir. $\Delta = \Delta_0$ da $\mathfrak{g}'(-1) = 0$ olduğundan sonuç $\Delta < \Delta_0$ için sağlanmaz. Böylece $\Delta < \Delta_0$ iken belli bir $r = r(\Delta) < 1$ için $\mathfrak{g}'(-r) = 0$ olur.

4.2.5. Örnek.

i. $\Delta \geq (6-\pi^2)/(12-\pi^2)$ için $\mathcal{B}_1(1,3,\Delta;1) \subset \mathcal{S}$ dır. Gerçekten

$$\Delta_0 = 1+\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)(2k+2)}\right)^{-1} = 1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\right)^{-1}$$

ve

$$\frac{\pi^2}{12} = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$$

olduğundan

$$\Delta_0 = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{12}-1\right)^{-1} = \frac{6-\pi^2}{12-\pi^2}$$

dır.

ii. $\Delta \geq \frac{1}{4-8\,ln\,2}$ için $\mathcal{B}_1(0,1,\Delta;1) \subset \mathcal{S}$ dır. Gerçekten

$$\Delta_0 = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(k+1)}\right)^{-1} = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{4}[-\ln 2-(\ln 2-1)]^{-1} = \frac{1}{4}(1-2\ln 2)^{-1} = \frac{1}{4-8\ln 2}$$

dır.

4.2.6. Teorem. $f(z) \in \mathcal{B}_p(\rho,\alpha,\Delta;\ v)$ ve $|z| \leq r$ ise $v = 0,\ldots,p$ için

$$Re\left\{\frac{f^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}\right\} \geq \frac{p!}{(p-v-1)!} + 4(\sigma-\Delta)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(k-v)(-r)^{k-p}}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]} \tag{4.24}$$

$$> \frac{p!}{(p-v-1)!} + \sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{4(\sigma-\Delta)(k-v)(-1)^{k-p}}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]}$$

ve

$$Re\left\{\frac{f^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}\right\} \leq \frac{p!}{(p-v-1)!} + 4(\sigma-\Delta)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(k-v)r^{k-p}}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]} < \frac{p!}{(p-v-1)!} + 4(\sigma-\Delta)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{k-v}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]} \tag{4.25}$$

dir. Bu eşitsizliklerin her ikisi de kesindir.

İspat. (4.17) de tanımlanan $g(z)$ ekstrem noktasını dikkate almak yeterlidir.

Durum 1: $p+1-v+\frac{2\rho}{\alpha-\rho} > 0$ ise (4.8) eşitliğinden

$$\frac{g^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}} = \frac{p!}{(p-v-1)!} + \sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{4(\sigma-\Delta)(k-v)z^{k-p}}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]} = \frac{p!}{(p-v-1)!} + \frac{4(\sigma-\Delta)}{\alpha-\rho}\frac{d}{du}\left(\int_0^1\int_0^1 (us)^{p+1-v}t^{\frac{2\rho}{\alpha-\rho}+p-v}\frac{z}{1-stuz}\,ds\,dt\right)_{u=1} \tag{4.26}$$

elde edilir. Böylece

$$Re\left\{\frac{g^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}\right\} = \frac{p!}{(p-v-1)!} + \frac{4(\sigma-\Delta)}{\alpha-\rho}\frac{d}{du}\left(\int_0^1\int_0^1 (us)^{p+1-v}t^{\frac{2\rho}{\alpha-\rho}+p-v}Re\left\{\frac{z}{1-stuz}\right\}ds\,dt\right)_{u=1} \tag{4.27}$$

olur. Ayrıca (4.20) eşitsizliğinin (4.27) ye uygulanması ve integrantın bir kuvvet serisine genişletilmesi ile

