NANOKOMPOZİT YAPILARIN GENEL ELASTİK SINIR KOŞULLARINDA DİNAMİK VE STABİLİTE ANALİZLERİ

Büşra UZUN

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NANOKOMPOZİT YAPILARIN GENEL ELASTİK SINIR KOŞULLARINDA DİNAMİK VE STABİLİTE ANALİZLERİ

Büşra UZUN
0000-0002-7636-7170

Prof. Dr. M. Özgür YAYLI
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA – 2023
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

NANOKOMPOZİT YAPILARIN GENEL ELASTİK SINIR KOŞULLARINDA DİNAMİK VE STABİLİTE ANALİZLERİ

Büşra UZUN

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. M. Özgür YAYLI

Bu tez çalışmasında, çeşitli nanokompozit yapılar için elastik sınır koşullarında serbest titreşim, statik ve burkulma formülasyonları değişik boyut etkili teoriler ile sunulmuştur. Kompozit nanotüplerin burulmalı titreşim analizleri yerel olmayan elastisite teorisi, değiştirilmiş gerilme çifti teorisi, yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisi ve şekil değiştirme değişimi teorisi ile sunulmuştur. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin burkulma ve serbest titreşim analizleri yerel olmayan elastisite teorisi ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ile gerçekleştirilmiştir. Karbon nanotüp takviyeli kompozit nanokirişlerin serbest titreşim analizleri yerel olmayan elastisite teorisi ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ile gerçekleştirilirken, burkulma analizi yerel olmayan elastisite teorisi ile gerçekleştirilmiştir. Bunlara ek olarak, elastik bir ortam içindeki dairesel olmayan nanoçubukların çarpılma fonksiyonlarını içeren ve yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan burulmalı titreşimi incelenmiştir. Problemlerin çözümünde düşey yer değiştirme ve burulma açısı fonksiyonu Fourier sinüs serisi seçilirken, dönme fonksiyonu Fourier kosinüs serisi seçilmiştir. Bu fonksiyonlar yönetici denklemlerde kullanılarak her problem için ayrı Fourier katsayıları hesaplanmıştır. Daha sonra, Stoke dönüşümleri sınır koşullarına dâhil edilerek her problemin lineer denklemleri elde edilmiştir. Elde edilen lineer denklemler kullanılarak her problem için katsayılar matrisi oluşturulmuştur. Burulmalı titreşim ve enine titreşim problemleri için elde edilen katsayılar matrisinin özdeğerleri açısal frekansları verirken burkulma problemleri için elde edilen katsayılar matrisinin özdeğerleri burkulma yüklerini vermektedir. Bu tez çalışmasının sonuçları literatürde bulunan diğer akademik çalışmalar ile kıyaslanmıştır ve doğruluğu ispat edilmiştir. Ayrıca, bu tez çalışmasında çeşitli nanokompozit yapılar için bulunan sonuçlar bir dizi şekiller ve tablolar ile sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Nanokompozit, titreşim, burkulma, boyut etkisi, Fourier serileri
2023, xiv + 225 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

DYNAMIC AND STABILITY ANALYSES OF NANOCOMPOSITE STRUCTURES AT GENERAL ELASTIC BOUNDARY CONDITIONS

Büşra UZUN

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Civil Engineering

Supervisor: Prof. Dr. M. Özgür YAYLI

In this thesis, free vibration, static and buckling formulations for various nanocomposite structures under elastic boundary conditions are presented with different size-dependent theories. Torsional vibration analyses of composite nanotubes are presented by nonlocal elasticity theory, modified couple stress theory, nonlocal strain gradient theory and strain gradient theory. Buckling and free vibration analyses of functionally graded composite nanobeams are performed by nonlocal elasticity theory and modified couple stress theory. The free vibration analysis of carbon nanotube reinforced composite nanobeams is performed by nonlocal elasticity theory and modified couple stress theory, while the buckling analysis is performed by nonlocal elasticity theory. In addition, the torsional vibration of non-circular nanorods in an elastic medium based on the theory of nonlocal strain gradient involving warping functions is investigated. In solving the problems, the vertical displacement and torsion angle functions are chosen as Fourier sine series, while the rotation function is chosen as Fourier cosine series. These functions are used in the governing equations and separate Fourier coefficients are calculated for each problem. Then, linear equations of each problem are obtained by including Stokes' transforms in the boundary conditions. The coefficients matrix for each problem is formed using the linear equations obtained. The eigenvalues of the coefficients matrix obtained for torsional vibration and transverse vibration problems give the angular frequencies, while the eigenvalues of the coefficients matrix obtained for buckling problems give the buckling loads. The results of this thesis are compared with other academic studies in the literature and their accuracy is proved. In addition, the results found in this thesis for various nanocomposite structures are presented in a series of figures and tables.

Key words: Nanocomposite, vibration, buckling, size effect, Fourier series
2023, xiv + 225 pages.

TEŞEKKÜR

Akademik çalışmalarımızda, bilgisini, desteğini ve emeğini ortaya koyan; hoşgörüsü ve anlayışıyla çalışmalarımızı daha kolay hale getiren danışman hocam sayın Prof. Dr. M. Özgür YAYLI'ya,

Bu çalışmaya değerli görüşleri ve tecrübeleri ile yön veren tez izleme komite üyelerim sayın Prof. Dr. Babür DELİKTAŞ ve Prof. Dr. Şeref Doğuşcan AKBAŞ'a,

Birlikte çalıştığımız için sürekli bilgi paylaşımında bulunarak ortak çalışmalar yaptığımız ve danıştığım her durumda desteklerini gösteren sayın Dr. Öğr. Üyesi Uğur KAFKAS ve Dr. Öğr. Üyesi Gökhan GÜÇLÜ'ye

Çalışma sürecinde, hem bölümümüzle ilgili konularda hem de akademik çalışmaya/üretmeye yönelik teşvik ve takdirleriyle desteğini esirgemeyen Bölüm Başkanımız sayın Prof. Dr. Adem DOĞANGÜN'e,

Manevi destekleriyle bana güç veren değerli dostlarıma,

Değerli tecrübesi ve bilgisi ile çalışmalarımda bana yol gösteren, lisans öğrenimimden bu yana örnek aldığım ve kendisiyle çalışmaktan büyük onur duyduğum saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ömer CİVALEK'e,

Maddi, manevi desteklerini benden bir an olsun esirgemeyen, hayatım boyunca aldığım kararlarda saygı ve sevgileriyle yanımda olan, varlıklarıyla kendimi şanslı hissettiren sevgili Annem, Kardeşim ve Rahmetli Babam'a teşekkürlerimi sunarım.

Büşra UZUN
…/…/…….

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....i
ABSTRACT.....ii
TEŞEKKÜR.....iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....x
ÇİZELGELER DİZİNİ.....xiii
1. GİRİŞ.....1
1.1. Nanoteknoloji ve Boyut Etkisi.....1
1.2. Karbon nanotüpler.....2
1.3. Nanokompozitler.....5
2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI.....8
2.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Gözenekli Kompozitlerin Malzeme Özellikleri.....8
2.1.1. Tüp şeklindeki fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli kompozitler.....8
2.1.2. Dikdörtgen kesitli fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli kompozitler.....11
2.2. Karbon Nanotüp Takviyeli Kompozitlerin Malzeme Özellikleri.....17
2.3. Nötr Eksenin Yerinin Belirlenmesi.....19
2.4. Yönetici ve Hareket Denklemlerinin Yerel Olmayan Elastisite Teorisi ile Elde Edilmesi.....22
2.4.1. Yerel olmayan elastisite teorisine göre kompozit nanotüplerin burulmalı titreşim denklemleri.....24
2.4.2. Kompozit nanokirişlerin Rayleigh kiriş ve yerel olmayan elastisite teorisine dayanan titreşim denklemleri.....28
2.4.3. Kompozit nanokirişlerin Euler-Bernoulli kiriş ve yerel olmayan elastisite teorisine dayanan burkulma denklemleri.....32
2.4.4. Kompozit nanokirişlerin Timoshenko kiriş ve yerel olmayan elastisite teorisine dayanan titreşim denklemleri.....34
2.4.5. Kompozit nanokirişlerin Timoshenko kiriş ve yerel olmayan elastisite teorisine dayanan burkulma denklemleri.....37
2.5. Yönetici ve Hareket Denklemlerinin Değiştirilmiş Gerilme Çifti Teorisi ile Elde Edilmesi.....38
2.5.1. Kompozit nanotüplerin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan burulmalı titreşim denklemleri.....39
2.5.2. Kompozit nanokirişlerin Rayleigh kiriş ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan titreşim denklemleri.....43
2.5.3. Kompozit nanokirişlerin Euler-Bernoulli kiriş ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan burkulma denklemleri.....44
2.6. Yönetici ve Hareket Denklemlerinin Yerel Olmayan Şekil Değiştirme Değişimi Teorisi ile Elde Edilmesi.....46
2.6.1. Kompozit nanotüplerin yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan burulmalı titreşim denklemleri.....47
2.6.2. Dairesel olmayan nanoçubukların yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan burulmalı titreşim denklemleri.....49
2.7. Yönetici ve Hareket Denklemlerinin Şekil Değiştirme Değişimi Teorisi ile Elde Edilmesi.....54
2.8. Kaynak Araştırması.....57
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....61

3.1. Fourier Serileri 61
3.1.1. Fourier Kosinüs Serisi 61
3.1.2. Fourier Sinüs Serisi 62
3.2. Stoke Dönüşümü 63
3.3. Kompozit Nanotüplerin Yerel Olmayan Elastisite Teorisine Dayanan Burulmalı Titreşim Denkleminin Çözümü 67
3.3.1. Kompozit nanotüplerin yerel olmayan elastisite teorisine dayanan statik burulma denklemi 68
3.3.2. Kompozit nanotüplerin yerel olmayan elastisite teorisine dayanan özdeğer problemi 69
3.4. Kompozit Rayleigh Nanokirişlerinin Yerel Olmayan Elastisite Teorisine Dayanan Titreşim Denkleminin Çözümü 72
3.4.1. Kompozit Rayleigh nanokirişlerinin yerel olmayan titreşimine dayanan statik çökme denklemi 73
3.4.2. Kompozit Rayleigh nanokirişlerinin yerel olmayan titreşimi için özdeğer problemi 77
3.5. Kompozit Euler-Bernoulli Nanokirişlerinin Yerel Olmayan Elastisite Teorisine Dayanan Burkulma Denkleminin Çözümü 83
3.5.1. Kompozit Euler-Bernoulli nanokirişlerinin yerel olmayan burkulmasına dayanan statik çökme denklemi 83
3.5.2. Kompozit Euler-Bernoulli nanokirişlerinin yerel olmayan burkulması için özdeğer problemi 85
3.6. Kompozit Timoshenko Nanokirişlerinin Yerel Olmayan Elastisite Teorisine Dayanan Titreşim Denkleminin Çözümü 90
3.6.1. Kompozit Timoshenko nanokirişlerinin yerel olmayan titreşimine dayanan statik çökme denklemi 92
3.6.2. Kompozit Timoshenko nanokirişlerinin yerel olmayan titreşimi için özdeğer problemi 94
3.7. Kompozit Timoshenko Nanokirişlerinin Yerel Olmayan Elastisite Teorisine Dayanan Burkulma Denkleminin Çözümü 99
3.7.1. Kompozit Timoshenko nanokirişlerinin yerel olmayan burkulmasına dayanan statik çökme denklemi 100
3.7.2. Kompozit Timoshenko nanokirişlerinin yerel olmayan burkulması için özdeğer problemi 102
3.8. Kompozit Nanotüplerin Değiştirilmiş Gerilme Çifti Teorisine Dayanan Burulmalı Titreşim Denkleminin Çözümü 106
3.8.1. Kompozit nanotüplerin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan statik burulma denklemi 107
3.8.2. Kompozit nanotüplerin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan özdeğer problemi 108
3.9. Kompozit Rayleigh Nanokirişlerinin Değiştirilmiş Gerilme Çifti Teorisine Dayanan Titreşim Denkleminin Çözümü 110
3.9.1. Kompozit Rayleigh nanokirişlerinin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan statik çökme denklemi 111
3.9.2. Kompozit Rayleigh nanokirişlerinin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan özdeğer problemi 112
3.10. Kompozit Euler-Bernoulli Nanokirişlerinin Değiştirilmiş Gerilme Çifti Teorisine Dayanan Burkulma Denkleminin Çözümü 116

3.10.1. Kompozit Euler-Bernoulli nanokirişlerinin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan statik çökme denklemi 116
3.10.2. Kompozit Euler-Bernoulli nanokirişlerinin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan özdeğer problemi 117
3.11. Kompozit Nanotüplerin Yerel Olmayan Şekil Değiştirme Değişimi Teorisine Dayanan Burulmalı Titreşim Denkleminin Çözümü 121
3.11.1. Kompozit nanotüplerin yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan statik burulma denklemi 121
3.11.2. Kompozit nanotüplerin yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan özdeğer problemi 122
3.12. Dairesel Olmayan Nanoçubukların Yerel Olmayan Şekil Değiştirme Değişimi Teorisine Dayanan Burulmalı Titreşim Denkleminin Çözümü 125
3.12.1. Dairesel olmayan nanoçubukların yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan statik denklemi 126
3.11.2. Dairesel olmayan nanoçubukların yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan özdeğer problemi 127
3.13. Kompozit Nanotüplerin Şekil Değiştirme Değişimi Teorisine Dayanan Burulmalı Titreşim Denkleminin Çözümü 129
3.13.1. Kompozit nanotüplerin şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan statik denklemi 130
3.13.2. Kompozit nanotüplerin şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan özdeğer problemi 131
4. BULGULAR ve TARTIŞMA 133
4.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kompozit Nanokirişlerin Analizleri 133
4.2. Karbon Nanotüp Takviyeli Kompozit Nanokirişlerin Analizleri 178
4.3. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kompozit Nanotüplerin Analizleri 190
4.4. Dairesel Olmayan Nanoçubukların Analizleri 198
5. SONUÇ 204
KAYNAKLAR 207
ÖZGEÇMİŞ 220

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
V_s	Seramik bileşenin hacimsel değişim oranı
V_m	Metal bileşenin hacimsel değişim oranı
r	Yarıçap doğrultusu
p	Malzeme değişim katsayısı
r_d	Dış yarıçap
r_i	İç yarıçap
F	Etkili malzeme özelliği
E	Elastisite modülü
ν	Poisson oranı
μ	Kayma modülü
ρ	Kütle yoğunluğu
$\bar{\vartheta}$	Gözeneklilik fonksiyonu
ϑ	Gözeneklilik oranı
h	Nanokirişin yüksekliği
b	Nanokirişin genişliği
E_{11}^{KNTTK}	Karbon nanotüp takviyeli kompozitin elastisite modülü
μ_{12}^{KNTTK}	Karbon nanotüp takviyeli kompozitin kayma modülü
ρ^{KNTTK}	Karbon nanotüp takviyeli kompozitin kütle yoğunluğu
ν^{KNTTK}	Karbon nanotüp takviyeli kompozitin Poisson oranı
η_1, η_2, η_3	Karbon nanotüp etki parametreleri
M_{KNT}	Karbon nanotüp kütle oranı
$E_{11}^{KNT}, E_{22}^{KNT}$	Karbon nanotüpün elastisite modülleri
μ_{12}^{KNT}	Karbon nanotüpün kayma modülü
ρ^{KNT}	Karbon nanotüpün kütle yoğunluğu
ν^{KNT}	Karbon nanotüpün Poisson oranı
E^{PMMA}	PMMA elastisite modülü
μ^{PMMA}	PMMA kayma modülü
ρ^{PMMA}	PMMA kütle yoğunluğu
ν^{PMMA}	PMMA Poisson oranı
h_0	Orta eksen ile nötr eksen arasındaki mesafe
$\sigma_{ij,i}$	Yerel olmayan gerilme tensörü
$\varkappa_j$	Kütle kuvveti yoğunluğu
t	Zaman
u_j	Deplasman vektörü
σ_{ij}	Klasik (yerel) gerilme tensörü
$\alpha(\lvert x' - x \rvert, \varsigma)$	Yerel olmayan çekirdek fonksiyonu
V	Hacim
ε_{ij}	Lineer şekil değiştirme tensörü
δ_{ij}	Kronecker delta fonksiyonu
λ, μ	Lame sabitleri
x_0, y_0, z_0	Orta ekseni referans alan yönler

x, y, z	Nötr ekseni referans alan yönler
a	Karakteristik iç uzunluk
$\bar{L}$	Karakteristik dış uzunluk
e_0	Malzeme sabiti
$e_0 a$	Yerel olmayan parametre
$\tau_{ij,i}$	Yerel olmayan kayma gerilmesi
τ_{ij}	Klasik (yerel) kayma gerilmesi
θ, φ	Burulma açısı (açısal yer değiştirme)
δ	Varyasyon opertörü
U	Şekil değiştirme enerjisi
K	Kinetik enerji
Λ	Dış yüklerin yaptığı iş
ρ^J	Kompozit nanotüpün kütle polar atalet momenti
M_b	Tork
μ^J	Kompozit nanotüpün kayma rijitliği
k_e	Elastik ortamın rijitliği
w, W	Düşey deplasman
M	Eğilme momenti
D_{11}	Eğilme rijitliği
A	Alan
c_w	Winkler zemin rijitliği
c_g	Pasternak zemin rijitliği
I_0, I_2	Kompozit nanokirişlerin kütle atalet momentleri
Q	Kesme kuvveti
P	Burkulma yükü
κ	Kayma düzeltme katsayısı
ϕ, ψ	Dönme
A_{55}	Kompozit nanokirişlerin kayma rijitliği
γ	Kayma şekil değiştirmesi
m_{ij}	Gerilme çifti tensörünün deviatorik kısmı
χ_{ij}	Dönme değişimi tensörü
l_s, l_d, l_0, l_1	Malzeme uzunluk ölçek parametreleri
Ω_i	Dönme vektörü
e_{ijk}	Permütasyon sembolü
$\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2$	Eliptik nanoçubuğun yarıçapları
r_3	Eşkenar üçgen kesite sahip nanoçubuğun kenar uzunluğu
ξ	Çarpılma fonksiyonu
J	Polar atalet momenti
I_A	Nanoçubukların kütle polar atalet momenti
γ_i	Dilatasyon (genleşme) değişimi vektörü
$\eta_{ijk}^{(1)}$	Deviatorik uzama değişimi tansörü
$p_i, \tau_{ijk}^{(1)}$	Yüksek mertebeden gerilme tensörleri
C_n	Kosinüs serisi içinde tanımlanan Fourier katsayısı
B_n	Sinüs serisi içinde tanımlanan Fourier katsayısı
$f(x)$	Tanım fonksiyonu kosinüs serisi olan fonksiyon
$\overline{f(x)}$	Tanım fonksiyonu sinüs serisi olan fonksiyon

