DOĞRU, TOTAL VE KUVVET GRAFLARIN STATÜ İNDEKSLERİ

Duygu KÖSE

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRU, TOTAL VE KUVVET GRAFLARIN STATÜ İNDEKSLERİ

Duygu KÖSE
0000-0002-3920-5455

Doç. Dr. Hacer ÖZDEN AYNA
(Danışman)

Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
(İkinci Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA– 2025
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi
DOĞRU, TOTAL VE KUVVET GRAFLARIN STATÜ İNDEKSLERİ

Duygu KÖSE

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hacer ÖZDEN AYNA
İkinci Danışman: Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL (Bursa Uludağ Üniversitesi)

Bu çalışmanın amacı bazı grafların doğru, total ve kuvvet graflarının tanımlanması ve bu grafların her köşelerinin statüsü ve statü indeksleri hesaplanarak genel bir formül elde etmektir.
Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, diğer bölümlerde de gerekli olacak graflar hakkında genel bilgiler verilmiştir.İkinci bölümde, bazı topolojik graf indekslerinden bahsedilerek bazı basit graflar için örnekler verilmiştir.Üçüncü bölümde, tezin ana konusu olan statü ve statü indekslerinden bahsedilerek bazı basit grafların köşelerinin statüleri ve statü indeksleri, bu grafların doğru, total ve kuvvet graflarının köşelerinin statüleri ve statü indeksleri hesaplanmış ve bu hesaplamalarda bize kolaylık sağlaması amacıyla genel formüller elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Graf, topolojik indeks, doğru graf, total graf, kuvvet grafı, statü indeksi
2025, viii + 41 sayfa.

ABSTRACT

MScThesis
STATUS OF LINE, TOTAL AND POWER GRAPHS

Duygu KÖSE

Bursa Uludağ University

Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hacer ÖZDEN AYNA
Second Supervisor: Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL (Bursa Uludağ University)

The aim of this study is to define the line, total and power graphs of some graphs and to obtain a general Formula by calculating the state and state indices of each vertex of these graphs.

This thesis consists of three parts. In the first section, general information is given about the graphics that will be needed in the other sections. In the second chapter, some topological graph indices are mentioned and some examples of simple graphs are given. In the third chapter, the state and state indices, which are the main subject of the thesis, are mentioned, the state and state indices of the vertices of some simple graphs, the state and state indices of the vertices of line, sum and force graphs. Each of these graphs is calculated and general formul as that will facilitate these calculation sare obtained.

Keywords: Graph, topological index, linegraph, total graph, power graph, statue index
2025, viii + 41 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bana çok şey öğreten, her konuda desteğini ve yakınlığını hissettiğim sevgili danışman hocam Doç. Dr. Hacer ÖZDEN AYNA'ya ve bilgilerini bizden esirgemeyen Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL'e ve Doç. Dr. Aysun YURTTAŞ GÜNEŞ'e ve çalışma arkadaşım Berke ÖZMEN'e teşekkür ederim.

Varlıklarını hissettiğim ilk günden beri daha güçlü bir insan olmamı sağlayan güzel ikizlerim Elif Simay ve Emel Umay'a çok teşekkür ederim.

Yurt içi yüksek lisans burs programı ile maddi yönden beni destekleyerek yardımcı olan TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Duygu KÖSE

…/…/…..

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET....i
ABSTRACT....ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR....iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ....vi
ŞEKİLLER DİZİNİ....vii
ÇİZELGELER DİZİNİ....viii
1. GİRİŞ....1
2. TEMEL KAVRAMLAR....2
3. TOPOLOJİK GRAF İNDEKSLERİ....8
3.1. Birinci Zagreb İndeksi....8
3.2. İkinci Zagreb İndeksi....8
3.3. Birinci Çarpımsal Zagreb İndeksi....9
3.4. İkinci Çarpımsal Zagreb İndeksi....10
3.5. Wiener İndeksi....10
3.6. Harary İndeksi....11
3.7. Narumi-Katayama İndeksi....12
3.8. Geometrik-Aritmetik İndeks....12
3.9. İkinci Geometrik-Aritmetik İndeks....13
3.10. Üçüncü Geometrik-Aritmetik İndeks....14
3.11. ABC indeksi....16
4. DOĞRU, TOTAL VE KUVVET GRAFLARININ STATÜ İNDEKSLERİ....18
4.1. Temel Kavramlar....18
4.1.4. Patika grafının statüsü ve statü indeksleri....18
4.1.5. Devir grafının statüsü ve statü indeksleri....19
4.1.6. Yıldız grafının statüsü ve statü indeksleri....19
4.1.7. Tam grafın statüsü ve statü indeksleri....20
4.1.8. İki parçalı tam grafının statüsü ve statü indeksleri....20
4.1.9. Petersen grafının statüsü ve statü indeksleri....20
4.1.10. Tekerlek grafının statüsü ve statü indeksleri....21
4.1.11. Yel değirmeni grafının statüsü ve statü indeksleri....21
4.1.12. Gear grafının statüsü ve statü indeksleri....22
4.1.13. Merdiven grafının statüsü ve statü indeksleri....22
4.2. Doğru Graflarının Statü İndeksleri....23
4.2.2. Patika grafın doğru grafının statüsü ve statü indeksleri....24
4.2.3. Devir grafın doğru grafının statüsü ve statü indeksleri....25
4.2.4. Yıldız grafın doğru grafının statüsü ve statü indeksleri....26
4.2.6. İki parçalı tam grafın doğru grafının statüsü ve statü indeksleri....28
4.2.7. Petersen grafın doğru grafının statüsü ve statü indeksleri....29
4.2.8. Gear grafın doğru grafının statüsü ve statü indeksleri....29
4.2.9.Tekerlek grafın doğru grafının statüsü ve statü indeksleri....30
4.2.10.Yel değirmeni grafın doğru grafının statüsü ve statü indeksleri....31
4.2.11.Merdiven grafın doğru grafının statüsü ve statü indeksleri....32
4.3. Total Grafların Statü İndeksleri....33
4.3.2. Devir grafın total grafının statüsü ve statü indeksleri....34
4.3.3. Yıldız grafın total grafının statüsü ve statü indeksleri....35
4.3.4. Tam grafın total grafının statüsü ve statü indeksleri....36

4.3.5. İki parçalı tam grafın total grafının statüsü ve statü indeksleri 37
4.3.6. Petersen grafın total grafının statüsü ve statü indeksleri 38
4.3.7. Gear grafın total grafının statüsü ve statü indeksleri 39
4.3.8. Tekerlek grafın total grafının statüsü ve statü indeksleri 40
4.4. Kuvvet Graflarının Statü İndeksleri 41
KAYNAKLAR 43
ÖZGEÇMİŞ. 44

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
L(G)	G grafının doğru grafı
G^k	G grafının k-ıncı kuvveti
E(G)	G grafının kenar kümesi
V(G)	G grafının köşe kümesi
T(G)	G grafının total grafı
G_n	Gear grafı
$K_{r,s}$	İki parçalı tam graf
$T_{r,s}$	Larva grafı
L_n	Merdiven grafı
C_n	n köşeli devir grafı
K_n	n köşeli tam graf
W_n	n köşeli tekerlek grafı
P_n	n köşeli patika grafı
S_n	n köşeli yıldız grafı
P	Petersengrafı
d(u)	u köşesinin derecesi
σ(u)	u köşesinin statüsü
W_n^m	Yel değirmeni grafı

Kısaltmalar	**Açıklama**
ABC	ABC indeksi
Π_1	Birinci çarpımsal Zagreb indeksi
M_1	Birinci Zagreb indeksi
GA_2	Geometrik-Aritmetik ikinci indeksi
GA_1	Geometrik-Aritmetik indeksi
GA_3	Geometrik-Aritmetik üçüncü indeksi
G	Graf
H	Harary indeksi
Π_2	İkinci çarpımsal Zagreb indeksi
M_2	İkinci Zagreb indeksi
NK	Narumi-Katayama indeksi
S_1	S_1 statü indeksi
S_2	S_2 statü indeksi
W	Wiener indeksi

ŞEKİLLER DİZİNİ

		Sayfa
Şekil 1.1.	Königsberg ve yedi köprü	1
Şekil 1.2.	Königsberg ve yedi köprünün grafı	1
Şekil 2.1.	5 köşeli ve 6 kenarlı graf örneği	2
Şekil 2.2.	P_5patika grafı	3
Şekil 2.3.	C_5devirgrafı	4
Şekil 2.4.	S_6 yıldız grafı	4
Şekil 2.5.	K_6 tam grafı	4
Şekil 2.6.	$K_{2,3}$ iki parçalı tam grafı	5
Şekil 2.7.	P Petersen grafı	5
Şekil 2.8.	W_6 tekerlek grafı	6
Şekil 2.9.	$W_{4,3}$yel değirmeni grafı	6
Şekil 2.10.	$T_{3,2}$ larva grafı	6
Şekil 2.11.	L_3 merdiven grafı	7
Şekil 2.12.	G_6 gear grafı	7
Şekil 3.1.	$T_{4,3}$ grafının derecelendirilmesi	8
Şekil 3.2.	$T_{4,3}$ grafının derecelendirilmesi	9
Şekil 3.3.	$T_{4,3}$ grafının derecelendirilmesi	9
Şekil 3.4.	P_5 grafının derecelendirilmesi	10
Şekil 3.5.	P_6 grafının numaralandırılması	11
Şekil 3.6.	S_5 grafının numaralandırılması	11
Şekil 3.7.	S_5 grafının derecelendirilmesi	12
Şekil 3.8.	$T_{4,2}$ grafının derecelendirilmesi	13
Şekil 3.9.	S_5 grafının numaralandırılması	14
Şekil 3.10.	C_8 grafının numaralandırılması	15
Şekil 3.11.	S_5 grafının derecelendirilmesi	17
Şekil 4.1.	P_6 ve $L(P_6)$ grafları	24
Şekil 4.2.	C_n ve $L(C_n)$ grafları	25
Şekil 4.3.	S_n ve $L(S_n)$ grafları	26
Şekil 4.4.	K_n ve $L(K_n)$ grafları	26
Şekil 4.5.	$K_{r,s}$ ve $L(K_{r,s})$ grafları	28
Şekil 4.6.	P ve L(P) grafları	29
Şekil 4.7.	G_6 ve $L(G_6)$ grafları	29
Şekil 4.8.	W_n ve $L(W_n)$ grafları	30
Şekil 4.9.	W_{nm} ve $L(W_{nm})$ grafları	31
Şekil 4.10.	L_n ve $L(L_n)$ grafları	32
Şekil 4.11.	G, $L(G)$ ve $T(G)$ grafları	33
Şekil 4.12.	$T(C_n)$ grafı	34
Şekil 4.13.	$T(S_n)$ grafı	35
Şekil 4.14.	$T(K_n)$ grafı	36
Şekil 4.15.	$T(K_{r,s})$ grafı	37
Şekil 4.16.	$T(P)$ grafı	38
Şekil 4.17.	$T(G_n)$ grafı	39
Şekil 4.18.	$T(W_n)$ grafı	40
Şekil 4.19.	G ve G^k grafları	41

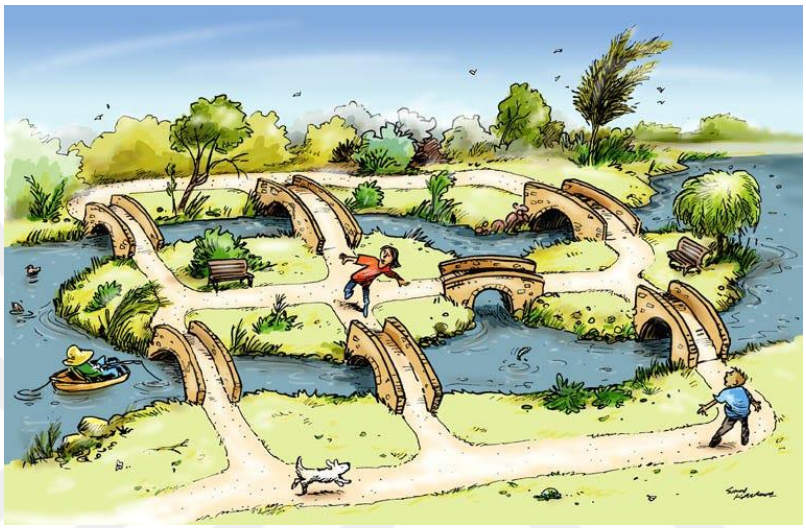
ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 4.1. G graflarına karşılık gelen L(G) grafları 23
Çizelge 4.2. Bazı G graflarının 2. kuvveti 41

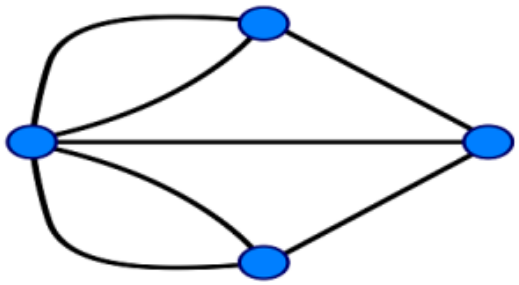
1. GİRİŞ

Graf teorinin 1736'da Euler'in, Königsberg'in Yedi Köprüsü isimli problemini içeren bir makale yazması ile başladığı düşünülmektedir. Könisberg kasabasının içinde akan Pregel nehrinin ortasında bir ada ve bir yarımada bulunmaktadır ve bu ada ile yarımada Şekil 1.1'deki gibi yedi köprü ile kıyılara bağlanmıştır.