$$
\begin{aligned}
&Re\left\{\frac{\mathcal{g}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}\right\} \\
&= \frac{p!}{(p-v-1)!} \\
&+ \frac{4(\sigma-\Delta)}{\alpha-\rho}\frac{d}{du}\left(\int_0^1\int_0^1 \sum_{k=p+1}^{\infty} (us)^{k-v} t^{\frac{2\rho}{\alpha-\rho}+k-v-1}(-r)^{k-p}\, ds\, dt\right)_{u=1}
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
Re\left\{\frac{\mathcal{g}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}\right\} &\geq \frac{p!}{(p-v-1)!} + 4(\sigma-\Delta)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(k-v)(-r)^{k-p}}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]} \\
&> \frac{p!}{(p-v-1)!} + 4(\sigma-\Delta)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(k-v)(-1)^{k-p}}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer yandan (4.20) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
Re\left\{\frac{\mathcal{g}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}\right\} &\leq \frac{p!}{(p-v-1)!} + 4(\sigma-\Delta)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(k-v)r^{k-p}}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]} \\
&< \frac{p!}{(p-v-1)!} + 4(\sigma-\Delta)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{k-v}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]}
\end{aligned}
$$

bulunur. Kesinlik (4.17) den görülür.

Durum 2: $\rho=\alpha=1$ ise (4.22) de tanımlanan $\mathcal{h}(z)$ ekstrem fonksiyonu için $\mathcal{g}(z)$ ye uygulanan benzer teknik uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
Re\left\{\frac{\mathcal{h}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}\right\} &\geq \frac{p!}{(p-v-1)!} + 2\left(\frac{p!\,(p-v+1)}{(p-v)!}-\Delta\right)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(k-v)(-r)^{k-p}}{k-v+1} \\
&> \frac{p!}{(p-v-1)!} + 2\left(\frac{p!\,(p-v+1)}{(p-v)!}-\Delta\right)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(k-v)(-1)^{k-p}}{k-v+1}
\end{aligned}
$$

ve

$$Re\left\{\frac{\hbar^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}\right\} \leq \frac{p!}{(p-v-1)!} + 2\left(\frac{p!\,(p-v+1)}{(p-v)!} - \frac{\Delta}{\rho}\right)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(k-v)r^{k-p}}{k-v+1}$$

$$< \frac{p!}{(p-v-1)!} + 2\left(\frac{p!\,(p-v+1)}{(p-v)!} - \frac{\Delta}{\rho}\right)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{k-v}{k-v+1}$$

elde edilir. Kesinlik (4.22) den görülür. Bu, Teorem 4.2.6 nın ispatını tamamlar.

4.2.7. Sonuç. $\Delta \geq \Delta_1$ için $\mathcal{B}_1(\rho, \alpha, \Delta; 0) \subset \mathcal{S}$ dir. Burada

$$\Delta_1 = \rho + \alpha + \frac{1}{4}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}k}{(k+1)\{(\alpha-\rho)k+2\rho\}}\right)^{-1} \tag{4.29}$$

Bu sonuç $\Delta < \Delta_1$ için sağlanmaz.

İspat. $\hbar \in \mathcal{B}_1(\rho, \alpha, \Delta;\ 0)$ olsun. (4.24) eşitsizliğinden

$$1 + 4(\alpha + \rho - \Delta)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}k}{(k+1)\{(\alpha-\rho)k+2\rho\}} \geq 0$$

ise $\hbar \in \mathcal{S}$ dir. Yani $\Delta \geq \Delta_1$ ise $\mathcal{B}_1(\rho, \alpha, \Delta;\ 0) \subset \mathcal{S}$ dir. $\Delta = \Delta_1$ de $g'(-1) = 0$ olduğundan sonuç $\Delta < \Delta_1$ için sağlanmaz. Böylece $\Delta < \Delta_1$ iken bir $r = r(\Delta) < 1$ için $g'(-r) = 0$ olur.