ω	Açısal frekans

Kısaltmalar Açıklama

KNT	Karbon nanotüp
DNA	Deoksiribo Nükleik Asit
UV	Ultraviyole
PMMA	Polimetil metakrilat
FD	Fonksiyonel derecelendirilmiş
FDNT	Fonksiyonel derecelendirilmiş nanotüp
FDK-DD	Homojen dağılımlı gözeneklere sahip FD kompozit
FDK-O	Değişken dağılımlı gözeneklere sahip FD kompozit
FDK	Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit
KNTTK	Karbon nanotüp takviyeli kompozit
RKT	Rayleigh kiriş teorisi
EBKT	Euler-Bernoulli kiriş teorisi
TKT	Timoshenko kiriş teorisi
KNTTK-DD	Homojen dağılımlı KNT takviyeli kompozit
KNTTK-O	O şekilli dağılımlı KNT takviyeli kompozit
KNTTK-X	X şekilli dağılımlı KNT takviyeli kompozit
KNTTK-V	V şekilli dağılımlı KNT takviyeli kompozit
YOET	Yerel Olmayan Elastisite Teorisi
DGÇT	Değiştirilmiş Gerilme Çifti Teorisi
YOŞDDT	Yerel Olmayan Şekil Değiştirme Değişimi Teorisi
ŞDDT	Şekil Değiştirme Değişimi Teorisi
KT	Klasik Teori
GPa	Gigapascal
nm	Nanometre
m	Metre
nN	Nanonewton
kg	Kilogram
DTM	Diferansiyel dönüşüm metodu (Differential transform method)
DQEM	Diferensiyel kuadratür eleman metodu (Differential quadrature element method
ADM	Adomian dekompozisyon metodu (Adomian decomposition method)
HPM	Homotopi pertürbasyon metodu (Homotopy perturbation method)

ŞEKİLLER DİZİNİ

		Sayfa
Şekil 1.1.	Grafen tabakası (Jyoti ve Singh, 2021).....	2
Şekil 1.2.	Grafen tabakasından karbon nanotüp oluşumu (Jyoti ve Singh, 2021).....	3
Şekil 1.3.	Tek duvarlı ve çok duvarlı karbon nanotüpler (Mashkoor vd., 2020).....	3
Şekil 1.4.	Bir KNT gaz sensörünün şeması (Wang vd., 2016).....	4
Şekil 1.5.	Boeing 787 yolcu uçağı (https://www.comsol.de/blogs/protecting-aircraft-composites-from-lightning-strike-damage/).....	5
Şekil 1.6.	KNT/polimer kompozitlerin uygulamaları (Mohd Nurazzi vd., 2021).....	7
Şekil 2.1.	Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanotüplerin kesit görünüşleri..	9
Şekil 2.2.	Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanotüplerin elastisite modüllerinin r/r_i'ye göre değişimleri.....	11
Şekil 2.3.	Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin kesit görünüşleri	12
Şekil 2.4.	Sigmoid dağılımına uyan fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin elastisite modüllerinin z_0/h'ye göre değişimleri.....	15
Şekil 2.5.	Güç dağılımına uyan fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin elastisite modüllerinin z_0/h'ye göre değişimleri.....	17
Şekil 2.6.	Karbon nanotüp takviyeli kompozit nanokirişlerin kesit görünüşleri.....	18
Şekil 2.7.	Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerde nötr eksenin gösterimi.....	20
Şekil 2.8.	Elastik bir ortam içinde olan fonksiyonel derecelendirilmiş nanotüp.....	25
Şekil 2.9.	Elastik bir ortam içinde olan eliptik kesite sahip nanoçubuk.....	50
Şekil 2.10.	Elastik bir ortam içinde olan eşkenar üçgen kesite sahip nanoçubuk.....	50
Şekil 3.1.	Çökme yayları ile modellenmiş FD kompozit nanokiriş.....	74
Şekil 3.2.	Çökme yayları ile modellenmiş karbon nanotüp takviyeli kompozit nanokiriş.....	75
Şekil 3.3.	Dönel yaylar ile modellenmiş FD kompozit nanokiriş.....	75
Şekil 3.4.	Dönel yaylar ile modellenmiş karbon nanotüp takviyeli kompozit nanokiriş.....	75
Şekil 4.1.	FDK-II nanokirişinin boyutsuz frekanslarının yerel olmayan parametreye göre değişimi ($\overline{c_w} = \bar{c}_g = 0$ & EBKT).....	150
Şekil 4.2.	Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin birinci moddaki boyutsuz frekanslarının yerel olmayan parametreye göre değişimi ($\overline{c_w} = \bar{c}_g = 0$ & EBKT).....	151
Şekil 4.3.	Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin farklı kiriş teorileri için boyutsuz frekanslarının yerel olmayan parametreye göre değişimi ($\overline{c_w} = \bar{c}_g = 0$ & mod 1).....	152
Şekil 4.4.	Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit Timoshenko nanokirişlerinin yerel olmayan elastisite teorisi için boyutsuz frekanslarının $\overline{c_w}$ ve $\bar{c}_g$'ye göre değişimi (mod 1).....	153
Şekil 4.5.	Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişin yerel olmayan elastisite teorisi için boyutsuz frekanslarının $e_0 a$ ve p'ye göre değişimi (EBKT & mod 1).....	154
Şekil 4.6.	Fonksiyonel derecelendirilmiş yerel olmayan kompozit nanokirişlerin boyutsuz frekanslarının Winkler parametresine göre değişimi ($\bar{c}_g = 0$ & mod 1 & EBKT).....	155

Şekil 4.7. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit yerel olmayan nanokirişlerin boyutsuz frekanslarının çökme yayı parametresine göre değişimi ($\overline{c_w} = \overline{c_g} = 10$ & TKT)..... 156
Şekil 4.8. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit yerel olmayan nanokirişlerin frekans oranlarının çökme yayı parametresine göre değişimi ($\overline{c_w} = \overline{c_g} = 10$ & FDK-O-II)..... 157
Şekil 4.9. Fonksiyonel derecelendirilmiş yerel olmayan nanokirişlerin boyutsuz burkulma yüklerinin mod numarası ve malzeme değişim katsayısına göre değişimi($\overline{c_w} = 10^{-10}$ & $\overline{c_g} = 0$)..... 162
Şekil 4.10. FDK-I nanokirişlerin boyutsuz burkulma yüklerinin yerel olmayan parametreye göre değişimi ($\overline{c_w} = 10^{-10}$ & $\overline{c_g} = 0$)..... 162
Şekil 4.11. FDK-DD-I nanokirişlerin boyutsuz burkulma yüklerinin yerel olmayan parametreye göre değişimi ($\overline{c_w} = 10^{-10}$ & $\overline{c_g} = 0$)..... 163
Şekil 4.12. FDK-O-I nanokirişlerin boyutsuz burkulma yüklerinin yerel olmayan parametreye göre değişimi ($\overline{c_w} = 10^{-10}$ & $\overline{c_g} = 0$)..... 163
Şekil 4.13. Sigmoid kuralına uyan FD nanokirişlerin burkulma yükü oranlarının Pasternak parametresine göre değişimi..... 164
Şekil 4.14. Güç kuralına uyan FD nanokirişlerin burkulma yükü oranlarının Pasternak parametresine göre değişimi..... 165
Şekil 4.15. Güç kuralına uyan FD nanokirişlerin burkulma yükü oranlarının Winkler parametresine göre değişimi..... 166
Şekil 4.16. Güç kuralına uyan FD nanokirişlerin burkulma yüklerinin malzeme değişim katsayısı ve gözeneklilik katsayısına göre değişimi..... 167
Şekil 4.17. FD Euler-Bernoulli ve Timoshenko nanokirişlerinin burkulma yüklerinin yerel olmayan parametreye göre değişimi..... 168
Şekil 4.18. FD Euler-Bernoulli ve Timoshenko nanokirişlerinin burkulma yüklerinin malzeme değişim katsayısına göre değişimi..... 168
Şekil 4.19. FD Rayleigh nanokirişlerinin boyutsuz frekanslarının malzeme uzunluk ölçek parametresine göre değişimi..... 171
Şekil 4.20. FDK-II nanokirişinin boyutsuz frekanslarının l_d ve p'ye göre değişimi (DGÇT & RKT)..... 171
Şekil 4.21. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin boyutsuz frekanslarının çökme yayı parametresine göre değişimi (DGÇT & RKT)..... 172
Şekil 4.22. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin boyutsuz frekanslarının dönel yay parametresine göre değişimi (DGÇT & RKT)..... 173
Şekil 4.23. FD kompozit nanokirişlerin boyutsuz burkulma yüklerinin malzeme uzunluk ölçek parametresine göre değişimi ($\overline{c_w} = 10^{-10}$)..... 174
Şekil 4.24. FD kompozit nanokirişlerin boyutsuz burkulma yüklerinin Winkler parametresine göre değişimi (DGÇT)..... 174
Şekil 4.25. FDK-O-II kompozit nanokirişinin boyutsuz burkulma yüklerinin l_d ve ϑ'ye göre değişimi..... 175
Şekil 4.26. FDK-II kompozit nanokirişinin boyutsuz frekanslarının $\overline{T_0}$ ve $\overline{T_L}$'ye göre değişimi (YOET & RKT)..... 176
Şekil 4.27. FDK-II kompozit nanokirişinin boyutsuz frekanslarının $\overline{R_0}$ ve $\overline{R_L}$'ye göre değişimi (YOET & RKT)..... 176

Şekil 4.28. FDK-II kompozit nanokirişinin boyutsuz frekanslarının $\overline{R_0}$ ve $\overline{R_L}$'ye göre değişimi (DGÇT & EBKT)..... 177
Şekil 4.29. FD kompozit nanokirişlerin boyutsuz frekanslarının p ve ϑ'ye göre değişimi (EBKT)..... 178
Şekil 4.30. KNTTK-DD nanokirişinin boyutsuz frekanslarının $\overline{c_w}$'ye göre değişimi ($\overline{c_g} = 0{,}4$ & YOET)..... 182
Şekil 4.31. KNTTK nanokirişlerin boyutsuz frekanslarının mod numarasına göre değişimi (YOET)..... 183
Şekil 4.32. KNTTK-DD nanokirişlerinin boyutsuz frekanslarının farklı kiriş teorilerine göre değişimi ($\overline{c_w} = \overline{c_g} = 0$)..... 184
Şekil 4.33. KNTTK-DD nanokirişlerinin boyutsuz burkulma yüklerinin e_0a/h'ye göre değişimi ($V_{KNT}^* = 0{,}12$)..... 185
Şekil 4.34. KNTTK-DD nanokirişlerinin boyutsuz burkulma yüklerinin e_0a/h'ye göre değişimi ($V_{KNT}^* = 0{,}17$)..... 186
Şekil 4.35. KNTTK-DD nanokirişlerinin boyutsuz burkulma yüklerinin e_0a/h'ye göre değişimi ($V_{KNT}^* = 0{,}28$)..... 186
Şekil 4.36. KNTTK-DD nanokirişlerinin boyutsuz burkulma yüklerinin $\overline{c_g}$'ye göre değişimi ($V_{KNT}^* = 0{,}12$)..... 187
Şekil 4.37. KNTTK-DD nanokirişlerinin boyutsuz frekanslarının l_d/h'ye göre değişimi ($V_{KNT}^* = 0{,}12$)..... 188
Şekil 4.38. DGÇT'ne dayanan KNTTK nanokirişlerinin boyutsuz frekanslarının mod numarasına göre değişimi..... 189
Şekil 4.39. KNTTK-DD nanokirişinin boyutsuz frekanslarının $\overline{T_0}$ ve $\overline{T_L}$'ye göre değişimi..... 190
Şekil 4.40. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanotüplerin ŞDDT (Aifantis)'ne göre elde edilen frekansları..... 192
Şekil 4.41. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanotüplerin ŞDDT (Lam)'ne göre elde edilen frekansları..... 193
Şekil 4.42. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanotüplerin DGÇT'ne göre elde edilen frekansları..... 193
Şekil 4.43. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanotüplerin YOET'ne göre elde edilen frekansları..... 194
Şekil 4.44. KT'ye ait frekansların ŞDDT (Aifantis), ŞDDT (Lam) ve DGÇT'ne ait frekanslar ile karşılaştırılması..... 195
Şekil 4.45. KT'ye ait frekansların YOŞDD ve YOET'ne ait frekanslar ile karşılaştırılması..... 196
Şekil 4.46. Gözenekli ve gözeneksiz nanotüplerin boyut parametrelerine göre frekanslarının değişimi..... 197
Şekil 4.47. Nanotüplerin elastik ortam parametresine göre frekanslarının değişimi..... 198
Şekil 4.48. Nanoçubukların frekanslarının yerel olmayan parametreye göre değişimi 199
Şekil 4.49. Nanoçubukların frekanslarının l_s'ye göre değişimi..... 200
Şekil 4.50. Burulma frekanslarının $\overline{K_0}$ = $\overline{K_L}$ değerlerine göre değişimi..... 201
Şekil 4.51. Burulma frekanslarının elastik ortam parametresine göre değişimi..... 202
Şekil 4.52. Boyut parametrelerinin etkilerinin bir arada gösterimi..... 203

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 4.1. Winkler-Pasternak zemini üzerindeki yerel olmayan Euler-Bernoulli nanokirişinin boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet)..... 135
Çizelge 4.2. Winkler-Pasternak zemini üzerindeki yerel olmayan Euler-Bernoulli nanokirişinin boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (ankastre mesnet-ankastre mesnet)..... 136
Çizelge 4.3. Winkler zemini üzerindeki Euler-Bernoulli kirişinin boyutsuz klasik frekanslarının çeşitli çözüm yöntemleri ile karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet)..... 137
Çizelge 4.4. Winkler zemini üzerindeki Euler-Bernoulli kirişinin boyutsuz klasik frekanslarının çeşitli çözüm yöntemleri ile karşılaştırılması (ankastre mesnet-ankastre mesnet)..... 138
Çizelge 4.5. Düşük rijitliğe sahip çökme yayları ile mesnetlenmiş Euler-Bernoulli kirişinin boyutsuz klasik frekanslarının karşılaştırılması (mod 1)..... 140
Çizelge 4.6. Yüksek rijitliğe sahip çökme yayları ile mesnetlenmiş Euler-Bernoulli kirişinin boyutsuz klasik frekanslarının karşılaştırılması (mod 1)..... 141
Çizelge 4.7. Düşük rijitliğe sahip dönel yaylar ile mesnetlenmiş Euler-Bernoulli kirişinin boyutsuz klasik frekanslarının karşılaştırılması (mod 1)..... 142
Çizelge 4.8. Yüksek rijitliğe sahip dönel yaylar ile mesnetlenmiş Euler-Bernoulli kirişinin boyutsuz klasik frekanslarının karşılaştırılması (mod 1)..... 143
Çizelge 4.9. Winkler-Pasternak zemini üzerindeki yerel olmayan Timoshenko nanokirişinin boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet)..... 145
Çizelge 4.10. Yerel olmayan Timoshenko nanokirişinin boyutsuz frekanslarının çeşitli mesnet koşullarında karşılaştırılması ($e_0a/L = 0,2$)..... 146
Çizelge 4.11. Yerel olmayan Rayleigh ve Euler-Bernoulli nanokirişlerinin boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet, $e_0a/L = 0,2$)..... 146
Çizelge 4.12. Gözenekli kirişlerinin boyutsuz klasik frekanslarının karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet)..... 147
Çizelge 4.13. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması..... 148
Çizelge 4.14. Yerel olmayan fonksiyonel derecelendirilmiş Timoshenko nanokirişlerinin boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet)..... 149
Çizelge 4.15. Klasik homojen Euler-Bernoulli kirişlerinin boyutsuz burkulma yüklerinin karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet)..... 158
Çizelge 4.16. Klasik homojen Euler-Bernoulli kirişlerinin boyutsuz burkulma yüklerinin karşılaştırılması (ankastre mesnet-ankastre mesnet).. 159

Çizelge 4.17. Yerel olmayan Euler-Bernoulli nanokirişlerinin boyutsuz burkulma yüklerinin karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet, $L/h = 50$)..... 159
Çizelge 4.18. Yerel olmayan Euler-Bernoulli nanokirişlerinin burkulma yüklerinin (nN) karşılaştırılması (ankastre mesnet-ankastre mesnet, $L/h = 20$)..... 160
Çizelge 4.19. Fonksiyonel derecelendirilmiş klasik Timoshenko kirişlerinin boyutsuz burkulma yüklerinin karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet, L/h=5)..... 161
Çizelge 4.20. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan homojen küçük ölçekli kirişlerin boyutsuz titreşim frekanslarının karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet)..... 169
Çizelge 4.21. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan homojen küçük ölçekli kirişlerin boyutsuz titreşim frekanslarının karşılaştırılması (ankastre mesnet-ankastre mesnet)..... 170
Çizelge 4.22. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan homojen küçük ölçekli kirişlerin boyutsuz burkulma yüklerinin karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet)..... 173
Çizelge 4.23. KNTTK kirişlerin boyutsuz klasik frekanslarının karşılaştırılması ($V_{KNT}^{*} = 0{,}12$, basit mesnet-basit mesnet)..... 181
Çizelge 4.24. DGÇT'ne dayanan KNTTK küçük ölçekli kirişlerin boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (KNTTK-DD, basit mesnet-basit mesnet)..... 182
Çizelge 4.25. KNTTK Timoshenko kirişlerinin boyutsuz klasik burkulma yüklerinin karşılaştırılması ($V_{KNT}^{*} = 0{,}12$, $L/h = 15$)..... 184
Çizelge 4.26. Konsol homojen çubukların / tüplerin boyutuz klasik frekanslarının karşılaştırılması..... 191

1. GİRİŞ

1.1. Nanoteknoloji ve Boyut Etkisi

Kelime anlamı olarak nano, herhangi bir fiziksel büyüklüğün milyarda birini ifade etmekte olup nano yapılar uzunluk olarak bakıldığı zaman 10^{-9} metreye, yani yaklaşık on ila yüz atomluk sistemlere karşılık gelmektedirler (Nanoteknoloji Strateji Grubu, 2014). Nanobilim, genellikle boyutlarından en az bir tanesi bir ila yüz nm aralığındaki nano yapıların ve moleküllerin yapısının ve özelliklerinin incelenmesini ifade ederken, nanoteknoloji ise nano yapıların ve moleküllerin yaşam ve mühendislik bilimleri alanında kullanımını ifade etmektedir (Bayda vd., 2019). Günümüzde nano yapılar, yüksek mukavemet ve düşük ağırlığın gerekli olduğu havacılık, uzay, biyomedikal, elektronik, denizcilik gibi çeşitli mühendislik alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır (Garg vd., 2021). Özellikle; tekstil, otomotiv, inşaat mühendisliği, tıp gibi modern endüstriler nano ölçekli bilgisayar çipleri ve diğer cihazların faydalarından büyük ölçüde yararlanmaktadırlar (Malik vd., 2023).