Şekil 1.1.Königsberg ve yedi köprü

Makalede yer alan problem ise "Herhangi bir yerden başlayıp tüm köprülerden sadece birer kez geçerek başladığımız yere dönebilir miyiz?" şeklindedir.



Şekil 1.2. Königsberg ve yedi köprünün grafı

Euler bu problemin herhangi bir çözümünün olmadığını yukarıdaki grafla göstermiştir. Çözümün olabilmesi için bütün noktaların derecesinin çift olması gerektiğini ispatlamıştır.

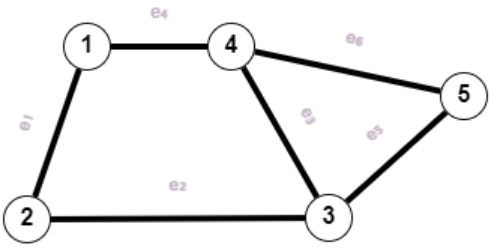
2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda tezin diğer kısımlarında yardımcı olacak bazı temel kavramlar tanımlanacak ve özellikleri verilecektir. Bu kavramlarla ilgili detaylı bilgi için Bondy ve Murty (1976), Biggs ve ark. (1986), Gross ve Yellen (2006), Foulds (1992), Balakrishnan ve Ranganathan (2012) kaynakları incelenebilir.

2.1.Tanım. V, elemanları köşeler (vertex) olan sonlu bir küme ve E, elemanları kenarlar (edge) olan sonlu bir küme olmak üzere kenar ve köşelerin sıralı ikililerinden oluşan ve

$$G = (V, E)$$

ile gösterilen yapıya graf denir.



Şekil 2.1.5 köşeli ve 6 kenarlı graf örneği

Şekilde verilen grafın köşe kümesi $V(G) = \{1,2,3,4,5\}$ ve kenar kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$'dir.

Bir *G* grafında köşe kümesi *V(G)*'nin eleman sayısı *n* ile ve kenar kümesi *E(G)*'nin eleman sayısı *m* ile gösterilir.

2.2. Tanım. Bir *G* grafının herhangi bir u köşesine bitişik kenarların sayısı u köşesinin ***derecesini (degree)*** verir ve $d(u)$ ile gösterilir.

2.3.Tanım. Bir *G* grafında tüm köşe derecelerinin aynı olması durumunda o grafa ***düzenli (regular) graf*** denir.

2.4.Tanım. Bir G grafının u ve v iki köşesi olmak üzere bu köşeler bir kenar ile birleşiyorsa u ve v köşelerine ***komşu köşeler*** denir. u ve v köşelerini birleştiren e kenarına ise bu köşelere ***bitişiktir*** denir. $e_1$ve e_2 kenarları u köşesine bitişikseler e_1 ve e_2 kenarlarına ***komşu kenarlar*** denir.

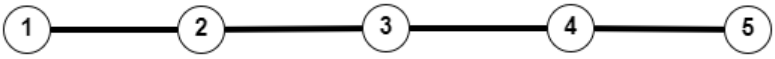
2.5.Lemma (El Sıkışma Lemması). Bir G grafının bütün köşelerinin derece toplamı kenar sayısının iki katıdır. Yani, $v \in V(G)$ ve $|E(G)| = m$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} d_{v_i} = 2m$$

dir.

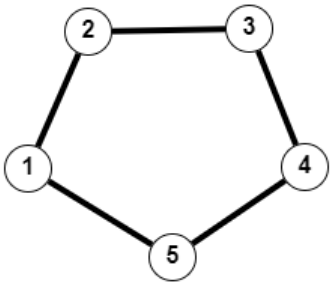
2.6.Tanım. G'nin köşeleri arasındaki uzaklıklardan en büyüğüne G'nin **çapı** denilir ve *çap(G)* veya *d(G)* ile gösterilir.

2.7.Tanım. Bir G grafının 1 dereceli iki köşesi olan ve bu köşeleri başlangıç ve bitiş köşesi kabul ettiğimiz, diğer tüm köşelerinin derecelerinin 2 olduğu grafa ***patika (path) graf*** denir ve n köşeli patika grafı $\boldsymbol{P_n}$ ile gösterilir.



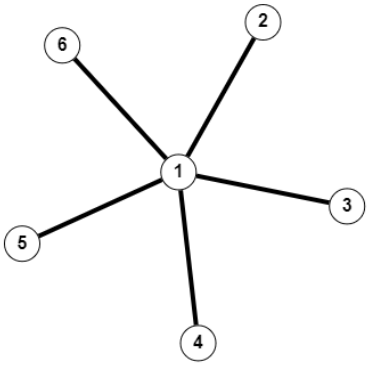
Şekil 2.2. P_5 patika grafı

2.8.Tanım. Başlangıç köşesi ve bitiş köşesi aynı olan, her köşesinin derecesi 2 olan n köşeli bir G grafına ***devir (cycle) graf*** denilir ve C_n ile gösterilir.



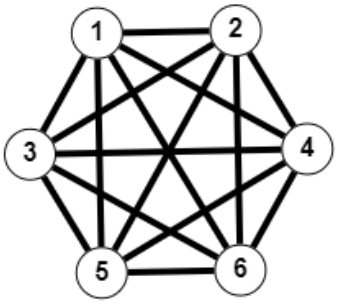
Şekil 2.3. C_5devir grafı

2.9.Tanım. Merkezde bir köşenin bulunduğu ve diğer köşelerin sadece merkezdeki köşe ile komşu olduğu *n* köşeli bir *G* grafına ***yıldız (star) graf*** denir ve $\boldsymbol{S_n}$ ile gösterilir.



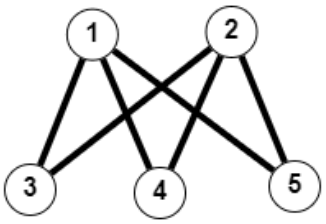
Şekil 2.4. S_6 yıldız grafı

2.10.Tanım. *n* köşeli bir grafta her bir köşenin diğer tüm köşeler ile bir kenarla birleştirildiği graf a***tam (complete) graf*** denir ve $\boldsymbol{K_n}$ ile gösterilir.



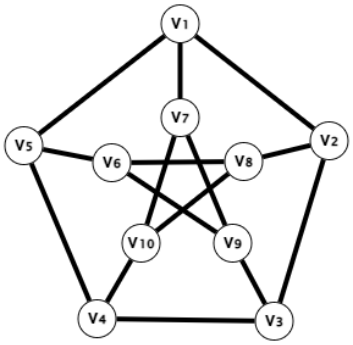
Şekil 2.5. K_6 tam grafı

2.11.Tanım. Bir *G* grafında köşelerin iki gruba ayrıldığı ve bir gruptaki köşelerin diğer gruptaki köşeler ile bir kenarla birleştirildiği grafa ***iki parçalı (bipartite) graf*** denir. Bir grupta bulunan köşeler diğer gruptaki her bir köşe ile bir kenarla birleştiriliyorsa bu grafa ***iki parçalı tam (complete bipartite) graf*** denir ve bir grupta *r* tane diğer grupta *s* tane köşesi olan bu graf $\boldsymbol{K_{r,s}}$ ile gösterilir.



Şekil 2.6. $K_{2,3}$ iki parçalı tam grafı

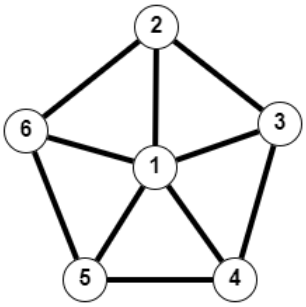
2.12.Tanım. 1891'de Petersen regüler graflarla ilgili çalışmasında ***Petersen grafını*** aşağıdaki şekilde tanımlamış ve ***P*** ile göstermiştir.



Şekil 2.7. *P* Petersengrafı

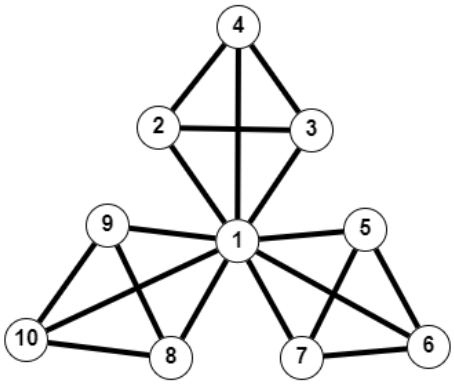
P grafında köşe sayısı 10, kenar sayısı 15dir. $v_1v_2v_3v_4v_5$ devrine ***dış devir,*** $v_6v_9v_7v_{10}v_8$ devrine ***iç devir***, diğer kenarlara da ***bağlantı kenarları*** denir.

2.13.Tanım. Bir S_n yıldız grafının uç köşelerinin ardışık olarak birer kenarla birleştirilmesiyle oluşan grafa ***tekerlek grafı*** denir ve $\boldsymbol{W_n}$ ile gösterilir.



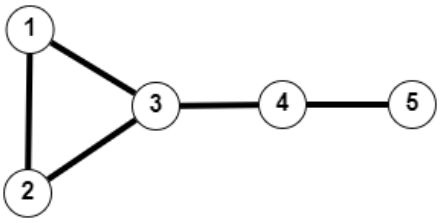
Şekil 2.8. W_6 tekerlek grafı

2.14.Tanım. *m* adet K_n tam grafının ortak bir köşeden birleştirilmesiyle oluşan grafa ***yel değirmeni grafı*** denir ve $\boldsymbol{W_n^m}$ ile gösterilir.



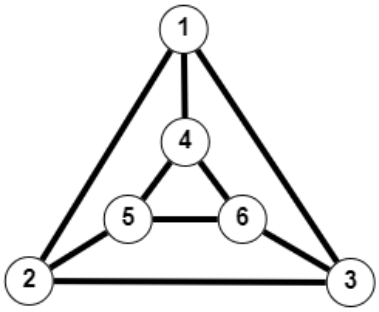
Şekil 2.9. W_4^3 yel değirmeni grafı

2.15.Tanım. *s* uzunluklu P_{s+1} patika grafının bir uç köşesinin C_r devir grafının herhangi bir köşesine eklenmesiyle oluşan grafa ***larva grafı*** denir ve $\boldsymbol{T_{r,s}}$ ile gösterilir.



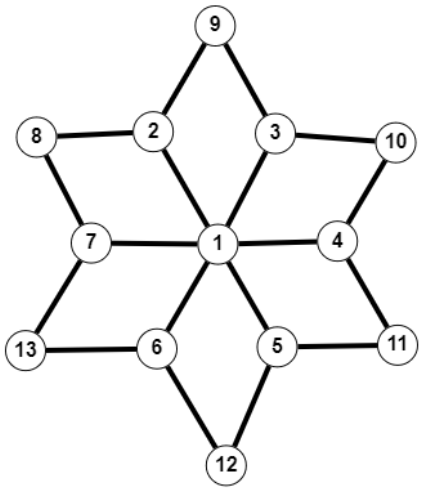
Şekil 2.10. $T_{3,2}$ larva grafı

2.16.Tanım. Bir C_n devir garfının diğer bir C_n devir garfı ile karşılıklı gelen köşelerinin bir kenar ile birleştirilmesi ile oluşan grafa ***merdiven grafı*** denir ve $\boldsymbol{L_n}$ ile gösterilir.