4.2.8. Örnek.

i. $\Delta \geq \frac{2}{1-4\ln 2} \approx -1.1283$ için $\mathcal{B}_1(-1, 1, \Delta;\ 0) \subset \mathcal{S}$ dir.

ii. $\Delta \geq \frac{3-4\ln 2}{2-4\,ln\,2} \approx -0.295$ için $\mathcal{B}_1(0, 1, \Delta;\ 0) \subset \mathcal{S}$ dir.

i ve ii de Δ nın sınırları ünivalentlik için mümkün olan en iyi sınırlardır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu bölümde $\mathcal{A}_p(\rho,\alpha,\Delta;v)$ ve $\mathcal{B}_p(\rho,\alpha,\Delta;v)$ sınıfları arasındaki kapsama özellikleri ve buradan elde edilen yıldızıllık özelliği verildi.

5.1. Teorem. $v=0,1,\dots,p$ ve $\sigma-\frac{(p-v+1)}{2}-\frac{1}{4}\le\Delta<\sigma$ için $\not{f}(z)\in\mathcal{B}_p(\rho,\alpha,\Delta;v)$ ise

$$\not{f}(z)\in\mathcal{A}_p\left(\rho,\frac{\alpha-\rho}{2},\frac{\Delta}{p-v+1}-\frac{1}{2};v\right)$$

dir. Burada $\sigma=p!\left\{\frac{(\rho+(p-v)\alpha)+(p-v)(p-v-1)(\alpha-\rho)/2}{(p-v)!}\right\}$ dır.

İspat. $\not{f}(z)\in\mathcal{B}_p(\rho,\alpha,\Delta;v)$ için $\mathfrak{w}(z)$ fonksiyonu $\mathfrak{w}(z)\neq 1$ için

$$\rho\frac{\not{f}^{(v)}(z)}{z^{p-v}}+\left(\frac{\alpha-\rho}{2}\right)\frac{\not{f}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}=\frac{\mathfrak{w}(z)}{1-\mathfrak{w}(z)}+\frac{\sigma}{p-v+1}, \tag{5.1}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

$$\rho z\not{f}^{(v)}(z)+\left(\frac{\alpha-\rho}{2}\right)z^2\not{f}^{(v+1)}(z)=\frac{z^{p-v-1}\mathfrak{w}(z)}{1-\mathfrak{w}(z)}+\frac{\sigma}{p-v+1}z^{p-v-1} \tag{5.2}$$

bulunur. (5.2) nin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\rho\not{f}^{(v)}(z)+\alpha z\not{f}^{(v+1)}(z)+\left(\frac{\alpha-\rho}{2}\right)z^2\not{f}^{(v+2)}(z)$$
$$=(p-v+1)z^{p-v}\left(\frac{\sigma}{p-v+1}+\frac{\mathfrak{w}(z)}{1-\mathfrak{w}(z)}\right)+\frac{z^{p-v-1}\mathfrak{w}'(z)}{\left(1-\mathfrak{w}(z)\right)^2}$$

elde edilir. Buradan

$$\rho\frac{f^{(v)}(z)}{z^{p-v}}+\alpha\frac{f^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}+\left(\frac{\alpha-\rho}{2}\right)\frac{f^{(v+2)}(z)}{z^{p-v-2}}$$
$$=(p-v+1)\left(\frac{\sigma}{p-v+1}+\frac{w(z)}{1-w(z)}\right)+\frac{zw'(z)}{\left(1-w(z)\right)^2}$$

olur. Böylece $f(z)\in\mathcal{B}_p(\rho,\alpha,\Delta;v)$, $z\in\mathcal{U}$ için

$$Re\left\{\rho\frac{f^{(v)}(z)}{z^{p-v}}+\alpha\frac{f^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}+\left(\frac{\alpha-\rho}{2}\right)\frac{f^{(v+2)}(z)}{z^{p-v-2}}\right\}$$
$$=\sigma+(p-v+1)Re\left\{\frac{w(z)}{1-w(z)}\right\}+Re\left\{\frac{zw'(z)}{\left(1-w(z)\right)^2}\right\}>\Delta \tag{5.3}$$