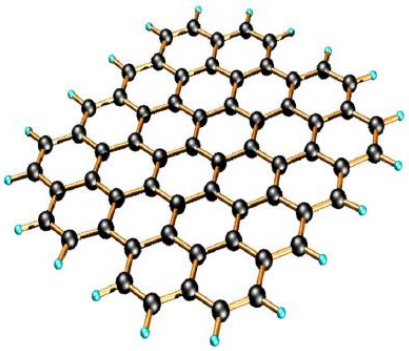
Nano malzemelerin inşaatta kullanılmasına olanak sağlayan üstün özelliklerinin getirdiği bazı uygulamalar ise hafif yapı, düşük bakım gereksinimli yapı, güçlendirilmiş yapısal bileşim, dirençli kaplamalar, geliştirilmiş boru ve köprü birleştirme malzemeleri, geliştirilmiş çimentolu malzemeler; yangın dirençli, ses emilimli ve yalıtım özellikli malzemeler şeklinde sıralanabilir (Ali, 2020; Malik vd., 2023). Ayrıca, kaplama malzemeleri nano ölçekte üretilerek geliştirilmiştir ve bu gelişme, korozyon önleyici etki; yüksek sıcaklığa, yangına, çizilmeye ve aşınmaya karşı dayanıklılık; antibakteriyel ve kirlenme önleyici kendi kendini iyileştirme yetenekleri ve kendi kendine montaj gibi çeşitli kaplama özelliklerine yol açmıştır (Das vd., 2020; Malik vd., 2023).

Nanometre seviyesinde, kuantum mekaniği işlemeye başladığından, nanobilim ve nanoteknolojiye oldukça önem verilmektedir (Abid vd., 2022). Deneysel çalışmalar (Bauer vd., 2011; Sorop ve De Jongh, 2007; Juhasz vd., 2004; Kasuya vd., 1997) ve atomistik simülasyonlar (Chowdhury vd., 2010), boyutlar küçüldüğünde nano yapıların mekanik özelliklerinde önemli bir boyut etkisi meydana geldiğini göstermiştir. Boyut etkisi, malzemeleri oluşturan atomlar ve moleküllerle ilgilidir. Boyutları nanometre seviyelerinde olan nano yapılara klasik süreklilik modellerinin uygulanabilmesi için,

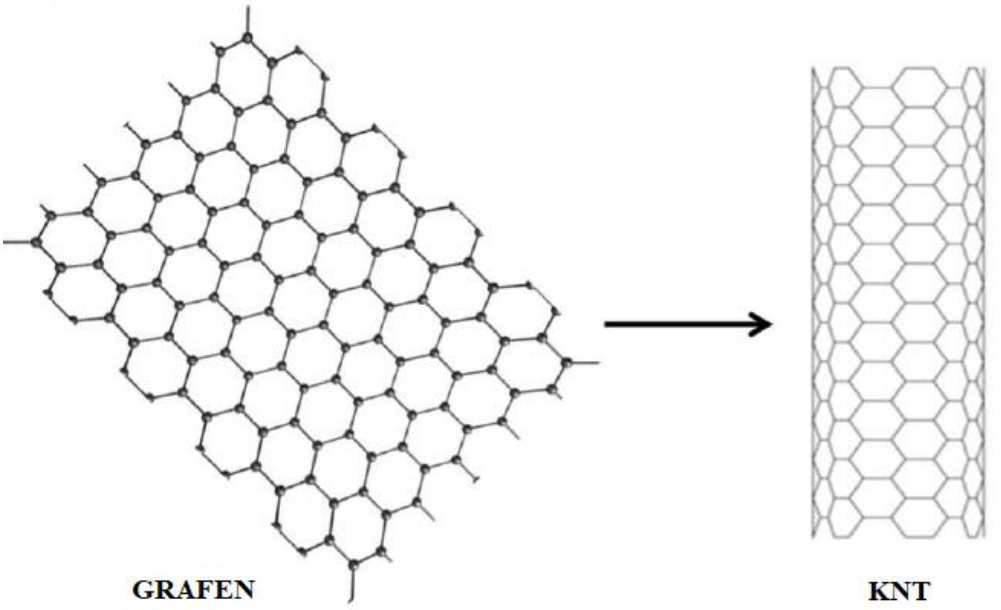
nano yapıyı oluşturan atomlar arasındaki kafes aralığı, tane boyutu gibi çok küçük uzunluk ölçeklerinin dikkate alınması gerekmektedir (Gopalakrishnan ve Narendar, 2013). Moleküler dinamik simülasyonu ile yapılan çözüm bu tür problemler için kullanılabilir olsa da, özellikle yüksek atom sayılarında yüksek bilgisayar kapasitesi gerektireceği ve çok fazla zaman alacağından maliyetli olmaktadır. Ayrıca, nano ölçek düzeyinde deneyler yapmak ve kontrol etmek çok zor ve pahalıdır (Karlicic vd., 2015). Bu noktada, süreklilik modellerinin kullanılması ön plana çıkmaktadır. Geleneksel (klasik) süreklilik modelleri boyut etkilerini hesap edemediğinden, hem süreklilik modellerinin işlevselliğini sağlayan hem de boyut etkilerini hesap eden yöntemlerin kulllanılması iyi bir alternatif olarak karşımıza çıkar.

1.2. Karbon nanotüpler

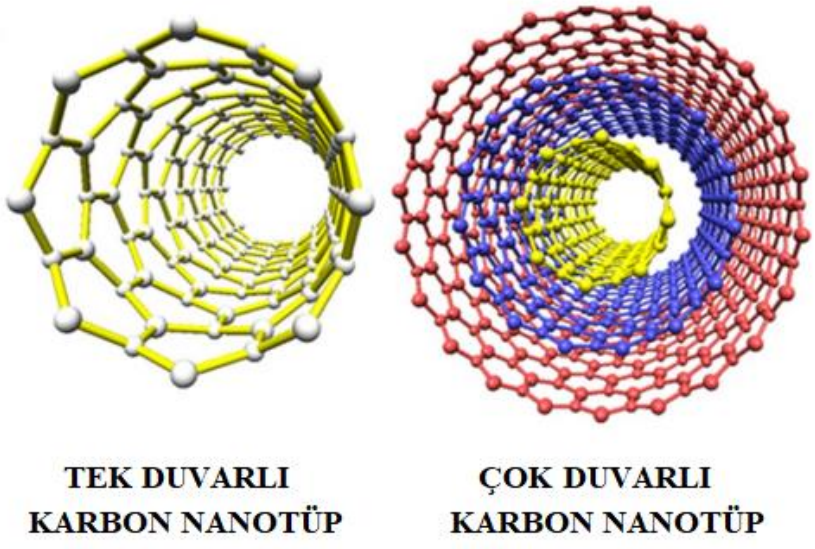
Karbon atomlarının birbirlerine altıgen yapılar oluşturarak bağlanmasıyla, grafen adı verilen iki boyutlu bir karbon yapısı oluşur (Şekil 1.1). Bu iki boyutlu karbon yapısının kendi üzerine yuvarlanmasıyla tek boyutlu silindirik yapı olan karbon nanotüpler (KNT) meydana gelir (Şekil 1.2). İlk olarak, Iijima (1991) tarafından keşfedilen karbon nanotüpler kısaca, nanometre boyutlarında, silindirik tek boyutlu bir yapı olarak tanımlanabilir. Karbon nanotüpler, kendisini oluşturan grafen tabakalarının sayısına göre bir sınıflandırmaya alınabilir. Tek bir grafen tabakası silindir şeklini aldığında tek duvarlı karbon nanotüpler, çok sayıda grafen tabakası silindir şeklini alıp iç içe geçtiğinde ise çok duvarlı karbon nanotüpler meydana gelir (Şekil 1.3).



Şekil 1.1. Grafen tabakası (Jyoti ve Singh, 2021)



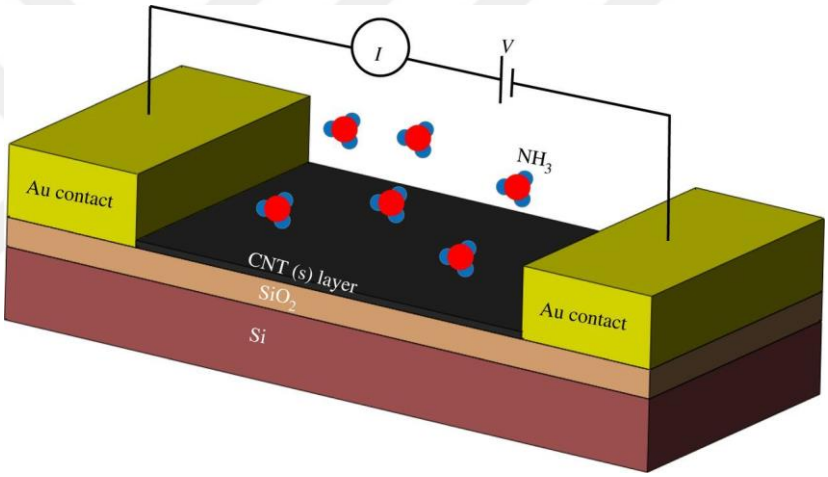
Şekil 1.2. Grafen tabakasından karbon nanotüp oluşumu (Jyoti ve Singh, 2021)



Şekil 1.3. Tek duvarlı ve çok duvarlı karbon nanotüpler (Mashkoor vd., 2020)

Karbon atomlarının oluşturduğu KNT'ler, mühendislikten tıbba kadar birçok alanda kullanımı ve vaat ettiği potansiyelleri ile dikkat çeken bir malzemedir. İlaç ve Deoksiribo Nükleik Asit (DNA) iletimi, biyoalgılama, rejeneratif tıp, görüntüleme, kanser tedavisi, antibakteriyel tedavi, KNT'lerin biyotıpta kullanılabileceği başlıca alanlardır (Saliev, 2019). Uzay asansörü, elektromanyetik kalkan, radar emici malzemeler, düşük yansıtmalı yapısal yüzey işleme, KNT'lerin havacılık ve uzay alanındaki potansiyel kullanımları

olarak karşımıza çıkmaktadır (Gohardani vd., 2014). Su/yağ iticilik, ultraviyole (UV) koruması, yangın geciktirici, kırışmaya dayanaklı kumaşlar ise karbon nanotüp ve KNT içeren kompozitlerin tekstil endüstrisindeki uygulamalarına örnek olarak verilebilir (Shahidi ve Moazzenchi, 2018). Karbon nanotüplerin benzersiz özelliklerinin bilim dünyasında ilerleme kaydettiği alanlardan biri de nanotüp tabanlı sensörlerin geliştirilmesi ve kullanılması olmuştur. Çok büyük yüzey/hacim oranına sahip olmaları, karbon nanotüplerin yüksek adsorptif kapasitede olduğu anlamına gelir ve bu özellik, gaz veya kimyasal sensörlerde kullanım için idealdir (Wang vd., 2016). Sinha vd. (2006), Jacobs vd. (2010), Abdellah vd. (2013), Obitayo ve Liu (2012) karbon nanotüplerin sensör hassasiyeti, elektrokimyasal sensör, gaz sensörü ve piezorezistik gerinim sensörü olarak kullanılabilirlikleri üzerine çalışmalar sunmuşlardır.

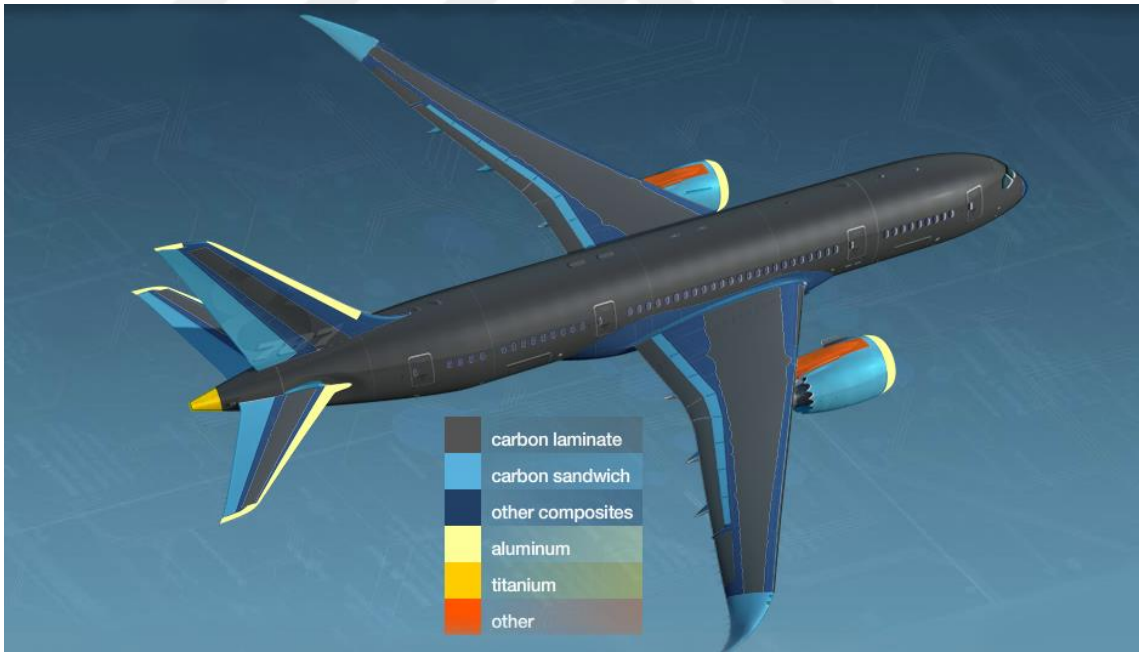


Şekil 1.4. Bir KNT gaz sensörünün şeması (Wang vd., 2016)

Şekil 1.4'te bir KNT gaz sensörünün şeması gösterilmiştir. KNT iki elektrot arasına yerleştirilir ve sabit gerilim altında akım tepkisi ölçülür. KNT tabakası iki elektrot arasında gazların emilmesi için kullanılır ve sabit uygulanan gerilime verilen akım tepkisi ölçülür. Gaz molekülleri KNT tarafından emildiğinde, dirençte değişim meydana gelir ve bu da akım değişimi meydana getirir (Wang vd., 2016).

1.3. Nanokompozitler

Kompozit, her biri kendine özgü fiziksel veya kimyasal özelliklere sahip en az iki farklı bileşenin bir araya gelerek oluşturduğu daha üstün özelliklere sahip malzemedir. Bu malzemeler, mühendislik yapılarının rijitlik, hafiflik, korozyona karşı direnç, termal özellikler, aşınma direnci ve yorulma ömrü gibi birçok önemli özelliğini geliştirmek için kullanılırlar (Kırlangıç, 2020). Nanokompozit ise kendisini oluşturan fazlardan en az birinin nanometre boyutunda olduğu, birçok fazdan oluşan malzemeler olarak tanımlanabilir (Omanović-Mikličanin vd., 2020). Kompozitlerin, havacılık ve uzay (Mangalgiri, 1999), otomotiv (Ravishankar vd., 2019), denizcilik (Rubino vd., 2020), biyomedikal (Bommala vd., 2019) gibi birçok alanda uygulamaları bulunmaktadır. Örneğin; Şekil 1.5'te Boeing 787 yolcu uçağının COMSOL görüntüsü sunulmuştur. Bu uçağın kütlece yüzde ellisini kompozit malzemeler oluşturmaktadır ve kendi sınıfındaki diğer uçaklara kıyasla yüzde yirmi daha az yakıt tükettiği iddia edilmektedir (Kırlangıç, 2020).



Şekil 1.5. Boeing 787 yolcu uçağı (https://www.comsol.de/blogs/protecting-aircraft-composites-from-lightning-strike-damage/)

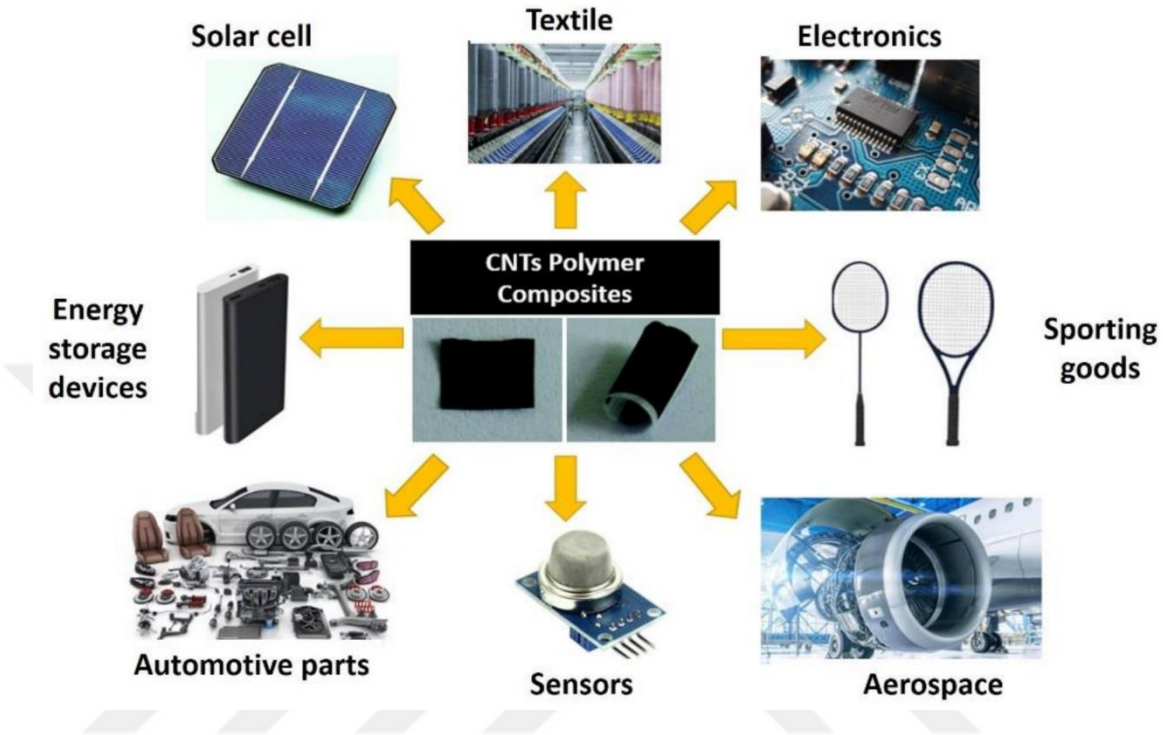
Kompozitler çeşitli formlarda oluşturulabilirler. Tabakalı kompozit malzemeler, fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) kompozit malzemeler, sandviç kompozit malzemeler, fiberler ile güçlendirilmiş kompozit malzemeler, partiküller ile güçlendirilmiş kompozit

malzemeler ve matris tabanlı (polimer matrisli, seramik matrisli, metal matrisli) kompozit malzemeler bu formlara örnek olarak verilebilir. Geleneksel tabakalı kompozit yapılarda, farklı özelliklere sahip homojen katmanlar birbirine bağlanır. Her ne kadar gelişmiş mekanik ve termal özellikler elde etmek için kullanılsalar da, farklı bileşenler arasındaki arayüz boyunca malzeme özelliklerinde meydana gelen ani değişim, çeşitli arayüz problemlerine neden olmaktadır. Bu problemleri ortadan kaldırmak için malzeme özelliklerinin değişiminin daha yumuşak ve sürekli olduğu fonksiyonel derecelendirilmiş yapıdaki malzemelere ihtiyaç olduğu düşünülmeye başlanmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin teorik çalışmaları 1970'in başlarında Shen ve Bever (1972) ve Bever ve Duwez (1970) tarafından sunulmuşsa da dönemin üretim olanakları sınırlı olduğundan çok geliştirilememiştir (Naebe ve Shirvanimoghaddam, 2016). Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin bilimsel terimi, 1984 yılında Japonya'da uzay uçağı projesi sırasında, 2000 Kelvin yüzey sıcaklığına ve 1000 Kelvin sıcaklık değişimine dayanabilen on milimetreden küçük kesit için bir termal bariyer malzemesinin geliştirilmesi şeklinde ortaya çıkmıştır (Chen ve Liew, 2004; Alshorbagy vd., 2011).