Şekil 2.11. L_3 merdiven grafı

2.17.Tanım. Tekerlek grafının dış komşu köşeleri arasına birer köşe eklenmesiyle oluşan grafa ***gear grafı*** denir ve $\boldsymbol{G_n}$ ile gösterilir. n, merkezdeki köşeye komşu olan köşe sayısına eşittir.



Şekil 2.12. G_6 gear grafı

3. TOPOLOJİK GRAF İNDEKSLERİ

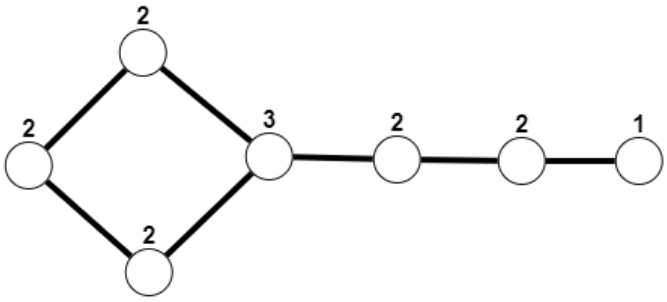
Bu kısımda bazı topolojik graf indekslerinin tanımları ve bunlara ait örnekler verilmiştir.

3.1. Birinci Zagreb İndeksi

Bir G grafında bir i köşesinin derecesi d_i olsun. Buna göre

$$M_1(G) = \sum_{i \in V(G)} d_i^2$$

G grafının birinci Zagreb indeksidir (Gutman I., Trinajstić N.,1972).Örneğin;



Şekil 3.1. $T_{4,3}$ grafının derecelendirilmesi

$$M_1(T_{4,3}) = \sum_{i \in V(G)} d_i^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2$$
$$= 1^2 + 5 \cdot 2^2 + 3^2$$
$$= 1 + 5 \cdot 4 + 9$$
$$= 30$$

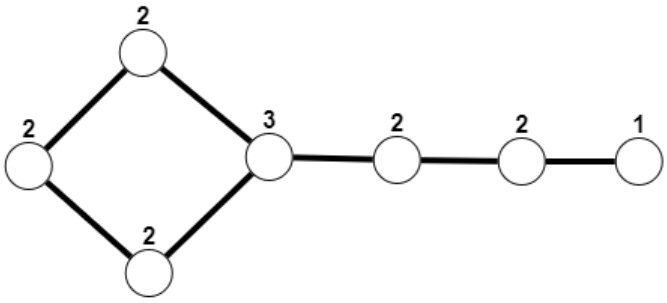
dir.

3.2. İkinci Zagreb İndeksi

Bir G grafının birbirine komşu iki köşesi i ve j olsun ve bu köşelerin dereceleri d_i ve d_j olsun. Buna göre

$$M_2(G) = \sum_{ij \in E(G)} d_i d_j$$

*G*grafının ikinci Zagreb indeksidir (Gutman I., Trinajstić N.,1972).Örneğin;



Şekil 3.2. $T_{4,3}$ grafının derecelendirilmesi

$$M_2(T_{4,3}) = \sum_{ij \in E(G)} d_i d_j = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3$$
$$= 2 + 4 + 6 + 6 + 4 + 4 + 6$$
$$= 32$$

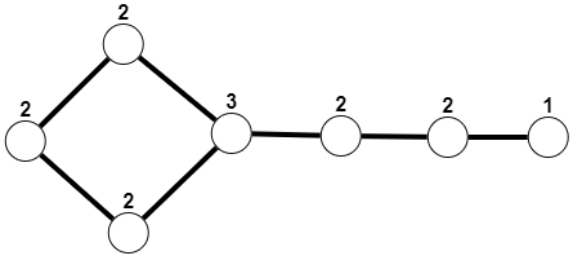
dir.

3.3. Birinci Çarpımsal Zagreb İndeksi

Bir *G* grafının *i* köşesinin derecesi d_i olsun. Buna göre

$$\Pi_1(G) = \prod_{i \in V(G)} d_i^2$$

G grafının birinci çarpımsal Zagreb indeksidir (Gutman, I., 2011).Örneğin;



Şekil 3.3. $T_{4,3}$ grafının derecelendirilmesi

$$\Pi_1(T_{4,3}) = \prod_{i \in V(G)} d_i^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2$$
$$= 9 \cdot 2^{10}$$

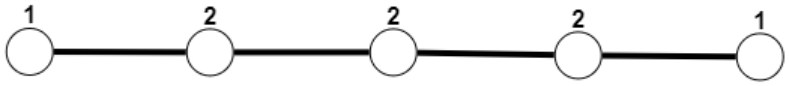
dır.

3.4. İkinci Çarpımsal Zagreb İndeksi

Bir *G* grafının birbirine komşu iki köşesi *i* ve *j* olsun ve bu köşelerin dereceleri d_i ve d_j olsun. Buna göre

$$\Pi_2(G) = \prod_{ij \in E(G)} d_i d_j$$

G grafının ikinci çarpımsal Zagreb indeksidir (Gutman, I. 2011).Örneğin;



Şekil 3.4. P_5 grafının derecelendirilmesi

$$\Pi_2(P_5) = \prod_{ij \in E(G)} d_i \cdot d_j$$
$$= 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 2^6$$

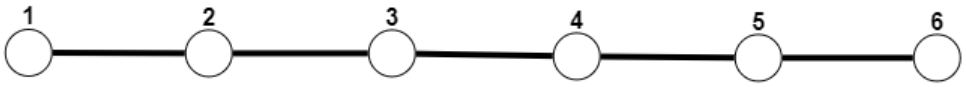
dır.

3.5. Wiener İndeksi

Bir *G* grafının *i* köşesi ve *j* köşesi arasındaki mesafe $d_G(i,j)$ olmak üzere Wiener indeksi

$$W(G) = \sum_{i,j \in V(G)} d_G(i,j)$$

olarak tanımlanır (Wiener, 1947). Örneğin;



Şekil 3.5. P_6 grafının numaralandırılması

$$W(G) = \sum_{i,j \in V(G)} d_G(i,j)$$

$$= (1+2+3+4+5) + (1+2+3+4) + (1+2+3) + (1+2) + 1$$

$$= 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5$$

$$= 35$$

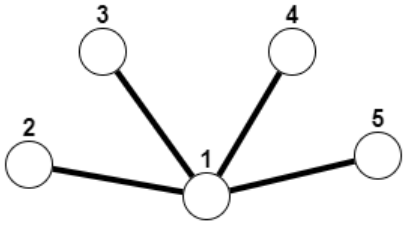
olur.

3.6. Harary İndeksi

Bir *G* grafının *i* köşesi ve *j* köşesi arasındaki mesafe $d_G(i,j)$ ise

$$H(G) = \sum_{i,j \in V(G)} \frac{1}{d_G(i,j)}$$

G grafının Harary indeksidir (Xu, K.,Das, K. C., 2011).Örneğin;



Şekil 3.6. S_5 grafının numaralandırılması

$$H(S_5) = \sum_{i,j \in V(G)} \frac{1}{d_G(i,j)}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}$$

$$= 4 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{1}{2}$$
$$= 7$$

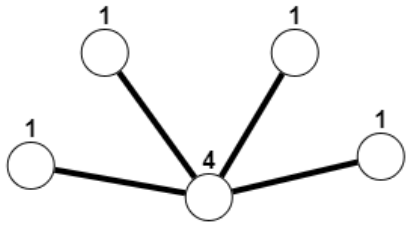
dir.

3.7. Narumi-Katayama İndeksi

Basit bir *G* grafının tüm köşe derecelerinin çarpılmasıyla elde edilen sayıya

$$NK(G) = \prod_{u \in V(G)} d(u)$$

G grafının Narumi-Katayama indeksi denir (Azari, M., 2014).Örneğin;



Şekil 3.7. S_5 grafının derecelendirilmesi

$$NK(S_5) = \prod_{u \in V(G)} d(u)$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4$$
$$= 4$$

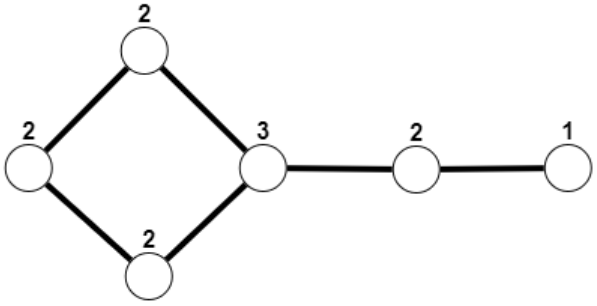
dür.

3.8. Geometrik-Aritmetik İndeks

Bir *G* grafının birbirine komşu iki köşesi *i* ve *j* olsun ve bu köşelerin dereceleri d_i ve d_j ise

$$GA_1(G) = \sum_{i,j \in E(G)} \frac{2\sqrt{d_i d_j}}{d_i + d_j}$$

G grafının geometrik-aritmetik indeksidir (Das, K. C., 2010).Örneğin;



Şekil 3.8. $T_{4,2}$ grafının derecelendirilmesi

$$GA_1(T_{4,2}) = \sum_{i,j \in E(G)} \frac{2\sqrt{d_i d_j}}{d_i + d_j}$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2\cdot 2}}{2+2} + \frac{\sqrt{2\cdot 2}}{2+2} + \frac{\sqrt{2\cdot 3}}{2+3} + \frac{\sqrt{2\cdot 3}}{2+3} + \frac{\sqrt{3\cdot 2}}{3+2} + \frac{\sqrt{2\cdot 1}}{2+1}\right)$$

$$= 2 + \frac{6\sqrt{6}}{5} + \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

tür.

3.9. İkinci Geometrik-Aritmetik İndeks

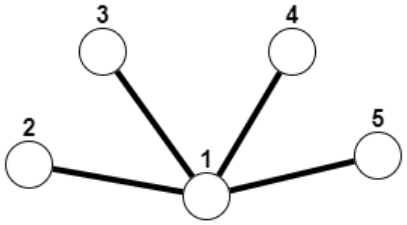
Bir G grafında n_i, i köşesine (i köşesi dahil) j köşesinden daha yakın olan köşe sayısıdır. Buna göre

$$n_i(e) = n_i(e,G) = |N(e,i,G)| = |\{x \in V(G) | d(x,i) < d(x,j)\}|$$
$$n_j(e) = n_j(e,G) = |N(e,j,G)| = |\{x \in V(G) | d(x,j) < d(x,i)\}|$$

için

$$GA_2(G) = \sum_{ij \in E(G)} \frac{2\sqrt{n_i n_j}}{n_i + n_j}$$

G grafının ikinci geometrik-aritmetik indeksidir **(**Das, Gutman ve Furtula, 2010). Örneğin;



Şekil 3.9. S_5 grafının numaralandırılması

$$|N(e_{12},1)| = |\{x \in V(G)|d(x,1) < d(x,2)\}| = |\{1,3,4,5\}| = 4$$
$$|N(e_{12},2)| = |\{x \in V(G)|d(x,2) < d(x,1)\}| = |\{2\}| = 1$$
$$|N(e_{13},1)| = |\{x \in V(G)|d(x,1) < d(x,3)\}| = |\{1,2,4,5\}| = 4$$
$$|N(e_{13},3)| = |\{x \in V(G)|d(x,3) < d(x,1)\}| = |\{3\}| = 1$$
$$|N(e_{14},1)| = |\{x \in V(G)|d(x,1) < d(x,4)\}| = |\{1,2,3,5\}| = 4$$
$$|N(e_{14},4)| = |\{x \in V(G)|d(x,4) < d(x,1)\}| = |\{4\}| = 1$$
$$|N(e_{15},1)| = |\{x \in V(G)|d(x,1) < d(x,5)\}| = |\{1,2,3,4\}| = 4$$
$$|N(e_{15},5)| = |\{x \in V(G)|d(x,5) < d(x,1)\}| = |\{5\}| = 1$$

$$GA_2(G) = \sum_{ij \in E(G)} \frac{2\sqrt{n_i n_j}}{n_i + n_j}$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{4\cdot 1}}{4+1} + \frac{\sqrt{4\cdot 1}}{4+1} + \frac{\sqrt{4\cdot 1}}{4+1} + \frac{\sqrt{4\cdot 1}}{4+1}\right)$$
$$= \frac{16}{5}$$

tir.