eşitsizliğini sağlar. $w(z)$, $\mathcal{U}$ da analitik ve $w(0)=0$ olduğundan

$$max_{|z|\le|z_0|}|w(z)|=|w(z_0)|=1$$

olacak şekilde $z_0\in\mathcal{U}$ varsa Lemma 2.11 den

$$w(z_0)=e^{i\theta},z_0w'(z_0)=mw(z_0)=me^{i\theta}\ (m\ge1)$$

dir. Bu özellikteki bir $z_0\in\mathcal{U}$ için

$$Re\left\{\rho\frac{f^{(v)}(z)}{z^{p-v}}+\alpha\frac{f^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}+\left(\frac{\alpha-\rho}{2}\right)\frac{f^{(v+2)}(z)}{z^{p-v-2}}\right\}$$
$$=\sigma+(p-v+1)Re\left(\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)+Re\left\{\frac{me^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})^2}\right\}$$
$$=\sigma-\frac{p-v+1}{2}-\frac{m}{2(1-\cos\theta)}\le\sigma-\frac{p-v+1}{2}-\frac{1}{2(1-\cos\theta)}$$
$$\le\sigma-\frac{p-v+1}{2}-\frac{1}{4}\le\Delta$$

olur ki bu (5.3) eşitsizliği ile çelişir. Bu nedenle $|w(z_0)|=1$ olacak şekilde bir $z_0\in\mathcal{U}$ yoktur. Dolayısıyla bütün $z\in\mathcal{U}$ için $|w(z)|<1$ dir.

$|\mathfrak{w}(z)| < 1$ için

$$Re\{\mathfrak{w}(z)/1-\mathfrak{w}(z)\} > -1/2, \qquad (z \in \mathcal{U}) \tag{5.4}$$

olduğundan (5.1) gereği

$$Re\left\{\rho\frac{\mathfrak{f}^{(v)}(z)}{z^{p-v}} + \left(\frac{\alpha-\rho}{2}\right)\frac{\mathfrak{f}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}\right\} > -\frac{1}{2} + \frac{\sigma}{p-v+1} > -\frac{1}{2} + \frac{\Delta}{p-v+1} \tag{5.5}$$

olur ki bu da

$$\mathfrak{f}(z) \in \mathcal{A}_p\left(\rho, \frac{\alpha-\rho}{2}, \frac{\Delta}{p-v+1} - \frac{1}{2}; v\right)$$

olduğunu gösterir.

Teorem 5.1 de $p = 1$ ve $v = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

5.2. Sonuç. $\mathfrak{f}(z) \in \mathcal{B}_1(\rho, \alpha, \Delta; 0)$ ise $\rho + \alpha - \frac{5}{4} \leq \Delta < \rho + \alpha$ için

$$\mathfrak{f}(z) \in \mathcal{A}_1\left(\rho, \frac{\alpha-\rho}{2}, \frac{\Delta-1}{2}; 0\right)$$

dır.

5.3. Teorem. $v = 0,1,\dots,p-1$ ve $\Delta \geq \Delta^*$ için $\mathcal{B}_p(\rho, \alpha, \Delta; v) \subset \mathcal{S}_p^*(v)$ dır. Burada Δ^*

$$\frac{p!}{(p-v)!}\left(\frac{(\alpha+3\rho)(p-v)+4\rho}{4}\right)$$
$$= \Delta^* + (\sigma - \Delta^*)\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{[(\alpha-\rho)(p-v) - 4\rho - 2(\alpha+\rho)(k-v)](-1)^{k-p}}{(k-v+1)\{(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho\}} \tag{5.6}$$

denkleminin çözümüdür. Burada $\rho \leq 0$ ve $-\rho \geq \alpha > (p-1-v)\rho/(p+1-v)$ dir.