Polimerler ve polimer matrisli kompozitler; yüksek mukavemet, hafiflik, tasarım ve süreç esnekliği gibi özellikleri sayesinde havacılık, ulaşım, otomotiv, enerji, savunma ve altyapı sektörleri de dâhil olmak üzere birçok endüstrinin uygulamalarında kullanılan malzemeler olarak karşımıza çıkmaktadır (Bal ve Samal, 2007). Şekil 1.6'da KNT/polimer kompozitlerinin bazı kullanım alanları gösterilmiştir. Bahsedilen bu kompozitlerde matris olarak epoksi, termoplastikler, jeller ve polimetil metakrilat (PMMA) gibi polimerler kullanılmıştır (Bal ve Samal, 2007).

Tasarım olanakları ve olağanüstü özellik kombinasyonları sayesinde nanokompozitler, 21. yüzyılın malzemeleri olarak kabul edilir ve geleneksel kompozitlerin aksine, yüksek yüzey/hacim oranına sahiptirler (Abid vd., 2022). Bahsedildiği üzere, KNT'ler mükemmel özellikleri ile adeta bir çığır açmıştır. Polimer matrisli kompozitlerin KNT nanotüp takviyesiyle oluşturulması ile esnekliği, iletkenliği, gücü, tokluğu ve dayanıklılığı önemli ölçüde arttırılan malzemeler geliştirilebilir. KNT'lerin çok yüksek en/boy oranına sahip olması, kompozitin arzu edilen ekseni ile hizalanmasını sağlayabilir (Bal ve Samal, 2007). KNT'ler iyi arayüzey bağları sağlayabildiğinden, kompozitlerde matris fazlarının güçlendirilmesi için kullanılan geleneksel fiberlerin yerine kullanılmaya

başlanmıştır. Olağanüstü özellikleri sayesinde KNT'lerin başlıca uygulamalarından biri de, terahertz mertebesine kadar ulaşılabilen ultra yüksek frekans aralığına ve olası ultra yüksek hassasiyete sahip nanosensörledir (Borjalilou vd., 2019).



Şekil 1.6. KNT/polimer kompozitlerin uygulamaları (Mohd Nurazzi vd. 2021)

2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, ilk önce analizleri yapılacak nanokompozit yapıların malzeme özellikleri tanıtılacaktır. Burulmalı titreşim analizi araştırılacak olan kompozit, içi boş dairesel nanotüplerin malzeme özelliklerinin yarıçapı doğrultusunda değiştiği varsayılmıştır. Burkulma ve serbest titreşim analizleri sunulacak olan dikdörtgen kesite sahip fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin malzeme özellikleri ise yükseklikleri doğrultusunda değişmektedir. Bununla beraber, dikdörtgen kesite sahip ve karbon nanotüpler ile güçlendirilmiş (karbon nanotüp takviyeli) kompozit nanokirişlerin burkulma ve serbest titreşim analizleri de ele alınmıştır. Son olarak, dairesel olmayan kesitlere sahip nanoçubukların burulmalı titreşimi elastik bir ortam etkisi ile incelenmiştir. Burkulma analizinde kullanılan yönetici denklemler ve sınır koşullarını veren ifadeler minimum toplam potansiyel enerji prensibi ile elde edilirken, titreşim analizi için kullanılacak olan denklemler ile sınır koşullarını veren ifadeler ise Hamilton prensibi kullanılarak türetilmiştir.

2.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Gözenekli Kompozitlerin Malzeme Özellikleri

Bu alt bölümde, gözeneklere sahip tüp şeklindeki ve dikdörtgen kesite sahip fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit malzemelerin özellikleri tanıtılacaktır. Tüp şeklindeki fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit malzemelerin özelliklerinin değişimi bir dağılım kuralına bağlı olarak düşünülmüştür. Dikdörtgen kesitli fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit malzemelerin özelliklerinin değişimi ise iki farklı dağılım kuralı ile ele alınmıştır.

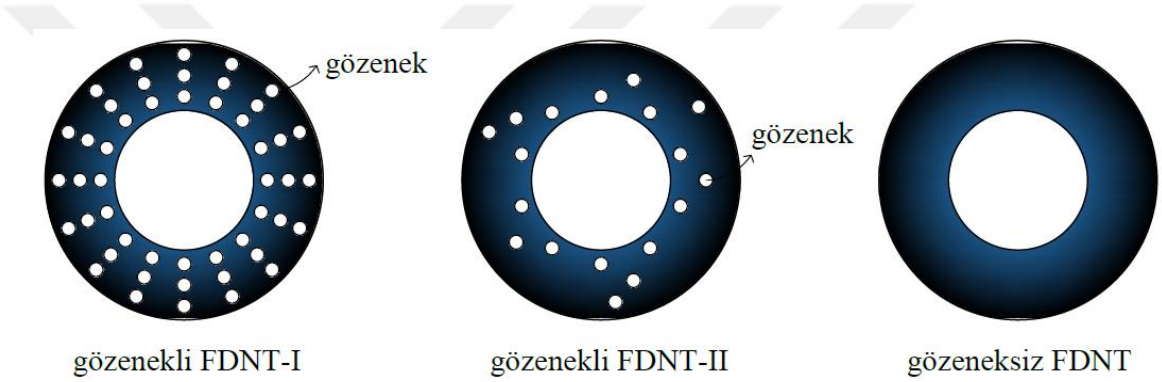
2.1.1. Tüp şeklindeki fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli kompozitler

Şekil 2.1'de dış yarıçap yüzeyi seramik, iç yarıçap yüzeyi metal bileşenlere sahip fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli ve gözeneksiz kompozit malzemelerden oluşan nanotüpler gösterilmiştir. Gözeneklere sahip fonksiyonel derecelendirilmiş nanotüpler iki farklı formda düşünülmüştür. Yarıçap boyunca homojen dağılım gösteren gözeneklere sahip fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanotüpler "FDNT-I" olarak adlandırılmıştır. Yarıçap boyunca değişen gözenek dağılımına sahip fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanotüpler ise "FDNT-II" olarak adlandırılmıştır. Son olarak, kesitinde gözenekler bulunmayan fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanotüpler

"FDNT" olarak adlandırılmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanotüpler için malzeme özelliklerinin yarıçap boyunca "Power-Law" olarak adlandırılan ve Türkçe'de kuvvet kuralı veya güç kuralı olarak geçen bir fonksiyonla dağılım sergilediği düşünülmüştür. Bu fonksiyona bağlı olarak, seramik ve metal bileşenlerin yarıçap yönündeki hacimsel değişim oranları sırasıyla şu şekilde yazılabilir (She vd., 2017; Chang ve Zhou 2022):

$$V_s(r) = \left(\frac{r - r_i}{r_d - r_i}\right)^p \tag{2.1}$$

$$V_m(r) = 1 - \left(\frac{r - r_i}{r_d - r_i}\right)^p \tag{2.2}$$



Şekil 2.1. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanotüplerin kesit görünüşleri

Burada, $V_s(r)$ ve $V_m(r)$ kompozit nanotüpü oluşturan seramik ve metal bileşenlerin hacimsel değişim oranlarını belirtirken r yarıçap doğrultusunu temsil eder. Ayrıca, p malzeme değişim katsayısı iken r_d ve r_i sırasıyla dış ve iç yarıçap değerleridir. Malzeme değişim katsayısı $p \in [0, \infty)$ aralığında ifade edilir. Karışım kuralına göre, kesitinde gözenekler bulunan fonksiyonel derecelendirilmiş kompozitin herhangi bir etkili malzeme özelliği aşağıdaki gibi yazılır (Wattanasakulpong ve Ungbhakorn 2014; Wattanasakulpong ve Chaikittiratana 2015; Turan, 2022; Chang ve Zhou 2022):

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}_s\left(V_s - \frac{\bar{\vartheta}}{2}\right) + \mathrm{F}_m\left(V_m - \frac{\bar{\vartheta}}{2}\right) \tag{2.3}$$

Denklem (2.3)'te F, fonksiyonel derecelendirilmiş kompozitin elastisite modülü E, Poisson oranı ν, kayma modülü μ, kütle yoğunluğu ρ gibi herhangi bir etkili malzeme

özelliğini temsil eder. F_s ve F_m sırasıyla seramik ve metal bileşenlerin herhangi bir malzeme özelliğini belirtir. Son olarak, $\bar{\vartheta}$ gözeneklilik fonksiyonudur. Gözenekli FDNT-I ve gözenekli FDNT-II için gözeneklilik fonksiyonu $\bar{\vartheta}$ sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\bar{\vartheta}(r) = \vartheta, \text{ sabit} \tag{2.4}$$

$$\bar{\vartheta}(r) = \vartheta\left(1 - \frac{r - r_i}{r_d - r_i}\right) \tag{2.5}$$

Yukarıdaki eşitliklerde ϑ $(0 \leq \vartheta \ll 1)$ gözeneklilik oranı (gözeneklilik katsayısı)'dır. Denklem (2.4)'teki gözeneklilik fonksiyonu ve karışım kuralı ile FDNT-I için etkili malzeme özellik ifadesi aşağıdaki gibi hesaplanır (She vd., 2017):

$$\mathrm{F}(r) = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(\frac{r - r_i}{r_d - r_i}\right)^p + \mathrm{F}_m - \frac{\vartheta}{2}(\mathrm{F}_s + \mathrm{F}_m) \tag{2.6}$$

Benzer şekilde, Denklem (2.5)'teki gözeneklilik fonksiyonu ve karışım kuralı ile FDNT-II için etkili malzeme özellik ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir (She vd., 2017):

$$\mathrm{F}(r) = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(\frac{r - r_i}{r_d - r_i}\right)^p + \mathrm{F}_m - \frac{\vartheta}{2}(\mathrm{F}_s + \mathrm{F}_m)\left(1 - \frac{r - r_i}{r_d - r_i}\right) \tag{2.7}$$

Denklemler (2.6) ve (2.7)'de ϑ değeri sıfıra alınırsa, gözenekli nanotüplerin etkili malzeme özelliklerinin fonksiyonel derecelendirilmiş gözeneksiz nanotüplerin etkili malzeme özelliklerine aşağıdaki gibi indirgendiğini görürüz:

$$\mathrm{F}(r) = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(\frac{r - r_i}{r_d - r_i}\right)^p + \mathrm{F}_m \tag{2.8}$$

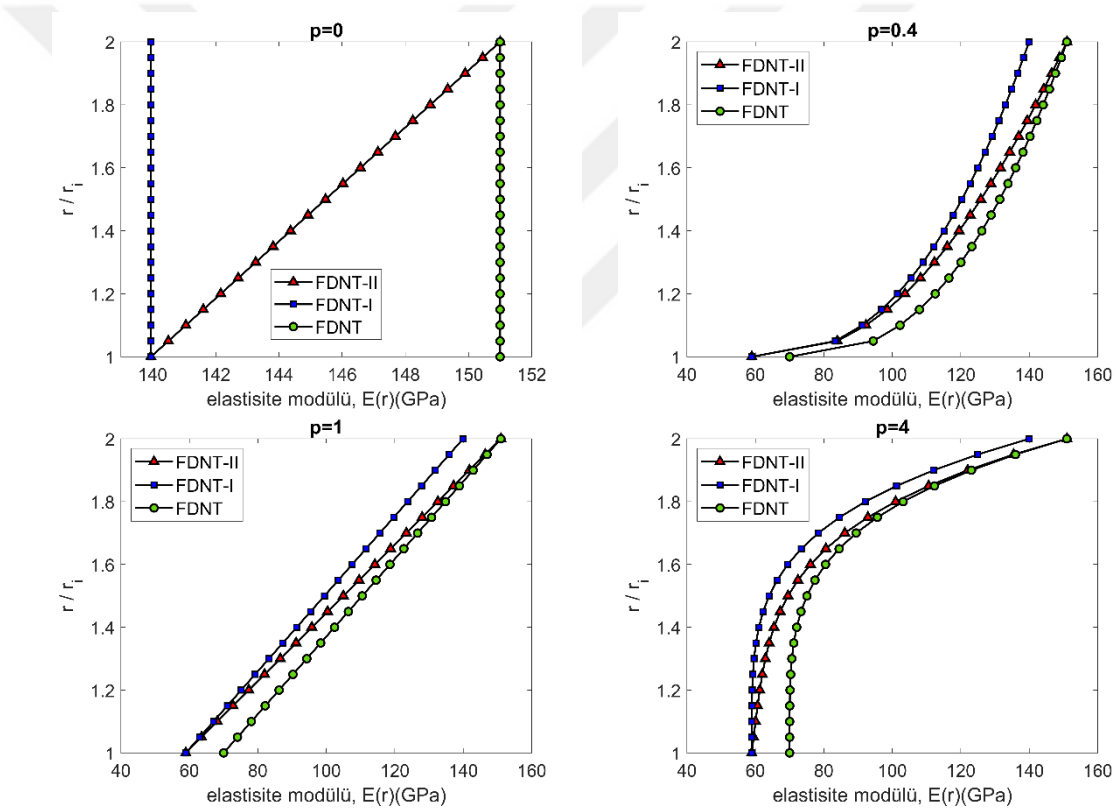
Yukarıda verilen eşitliklerden yola çıkarak gözenekli FDNT-I, gözenekli FDNT-II ve gözeneksiz FDNT için etkili elastisite modülleri sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanırlar:

$$E(r) = (E_s - E_m)\left(\frac{r - r_i}{r_d - r_i}\right)^p + E_m - \frac{\vartheta}{2}(E_s + E_m) \tag{2.9}$$

$$E(r) = (E_s - E_m)\left(\frac{r - r_i}{r_d - r_i}\right)^p + E_m - \frac{\vartheta}{2}(E_s + E_m)\left(1 - \frac{r - r_i}{r_d - r_i}\right) \tag{2.10}$$

$$E(r) = (E_s - E_m)\left(\frac{r - r_i}{r_d - r_i}\right)^p + E_m \tag{2.11}$$

Anlaşılacağı üzere, $p = 0$ durumunda FDNT ve FDNT-I için malzeme özellikleri sabittir. FDNT için $p = 0$ durumunda nanotüp sadece seramik malzemeden oluşan homojen malzeme özelliklerini taşır. FDNT-I için $p = 0$ durumunda nanotüp özelliği sabit olmakla beraber seramik özelliklerine daha yakın bir konumdadır. Ayrıca, Şekil 2.2'de fonksiyonel derecelendirilmiş nanotüplerin elastisite modüllerinin değişimi r/r_i'ye göre çeşitli malzeme değişim katsayıları için çizilmiştir. Şekil 2.2'deki grafiklerin çiziminde, $E_s = 151\ GPa$, $E_m = 70\ GPa$, $\vartheta = 0{,}1$ değerleri kullanılmıştır.

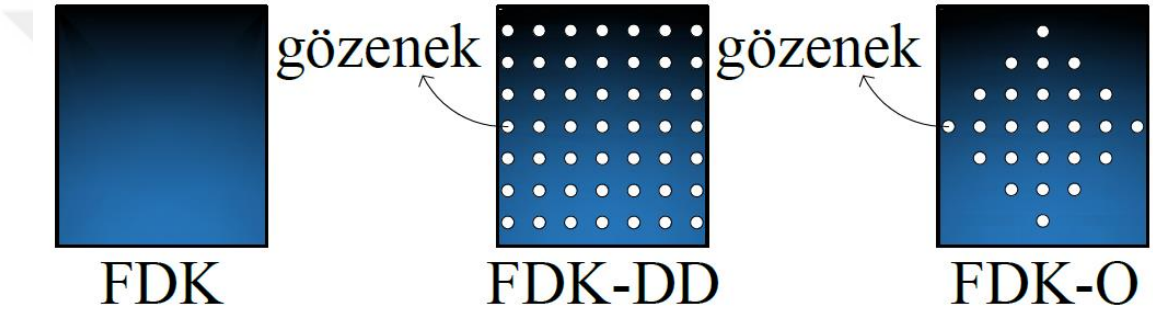


Şekil 2.2. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanotüplerin elastisite modüllerinin r/r_i'ye göre değişimleri

2.1.2. Dikdörtgen kesitli fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli kompozitler

Şekil 2.3'te, üst yüzeyi seramik ve alt yüzeyi metal bileşenlere sahip fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli ve gözeneksiz kompozitlerden oluşan nanokirişlerin kesitleri gösterilmiştir. Gözeneklere sahip fonksiyonel derecelendirilmiş nanokirişler iki farklı

formda düşünülmüştür. Yükseklik boyunca homojen dağılım gösteren gözeneklere sahip dikdörtgen kesitli fonksiyonel derecelendirilmiş kompozitler "FDK-DD" olarak adlandırılmıştır. Yükseklik boyunca değişken gözenek dağılımına sahip dikdörtgen kesitli fonksiyonel derecelendirilmiş kompozitler "FDK-O" olarak adlandırılmıştır. Son olarak, kesitinde gözenekler bulunmayan dikdörtgen kesitli fonksiyonel derecelendirilmiş kompozitler ise "FDK" olarak adlandırılmıştır. Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş nanokompozit kirişler için malzeme özelliklerinin yükseklik boyunca değişimi; biri güç kuralına göre oluşturulan, diğeri sigmoid olarak adlandırılan iki farklı fonksiyon kullanılarak tanımlanmıştır.