3.10. Üçüncü Geometrik-Aritmetik İndeks

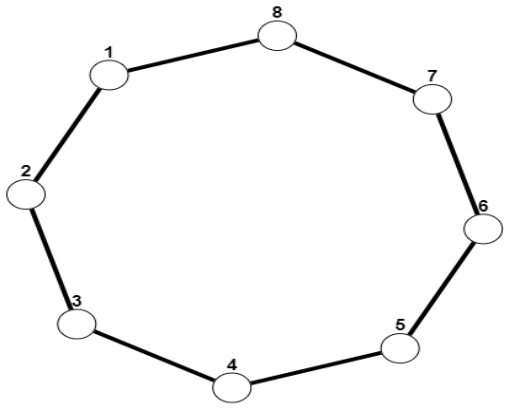
Bir G grafında m_i, i köşesine j köşesinden daha yakın olan kenar sayısıdır. Buna göre

$$m_i = |\{f \in E(G)|d(i,f) < d(j,f)\}|$$

için

$$GA_3(G) = \sum_{ij \in E(G)} \frac{2\sqrt{m_i m_j}}{m_i + m_j}$$

G grafının üçüncü geometrik-aritmetik indeksidir **(**Das, Gutman ve Furtula, 2010). Örneğin;



Şekil 3.10. C_8 grafının numaralandırılması

e_{12} kenarı için

$$m_1 = |\{f \in E(G) | d(1,f) < d(2,f)\}| = |\{f_{18}, f_{87}, f_{76}\}| = 3$$
$$m_2 = |\{f \in E(G) | d(2,f) < d(1,f)\}| = |\{f_{23}, f_{34}, f_{45}\}| = 3$$

e_{23} kenarı için

$$m_2 = |\{f \in E(G) | d(2,f) < d(3,f)\}| = |\{f_{21}, f_{18}, f_{87}\}| = 3$$
$$m_3 = |\{f \in E(G) | d(3,f) < d(2,f)\}| = |\{f_{34}, f_{45}, f_{56}\}| = 3$$

e_{34} kenarı için

$$m_3 = |\{f \in E(G) | d(3,f) < d(4,f)\}| = |\{f_{32}, f_{21}, f_{18}\}| = 3$$
$$m_4 = |\{f \in E(G) | d(4,f) < d(3,f)\}| = |\{f_{45}, f_{56}, f_{67}\}| = 3$$

e_{45} kenarı için

$$m_4 = |\{f \in E(G) | d(4,f) < d(5,f)\}| = |\{f_{43}, f_{32}, f_{21}\}| = 3$$
$$m_5 = |\{f \in E(G) | d(5,f) < d(4,f)\}| = |\{f_{56}, f_{67}, f_{78}\}| = 3$$

e_{56} kenarı için

$$m_5 = |\{f \in E(G) | d(5,f) < d(6,f)\}| = |\{f_{54}, f_{43}, f_{32}\}| = 3$$
$$m_6 = |\{f \in E(G) | d(6,f) < d(5,f)\}| = |\{f_{67}, f_{78}, f_{81}\}| = 3$$

e_{67} kenarı için

$$m_6 = |\{f \in E(G) | d(6,f) < d(7,f)\}| = |\{f_{65}, f_{54}, f_{43}\}| = 3$$
$$m_7 = |\{f \in E(G) | d(7,f) < d(6,f)\}| = |\{f_{78}, f_{81}, f_{12}\}| = 3$$

e_{78} kenarı için

$$m_7 = |\{f \in E(G) | d(7,f) < d(8,f)\}| = |\{f_{76}, f_{65}, f_{54}\}| = 3$$
$$m_8 = |\{f \in E(G) | d(8,f) < d(7,f)\}| = |\{f_{81}, f_{12}, f_{23}\}| = 3$$

e_{81} kenarı için

$$m_8 = |\{f \in E(G) | d(8,f) < d(1,f)\}| = |\{f_{87}, f_{76}, f_{65}\}| = 3$$
$$m_1 = |\{f \in E(G) | d(1,f) < d(8,f)\}| = |\{f_{12}, f_{23}, f_{34}\}| = 3$$

$$GA_3(C_8) = \sum_{ij \in E(G)} \frac{2\sqrt{m_i m_j}}{m_i + m_j}$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3\cdot 3}}{3+3} + \frac{\sqrt{3\cdot 3}}{3+3} + \frac{\sqrt{3\cdot 3}}{3+3} + \frac{\sqrt{3\cdot 3}}{3+3} + \frac{\sqrt{3\cdot 3}}{3+3} + \frac{\sqrt{3\cdot 3}}{3+3} + \frac{\sqrt{3\cdot 3}}{3+3} + \frac{\sqrt{3\cdot 3}}{3+3}\right)$$

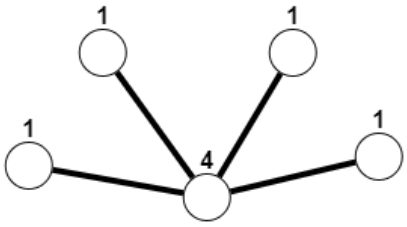
$$= 2\left(8 \cdot \frac{3}{6}\right) = 8$$

3.11. ABC İndeksi

Bir *G* grafının birbirine komşu iki köşesi *i*,*j* ve bu köşelerin dereceleri d_i,d_j olsun. Buna göre

$$ABC(G) = \sum_{ij \in E(G)} \sqrt{\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_j} - \frac{2}{d_i d_j}}$$

G grafının atom-bağ bağlantılılığı (atom-bond connectivity) denir (Das, K. C., 2010). Örneğin;



Şekil 3.11. S_5 grafının derecelendirilmesi

$$ABC(S_5) = \sum_{ij \in E(G)} \sqrt{\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_j} - \frac{2}{d_i d_j}}$$

$$= 4\sqrt{\frac{1}{1} + \frac{1}{4} - \frac{2}{1 \cdot 4}} = 2\sqrt{3}$$

4. DOĞRU, TOTAL VE KUVVET GRAFLARININ STATÜ İNDEKSLERİ

Bu bölümde bazı türetilmiş grafların statü indeksleri verilecektir.

4.1. Temel Kavramlar

4.1.1.Tanım. Bir *G* grafının herhangi iki *u* ve *v* köşesi arasındaki mesafe, birbirlerine giden en kısa yolun uzunluğudur ve $d(u,v)$ ile gösterilir. *G* grafının herhangi bir köşesinin statüsü σ(u), *u* ile G grafının diğer tüm köşeleri arasındaki mesafelerin toplamı olarak tanımlanır (Harary F., 1959).

$$\sigma(u) = \sum_{v \in V(G)} d(u,v)$$

4.1.2.Tanım. S_1statü indeksi, *G* grafında her bir kenarı oluşturan köşelerin statülerinin toplamlarının toplamı olarak tanımlanır (Ramane H. S., Yalnaik A. S., 2017).

$$S_1(G) = \sum_{uv \in E(G)} [\sigma(u) + \sigma(v)]$$

4.1.3.Tanım. S_2 statü indeksi, *G* grafında her bir kenarı oluşturan köşelerin statülerinin çarpımlarının toplamı olarak tanımlanır (Ramane H. S., Yalnaik A. S., 2017).

$$S_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} [\sigma(u)\sigma(v)]$$

4.1.4. Patika grafının statüsü ve statü indeksleri

n köşeli bir P_n patika grafının statüsü ve statü indeksleri (Ramane H.S.,Yalnaik A. S., 2017):

$$\sigma_{(P_n)}(v_t) = \frac{t(t-1)}{2} + \frac{(n-t+1)(n-t)}{2} \quad , \quad t = 1 \dots n$$

$$S_1(P_n) = \frac{n(n-1)(2n-1)}{3}$$

$$S_2(P_n) = \frac{(n-1)(n^4-n^2)}{4} - \frac{n(n-1)(n^3-n)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)(2n^2-1)}{6} - \frac{n^3(n-1)^2}{2} + \frac{1}{30}[6(n-1)^5 + 15(n-1)^4 + 10(n-1)^3 - (n-1)]$$

4.1.5. Devir grafının statüsü ve statü indeksleri

n köşeli bir C_n devir grafının statüsü ve statü indeksleri (Ramane H.S., Yalnaik A. S., 2017):

$$\sigma_{(C_n)}(v) = \begin{cases} \frac{n^2}{4} & n\ çift \\ \frac{(n^2-1)}{4} & n\ tek \end{cases}$$

$$S_1(C_n) = \begin{cases} \frac{n^3}{2} & n\ çift \\ \frac{(n^3-n)}{2} & n\ tek \end{cases}$$

$$S_2(C_n) = \begin{cases} \frac{n^5}{16} & n\ çift \\ \frac{n(n^2-1)^2}{16} & n\ tek \end{cases}$$

4.1.6. Yıldız grafının statüsü ve statü indeksleri

n köşeli bir S_n yıldız grafının statüsü ve statü indeksleri

v_1; merkez köşe

v_2; uç köşeler

$$\sigma_{(S_n)}(v_1) = n-1$$

$$\sigma_{(S_n)}(v_2) = 2n-3$$

$$S_1(S_n) = 3n^2 - 7n + 4$$

$$S_2(S_n) = 2n^3 - 7n^2 + 8n - 3$$

olarak hesaplanmıştır.

4.1.7. Tam grafın statüsü ve statü indeksleri

n köşeli bir K_n tam grafının statüsü ve statü indeksleri (Ramane H.S., Yalnaik A.S. 2017)

$$\sigma_{(K_n)}(v) = n - 1$$
$$S_1(K_n) = n(n-1)^2$$
$$S_2(K_n) = \frac{n(n-1)^3}{2}$$

olarak hesaplanmıştır.

4.1.8. İki parçalı tam grafının statüsü ve statü indeksleri

$K_{r,s}$ iki parçalı tam grafının statüsü ve statü indeksleri (Ramane H.S., Yalnaik A.S., 2017)

v_1; r tane köşeye sahip gruptaki köşeler

v_2; s tane köşeye sahip gruptaki köşeler

$$\sigma_{(K_{r,s})}(v_1) = s + 2(r-1)$$
$$\sigma_{(K_{r,s})}(v_2) = r + 2(s-1)$$
$$S_1(K_{r,s}) = rs(3s + 3r - 4)$$
$$S_2(K_{r,s}) = rs[2(r+s-1)(r+s-2) + rs]$$

olarak hesaplanmıştır.

4.1.9. Petersen grafının statüsü ve statü indeksleri

P Petersen grafının statüsü ve statü indeksleri (Ramane H. S., Yalnaik A. S., 2017):

$$\sigma_P(v) = 15$$
$$S_1(P) = 450$$
$$S_2(P) = 3375$$

4.1.10.Tekerlek grafının statüsü ve statü indeksleri

n köşeli W_n tekerlek grafının statüsü ve statü indeksleri

v_1; merkez köşe

v_2; uç köşeler

$$\sigma_{(W_n)}(v_1) = n - 1$$
$$\sigma_{(W_n)}(v_2) = 2n - 5$$
$$S_1(W_n) = (n-1)(7n-16)$$
$$S_2(W_n) = (n-1)(2n-5)(3n-6)$$

olarak hesaplanmıştır.

4.1.11.Yel değirmeni grafının statüsü ve statü indeksleri

W_n^m yel değirmeni grafının statüsü ve statü indeksleri

v_1; birleşim köşesi

v_2; diğer tüm köşeler

$$\sigma_{(W_n^m)}(v_1) = m(n-1)$$
$$\sigma_{(W_n^m)}(v_2) = 2nm - 2m - n + 1$$
$$S_1(W_n^m) = (n-1)^2 m(2mn - m - n + 1)$$
$$S_2(W_n^m) = \frac{(n-1)^3(2m^2 - m)\big(2m + (2m-1)(n-2)\big)}{2}$$

olarak hesaplanmıştır.

4.1.12. Gear grafının statüsü ve statü indeksleri

G_n gear grafının statüsü ve statü indeksleri

v_1; merkez köşe

v_2; merkeze komşu köşeler

v_3; diğer köşeler

$$\sigma_{(G_n)}(v_1) = 3n$$
$$\sigma_{(G_n)}(v_2) = 7n - 10$$
$$\sigma_{(G_n)}(v_3) = 5n - 5$$
$$S_1(G_n) = 32n^2 - 35n$$
$$S_2(G_n) = 85n^3 - 185n^2 + 100n$$

olarak hesaplanmıştır.