İspat. $\not{f} \in \mathcal{B}_p(\rho, \alpha, \Delta; v)$ için

$$Re\left\{\rho\frac{\not{f}^{(v)}(z)}{z^{p-v}} + \alpha\frac{\not{f}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}} + \left(\frac{\alpha-\rho}{2}\right)\frac{\not{f}^{(v+2)}(z)}{z^{p-v-2}}\right\} > \Delta, (z \in \mathcal{U})$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}(\alpha-\rho)&\left(\frac{\not{f}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}} + \frac{\not{f}^{(v+2)}(z)}{z^{p-v-2}}\right)\\ &= -(\alpha+\rho)\frac{\not{f}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}} - 2\rho\frac{\not{f}^{(v)}(z)}{z^{p-v}}\\ &\quad + 2\left(\rho\frac{\not{f}^{(v)}(z)}{z^{p-v}} + \alpha\frac{\not{f}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}} + \left(\frac{\alpha-\rho}{2}\right)\frac{\not{f}^{(v+2)}(z)}{z^{p-v-2}}\right)\end{aligned} \tag{5.7}$$

dır. Böylece (5.7), (4.16) ve (4.24) bağıntılarından

$$\begin{aligned}(\alpha-\rho)&Re\left\{\frac{\not{f}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}} + \frac{\not{f}^{(v+2)}(z)}{z^{p-v-2}}\right\} - 2\Delta\\ &= -(\alpha+\rho)Re\left\{\frac{\not{f}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}\right\} - 2\rho Re\left\{\frac{\not{f}^{(v)}(z)}{z^{p-v}}\right\}\\ &\geq -(\alpha+\rho)\left(\frac{p!}{(p-v-1)!}\right.\\ &\quad \left. + \sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{4(\sigma-\Delta)(k-v)(-1)^{k-p}}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]}\right)\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$-2\rho\left(\frac{p!}{(p-v)!}+\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{4(\sigma-\Delta)(-1)^{k-p}}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]}\right)$$

$$=[-(\alpha+\rho)(p-v)-2\rho]\frac{p!}{(p-v)!}$$

$$-4(\sigma-\Delta)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{[(\alpha+\rho)(k-v)+2\rho](-1)^{k-p}}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]}$$

elde edilir.

$$\frac{z\not{f}^{(v+1)}(z)}{\not{f}^{(v)}(z)}=(p-v)\frac{1+\mathfrak{w}(z)}{1-\mathfrak{w}(z)}$$

olsun. Bu durumda

$$\frac{\not{f}^{(v+1)}(z)}{z^{p-v-1}}+\frac{\not{f}^{(v+2)}(z)}{z^{p-v-2}}=(p-v)\frac{\not{f}^{(v)}(z)}{z^{p-v}}\left[\left(\frac{1+\mathfrak{w}(z)}{1-\mathfrak{w}(z)}\right)^2(p-v)+\frac{2z\mathfrak{w}'(z)}{(1-\mathfrak{w}(z))^2}\right]$$

dır. Burada $|\mathfrak{w}(z)|<1$ değilse Lemma 2.11 gereği $max_{|z|\leq|z_0|}|\mathfrak{w}(z)|=|\mathfrak{w}(z_0)|=1$ olacak şekilde bir $z_0\in\mathcal{U}$ vardır ve bu $z_0\in\mathcal{U}$, $m\geq 1$ ve $0<\theta<2\pi$, $z_0\mathfrak{w}'(z_0)=m\mathfrak{w}(z_0)=me^{i\theta}$ olur. Böyle bir $z_0\in\mathcal{U}$ için

$$Re\left\{\frac{f^{(v+1)}(z_0)}{{z_0}^{p-v-1}}+\frac{f^{(v+2)}(z_0)}{{z_0}^{p-v-2}}\right\}$$

$$=(p-v)Re\left\{\frac{f^{(v)}(z_0)}{{z_0}^{p-v}}\left[\left(\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)^2(p-v)+\frac{2me^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})^2}\right]\right\}$$

$$=(p-v)Re\left\{\frac{f^{(v)}(z_0)}{{z_0}^{p-v}}\left[\frac{-\cos^2(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)}(p-v)-\frac{m}{2\sin^2(\theta/2)}\right]\right\}$$