Şekil 2.3. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin kesit görünüşleri

Sigmoid dağılımına uyan fonksiyonel derecelendirilmiş kompozitlerin bileşenleri aşağıdaki hacim oranlarına sahiptirler (Ramteke vd., 2021; Wang ve Zu, 2018):

$$V_s^1(z_0) = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2z_0}{h}\right)^p, \quad z_0 \in [0, \mathrm{h}/2] \tag{2.12}$$

$$V_s^2(z_0) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2z_0}{h}\right)^p, \quad z_0 \in [-\mathrm{h}/2, 0] \tag{2.13}$$

$$V_m^1(z_0) = 1 - V_s^1, \quad z_0 \in [0, \mathrm{h}/2] \tag{2.14}$$

$$V_m^2(z_0) = 1 - V_s^2, \quad z_0 \in [-\mathrm{h}/2, 0] \tag{2.15}$$

Denklemler (2.12)-(2.15) dikkate alındığında hacimsel değişim oranlarının iki farklı bölge için farklı formüllerle tanımlandığı anlaşılır. Bu dağılımda, ilk bölge $z_0 \in [0, \mathrm{h}/2]$ iken ikinci bölge $z_0 \in [-\mathrm{h}/2, 0]$ olarak düşünülmüştür. z_0, nanokirişin geometrik (orta) eksenini baz alan yükseklik yönüdür. Yukarıdaki denklemlerde h kompozit nanokirişin yüksekliğidir. Sigmoid kuralına dayanan FDK-DD nanokiriş (FDK-DD-I) için

gözeneklilik fonksiyonu $\bar{\vartheta}(z_0) = \vartheta$ olarak kabul edilirken FDK-O nanokiriş (FDK-O-I) için gözeneklilik fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\bar{\vartheta}(z_0) = \vartheta\left(1 - \frac{2|z_0|}{h}\right) \tag{2.16}$$

Karışım kuralı ve tanıtılan gözeneklilik fonksiyonu kullanılarak, FDK-DD-I için etkili malzeme özelliği aşağıdaki gibi hesaplanır (Ramteke vd., 2021; Wang ve Zu, 2018; Avcar, 2019):

$$\mathrm{F}^1(z_0) = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2z_0}{h}\right)^p\right) + \mathrm{F}_m - \frac{\vartheta}{2}(\mathrm{F}_s + \mathrm{F}_m), \quad z_0 \in [0, \mathrm{h}/2] \tag{2.17}$$

$$\mathrm{F}^2(z_0) = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2z_0}{h}\right)^p\right) + \mathrm{F}_m - \frac{\vartheta}{2}(\mathrm{F}_s + \mathrm{F}_m), \quad z_0 \in [-\mathrm{h}/2, 0] \tag{2.18}$$

Denklem (2.16) ve karışım kuralı ile FDK-O-I için etkili malzeme özelliği aşağıdaki gibi bulunur (Ramteke vd., 2021; Wang ve Zu, 2018; Avcar, 2019):

$$\mathrm{F}^1(z_0) = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2z_0}{h}\right)^p\right) + \mathrm{F}_m - \frac{\vartheta}{2}(\mathrm{F}_s + \mathrm{F}_m)\left(1 - \frac{2|z_0|}{h}\right), \quad z_0 \in [0, \mathrm{h}/2] \tag{2.19}$$

$$\mathrm{F}^2(z_0) = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2z_0}{h}\right)^p\right) + \mathrm{F}_m - \frac{\vartheta}{2}(\mathrm{F}_s + \mathrm{F}_m)\left(1 - \frac{2|z_0|}{h}\right), \quad z_0 \in [-\mathrm{h}/2, 0] \tag{2.20}$$

Denklemler (2.17)-(2.20)'de ϑ değerinin sıfıra ayarlanması, sigmoid kuralına uyan fonksiyonel derecelendirilmiş gözeneksiz nanokirişin (FDK-I) etkili malzeme özelliklerinin aşağıdaki gibi hesaplanmasını sağlar:

$$\mathrm{F}(z_0)^1 = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2z_0}{h}\right)^p\right) + \mathrm{F}_m, \quad z_0 \in [0, \mathrm{h}/2] \tag{2.21}$$

$$\mathrm{F}(z_0)^2 = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2z_0}{h}\right)^p\right) + \mathrm{F}_m, \qquad z_0 \in [-\mathrm{h}/2, 0] \tag{2.22}$$

Yukarıda elde edilen etkili malzeme özellik bağıntıları yardımıyla FDK-DD-I, FDK-O-I ve FDK-I'e ait elastisite modülleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$E(z_0)^1 = (E_s - E_m)\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2z_0}{h}\right)^p\right) + E_m - \frac{\vartheta}{2}(E_s + E_m), \quad z_0 \in [0, \mathrm{h}/2] \tag{2.23}$$

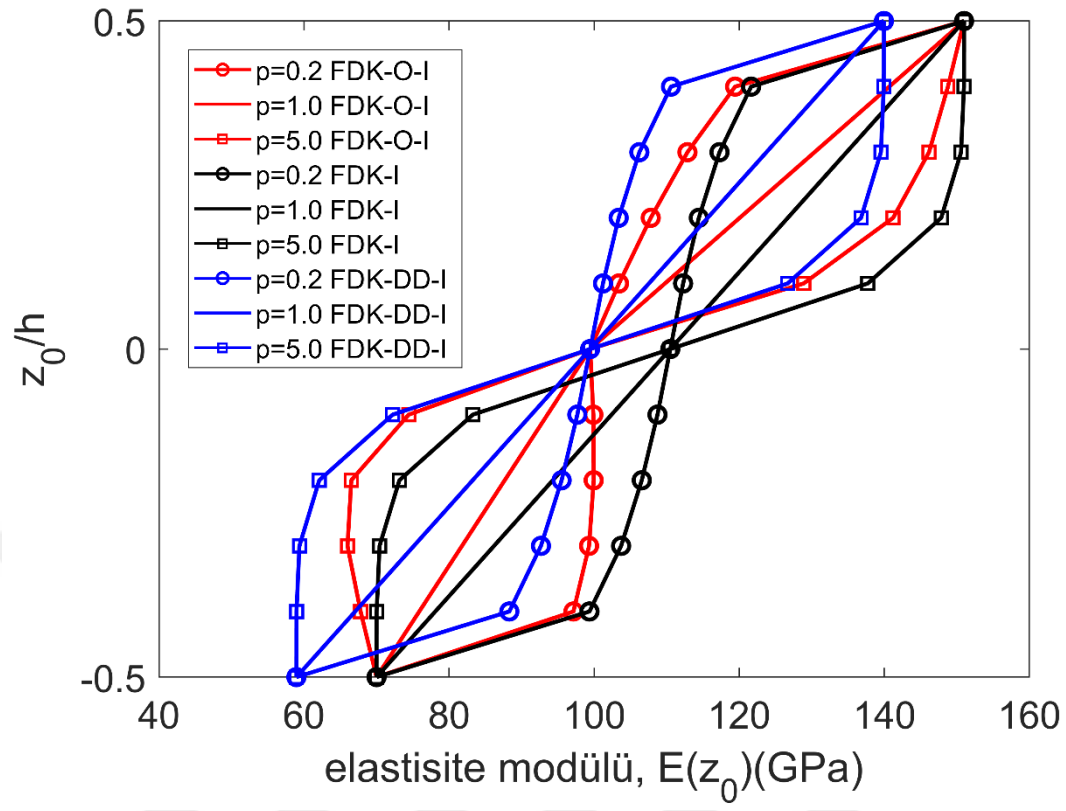
$$E(z_0)^2 = (E_s - E_m)\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2z_0}{h}\right)^p\right) + E_m - \frac{\vartheta}{2}(E_s + E_m), \quad z_0 \in [-\mathrm{h}/2, 0] \tag{2.24}$$

$$E(z_0)^1 = (E_s - E_m)\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2z_0}{h}\right)^p\right) + E_m - \frac{\vartheta}{2}(E_s + E_m)\left(1 - \frac{2|z_0|}{h}\right), \qquad z_0 \in [0, \mathrm{h}/2] \tag{2.25}$$

$$E(z_0)^2 = (E_s - E_m)\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2z_0}{h}\right)^p\right) + E_m - \frac{\vartheta}{2}(E_s + E_m)\left(1 - \frac{2|z_0|}{h}\right), \qquad z_0 \in [-\mathrm{h}/2, 0] \tag{2.26}$$

$$E(z_0)^1 = (E_s - E_m)\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2z_0}{h}\right)^p\right) + E_m, \qquad z_0 \in [0, \mathrm{h}/2] \tag{2.27}$$

$$E(z_0)^2 = (E_s - E_m)\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2z_0}{h}\right)^p\right) + E_m, \qquad z_0 \in [-\mathrm{h}/2, 0] \tag{2.28}$$



Şekil 2.4. Sigmoid dağılımına uyan fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin elastisite modüllerinin $\boldsymbol{z_0/h}$'ye göre değişimleri

Şekil 2.4'te, sigmoid dağılımına uyan fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin elastisite modüllerinin değişimi z_0/h'ye göre çeşitli malzeme değişim katsayıları için çizilmiştir. Bu şekilde, $E_s = 151\ GPa$, $E_m = 70\ GPa$, $\vartheta = 0{,}1$ olarak düşünülmüş ve üç farklı malzeme değişim katsayısı için elastisite modülünün değişimi gösterilmiştir.

Bu çalışmada, kompozit nanokirişler için incelenecek olan diğer dağılım güç kuralına dayanmaktadır. Bu dağılım türü sigmoid'e kıyasla araştırmacılar tarafından daha fazla kullanılmıştır. İlk olarak, bu dağılım için verilen hacimsel değişim oranları yazılmalıdır (Eltaher vd., 2013; Eltaher vd., 2014):

$$V_s(z_0) = \left(\frac{z_0}{h} + \frac{1}{2}\right)^p, \quad z_0 \in [-\mathrm{h}/2, \mathrm{h}/2] \tag{2.29}$$

$$V_m(z_0) = 1 - \left(\frac{z_0}{h} + \frac{1}{2}\right)^p, \quad z_0 \in [-\mathrm{h}/2, \mathrm{h}/2] \tag{2.30}$$

Denklemler (2.29) ve (2.30)'dan da anlaşılacağı üzere, bu dağılım yükseklik boyunca devam eder. Denklem (2.3)'te verilen karışım kuralı uygulandığında, güç dağılımına uyan FDK-DD nanokiriş (FDK-DD-II) için etkili malzeme özellikleri aşağıdaki gibi türetilir (Wattanasakulpong ve Chaikittiratana, 2015):

$$\mathrm{F}(z_0) = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(\frac{1}{2} + \frac{z_0}{h}\right)^p + \mathrm{F}_m - \frac{\vartheta}{2}(\mathrm{F}_s + \mathrm{F}_m), \quad z_0 \in [-\mathrm{h}/2, \mathrm{h}/2] \tag{2.31}$$

Güç dağılımına uyan FDK-O nanokiriş (FDK-O-II) için ise etkili malzeme özellikleri şu şekilde yazılır (Wattanasakulpong ve Chaikittiratana, 2015):

$$\mathrm{F}(z_0) = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(\frac{1}{2} + \frac{z_0}{h}\right)^p + \mathrm{F}_m - \frac{\vartheta}{2}(\mathrm{F}_s + \mathrm{F}_m)\left(1 - \frac{2|z_0|}{h}\right), \quad z_0 \in [-\mathrm{h}/2, \mathrm{h}/2] \tag{2.32}$$

Son olarak, ϑ değerinin sıfıra eşitlenmesi ile güç dağılımına uyan fonksiyonel derecelendirilmiş gözeneksiz kompozit nanokirişin (FDK-II) etkili malzeme özellikleri aşağıdaki gibi sağlanır:

$$\mathrm{F}(z_0) = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(\frac{1}{2} + \frac{z_0}{h}\right)^p + \mathrm{F}_m, \qquad z_0 \in [-\mathrm{h}/2, \mathrm{h}/2] \tag{2.33}$$

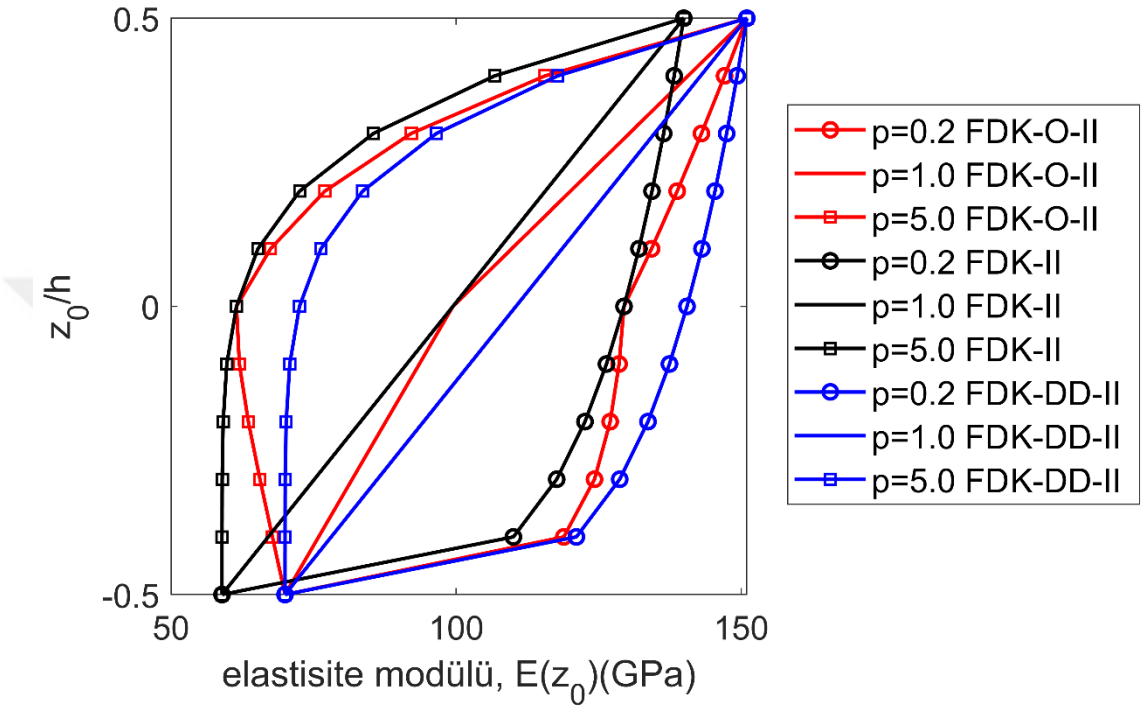
Denklemler (2.31)-(2.33)'e dayanarak FDK-DD-II, FDK-O-II ve FDK-II'nin elastisite modülleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$E(z_0) = (E_s - E_m)\left(\frac{1}{2} + \frac{z_0}{h}\right)^p + E_m - \frac{\vartheta}{2}(E_s + E_m), \quad z_0 \in [-\mathrm{h}/2, \mathrm{h}/2] \tag{2.34}$$

$$E(z_0) = (E_s - E_m)\left(\frac{1}{2} + \frac{z_0}{h}\right)^p + E_m - \frac{\vartheta}{2}(E_s + E_m)\left(1 - \frac{2|z_0|}{h}\right), \quad z_0 \in [-\mathrm{h}/2, \mathrm{h}/2] \tag{2.35}$$

$$E(z_0) = (E_s - E_m)\left(\frac{1}{2} + \frac{z_0}{h}\right)^p + E_m, \qquad z_0 \in [-\mathrm{h}/2, \mathrm{h}/2] \tag{2.36}$$

Verilen elastisite modülü hesaplamaları gibi diğer malzeme özellikleri ρ, υ, μ de benzer şekilde kolaylıkla yazılabilir. İşlem kalabalığından kaçınmak için sadece elastisite modüllerinin hesap formülleri gösterilmiştir.



Şekil 2.5. Güç dağılımına uyan fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin elastisite modüllerinin $\boldsymbol{z_0/h}$'ye göre değişimleri

Şekil 2.5'te, güç dağılımına uyan fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin elastisite modüllerinin değişimi z_0/h'ye göre üç farklı malzeme değişim katsayısı için çizilmiştir. Bu şekilde, Şekil 2.4'teki malzeme özellikleri ve gözeneklilik oranı kullanılmıştır. Bu dağılım ile ilgili belirtilmesi gereken önemli iki nokta vardır. Bunlar $p = 0$ ve $p = \infty$ durumlarıdır. Denklem (2.36)'da $p = 0$ ve $p = \infty$ ayarlanması, kompozit nanokirişi sırasıyla sadece seramik ve sadece metal bileşenden oluşan homojen bir yapıya dönüştürür.

2.2. Karbon Nanotüp Takviyeli Kompozitlerin Malzeme Özellikleri

Analizleri gerçekleştirilecek bir diğer nanokompozit yapısı karbon nanotüp takviyeli kompozit (KNTTK), diğer bir deyişle karbon nanotüpler ile güçlendirilmiş,

nanokirişlerdir. Bu alt bölümde, karbon nanotüp takviyeli kompozitlerin etkili malzeme özellikleri tanıtılacaktır. Şekil 2.6'da, çeşitli formlarda oluşturulan karbon nanotüp takviyeli PMMA matristen meydana gelen kompozit nanokirişlerin görünümleri verilmiştir. Görüleceği üzere dört farklı dağılım benimsenmiştir. Bunlar; karbon nanotüp dağılımı O şekilli olan kompozit (KNTTK-O), karbon nanotüp dağılımı yükseklik boyunca homojen olan kompozit (KNTTK-DD), karbon nanotüp dağılımı X şekilli olan kompozit (KNTTK-X) ve karbon nanotüp dağılımı V şekilli olan kompozit (KNTTK-V)'tir. Güçlendirilmiş kompozit nanokirişin karbon nanotüpün ve PMMA matrisin özelliklerine bağlı etkili malzeme özelliklerini tanımlamak için aşağıdaki formülasyonlar sunulmuştur (Wattanasakulpong ve Ungbhakorn, 2013):

$$E_{11}^{KNTTK}(z_0) = \eta_1 V_{KNT}(z_0) E_{11}^{KNT} + V_{PMMA}(z_0) E^{PMMA} \tag{2.37}$$

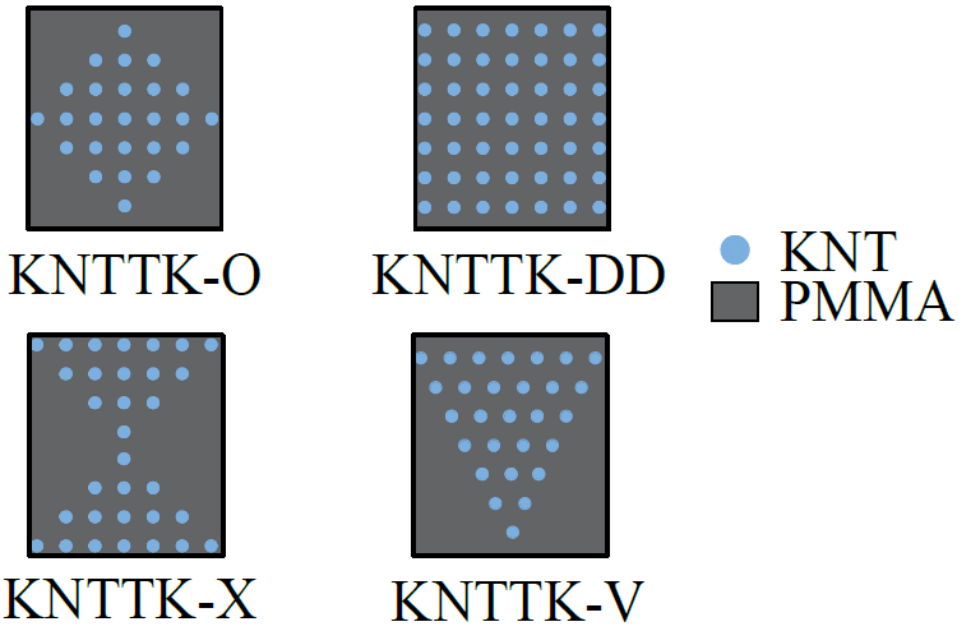
$$\frac{\eta_2}{E_{22}^{KNTTK}(z_0)} = \frac{V_{KNT}(z_0)}{E_{22}^{KNT}} + \frac{V_{PMMA}(z_0)}{E^{PMMA}} \tag{2.38}$$

$$\frac{\eta_3}{\mu_{12}^{KNTTK}(z_0)} = \frac{V_{KNT}(z_0)}{\mu_{12}^{KNT}} + \frac{V_{PMMA}(z_0)}{\mu^{PMMA}} \tag{2.39}$$

$$V_{KNT} + V_{PMMA} = 1 \tag{2.40}$$

$$\nu^{KNTTK}(z_0) = V_{KNT}(z_0)\nu^{KNT} + V_{PMMA}(z_0)\nu^{PMMA} \tag{2.41}$$

$$\rho^{KNTTK}(z_0) = V_{KNT}(z_0)\rho^{KNT} + V_{PMMA}(z_0)\rho^{PMMA} \tag{2.42}$$