4.1.13. Merdiven grafının statüsü ve statü indeksleri

L_n merdiven grafının statüsü ve statü indeksleri

$$\sigma_{(L_n)}(v) = \begin{cases} \dfrac{n^2 + 2n}{2} & n\ çift \\ \dfrac{(n^2 + 2n - 1)}{2} & n\ tek \end{cases}$$

$$S_1(C_n) = \begin{cases} 3n^3 + 6n^2 & n\ çift \\ 3n^3 + 6n^2 - 3n & n\ tek \end{cases}$$

$$S_2(C_n) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}n^5 + 3n^4 + 3n^3 & n\ çift \\ \dfrac{3n^5 + 12n^4 + 6n^3 - 12n^2 + 3n}{4} & n\ tek \end{cases}$$

olarak hesaplanmıştır.

4.2. Doğru Graflarının Statü İndeksleri

4.2.1.Tanım. G bir basit graf olsun. Köşeleri G grafının kenarları olan ve kenarları, G grafında birbirine komşu olan tüm kenarlara karşılık gelen köşeleri birleştirerek elde edilen grafa G grafının **doğru grafı** denilir ve *L(G)* ile gösterilir.

n köşesi ve *m* kenarı olan bir *G* grafı için, *L(G)* doğru grafının köşe sayısı *m*'dir ve *L(G)*'nin kenar sayısı da el sıkışma lemması gereği *G* grafının köşelerinin derecelerinin karelerinin toplamının yarısından *m* kenar sayısının farkıdır. *L(G)*'nin kenar sayısı

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - m$$

olur (Skiena, 1990, s. 137).
G grafının köşelerinin derecelerinin karelerinin toplamının G grafının birinci Zagreb indeksini verdiği bilinmektedir. Öyleyse *L(G)*'nin kenar sayısı

$$\frac{1}{2}M_1(G) - m$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Aşağıdaki tabloda bazı basit *G* graflarına karşılık gelen *L(G)* grafları verilmiştir.

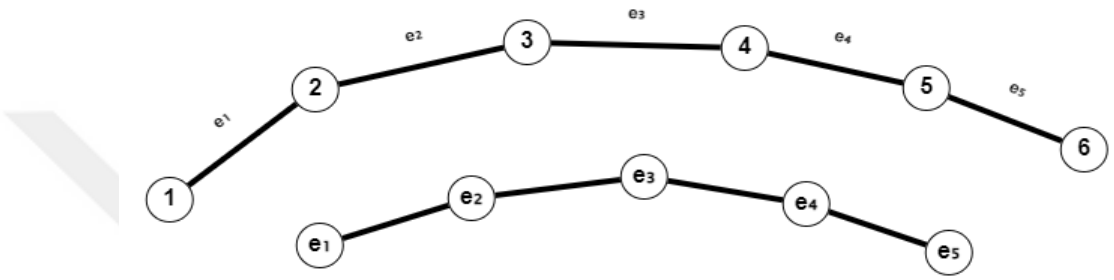
Çizelge 4.1. *G* graflarına karşılık gelen *L(G)* grafları

G	***L(G)***
P_n	P_{n-1}
C_n	C_n
S_n	K_{n-1}
$K_{1,s}$	K_n

Bu tabloda yer alan grafların doğru graflarının statüsü ve statü indeksleri P_n, C_n ve K_n graflarının statü ve statü indeksleri genel formüllerine bakılarak kolaylıkla hesaplanır.

4.2.2.Patika grafın doğru grafının statüsü ve statü indeksleri

Bir P_n patika grafının doğru grafı P_{n-1} grafına eşittir yani $L(P_n) = P_{n-1}$ dir. Örneğin:



Şekil 4.1. P_6ve $L(P_6)$ grafları

$L(P_n)$ grafında her bir köşenin statüsü ve grafın statü indeksleri şöyledir:

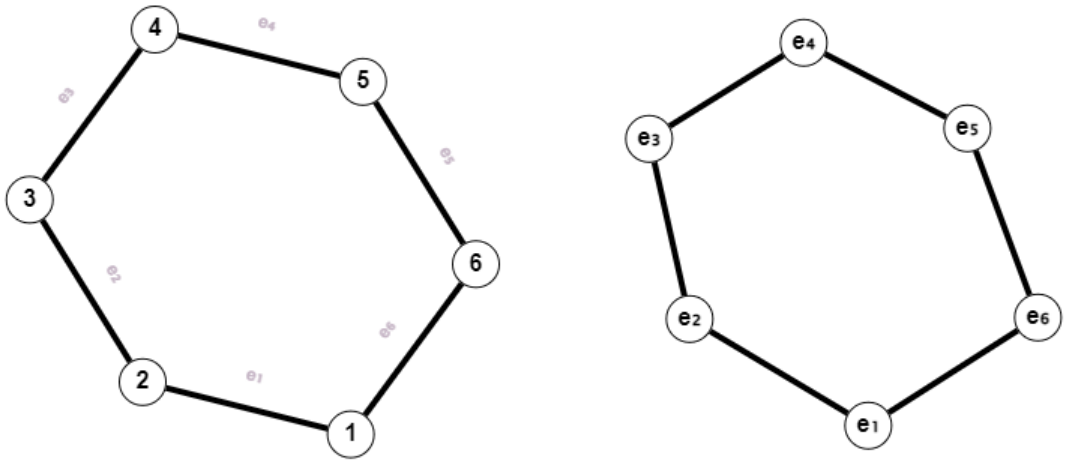
$$\sigma_{L(P_n)}(v_t) = \frac{t(t-1)}{2} + \frac{(n-t-1)(n-t)}{2} \quad , \quad t = 1, \dots, n$$

$$S_1\big(L(P_n)\big) = \frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{3}$$

$$\begin{aligned} S_2\big(L(P_n)\big) = {} & \frac{(n-2)((n-1)^4 - (n-1)^2)}{4} - \frac{(n-1)(n-2)((n-1)^3 - (n-1))}{2} \\ & + \frac{(n-1)(n-2)(2n-3)(2(n-1)^2 - 1)}{6} - \frac{(n-1)^3(n-2)^2}{2} \\ & + \frac{1}{30}[6(n-2)^5 + 15(n-2)^4 + 10(n-2)^3 - (n-2)] \end{aligned}$$

4.2.3.Devir grafın doğru grafının statüsü ve statü indeksleri

Bir C_n devir grafının doğru grafı C_n grafına eşittir. Yani $L(C_n) = C_n$ dir.



Şekil 4.2.$C_n$ve $L(C_n)$ grafları

$L(C_n)$ grafında her bir köşenin statüsü ve grafın statü indeksleri şöyledir:

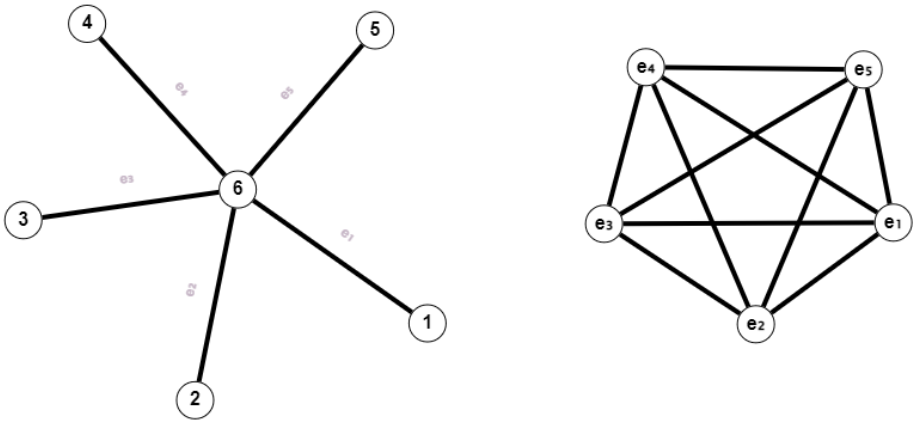
$$\sigma_{L(C_n)}(v) = \begin{cases} \dfrac{n^2}{4} & n\ çift \\ \dfrac{(n^2-1)}{4} & n\ tek \end{cases}$$

$$S_1\big(L(C_n)\big) = \begin{cases} \dfrac{n^3}{2} & n\ çift \\ \dfrac{(n^3-n)}{2} & n\ tek \end{cases}$$

$$S_2\big(L(C_n)\big) = \begin{cases} \dfrac{n^5}{16} & n\ çift \\ \dfrac{(n^2-1)^2 n}{16} & n\ tek \end{cases}$$

4.2.4.Yıldız grafın doğru grafının statüsü ve statü indeksleri

Bir S_n yıldız grafının doğru grafı K_{n-1} grafına eşittir. Yani $L(S_n) = K_{n-1}$ dir.



Şekil 4.3. S_n ve $L(S_n)$ grafları

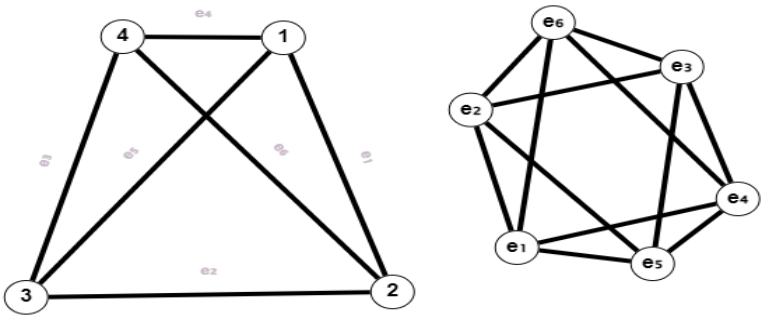
$L(S_n)$ grafında her bir köşenin statüsü ve grafın statü indeksleri şöyledir:

$$\sigma_{L(S_n)}(v) = n - 2$$

$$S_1\big(L(S_n)\big) = (n-1)(n-2)^2$$

$$S_2\big(L(S_n)\big) = \frac{(n-1)(n-2)^3}{2}$$

4.2.5.Teorem. Tam grafın doğru grafının statüsü ve statü indeksleri



Şekil 4.4. K_n ve $L(K_n)$ grafları

$L(K_n)$ grafında her bir köşenin statüsü ve statü indeksleri şöyledir:

$$\sigma_{L(K_n)}(v) = n^2 - 3n + 2$$
$$S_1\big(L(K_n)\big) = n(n-1)^2(n-2)^2$$
$$S_2\big(L(K_n)\big) = \frac{n(n-1)^3(n-2)^3}{2}$$

İspat.

n=4 için $\sigma_{L(K_4)}(v) = 1+1+1+1+2 = 4\cdot 1 + 1\cdot 2$

n=5 için $\sigma_{L(K_5)}(v) = 1+1+1+1+1+1+2+2+2 = 6\cdot 1 + 3\cdot 2$

n=6 için $\sigma_{L(K_6)}(v) = 1+1+1+1+1+1+1+1+2+2+2+2+2+2$
$= 8\cdot 1 + 6\cdot 2$

olup*1* uzaklıklı köşe sayısı *2n-4* olup diğer köşelere uzaklık *2* olduğundan herhangibir köşenin statüsü

$$\sigma_{L(K_n)}(v) = (2n-4)\cdot 1 + \left(\frac{n^2-n}{2} - (2n-4) - 1\right)\cdot 2$$
$$= n^2 - 3n + 2$$

olarak bulunur.

$L(K_n)$grafının her köşesinin statüsü aynı olduğundan

$$S_1\big(L(K_n)\big) = \sum_{uv\in E(L(K_n))} [\sigma(u) + \sigma(v)] = \sum 2\sigma(v)$$

olur ve S_1 tanımı gereği $S_1\big(L(K_n)\big)$, $L(K_n)$ grafın kenar sayısı kadar $2\sigma(v)$'dir.

$$S_1\big(L(K_n)\big) = \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - m\right] 2\sigma(v)$$
$$= \left[\frac{1}{2}n(n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2}\right] 2(n^2-3n+2)$$
$$= \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\right] 2(n-1)(n-2)$$

$$= n(n-1)^2(n-2)^2$$

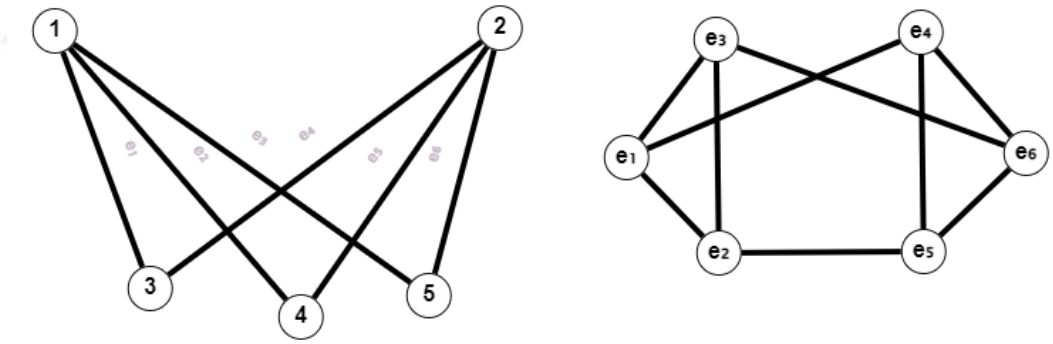
olarak elde edilir.

$$S_2\big(L(K_n)\big) = \sum_{uv\in E(L(K_n))}[\sigma(u)\sigma(v)] = \sum \sigma(v)^2$$
$$= \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - m\right]\sigma(v)^2$$
$$= \left[\frac{1}{2}n(n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2}\right](n^2-3n+2)^2$$
$$= \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\right](n-1)^2(n-2)^2$$
$$= \frac{n(n-1)^3(n-2)^3}{2}$$

olarak bulunur.