$$=-\frac{p-v}{2\,sin^2(\theta/2)}Re\left\{\frac{f^{(v)}(z_0)}{{z_0}^{p-v}}[2cos^2(\theta/2)(p-v)+m]\right\}$$

$$\leq\frac{(p-v)m}{2\,sin^2(\theta/2)}Re\left\{\frac{f^{(v)}(z_0)}{{z_0}^{p-v}}\right\}\leq-\frac{p-v}{2}Re\left\{\frac{f^{(v)}(z_0)}{{z_0}^{p-v}}\right\}$$

dir. Böylece (4.24) eşitsizliğinden

$$Re\left\{\frac{f^{(v+1)}(z_0)}{{z_0}^{p-v-1}}+\frac{f^{(v+2)}(z_0)}{{z_0}^{p-v-2}}\right\}$$

$$\leq-\frac{1}{2}\left[\frac{p!}{(p-v-1)!}+4(\sigma-\Delta)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(p-v)(-1)^{k-p}}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]}\right] \tag{5.9}$$

elde edilir. Eğer Δ

$$\frac{p!}{(p-v)!}\left(\frac{(\alpha+3\rho)(p-v)+4\rho}{4}\right)$$

$$\leq\Delta+(\sigma-\Delta)\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{[(\alpha-\rho)(p-v)-4\rho-2(\alpha+\rho)(k-v)](-1)^{k-p}}{(k-v+1)[(\alpha-\rho)(k-v)+2\rho]} \tag{5.10}$$

(5.10) eşitsizliğini sağlıyorsa o zaman (5.9) ile $z=z_0$ da bir çelişki elde edilir. (5.10) eşitsizliğini sağlayan en küçük Δ, (5.6) nın çözümü olan Δ^* dır. Dolayısıyla eğer $\Delta\geq\Delta^*$ ise $|\varpi(z)|<1$ olduğu görülür ve Lemma 2.18 gereği $f\in\mathcal{S}(v)$ olur. Bu ise Teorem 5.3 ün ispatını tamamlar.

KAYNAKLAR

Alexander, J. W. (1915). Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions. *Annals of Mathematics, 17*, 12–22.

Ali, R. M. (1994). On a subclass of starlike functions. *Rocky Mountain Journal of Mathematics, 24*, 447–451. https://doi.org/10.1216/rmjm/1181072762

Al-Refai, O. (2019). Some properties for a class of analytic functions defined by a higher-order differential inequality. *Turkish Journal of Mathematics, 43*, 2473–2493. https://doi.org/10.3906/mat-1808-64

Gao, C.-Y. (1992). On the starlikeness of the Alexander integral operator. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, 68*, 330–333.

Gao, C. Y., & Zhou, S. Q. (2007). Certain subclass of starlike functions. *Applied Mathematics and Computation, 187(1),* 176-182. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.08.113

Goodman, A. W. (1983). *Univalent functions I, II*. Mariner Publishing Company.

Jack, I. S. (1971). Functions starlike and convex of order α. *Journal of the London Mathematical Society, 3*, 469–474.

Owa, S., Hayami, T., & Kuroki, K. (2007). Some properties of certain analytic functions. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. https://doi.org/10.1155/2007/91592

Robertson, M. I. (1936). On the theory of univalent functions. *Annals of Mathematics, 37*, 374–408. https://doi.org/10.2307/1968451

Shi, L., & Wang, Z. G. (2014). On the starlikeness of certain class of multivalent analytic functions. *Abstract and Applied Analysis*. https://doi.org/10.1155/2014/738350

Silverman, H. (1994). A class of bounded starlike functions. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 17*(2), 249–252. https://doi.org/10.1155/S0161171294000360

Wang, Z. G., Gao, C. Y., & Yuan, S. M. (2006). On the univalency of certain analytic functions. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 7*(1), Article 4. https://www.emis.de/journals/JIPAM/images/125_05_JIPAM/125_05.pdf