Şekil 2.6. Karbon nanotüp takviyeli kompozit nanokirişlerin kesit görünüşleri

Burada, E_{11}^{KNT}, E_{22}^{KNT}, μ_{12}^{KNT}, ν^{KNT} ve ρ^{KNT} karbon nanotüpün sırasıyla elastisite modülünü, kayma modülünü, Poisson oranını ve kütle yoğunluğunu gösterir. Benzer olarak, E^{PMMA}, μ^{PMMA}, ν^{PMMA} ve ρ^{PMMA} PMMA matrisin sırasıyla elastisite modülünü, kayma modülünü, Poisson oranını ve kütle yoğunluğunu ifade eder. Son olarak, V_{KNT} ve V_{PMMA} ise karbon nanotüpün ve PMMA matrisin hacim oranlarını ifade etmektedir. η_1, η_2, η_3 ile ifade edilen katsayılar karbon nanotüp etki parametreleri olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi hesaplanmıştır (Wattanasakulpong ve Ungbhakorn, 2013):

$$V_{KNT}^{*} = 0.,12\ için:\ \eta_1 = 1{,}2833, \eta_2 = \eta_3 = 1{,}0556 \tag{2.43}$$

$$V_{KNT}^{*} = 0{,}17: \eta_1 = 1{,}3414, \eta_2 = \eta_3 = 1{,}7101 \tag{2.44}$$

$$V_{KNT}^{*} = 0{,}28\ için:\ \eta_1 = 1{,}3238, \eta_2 = \eta_3 = 1{,}7380 \tag{2.45}$$

Ayrıca, analizi gerçekleştirilecek dört farklı güçlendirme dağılımı için V_{KNT}^{*} ve V_{KNT} arasında aşağıdaki bağıntılar hesaplanmıştır (Wattanasakulpong ve Ungbhakorn, 2013):

$$\text{KNTTK-DD: } V_{KNT}(z_0) = V_{KNT}^{*} \tag{2.46}$$

$$\text{KNTTK-X: } V_{KNT}(z_0) = 4\frac{|z_0|}{h} V_{KNT}^{*} \tag{2.47}$$

$$\text{KNTTK-O: } V_{KNT}(z_0) = 2\left(1 - \frac{2|z_0|}{h}\right) V_{KNT}^{*} \tag{2.48}$$

$$\text{KNTTK-V: } V_{KNT}(z_0) = \left(1 + \frac{2z_0}{h}\right) V_{KNT}^{*} \tag{2.49}$$

Denklemlerde görülen V_{KNT}^{*}'nin hesabı ise aşağıdaki gibi yapılır:

$$V_{KNT}^{*} = \frac{M_{KNT}}{M_{KNT} + \left(\frac{\rho_{KNT}}{\rho_{PMMA}}\right) - \left(\frac{\rho_{KNT}}{\rho_{PMMA}}\right) M_{KNT}} \tag{2.50}$$

Burada, M_{KNT} karbon nanotüpün kütle oranını gösterir.

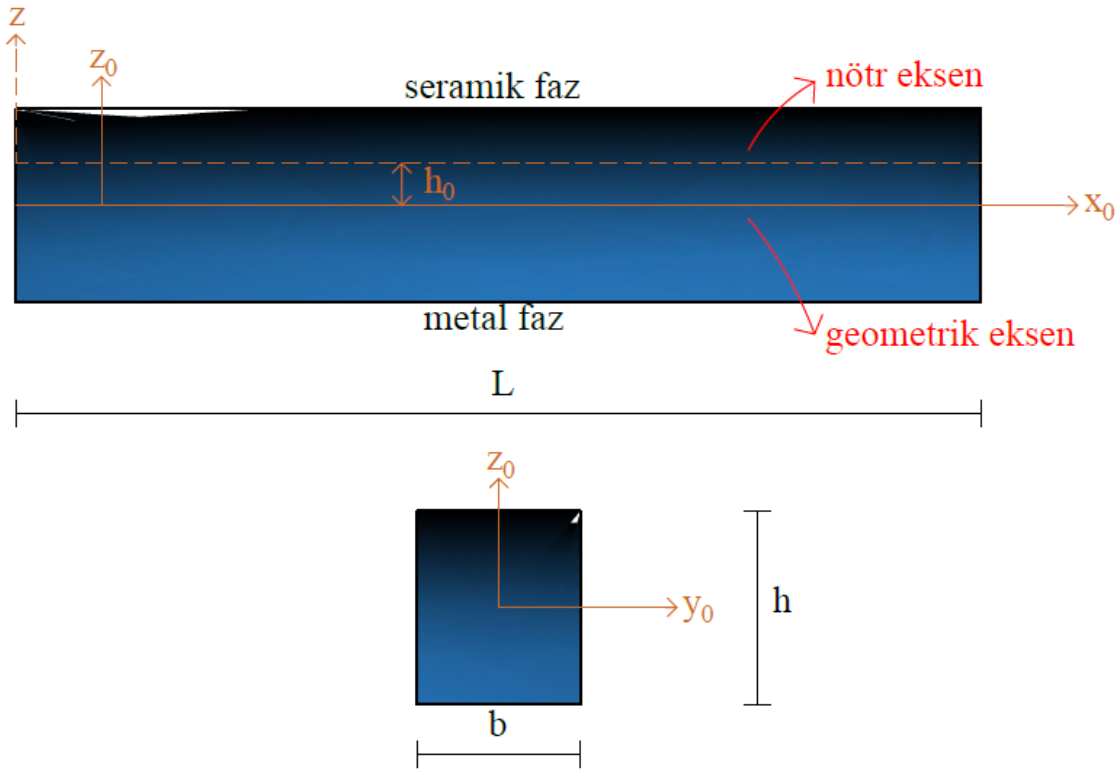
2.3. Nötr Eksenin Yerinin Belirlenmesi

Bu çalışmada, nötr (tarafsız) eksenin konumu tespit edilerek nanokompozit kirişlerin analizleri gerçekleştirilecekir. Bir kirişin kalınlığı boyunca malzeme özelliklerinin değişmesi, nötr eksenin orta yüzeyden uzaklaşmasına neden olmaktadır. Eğer, kiriş sabit elastisite modülüne sahipse ya da tek bileşenli ise nötr eksen orta yüzeyde olur. Kompozit

kirişlerde nötr eksenin konumunu belirlemek için yeni bir koordinat sistemi belirlenir (Eltaher vd., 2013; Eltaher vd., 2014). Şekil 2.7'de orta eksen ve nötr eksenin gösterimi, fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit malzeme için verilmiştir. Nötr eksenin konumunu bulmak için aşağıdaki fomül tanıtılmıştır (Eltaher vd., 2013; Eltaher vd., 2014):

$$h_0 = \frac{\int_{-h/2}^{+h/2} E(z_0) z_0 dz_0}{\int_{-h/2}^{+h/2} E(z_0) dz_0} \tag{2.51}$$

Burada, h_0 orta eksen ile nötr eksen arasındaki mesafeyi tanımlar. Nötr eksenin konumu belirlendikten sonra, nanokirişlerin etkili malzeme özellikleri yeniden yazılmalıdır.



Şekil 2.7. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerde nötr eksenin gösterimi

FDK-DD-I için:

$$\mathrm{F}^1(z) = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2(z+h_0)}{h}\right)^p\right) + \mathrm{F}_m - \frac{\vartheta}{2}(\mathrm{F}_s + \mathrm{F}_m), \quad z \in \left[0 - h_0, \frac{\mathrm{h}}{2} - h_0\right] \tag{2.52}$$

$$\mathrm{F}^2(z) = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2(z+h_0)}{h}\right)^p\right) + \mathrm{F}_m - \frac{\vartheta}{2}(\mathrm{F}_s + \mathrm{F}_m), \quad z \in \left[-\frac{\mathrm{h}}{2} - h_0, 0 - h_0\right] \tag{2.53}$$

FDK-O-I için:

$$\mathrm{F}^1(z) = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2(z+h_0)}{h}\right)^p\right) + \mathrm{F}_m - \frac{\vartheta}{2}(\mathrm{F}_s + \mathrm{F}_m)\left(1 - \frac{2|z+h_0|}{h}\right), \quad z \in \left[0 - h_0, \frac{\mathrm{h}}{2} - h_0\right] \tag{2.54}$$

$$\mathrm{F}^2(z) = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2(z+h_0)}{h}\right)^p\right) + \mathrm{F}_m - \frac{\vartheta}{2}(\mathrm{F}_s + \mathrm{F}_m)\left(1 - \frac{2|z+h_0|}{h}\right), \quad z \in \left[-\frac{\mathrm{h}}{2} - h_0, 0 - h_0\right] \tag{2.55}$$

FDK-I için:

$$\mathrm{F}^1(z) = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2(z+h_0)}{h}\right)^p\right) + \mathrm{F}_m, \quad z \in \left[0 - h_0, \frac{\mathrm{h}}{2} - h_0\right] \tag{2.56}$$

$$\mathrm{F}^2(z) = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2(z+h_0)}{h}\right)^p\right) + \mathrm{F}_m, \quad z \in \left[-\frac{\mathrm{h}}{2} - h_0, 0 - h_0\right] \tag{2.57}$$

etkili malzeme özellikleri nötr eksene göre yeniden yazılmış olur. Yukarıdaki denklemlerde, z nötr eksenden ifade edilen yükseklik yönüdür. Sigmoid dağılımına benzer olarak, güç kuralı dağılımına uyan kompozit nanokirişler FDK-DD-II, FDK-O-II

ve FDK-II için etkili malzeme özellikleri şu şekilde yeniden hesaplanır (Van Long vd., 2022):

$$\mathrm{F}(z) = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(\frac{1}{2} + \frac{z+h_0}{h}\right)^p + \mathrm{F}_m - \frac{\vartheta}{2}(\mathrm{F}_s + \mathrm{F}_m), \quad z \in \left[-\frac{\mathrm{h}}{2} - h_0, +\frac{\mathrm{h}}{2} - h_0\right] \tag{2.58}$$

$$\mathrm{F}(z) = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(\frac{1}{2} + \frac{z+h_0}{h}\right)^p + \mathrm{F}_m - \frac{\vartheta}{2}(\mathrm{F}_s + \mathrm{F}_m)\left(1 - \frac{2|z+h_0|}{h}\right), \quad z \in \left[-\frac{\mathrm{h}}{2} - h_0, +\frac{\mathrm{h}}{2} - h_0\right] \tag{2.59}$$

$$\mathrm{F}(z) = (\mathrm{F}_s - \mathrm{F}_m)\left(\frac{1}{2} + \frac{z+h_0}{h}\right)^p + \mathrm{F}_m, \qquad z \in \left[-\frac{\mathrm{h}}{2} - h_0, +\frac{\mathrm{h}}{2} - h_0\right] \tag{2.60}$$

Karbon nanotüp takviyeli kompozit nanokirişlerin nötr ekseninin hesaplanması aşağıdaki denklem ile gerçekleştirilmektedir (Taati vd., 2022):

$$h_0 = \frac{\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E_{11}^{KNTTK}(z_0)}{1 - \left(\nu^{KNTTK}(z_0)\right)^2} z_0 dz_0}{\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E_{11}^{KNTTK}(z_0)}{1 - \left(\nu^{KNTTK}(z_0)\right)^2} dz_0} \tag{2.61}$$

Literatürde, yukarıdaki eşitlikten de belli olacağı üzere, karbon nanotüp takviyeli kompozitlerin etkili malzeme özellikleri çoğunlukla azaltılmış şekilde kabul edilmiştir. Bu nedenle, bu tez çalışmasında da bu kabul sürdürülecektir. Burada, karbon nanotüp dağılımının orta eksen etrafında simetrik olduğu KNTTK-DD, KNTTK-O ve KNTTK-X için orta eksen ve nötr eksenin aynı olduğunu belirtmek gerekmektedir. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerdeki dönüşümler örnek alınarak KNTTK nanokirişlerin etkili malzeme özellikleri nötr eksene göre rahatlıkla yazılabilir.

2.4. Yönetici ve Hareket Denklemlerinin Yerel Olmayan Elastisite Teorisi ile Elde Edilmesi

Yerel olmayan elastisite teorisi (nonlocal elasticity theory)'nin (YOET) ilk kez önerilmesi Kröner (1967) tarafından sunulan çalışmaya dayandırılabilir. Ardından bu teori, Eringen ve Edelen (1972), Eringen ve Kim (1974), Eringen vd. (1977), Eringen (1978; 1979;

1983) tarafından geliştirilmiştir. Yerel olmayan elastisite teorisine göre, cisimde referans alınan bir noktanın gerilmesi, hem referans noktasının şekil değiştirmelerine hem de cisimdeki diğer tüm noktaların şekil değiştirmelerine bağlıdır (Eringen 1983). Bahsedilen referans noktası dışındaki noktalardaki şekil değiştirmelerin etkilerinin ihmal edilmesi ile klasik (yerel) elastisite teorisi elde edilir.

Eringen (1983) tarafından yerel olmayan elastisite teorisinin kurucu denklemleri aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\sigma_{ij,i} + \rho\left(\varkappa_j - \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}\right) = 0 \tag{2.62}$$

$$\sigma_{ij,i} = \int_V \alpha(|x' - x|, \varsigma)\sigma_{ij} dV(x') \tag{2.63}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{2.64}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j'} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i'}\right) \tag{2.65}$$

Yukarıda verilen eşitliklerde, $\sigma_{ij,i}$ yerel olmayan gerilme tensörü, $\varkappa_j$ kütle kuvveti yoğunluğu, t zaman ve u_j referans noktasındaki deplasman vektörüdür. σ_{ij} klasik (yerel) gerilme tensörünü temsil ederken $\alpha(|x' - x|, \varsigma)$ yerel olmayan çekirdek fonksiyonudur ve V hacimdir. $|x' - x|$ x ve x' noktaları arasındaki mesafe, ε_{ij} herhangi bir noktadaki lineer şekil değiştirme tensörü ve δ_{ij} $(i = j\ için\ 1, i \neq j\ için\ 0)$ Kronecker delta fonksiyonudur. Ayrıca, λ ve μ Lame sabitleridir ve aşağıdaki gibi yazılırlar:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{2.66}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.67}$$

Ayrıca, Denklem (2.63)'te yerel olmayan çekirdek fonksiyonu içindeki parametre $\varsigma = \frac{e_0 a}{\bar{L}}$ olarak ifade edilir ve $\alpha(|x' - x|)$ birimi uzunluk^{-3} olan yerel olmayan modüldür (Eringen, 1983). Buradan, yerel olmayan modülün bir karakteristik uzunluk oranına, $a/\bar{L}$'ye, bağlı olacağı anlaşılır. Karakteristik uzunluk oranında görülen a karakteristik iç

uzunluk iken, $\bar{L}$ karakteristik dış uzunluktur. Karakteristik iç uzunluğa örnek olarak tanecik boyutu ve karbon bağları arasındaki mesafe verilebilirken karakteristik dış uzunluk için çatlak uzunluğu ve nano yapının uzunluğu örnek olarak karşımıza çıkar (Karlicic vd., 2015). e_0 ise malzeme için deneysel olarak belirlenebilen bir sabittir (Eringen, 1983). $e_0 a$ yerel olmayan parametre olarak adlandırılır.

Denklem (2.63)'te verilen integral kurucu ilişki ile esneklik problemlerini analiz etmenin çok zor olduğu belirtilmektedir. Sonuç olarak, farklı problemleri analiz etmek için denklem (2.63)'te verilen ifadenin eşdeğer bir diferansiyel formu geliştirilmiştir (Taati vd., 2022). Ayrıca, integral form ile karşılaştırıldığında daha basit bir çözüm sağlayan diferansiyel form nano yapılarda yaygın olarak kullanılmaktadır (Kafkas, 2022). Yerel olmayan kurucu denklem için gerilme bağıntıları Eringen (1972) tarafından şu şekilde önerilmiştir:

$$\left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \sigma_{ij,i} = \sigma_{ij} \tag{2.68}$$

$$\left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \tau_{ij,i} = \tau_{ij} \tag{2.69}$$

Burada, $\tau_{ij,i}$ ve τ_{ij} sırasıyla yerel olmayan ve klasik kayma gerilmelerini temsil eder.

2.4.1. Yerel olmayan elastisite teorisine göre kompozit nanotüplerin burulmalı titreşim denklemleri

Bu alt başlıkta, Şekil 2.8'de gösterildiği gibi elastik bir ortam içinde olan fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli ve gözeneksiz kompozit nanotüplerin burulma titreşimi probleminin yönetici denklemi, yerel olmayan elastisite teorisine göre türetilecektir. Hem kompozit hem de kompozit olmayan içi boş tüplerin burulması, bu elemanların burulmada yüksek mukavemet ve rijitliğe sahip olması nedeniyle birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Modern yapılar, uzay, biyomekanik ve havacılık uygulamalarının pratik kullanımında yerleri olan fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit tüplerin burulma analizi dikkat çeken konulardan bir tanesidir (Arghavan ve Hematiyan, 2009). Statik torka ve burulma titreşimlerine maruz kalan silindirik şaftlar mühendislik açısından önemli bir yere sahiptir. Ayrıca, çoğu mühendislik tasarım problemlerinde temel

parametrelerden biri olarak gerekli olan malzemenin kayma modülünün tespiti için laboratuvar testleri burulma titreşimi uygular (Polyzos vd., 2015). Burulmaya maruz kalan fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli ve gözeneksiz kompozit nanotüplerin boyut etkisine bağlı statik davranışını açıklamak için basit bir model sunmak amacıyla, çalışma boyunca aşağıdaki varsayımlar göz önünde bulundurulmuştur (Li ve Hu, 2017; 2019):

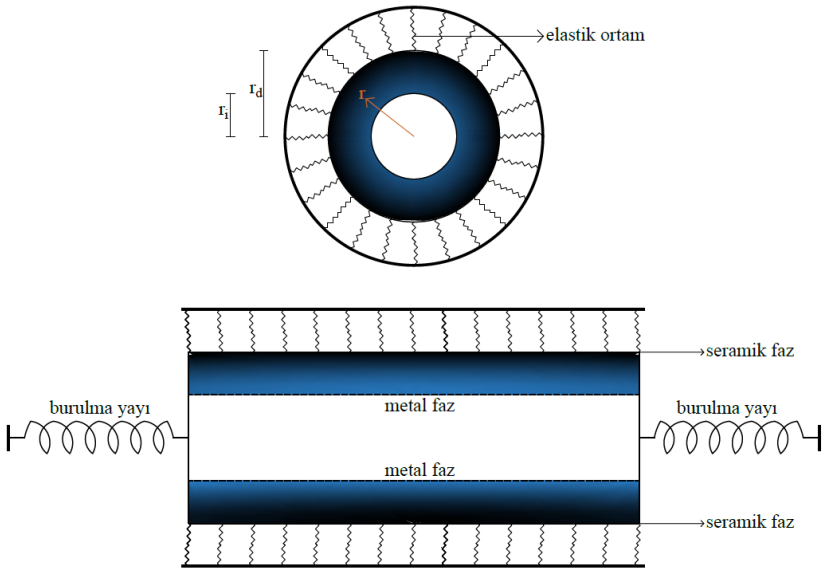
i) Özellikleri yarıçap doğrultusunda değişim gösteren fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit malzemeden yapılmış içi boş dairesel nanotüp burulmaya maruz kaldığında, her kesit düz ve bozulmadan kalır.

ii) Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit malzemede, Hooke yasasına uyan lineer elastik gerilme - şekil değiştirme bağıntısı vardır.

iii) Gerilmeler orantılılık sınırını aşmaz.

iv) Kompozit nanotüplerin enine kesiti uzunluğu boyunca aynıdır.

v) Kompozit nanotüpler, bölüm 2.1.1'de verilen formülasyonlar temelinde modellenebilir ve boyut etkisine dayanan teorilere uyar.