Bütün basit grafların statü ve statü indeksleri benzer şekilde hesaplanabilir.

4.2.6. İki parçalı tam grafın doğru grafının statüsü ve statü indeksleri

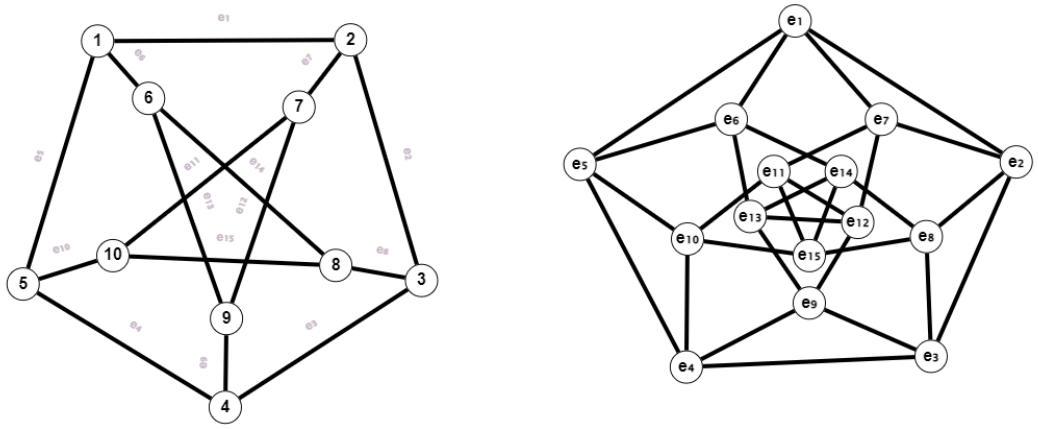


Şekil 4.5. $K_{r,s}$ ve $L(K_{r,s})$ grafları

$L(K_{r,s})$ grafında her bir köşenin statüsü ve grafın statü indeksleri aşağıdaki gibidir:

$$\sigma_{L(K_{r,s})}(v) = 2sr - s - r$$
$$S_1\left(L\big(K_{r,s}\big)\right) = sr(s+r-2)(2rs-s-r)$$
$$S_2\left(L\big(K_{r,s}\big)\right) = \frac{sr(s+r-2)(2rs-s-r)^2}{2}$$

4.2.7. Petersen grafın doğru grafının statüsü ve statü indeksleri

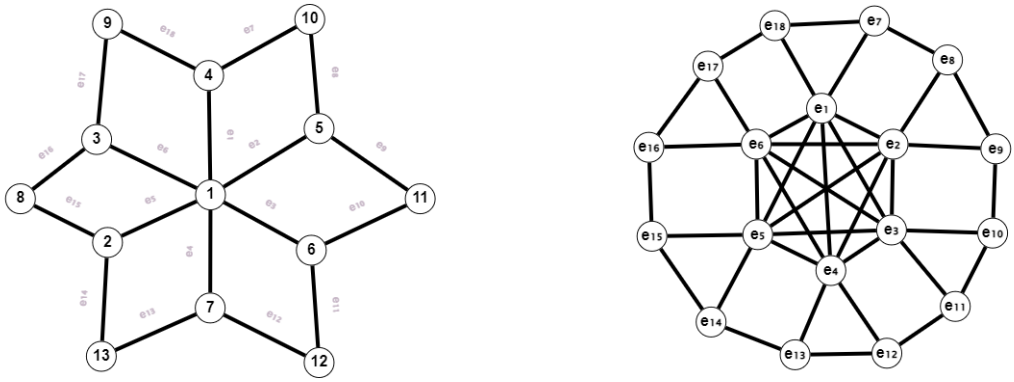


Şekil 4.6.*P* ve *L(P)*grafları

$L(P)$ grafında her bir köşenin statüsü ve grafın statü indeksleri aşağıdaki gibidir:

$$\sigma_{L(P)}(v) = 26$$
$$S_1\big(L(P)\big) = 1560$$
$$S_2\big(L(P)\big) = 20280$$

4.2.8.Gear grafın doğru grafının statüsü ve statü indeksleri



Şekil 4.7.G_6ve $L(G_6)$ grafları

$L(G_n)$ grafında her bir köşenin statüsü ve grafın statü indeksleri

$$v_1 = \{e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}\}$$

$v_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ olmak üzere

$$\sigma_{L(G_n)}(v_1) = 8n - 10$$

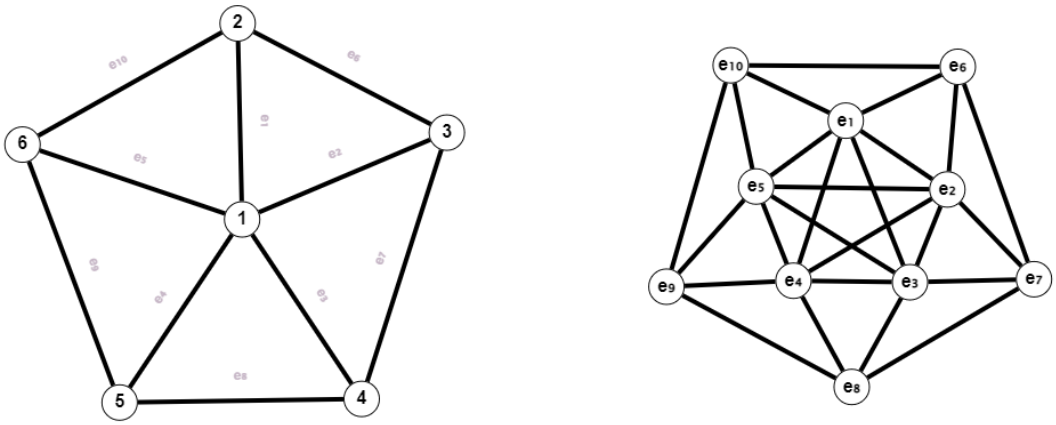
$$\sigma_{L(G_n)}(v_2) = 5n - 3$$

$$S_1\big(L(G_n)\big) = 5n^3 + 50n^2 - 63n$$

$$S_2\big(L(G_n)\big) = \frac{n(n-1)(5n-3)^2}{2} + 2n(8n-10)(5n-3) + 2n(8n-10)^2$$

olarak elde edilir.

4.2.9.Tekerlek grafın doğru grafının statüsü ve statü indeksleri



Şekil 4.8. W_n ve $L(W_n)$grafları

$L(W_n)$ grafında her bir köşenin statüsü ve grafın statü indeksleri

$$v_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_{(n-1)}\}$$

$v_2 = \{e_n, e_{(n+1)}, \dots, e_{(2n-2)}\}$olmak üzere

$$\sigma_{L(W_n)}(v_1) = 3n - 6$$

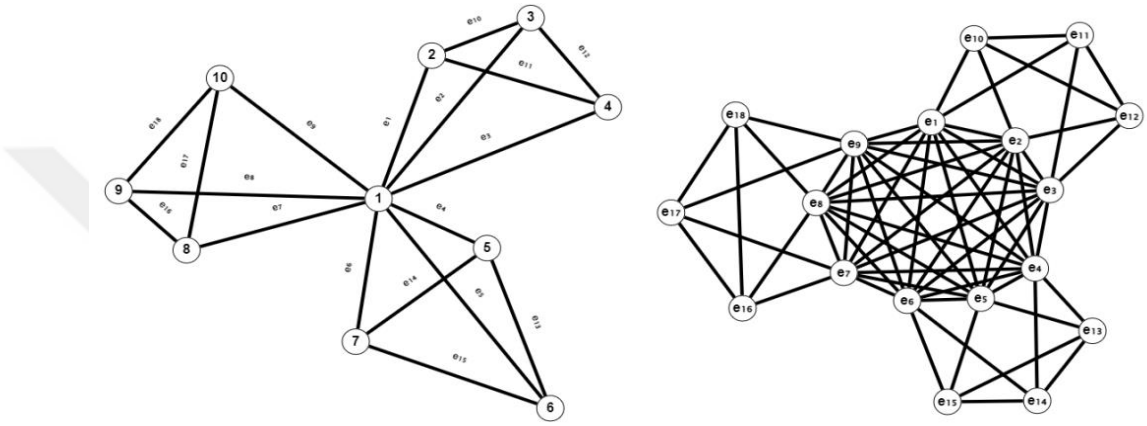
$$\sigma_{L(W_n)}(v_2) = 5n - 16; \; n \geq 6$$

$$S_1\big(L(W_n)\big) = (n-1)(3n^2+14n-64)$$

$$S_2\big(L(W_n)\big) = (n\text{-}1)[(5n-16)^2 + 2(5n-16)(3n-6) + \frac{9}{2}(n-2)^3]$$

olarak elde edilir.

4.2.10.Yel değirmeni grafın doğru grafının statüsü ve statü indeksleri



Şekil 4.9. W_n^m ve $L(W_n^m)$ grafları

$L(W_n^m)$ grafında her bir köşenin statüsü ve grafın statü indeksleri

$$v_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_{6,} e_7, e_8, e_9\}$$

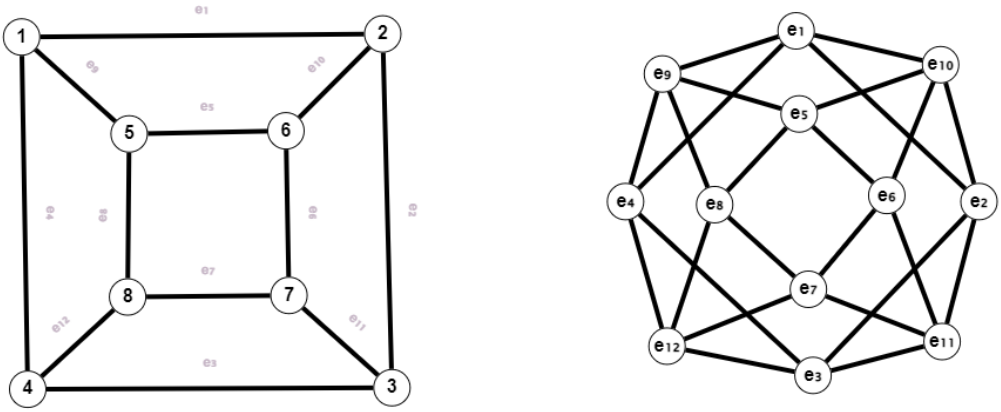
$v_2 = \{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15,} e_{16}, e_{17}, e_{18}\}$ olmak üzere

$$\sigma_{L(W_n^m)}(v_1) = (n^2-3n+2) + (m-1)\frac{(3n^2-5n+2)}{2}$$

$$\sigma_{L(W_n^m)}(v_2) = (n^2-3n+2) + (m-1)(n^2-2n+1)$$

olarak elde edilir.

4.2.11.Merdiven grafın doğru grafının statüsü ve statü indeksleri



Şekil 4.10. $L_n$ve $L(L_n)$ grafları

$L(L_n)$ grafında her bir köşenin statüsü ve grafın statü indeksleri

$$\sigma_{L(L_n)}(v) = \begin{cases} \dfrac{3n^2+8n-4}{4} & n\ çift \\ \dfrac{3n^2+8n-3}{4} & n\ tek \end{cases}$$

$$S_1(L(L_n)) = \begin{cases} 9n^3+24n^2-12n & n\ çift \\ 9n^3+24n^2-9n & n\ tek \end{cases}$$

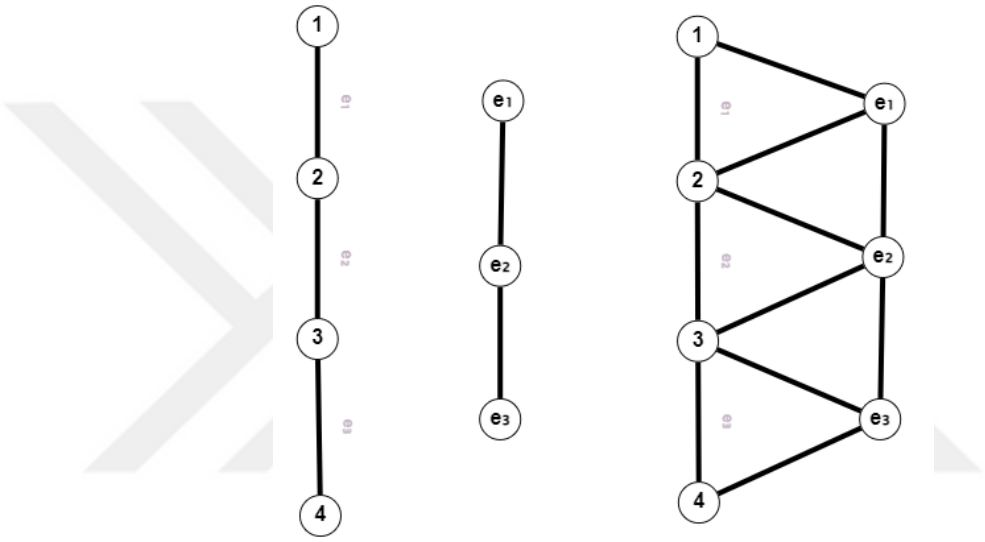
$$S_2\big(L(L_n)\big) = \begin{cases} \dfrac{3n(3n^2+8n-4)^2}{8} & n\ çift \\ \dfrac{3n(3n^2+8n-3)^2}{8} & n\ tek \end{cases}$$

olarak elde edilir.

4.3. Total Grafların Statü İndeksleri

4.3.1.Tanım. Köşeleri bir *G* grafının köşe ve kenarları olan, iki köşesinin komşu olabilmesi için *G* grafındaki köşe ve kenarların komşu ya da bitişik olması gereken grafa *G* grafının total grafı *T(G)* denir.

T(G) total grafının köşeleri G grafının köşe ve kenarları olduğundan *T(G)* grafının elde edilişinde *G* ve *L(G)* grafları kullanılabilir:



Şekil 4.11.*G, L(G)* ve *T(G)* grafları

T(G) total grafının köşeleri *G* grafının köşe ve kenarları olduğundan *T(G)* total grafının köşe sayısı

$$\left|V\left(T(G)\right)\right| = |V(G)| + |E(G)|$$
$$= n + m$$

dir.

T(G) total grafının kenar sayısı, *G* grafının kenar sayısı, *L(G)* doğru grafının kenar sayısı ve *G* grafı ile *L(G)* grafını birleştiren kenarların toplamıdır. *G* grafı ile *L(G)* grafını birleştiren kenar sayısı *G* grafının köşe derecelerinin toplamı kadardır ve bu da *2m*'dir. Böylece *T(G)* total grafının kenar sayısı

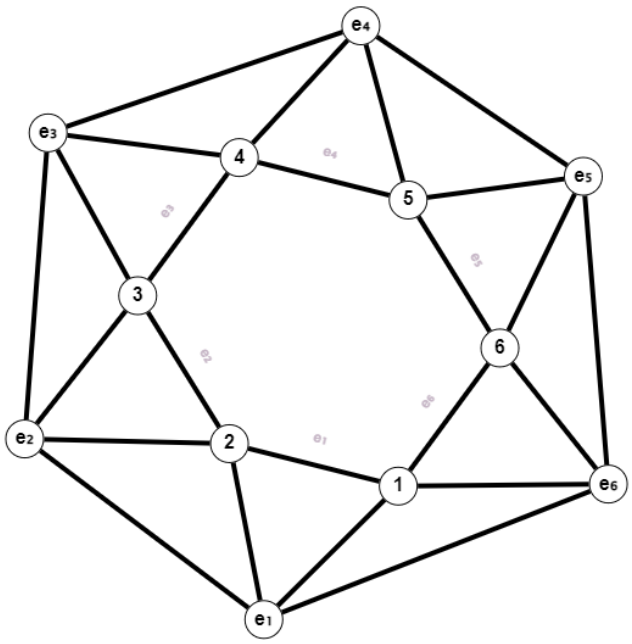
$$\left|E\left(T(G)\right)\right| = 2m + \frac{1}{2}\sum_{e=v_i v_j \in E(G)} d_i^2$$

olur. *T(G)* grafının kenar sayısını birinci Zagreb indeksiyle ifade etmek istenirse

$$\left|E\left(T(G)\right)\right| = 2m + \frac{1}{2}\mathrm{M}_1(\mathrm{G})$$

olur.

4.3.2. Devir grafın total grafının statüsü ve statü indeksleri



Şekil 4.12. $T(C_n)$grafı

$T(C_n)$ grafında her bir köşenin statüsü ve grafın statü indeksleri

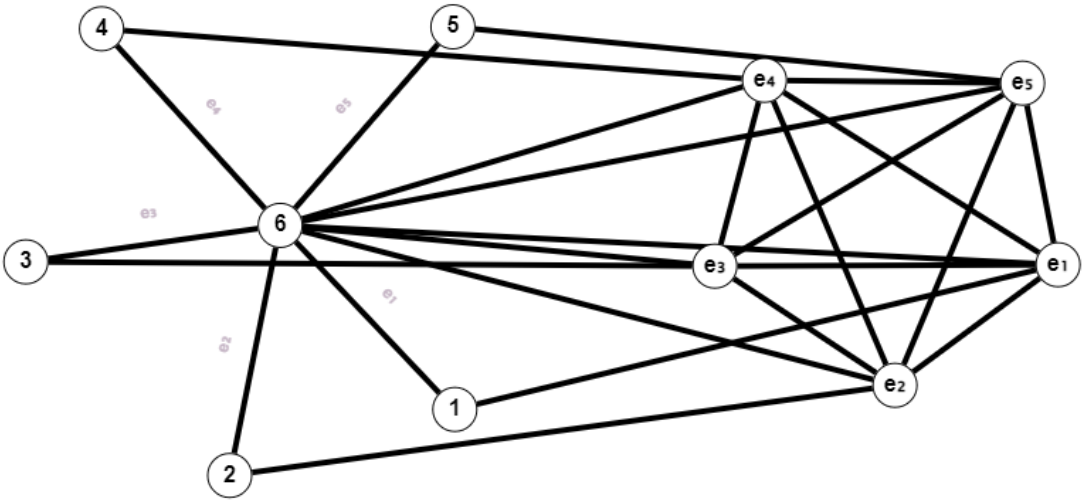
$$\sigma_{T(C_n)}(v) = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$S_1\left(T(C_n)\right) = 4n^3 + 4n^2$$

$$S_2\big(T(C_n)\big) = n^5 + 2n^4 + n^3$$

olarak elde edilir.

4.3.3. Yıldız grafın total grafının statüsü ve statü indeksleri



Şekil 4.13. $T(S_n)$grafı

$T(S_n)$ grafında her bir köşenin statüsü ve grafın statü indeksleri

v_1; yıldız grafın merkez köşesini

v_2; yıldız grafın uç köşelerini

v_3; yıldız grafın doğru grafının köşelerini temsil etsin

$$\sigma_{T(S_n)}(v_1) = 2n - 2$$

$$\sigma_{T(S_n)}(v_2) = 4n - 6$$

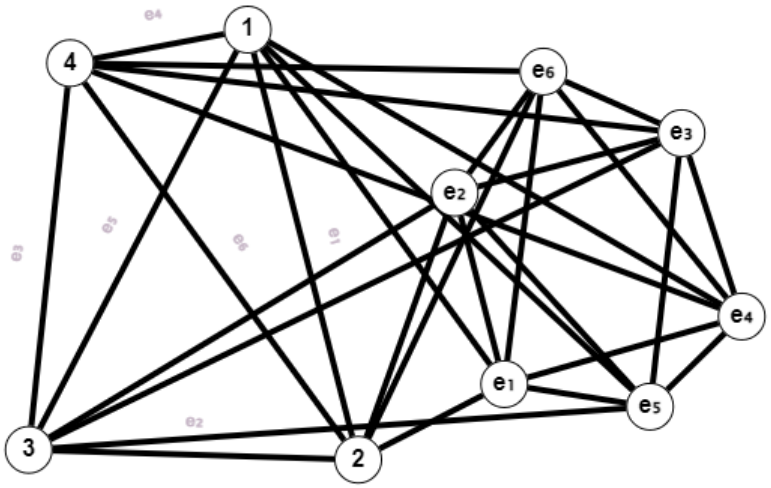
$$\sigma_{T(S_n)}(v_3) = 3n - 4$$

$$S_1\big(T(S_n)\big) = 3n^3 + 5n^2 - 24n + 16$$

$$S_2\big(T(s_n)\big) = \frac{9n^4 + n^3 - 82n^2 + 128n - 56}{2}$$

olarak elde edilir.

4.3.4. Tam grafın total grafının statüsü ve statü indeksleri



Şekil 4.14. $T(K_n)$ grafı

$T(K_n)$ grafında her bir köşenin statüsü ve grafın statü indeksleri

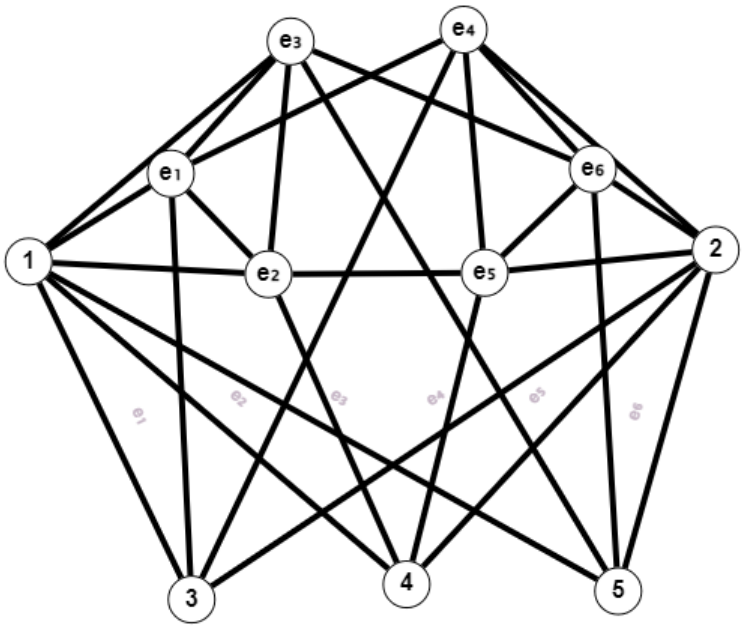
$$\sigma_{T(K_n)}(v) = n(n-1)$$

$$S_1\big(T(K_n)\big) = n^5 - n^4 - n^3 + n^2$$

$$S_2\big(T(K_n)\big) = \frac{(n^3-n)(n^2-n)^2}{2}$$

olarak elde edilir.