Şekil 2.8. Elastik bir ortam içinde olan fonksiyonel derecelendirilmiş nanotüp

Kompozit nanotüpün burulma altında yer değiştirme alanı şu şekilde yazılır (Numanoğlu ve Civalek, 2019; Barretta vd., 2020):

$$u_x(x,t) = 0 \tag{2.70}$$

$$u_y(x,t) = -z\theta(x,t) \tag{2.71}$$

$$u_z(x,t) = y\theta(x,t) \tag{2.72}$$

Yukarıdaki denklemlerde u_x, u_y ve u_z kompozit nanotüpün sırayla *x*, *y* ve *z* yönlerindeki yer değiştirmelerini tanımlarken $\theta = \theta(x,t)$ kompozit nanotüpün zamana bağlı burulma açısını (açısal yer değiştirmesini) temsil etmektedir. Kompozit nanotüpün şekil değiştirme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{z}{2}\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} \tag{2.73}$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = -\frac{y}{2}\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} \tag{2.74}$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0 \tag{2.75}$$

Bu çalışmanın tamamında, titreşim problemlerine ait yönetici denklemleri elde etmek için Hamilton prensibi kullanılmıştır. Hamilton prensibi $[t_1, t_2]$ zaman aralığında aşağıdaki gibi ifade edilir (Reddy, 2002):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - K - \Lambda)dt = 0 \tag{2.76}$$

Burada, δ varyasyon opertörüdür. U, K ve Λ sırasıyla cismin şekil değiştirme enerjisini, kinetik enerjisini ve dış yüklerin yaptığı işi temsil eder. Kompozit nanotüpün kinetik enerjisi aşağıdaki gibi yazılır (Li ve Hu, 2019):

$$K = \frac{1}{2}\int_0^L \int_A \rho(r)\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2\right] dAdx = \frac{1}{2}\int_0^L \rho^J \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 dx \tag{2.77}$$

Burada, ρ^J kompozit nanotüpün kütle polar atalet momentidir ve aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\rho^J = 2\pi \int_{r_i}^{r_d} \rho(r) r^3 dr \tag{2.78}$$

Doğrusallaştırılmış elastik malzeme durumunda, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış kompozit nanotüp için yerel olmayan elastisiteye bağlı şekil değiştirme enerjisi şu şekilde verilebilir (Li ve Hu, 2019):

$$U = \int_V \left(2\sigma_{xz}\varepsilon_{xz} + 2\sigma_{yz}\varepsilon_{yz}\right) dV \tag{2.79}$$

Kolaylık açısından gerilmeler tork (M_b) cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilirse (Li ve Hu, 2019):

$$M_b = \int_A (y\sigma_{zx} - z\sigma_{zx})\, dA \tag{2.80}$$

yazılır. Yerel olmayan kurucu denklem ve şekil değiştirme ifadeleri ile aşağıdaki eşitlik kurulabilir:

$$M_b - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M_b}{\partial x^2} = \mu^J \frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{2.81}$$

Burada, μ^J kompozit nanotüpün kayma rijitliğidir ve aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\mu^J = 2\pi \int_{r_i}^{r_d} \mu(r) r^3 dr \tag{2.82}$$

Kompozit nanotüpler için $\mu(r) = E(r)/\left[2\left(1 + \upsilon(r)\right)\right]$'dir. Bu problemde, daha önce de bahsedildiği üzere, kompozit nanotüpün elastik bir ortam içinde olduğu düşünülmüştür. Kompozit nanotüpü çevreleyen ortamın yaptığı iş aşağıdaki gibi yazılır (El-Borgi vd., 2018):

$$\Lambda = -\int_0^L k_e\,\theta^2 dx \tag{2.83}$$

Burada, k_e kompozit nanotüpü çevreleyen elastik ortamın rijitliğidir. Yukarıda verilen şekil değiştirme enerjisi, kinetik enerji ve dış yüklerin yaptığı işin birinci varyasyonlarını Denklem (2.76)'da yerine yazıp kısmi integrasyon işlemi gerçekleştirildiğinde aşağıdaki hareket denklemi elde edilir:

$$\frac{\partial M_b}{\partial x} - k_e\theta - \rho^J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \tag{2.84}$$

Yukarıda elde edilen ifadenin bir kez türevi alınıp Denklem (2.81)'de yerine yazılırsa yerel olmayan elastisite teorisine dayanan tork aşağıdaki gibi türetilir (Numanoğlu ve Civalek, 2019):

$$M_b = (e_0 a)^2 k_e \frac{\partial \theta}{\partial x} + (e_0 a)^2 \rho^J \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} + \mu^J \frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{2.85}$$

Türetilen tork ifadesinin bir kez türevi alınır ve Denklem (2.84)'te yerine yazılırsa, kompozit nanotüplerin yerel olmayan elastisite teorisine dayanan burulmalı titreşimini yöneten denklem aşağıdaki gibi kurulur (Numanoğlu ve Civalek, 2019; Li ve Hu, 2019):

$$\mu^J \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - k_e\theta - \rho^J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + (e_0 a)^2 k_e \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 \rho^J \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \tag{2.86}$$

Yukarıdaki yönetici denklem, yerel olmayan etkilerle birlikte elastik ortamın etkisini de içerir. Bu denklemde $k_e = 0$ alınırsa, elastik ortamın etkisi problemden çıkarılmış olur.

2.4.2. Kompozit nanokirişlerin Rayleigh kiriş ve yerel olmayan elastisite teorisine dayanan titreşim denklemleri

Bu alt başlıkta, kompozit nanokirişlerin serbest titreşimini veren problem yerel olmayan elastisite teorisi ve Rayleigh kiriş teorisi (RKT) ile çıkarılacaktır. Bilindiği üzere, Euler-Bernoulli kiriş teorisine (EBKT) dayanan titreşim problemlerinde dönel atalet etkisinin de problem içinde düşünülmesi ile Rayleigh kiriş teorisine ait formülasyonlar elde edilmiş olur.

Euler-Bernoulli modeline dayanan kirişlerin yer değiştirme alanı şu şekilde yazılır (Zeighampour ve Beni, 2015; Demir, 2016):

$$u_x(x,z,t) = -z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \tag{2.87}$$

$$u_y(x,z,t) = 0 \tag{2.88}$$

$$u_z(x,z,t) = w(x,t) \tag{2.89}$$

Burada, $w = w(x,t)$ kompozit nanokirişin zamana bağlı düşey deplasmanıdır. Euler-Bernoulli modeline dayanan kirişlerin şekil değiştirmeleri kolaylıkla aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\varepsilon_{xx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.90}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{zz} = 0 \tag{2.91}$$

Sıfır olmayan şekil değiştirme bileşeni ile kompozit Euler-Bernoulli kirişi için klasik gerilme aşağıdaki gibi yazılır:

$$\sigma_{xx} = -E(z)z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.92}$$

Yerel olmayan kurucu denklem ve şekil değiştirme ifadeleri ile Euler-Bernoulli nanokirişi için aşağıdaki eşitlik kurulabilir:

$$M - (e_0 a)^2\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.93}$$

Burada, M eğilme momentini temsil ederken D_{11} kompozit nanokirişin eğilme rijitliğidir ve güç kuralı ve sigmoid dağılımına uyan kompozit nanokirişler için sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanırlar:

$$D_{11} = b \int_{-\frac{h}{2}-h_0}^{+\frac{h}{2}-h_0} E(z) z^2 dz \tag{2.94}$$

$$D_{11} = b \int_{0-h_0}^{+\frac{h}{2}-h_0} E(z)^1 z^2 dz + b \int_{-\frac{h}{2}-h_0}^{0-h_0} E(z)^2 z^2 dz \tag{2.95}$$

Karbon nanotüp takviyeli kompozitler için eğilme rijitliği şu şekilde hesaplanır:

$$D_{11} = b \int_{-\frac{h}{2}-h_0}^{+\frac{h}{2}-h_0} \frac{E_{11}^{KNTTK}(z)}{1 - \left(\nu^{KNTTK}(z)\right)^2} z^2 dz \tag{2.96}$$

Eğilme rijitliklerinin tanımlanmasının ardından yönetici denklemin türetilmesine devam edilebilir. Winkler-Pasternak zemini üzerindeki kompozit nanokirişe ait şekil değiştirme enerjisi, kinetik enerji ve dış yüklerin yaptığı iş aşağıdaki gibi yazılır (Togun ve Bağdatlı, 2016a; Jena vd., 2022a):

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} \, dA dx = -\frac{1}{2} \int_0^L M \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \tag{2.97}$$

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 \right] dx \tag{2.98}$$

$$\Lambda = -\frac{1}{2} \int_0^L \left[c_w w^2 - c_g \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \tag{2.99}$$

Yukarıda, c_w ve c_g sırasıyla Winkler ve Pasternak zemin rijitliğidir. Denklem (2.98)'de görülen I_0 ve I_2 kompozit nanokirişin kütle atalet momentlerini temsil etmektedir ve güç kuralı ve sigmoid dağılımına uyan kompozit nanokirişler için sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanırlar:

$$I_0 = b\int_{-\frac{h}{2}-h_0}^{+\frac{h}{2}-h_0} \rho(z)dz\,, I_2 = b\int_{-\frac{h}{2}-h_0}^{+\frac{h}{2}-h_0} \rho(z)z^2dz \tag{2.100}$$

$$\begin{aligned} I_0 &= b\int_{0-h_0}^{+\frac{h}{2}-h_0} \rho(z)^1dz + b\int_{-\frac{h}{2}-h_0}^{0-h_0} \rho(z)^2dz, \\ I_2 &= b\int_{0-h_0}^{+\frac{h}{2}-h_0} \rho(z)^1z^2dz + b\int_{-\frac{h}{2}-h_0}^{0-h_0} \rho(z)^2z^2dz \end{aligned} \tag{2.101}$$

Karbon nanotüp takviyeli kompozitler için kütle atalet momentleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$I_0 = b\int_{-\frac{h}{2}-h_0}^{+\frac{h}{2}-h_0} \rho^{KNTK}(z)dz\,, I_2 = b\int_{-\frac{h}{2}-h_0}^{+\frac{h}{2}-h_0} \rho^{KNTK}(z)z^2dz \tag{2.102}$$

Şekil değiştirme enerjisinin, kinetik enerjinin ve dış yüklerin yaptığı işin birinci varyasyonları Hamilton prensibinde yerine yazıldığında, Rayleigh kiriş teorisine dayanan hareket denklemi şu şekilde elde edilir (Jena vd., 2022a):

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2} + c_w w - c_g\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.103}$$

Denklem (2.103) ve Denklem (2.93) ile kompozit nanokirişe ait yerel olmayan moment ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$M = (e_0 a)^2\left(I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2} + c_w w - c_g\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.104}$$

Winkler-Pasternak zemini üzerindeki kompozit nanokirişe ait kesme kuvveti Q yerel olmayan elastisite teorisine göre aşağıdaki gibi türetilir:

$$Q = (e_0a)^2\left(I_0\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2} - I_2\frac{\partial^5 w}{\partial x^3\partial t^2} + c_w\frac{\partial w}{\partial x} - c_g\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right) - D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \tag{2.105}$$

Yerel olmayan momentin x'e göre iki kez türevi alınıp elde edilen ifadenin hareket denkleminde yerine yazılmasıyla Winkler-Pasternak zemini üzerindeki kompozit nanokirişlerin Rayleigh kiriş teorisi ve yerel olmayan elastisite teorisine dayanan serbest titreşimini yöneten denklem aşağıdaki gibi türetilir:

$$\begin{aligned} D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (e_0a)^2 I_0\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2} - I_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2} + (e_0a)^2 I_2\frac{\partial^6 v}{\partial x^4\partial t^2} \\ + c_w w - (e_0a)^2\, c_w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c_p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (e_0a)^2\, c_p\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \end{aligned} \tag{2.106}$$

Yukarıda, dönel atalet etkisi I_2 ile incelenir. Eğer, yukarıdaki denklemde I_2 ihmal edilirse Winkler-Pasternak zemini üzerindeki kompozit nanokirişlerin Euler-Bernoulli kiriş teorisi ve yerel olmayan elastisite teorisine dayanan serbest titreşimini yöneten denklem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (e_0a)^2 I_0\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2} + c_w w - (e_0a)^2\, c_w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ - c_p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (e_0a)^2\, c_p\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \end{aligned} \tag{2.107}$$

2.4.3. Kompozit nanokirişlerin Euler-Bernoulli kiriş ve yerel olmayan elastisite teorisine dayanan burkulma denklemleri

Bu alt başlıkta, kompozit nanokirişlerin burkulma yüklerini veren problem yerel olmayan elastisite teorisi ve Euler-Bernoulli kiriş teorisi ile türetilecektir. Bu çalışmada, burkulma denklemlerini elde etmek için aşağıdaki gibi ifade edilen minimum toplam potansiyel enerji prensibi kullanılır (Reddy, 2002):

$$\delta(U - \Lambda) = 0 \tag{2.108}$$

Burkulma probleminde deplasman zamandan bağımsız olarak ele alınır ve kompozit nanokiriş, burkulmasına neden olan bir P tekil yükü ile eksenel yönde yüklenmiştir. Bu

nedenle, şekil değiştirme enerjisi ve dış yüklerin yaptığı iş aşağıdaki gibi yeniden yazılır (Mercan vd., 2017):

$$U = -\frac{1}{2}\int_0^L M\frac{d^2W}{dx^2}dx \tag{2.109}$$

$$\Lambda = -\frac{1}{2}\int_0^L \left[P\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 + c_w W^2 - c_g\left(\frac{dW}{dx}\right)^2\right]dx \tag{2.110}$$

Burada, $W = W(x)$ zamandan bağımsız düşey deplasmanı temsil eder. Yukarıda tanımlanan şekil değiştirme enerjisi ve dış yüklerin yaptığı işin birinci varyasyonlarını Denklem (2.108)'de yerine yazıp kısmi integrasyon ve varyasyon kurallarını uyguladığımızda aşağıdaki ifadeyi elde ederiz (Mercan vd., 2017; Robinson ve Adalı, 2018):

$$\frac{d^2M}{dx^2} = P\frac{d^2W}{dx^2} + c_w W - c_g\frac{d^2W}{dx^2} \tag{2.111}$$

Yukarıda eksenel yük ile yüklenmiş kompozit nanokiriş için elde edilen eşitlik ve Denklem (2.93) ile burkulma problemi için yerel olmayan moment:

$$M = (e_0a)^2 P\frac{d^2W}{dx^2} + (e_0a)^2 c_w W - (e_0a)^2 c_g\frac{d^2W}{dx^2} - D_{11}\frac{d^2W}{dx^2} \tag{2.112}$$

gibi türetilirken yerel olmayan kesme kuvveti ise aşağıdaki gibi yazılır (Mercan vd., 2017; Robinson ve Adalı, 2018):

$$Q = (e_0a)^2 P\frac{d^3W}{dx^3} - P\frac{dW}{dx} + (e_0a)^2 c_w\frac{dW}{dx} - (e_0a)^2 c_g\frac{d^3W}{dx^3} - D_{11}\frac{d^3W}{dx^3} \tag{2.113}$$

Burkulma problemi için elde edilen yerel olmayan momentin x'e göre iki kez türevinin alınıp Denklem (2.111)'de yerine yazılmasıyla, Winkler-Pasternak zemini üzerindeki kompozit nanokirişlerin Euler-Bernoulli kiriş teorisi ve yerel olmayan elastisite teorisine dayanan burkulmasını yöneten denklem aşağıdaki gibi elde edilir (Mercan vd., 2017; Robinson ve Adalı, 2018):

$$D_{11}\frac{d^4W}{dx^4} + c_w W - (e_0 a)^2 c_w \frac{d^2W}{dx^2} - c_g \frac{d^2W}{dx^2} + (e_0 a)^2 c_g \frac{d^4W}{dx^4} + P\frac{d^2W}{dx^2} - (e_0 a)^2 P \frac{d^4W}{dx^4} = 0 \quad (2.114)$$

2.4.4. Kompozit nanokirişlerin Timoshenko kiriş ve yerel olmayan elastisite teorisine dayanan titreşim denklemleri

Bu alt başlıkta, kompozit nanokirişlerin serbest titreşimini veren problem yerel olmayan elastisite teorisi ve Timoshenko kiriş teorisi (TKT) ile elde edilecektir. Birinci mertebe kayma deformasyonlu kiriş teorisi olarak da adlandırılan bu teori, Euler-Bernoulli kiriş teorisinden sonra en çok çalışılan kiriş teorisi olarak karşımıza çıkar. Dönel ataletin yanı sıra kayma deformasyonunu da kullanan Timoshenko (1921), kesit boyunca kayma gerilmesinin değişimini hesaba katmak için bir katsayısı önermiştir. Kayma düzeltme katsayısı olarak adlandırılan bu katsayı Timoshenko (1921) tarafından dikdörtgen kesit için 2/3 olarak kullanılmışsa da, daha sonrasında birçok araştırmacı bu katsayı üzerine çalışmış ve farklı değerler bulmuşlardır (Hutchinson 2001).