4.3.5. İki parçalı tam grafın total grafının statüsü ve statü indeksleri



Şekil 4.15. $T(K_{r,s})$ grafı

$T(K_{r,s})$ grafında her bir köşenin statüsü ve grafın statü indeksleri

v_1; iki parçalı tam grafının r adet köşelerini

v_2; iki parçalı tam grafının s adet köşelerini

v_3; iki parçalı tam grafın doğru grafının köşelerini temsil etsin

$$\sigma_{T(K_{r,s})}(v_1) = 4s + 2r - 2$$

$$\sigma_{T(K_{r,s})}(v_2) = 2sr + 2s - 2$$

$$\sigma_{T(K_{r,s})}(v_3) = 2sr + s + r - 2$$

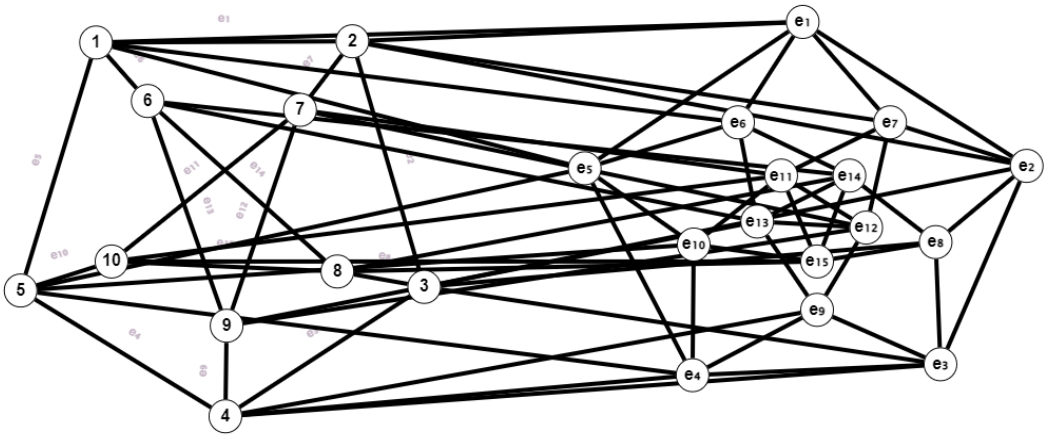
$$S_1\left(T\left(K_{r,s}\right)\right) = rs[(8rs + 14s + 6r - 12) + (s + r - 2)(2sr + s + r - 2)]$$

$$S_2\left(T\left(K_{r,s}\right)\right) = rs\left[(4s + 2r - 2)(4rs + 3s + r - 4)\right.$$

$$\left. + (2rs + 2s - 2)(2sr + s + r - 2) + \frac{(s + r - 2)(2sr + s + r - 2)^2}{2}\right]$$

olarak elde edilir.

4.3.6. Petersen grafın total grafının statüsü ve statü indeksleri



Şekil 4.16. $T(P)$ grafı

$T(P)$ grafında her bir köşenin statüsü ve grafın statü indeksleri

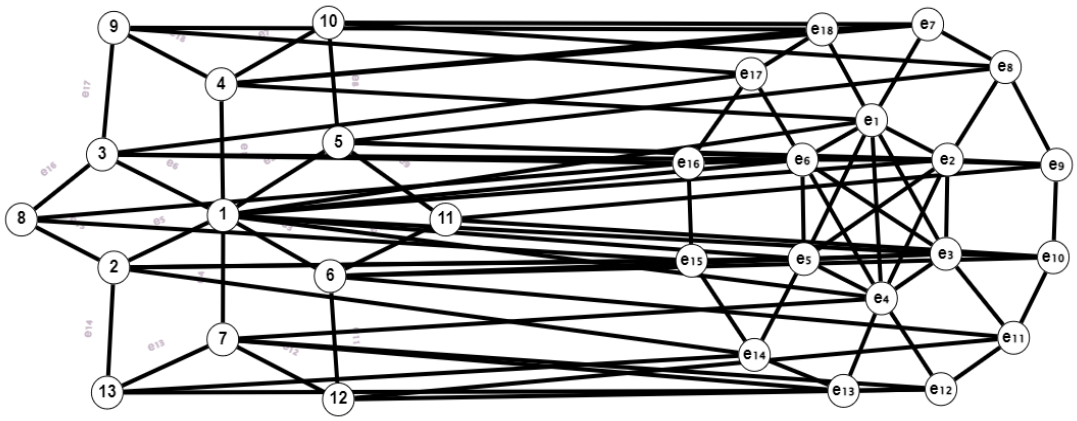
$$\sigma_{T(P)}(v) = 48$$

$$S_1\big(T(P)\big) = 7200$$

$$S_2\big(T(P)\big) = 172800$$

olarak elde edilir.

4.3.7. Gear grafın total grafının statüsü ve statü indeksleri



Şekil 4.17. $T(G_n)$ grafı

$T(G_n)$ grafında her bir köşenin statüsü ve grafın statü indeksleri

$v_1 = G_n$ grafının merkez köşesini temsil etsin

$v_2 = G_n$ grafında merkeze komşu olan köşeleri temsil etsin

$v_3 = G_n$ grafında merkeze komşu olmayan köşeleri temsil etsin

$$v_4 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

$$v_5 = \{e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}\}$$

olmak üzere

$$\sigma_{T(G_n)}(v_1) = 8n$$

$$\sigma_{T(G_n)}(v_2) = 13n - 12$$

$$\sigma_{T(G_n)}(v_3) = 18n - 24$$

$$\sigma_{T(G_n)}(v_4) = 10n - 5$$

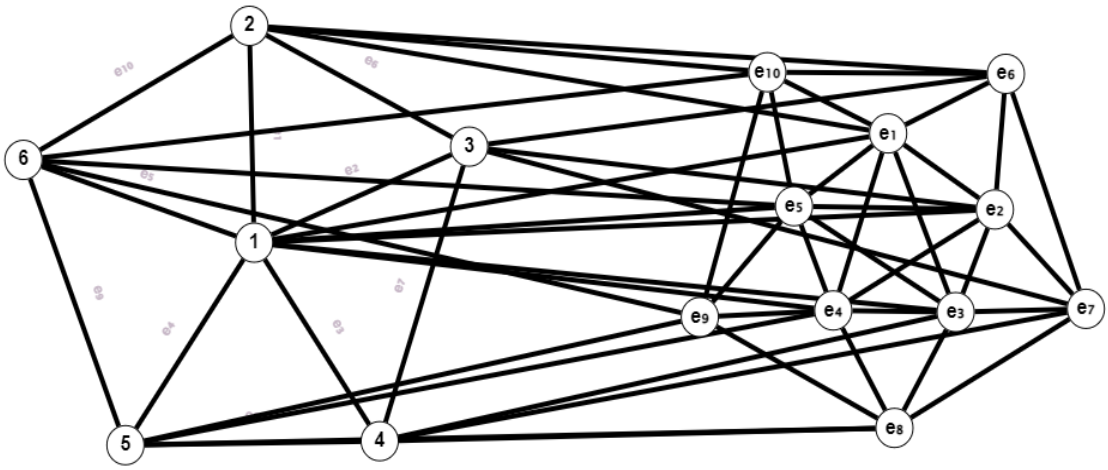
$$\sigma_{T(G_n)}(v_5) = 15n - 17$$

$$S_1\big(T(G_n)\big) = 10n^3 + 341n^2 - 353n$$

$$S_2\big(T(G_n)\big) = 50n^4 + 2362n^3 - \frac{9917}{2}n^2 + \frac{5191}{2}n$$

olarak elde edilir.

4.3.8. Tekerlek grafın total grafının statüsü ve statü indeksleri



Şekil 4.18. $T(W_n)$ grafı

$T(W_n)$ grafında her bir köşenin statüsü ve grafın statü indeksleri

$$v_1 = \{1\}$$
$$v_2 = \{2,3,\dots,n\}$$
$$v_3 = \{e_1, e_2, \dots, e_{(n-1)}\}$$
$$v_4 = \{e_n, e_{(n+1)}, \dots, e_{(2n-2)}\}$$

olmak üzere

$$\sigma_{T(W_n)}(v_1) = 4n - 4$$
$$\sigma_{T(W_n)}(v_2) = 7n - 17$$
$$\sigma_{T(W_n)}(v_3) = 5n - 8$$
$$\sigma_{T(W_n)}(v_4) = 8n - 23 \text{ ; } n \geq 6$$

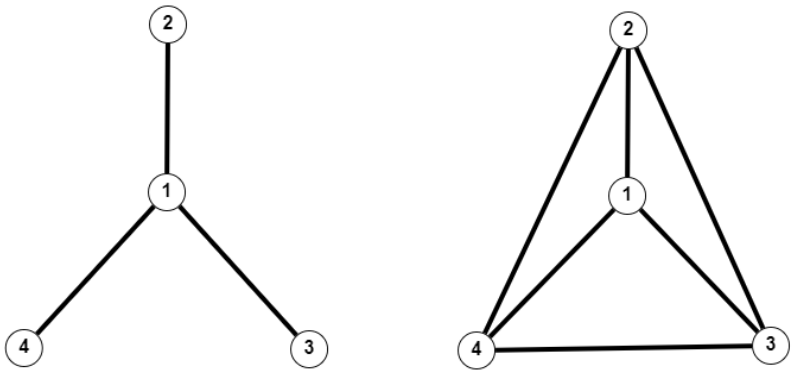
$$S_1\big(T(W_n)\big) = (n-1)(5n^2 + 100n - 264)$$

$$S_2\big(T(W_n)\big) = \frac{25}{2}n^4 + \frac{621}{2}n^3 - 2058n^2 + 3875n - 2140$$

olarak elde edilir.

4.4. Kuvvet Graflarının Statü İndeksleri

4.4.1.Tanım. Bir G grafının k'ıncı kuvveti G^k, aynı köşelere sahip olan ancak G'deki herhangi bir u ve v köşeleri arasındaki mesafe en fazla k olduğunda iki köşenin bitişik olduğu bir graftır.



Şekil 4.19. G ve G^2 grafları

Eğer bir grafın çapı k ise o grafın k-ıncı kuvveti bir tam graftır.

Aşağıdaki tabloda çapı 2 olan bazı graflar verilmiştir:

Çizelge 4.2. Bazı G graflarının 2. kuvveti

G	G^2
S_n	K_n
$K_{r,s}$	K_{r+s}
P	K_{10}
W_n	K_n
W_n^m	$K_{(n-1)m+1}$
P_3	K_3
C_4	K_4
C_5	K_5
L_3	K_6
D_3^m	K_{2m+1}

K_n grafının statüsü ve statü indeksleri ise şöyledir:

$$\sigma_{K_n} = n - 1$$
$$s_1(K_n) = n(n-1)^2$$
$$s_2(K_n) = \frac{n(n-1)^3}{2}$$

Böylelikle S_n, $K_{r,s}$, P, W_n, W_n^m , P_3, C_4, C_5, L_3, D_3^m graflarının 2. kuvvetlerinin statüsü ve statü indekslerini tabloya bakılarak kolaylıkla bulunabilir.

Örneğin $K_{r,s}$ grafının 2. kuvvetlerinin statüsü ve statü indeksleri

$$\sigma_{K_{r,s}^2} = s + r - 1$$
$$S_1\left(K_{r,s}^2\right) = (s+r)(s+r-1)^2$$
$$S_2\left(K_{r,s}^2\right) = \frac{(s+r)(s+r-1)^3}{2}$$

olarak elde edilir.

KAYNAKLAR

Bondy, J. A., Murty, U. S. R. (2008). Graph Theory, Springer, New York

Biggs, N. L., Lloyd, E. K., Wilson, R. J. (1986). Graph Theory 1736-1936, Oxford University Press, London

Gross, J. T. and Yellen, J. (2006). *Graph Theoryand Its Applications, 2nd ed.* Boca Raton, FL: CRCPress

Foulds, L. R. (1992). Graph Theory Applications. Springer, New York

Balakrishnan, R., Ranganathan, K. (2012). A Textbook of Graph Theory (Second Edition), Springer, New York

Gutman I., Trinajstić N. (1972). Graph the oryand molecular orbitals, Total electron energy of alternant hydro carbons Chem. Phys. Lett., 17, s. 535-538

Gutman, I. (2011). Multiplicative Zagreb indices of trees. *Bull. Soc. Math. Banja Luka*,18, s. 17-23

Xu, K.,Das, K. C., (2011). On Harary Index of Graphs, Discrete Applied Mathematics (159) 1631-1640

Das, K. C.,Gutman, I. and Furtula, B., (2010). On Second Geometric-Arithmetic Index of Graphs, Iranian Jurnal of Mathametical Chemistry, 1 (2)

Das, K. C.,Gutman, I. and Boris Furtula, (2010). On Third Geometric-Arithmetic Index of Graphs, Iranian Jurnal of Mathametical Chemistry, 1 (2), 29-36

Das, K. C., (2010). On Geometric-Arithmetic Index of Graphs, MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 64, 619-630

Das, K. C., (2010). Atom-Bond Connectivity Index of Graphs, Discrete Applied Mathematics, 158, 1181-1188

Harary F.,(1959). Status and contra status sociometry, Sociometry, Vol. 22, s.123-43

Ramane, H.S., Yalnaik, A.S. (2017). Status connectivity indices of graphs and its applications to the boiling point of benzenoid hydro carbons. J. Appl. Math. Comput. 55, 609–627

Skiena, S. (1990). Line Graphs, Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica, Reading, MA, Addison-Wesley, 128 and 135-139

Wiener, H. (1947). Structural determination of parafin boiling points, J. Amer. Chem. Soc. 69