Timoshenko kiriş teorisi aşağıdaki yer değiştirme alanı ile ele alınır (Reddy, 2007; Amirian vd. 2013):

$$u_x(x,z,t) = z\phi(x,t) \quad (2.115)$$

$$u_y(x,z,t) = 0 \quad (2.116)$$

$$u_z(x,z,t) = w(x,t) \quad (2.117)$$

Burada, $\phi = \phi(x,t)$ kompozit nanokirişte kayma gerilmelerinden oluşan zamana bağlı dönmeyi temsil eder. Timoshenko kiriş teorisine dayanan ve sıfır olmayan şekil değiştirme bileşenleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir (Reddy, 2007; Amirian vd., 2013):

$$\varepsilon_{xx} = z\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.118)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \phi \quad (2.119)$$

Denklem (2.119)'da γ_{xz} kayma şekil değiştirmesini gösterir. Timoshenko kiriş teorisinde, yerel olmayan bünye bağıntıları şu şekilde yazılır:

$$M - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = D_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{2.120}$$

$$Q - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \kappa A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) \tag{2.121}$$

Kesme kuvveti bağıntısındaki κ kayma düzeltme katsayısıdır. A_{55} ise kompozit nanokirişlerin kayma rijitliğidir ve güç kuralı ve sigmoid dağılımına uyan kompozit nanokirişler için sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$A_{55} = b \int_{-\frac{h}{2}-h_0}^{+\frac{h}{2}-h_0} \mu(z) dz \tag{2.122}$$

$$A_{55} = b \int_{0-h_0}^{+\frac{h}{2}-h_0} \mu(z)^1 dz + b \int_{-\frac{h}{2}-h_0}^{0-h_0} \mu(z)^2 dz \tag{2.123}$$

Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişler için $\mu(z) = E(z)/\left[2\left(1 + \upsilon(z)\right)\right]$'dir. Karbon nanotüp takviyeli kompozitler için kayma rijitliği şu şekildedir:

$$A_{55} = b \int_{-\frac{h}{2}-h_0}^{+\frac{h}{2}-h_0} \mu_{12}^{KNTTK}(z) dz \tag{2.124}$$

Timoshenko kirişi için şekil değiştirme enerjisi ve kinetik enerji şu şekilde yazılır (Amirian vd., 2013):

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right) dA dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[M \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) \right] dx \tag{2.125}$$

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right] dx \tag{2.126}$$

Dış yüklerin yaptığı iş daha önce tanımlandığından tekrar yazılmamıştır. Yukarıda verilen enerji ifadeleri ve dış yüklerin yaptığı iş varyasyonları Hamilton prensibinde yerine yazıldığında (Amirian vd., 2013):

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{L}\left[I_0\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \delta w}{\partial t}+I_2\frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial \delta \phi}{\partial t}+c_w w\delta w-c_g\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta w-M\frac{\partial \delta \phi}{\partial x}\right.$$
$$\left.-Q\left(\frac{\partial \delta w}{\partial x}+\delta\phi\right)\right]dxdt=0 \tag{2.127}$$

olur. Kısmi integrasyonun uygulanmasının ardından δw ve $\delta\phi$ için aşağıdaki eşitlikler elde edilir (Amirian vd., 2013):

$$\delta w=0;\ \frac{\partial Q}{\partial x}-c_w w+c_g\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2.128}$$

$$\delta\phi=0;\ \frac{\partial M}{\partial x}-Q=I_2\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{2.129}$$

Denklem (2.129)'un x'e göre bir kez türevinin alınması ve Denklem (2.128)'in bu türevde yazılması ile $\partial^2 M/\partial x^2$ bulunur. Ardından, $\partial^2 M/\partial x^2$ ve $\partial^2 Q/\partial x^2$ Denklemler (2.120) ve (2.121)'de yerine yazıldığında, moment ve kesme kuvveti Timoshenko kiriş teorisi ve yerel olmayan elastisite teorisi temelinde aşağıdaki gibi elde edilir (Amirian vd., 2013):

$$M=D_{11}\frac{\partial \phi}{\partial x}+(e_0a)^2c_w w-(e_0a)^2c_g\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$
$$+(e_0a)^2I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+(e_0a)^2I_2\frac{\partial^3 \phi}{\partial x\partial t^2} \tag{2.130}$$

$$Q=\kappa A_{55}\frac{\partial w}{\partial x}+\kappa A_{55}\phi$$
$$+(e_0a)^2c_w\frac{\partial w}{\partial x}-(e_0a)^2c_g\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(e_0a)^2I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2.131}$$

Yukarıdaki yerel olmayan moment ve kesme kuvveti ifadeleri gerekli türev işlemleri yapıldıktan sonra Denklemler (2.128) ve (2.129)'da yerine yerlerine yazıldığında, Winkler-Pasternak zemini üzerindeki kompozit nanokirişlerin Timoshenko kiriş teorisi

ve yerel olmayan elastisite teorisine dayanan serbest titreşimini yöneten denklemler aşağıdaki gibi türetilir:

$$\kappa A_{55}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\kappa A_{55}\frac{\partial \phi}{\partial x}-c_w w+c_g\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(e_0 a)^2 c_w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} -(e_0 a)^2 c_g\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+(e_0 a)^2 I_0\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}-I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{2.132}$$

$$D_{11}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}-\kappa A_{55}\frac{\partial w}{\partial x}-\kappa A_{55}\phi+(e_0 a)^2 I_2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial t^2}-I_2\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}=0 \tag{2.133}$$

2.4.5. Kompozit nanokirişlerin Timoshenko kiriş ve yerel olmayan elastisite teorisine dayanan burkulma denklemleri

Bu alt başlıkta, kompozit nanokirişlerin burkulmasını veren yönetici denklemler yerel olmayan elastisite teorisi ve Timoshenko kiriş teorisi temelinde elde edilecektir. Timoshenko kirişi için dış yüklerin yaptığı iş Denklem (2.110)'da verildiği için tekrar yazılmamıştır. Timoshenko kirişi için şekil değiştirme enerjisi ise zamandan bağımsız olarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$U=\frac{1}{2}\int_0^L\left[M\frac{d\psi}{dx}+Q\left(\frac{dW}{dx}+\psi\right)\right]dx \tag{2.134}$$

Burada, $\psi=\psi(x)$ kompozit nanokirişte kayma gerilmelerinden oluşan zamandan bağımsız dönmedir. Denklem (2.110)'da verilen dış yüklerin yaptığı iş ve yukarıda verilen şekil değiştirme enerjisi daha önce tanıtılmış olan minimum toplam potansiyel enerji prensibinde yerine yazıldığı zaman:

$$\frac{dQ}{dx}=P\frac{d^2W}{dx^2}+c_w W-c_g\frac{d^2W}{dx^2} \tag{2.135}$$

$$\frac{d^2M}{dx^2}=P\frac{d^2W}{dx^2}+c_w W-c_g\frac{d^2W}{dx^2} \tag{2.136}$$

bulunur (Robinson ve Adalı, 2018). Denklem (2.135) bir kez türevi alınıp Denklem (2.121)'de ve Denklem (2.136) da Denklem (2.120)'de yerine yazıldığı zaman iki parametreli zemin üzerindeki Timoshenko kompozit nanokirişinin moment ve kesme kuvveti aşağıdaki gibi hesaplanır (Robinson ve Adalı, 2018):

$$M = D_{11}\frac{d\psi}{dx} + (e_0a)^2 c_w W - (e_0a)^2 c_g \frac{d^2W}{dx^2} \tag{2.137}$$

$$\begin{aligned} Q &= \kappa A_{55}\frac{dW}{dx} + \kappa A_{55}\psi \\ &+ (e_0a)^2 c_w \frac{dW}{dx} - (e_0a)^2 c_g \frac{d^3W}{dx^3} + (e_0a)^2 P \frac{d^3W}{dx^3} \end{aligned} \tag{2.138}$$

Yukarıdaki yerel olmayan moment ve kesme kuvveti ifadeleri gerekli türev işlemleri yapıldıktan sonra Denklemler (2.135) ve (2.136)'da yerine yerlerine yazılırsa, Winkler-Pasternak zemini üzerindeki kompozit nanokirişlerin Timoshenko kiriş teorisi ve yerel olmayan elastisite teorisine dayanan burkulmasını yöneten denklemler aşağıdaki gibi türetilir (Murmu ve Pradhan, 2009):

$$\begin{aligned} &\kappa A_{55}\frac{d^2W}{dx^2} + \kappa A_{55}\frac{d\psi}{dx} - c_w W + c_g \frac{d^2W}{dx^2} + (e_0a)^2 c_w \frac{d^2W}{dx^2} \\ &-(e_0a)^2 c_g \frac{d^4W}{dx^4} + (e_0a)^2 P \frac{d^4W}{dx^2} - P\frac{d^2W}{dx^2} = 0 \end{aligned} \tag{2.139}$$

$$D_{11}\frac{d^2\psi}{dx^2} - \kappa A_{55}\frac{dW}{dx} - \kappa A_{55}\psi = 0 \tag{2.140}$$

2.5. Yönetici ve Hareket Denklemlerinin Değiştirilmiş Gerilme Çifti Teorisi ile Elde Edilmesi

İlk olarak, Koiter (1964), Toupin (1962), Mindlin ve Tiersten (1962) ve Mindlin (1963) tarafından detaylandırılan klasik gerilme çifti elastisite teorisi, iki klasik malzeme sabitine ilave iki tane daha olmak üzere toplamda dört malzeme sabiti içeren boyut etkisine bağlı bir süreklilik teorisidir (Park ve Gao, 2006). Klasik gerilme çifti teorisi, yakın zamanda Yang vd. (2002) tarafından geliştirilerek değiştirilmiş gerilme çifti teorisi (modified couple stress theory, DGÇT) olarak önerilmiştir. Bu teoriye göre, gerilme çifti tensörü simetriktir ve bu terori bir tane ek malzeme uzunluk ölçek parametresi içerir (Park ve Gao, 2006). Yang vd. (2002) tarafından önerilen bu boyut etkisine bağlı teori için şekil değiştirme enerjisi U aşağıdaki gibi yazılır:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + m_{ij}\chi_{ij}\right)dV \tag{2.141}$$

Yukarıda değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre yazılan şekil değiştirme enerjisi ifadesinde m_{ij} ve χ_{ij} bu çalışmada ilk defa karşımıza çıkar ve sırasıyla gerilme çifti tensörünün deviatorik kısmı ve dönme değişimi tensörüdür. m_{ij} ve χ_{ij} sırasıyla aşağıdaki gibi yazılırlar (Yang vd., 2002):

$$m_{ij} = 2\mu l_d^2 \chi_{ij} \tag{2.142}$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Omega_{i,j} + \Omega_{j,i}\right) \tag{2.143}$$

Burada, l_d probleme boyut etkisini dâhil eden malzeme uzunluk ölçek parametresini gösterirken, Ω dönme vektörünü verir. Dönme vektörü Ω aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Omega_i = \frac{1}{2}\left(e_{ijk} u_{k,j}\right) \tag{2.144}$$

Burada, e_{ijk} permütasyon sembolüdür ve aşağıdaki gibi hesaplanır (Akgöz, 2016):

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1, & (i,j,k) = (x,y,z),(y,z,x),(z,x,y) \\ -1, & (i,j,k) = (x,z,y),(z,y,x),(y,x,z) \\ 0, & i = j \; veya \; j = k \; veya \; i = k \end{cases} \tag{2.145}$$

Küçük boyutlu bir yapının analizi değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ile gerçekleştirilmek istendiğinde yukarıdaki denklemler göz önünde bulundurulur.

2.5.1. Kompozit nanotüplerin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan burulmalı titreşim denklemleri

Bu alt başlıkta, fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli ve gözeneksiz kompozit nanotüplerin burulmalı titreşimini veren problem değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ile elde edilecektir. Kompozit nanotüpe ait yer değiştirme alanı ve şekil değiştirmeler Denklemler (2.70)-(2.75)'te verilmişti. Şimdi ise kompozit nanotüpe ait dönme vektörlerini Denklem (2.144) yardımıyla aşağıdaki gibi elde ederiz (Gheshlaghi vd., 2010):

$$\Omega_x = \theta(x,t), \;\; \Omega_y = -\frac{y}{2}\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}, \;\; \Omega_z = \frac{z}{2}\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} \tag{2.146}$$

Kompozit nanotüpün gerilme tensörünün sıfır olmayan bileşenleri (Gheshlaghi vd., 2010):

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -\mu(z)z\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \mu(z)y\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} \tag{2.147}$$

gibi elde edilirken, χ_{ij}'in sıfır olmayan bileşenleri şu şekilde hesaplanır (Gheshlaghi vd., 2010):

$$\chi_{xx} = \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} \tag{2.148}$$

$$\chi_{yy} = \chi_{zz} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} \tag{2.149}$$

$$\chi_{xy} = \chi_{yx} = -\frac{y}{4}\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.150}$$

$$\chi_{xz} = \chi_{zx} = -\frac{z}{4}\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.151}$$

Son olarak, gerilme çifti tensörünün deviatorik kısmının sıfır olmayan bileşenleri şu şekilde elde edilir (Gheshlaghi vd., 2010):

$$m_{xx} = 2\mu(z)l_d^2\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} \tag{2.152}$$

$$m_{xy} = m_{yx} = -\frac{y}{2}\mu(z)l_d^2\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.153}$$

$$m_{xz} = m_{zx} = \frac{z}{2}\mu(z)l_d^2\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.154}$$

$$m_{yy} = m_{zz} = -\mu(z)l_d^2\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} \tag{2.155}$$

Geriye kalan m_{yz} ve m_{zy} bileşenleri sıfıra eşittir. Şimdiye kadar elde ettiğimiz matematiksel ifadeler ile değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan şekil değiştirme enerjisi, kompozit nanotüp için aşağıdaki gibi yeniden yazılır (Gheshlaghi vd., 2010):

$$U = \frac{1}{2}\int_V \left[\mu(z)(y^2 + z^2 + 3l_d^2)\left(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{4}\mu(z)l_d^2(y^2 + z^2)\left(\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\right] dV \tag{2.156}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L \left[(\mu^J + 3\mu^A l_d^2)\left(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{4}\mu^A l_d^2\left(\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\right] dx$$

Yukarıdaki μ^J daha önceden gözenekli ve gözeneksiz kompozit nanotüpler için Denklem (2.82)'de tanımlanmıştı. μ^A ise şu şekilde hesaplanır:

$$\mu^A = 2\pi\int_{r_i}^{r_d} \mu(r) r dr \tag{2.157}$$

Bu problem için elastik zemin etkisi düşünülmemiştir ve serbest titreşim ele alınacaktır. Yukarıda yazılan değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan şekil değiştirme enerjisi ve tüm burulma problemleri için aynı olan kineik enerji Hamilton prensibinde yerine yazılırsa:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{0}^{L} \left[\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\mu^J l_d^2 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu^J + 3\mu^A l_d^2) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho^J \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} \right) \right] \delta\theta dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[(\mu^J + 3\mu^A l_d^2) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu^J l_d^2 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} \right) \delta\theta \right]_0^L dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{4} \mu^J l_d^2 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \right]_0^L dt - \int_{0}^{L} \left[\rho^J \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} \delta\theta \right]_{t_1}^{t_2} dx = 0 \quad (2.158)$$

elde edilir (Gheshlaghi vd., 2010). Bu ifadede, çift integral içinde kalan Euler-Lagrange denklemi kompozit nanotüpün burulmalı titreşim denklemini ifade eder ve bu yönetici denklem aşağıdaki gibi yazılır (Gheshlaghi vd., 2010):

$$\frac{1}{4} \mu^J l_d^2 \frac{\partial^4 \theta(x,t)}{\partial x^4} - (\mu^J + 3\mu^A l_d^2) \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} + \rho^J \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.159)$$

Ayrıca, Denklem (2.158)'den başlangıç koşulları aşağıdaki gibi elde edilir (Gheshlaghi vd., 2010):

$$\frac{\partial \theta(x,t_2)}{\partial t} \delta\theta(x,t_2) - \frac{\partial \theta(x,t_1)}{\partial t} \delta\theta(x,t_1) = 0 \quad (2.160)$$

$$(\mu^J + 3\mu^A l_d^2) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{4} \mu^J l_d^2 \frac{\partial^3 \theta(x,t)}{\partial x^3} = 0 \; ya \; da \; \theta = 0 \quad (2.161)$$

$$\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = 0 \; ya \; da \; \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (2.162)$$

2.5.2. Kompozit nanokirişlerin Rayleigh kiriş ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan titreşim denklemleri

Bu alt başlık, kompozit nanokirişlerin serbest titreşimini veren problemin değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ve Rayleigh kiriş teorisi ile elde edilmesine ayrılmıştır. Ardından, dönel atalet etkisinin problemden çıkarılmasıyla Euler-Bernoulli nanokompozit kirişi için formülasyon sunulacaktır. İlk önce, şekil değiştirme enerjisi içerisindeki elemanlar tanımlanacaktır. Nanokirişe ait yer değiştirme alanı, eksenel şekil değiştirme ve gerilme bileşenleri Denklemler (2.87)-(2.92)'de verildiği için tekrar yazılmamıştır. Kompozit nanokirişe ait dönme vektörlerini aşağıdaki gibi elde ederiz (Kong vd., 2008; Ersoy vd., 2018):

$$\Omega_x = \frac{1}{2}\left(e_{xyz}\frac{\partial u_z}{\partial y} + e_{xzy}\frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = 0 \tag{2.163}$$

$$\Omega_y = \frac{1}{2}\left(e_{yzx}\frac{\partial u_x}{\partial z} + e_{yxz}\frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = -\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.164}$$

$$\Omega_z = \frac{1}{2}\left(e_{zxy}\frac{\partial u_y}{\partial x} + e_{zyx}\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = 0 \tag{2.165}$$

Görüleceği üzere, sadece Ω_y sıfırdan farklıdır. Dönme değişimi tensörünün deviatorik kısmınının sıfır olmayan bileşenleri ise yukarıdaki denklemler yardımıyla şu şekilde hesaplanır (Kong vd., 2008; Ersoy vd., 2018):

$$\chi_{xy} = \chi_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Omega_x}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.166}$$

Geriye kalan bileşenler $\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{xz} = \chi_{zx} = \chi_{yz} = \chi_{zy} = \chi_{zz}$ sıfıra eşittir. Sıfır olmayan bileşenler yardımıyla kompozit nanokiriş için gerilme çifti tensörünün deviatorik kısmının sıfır olmayan bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir (Kong vd., 2008; Ersoy vd., 2018):

$$m_{xy} = m_{yx} = -\mu(z) l_d^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.167}$$

Geriye kalan $m_{xx} = m_{yy} = m_{xz} = m_{zx} = m_{yz} = m_{zy} = m_{zz}$ sıfıra eşittir. Denklemler (2.163)-(2.167) ve daha önceden elde edilmiş olan eksenel şekil değiştirme ve gerilme

bileşenlerinin Denklem (2.141)'de yerine yazılması ile şekil değiştirme enerjisi şu şekilde elde edilir (Kong vd., 2008):

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L (D_{11} + A_{55}l_d^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx \tag{2.168}$$

Bu problemde, nanokompozit kiriş herhangi bir dış yük etkisi olmadan düşünülmüştür. Kinetik enerji ile Denklem (2.168)'in birinci varyasyonunun Hamilton prensibinde yerine yazılıp gerekli matematiksel işlemlerin uygulanmasının ardından Rayleigh kiriş teorisi ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan titreşim denklemi ve sınır koşulları aşağıdaki gibi türetilir (Ersoy vd., 2018):

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + A_{55}l_d^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \tag{2.169}$$

$$Q - I_2\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + A_{55}l_d^2\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \; veya \; \delta w = 0 \tag{2.170}$$

$$-M - D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A_{55}l_d^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \; veya \; \delta\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{2.171}$$

Aşina olunduğu üzere, problemde dönel atalet ifadesinin ihmal edilmesi titreşim problemini Euler-Bernoulli kiriş teorisine indirger. Denklem (2.169)'da dönel atalet ifadesi ihmal edildiğinde, Euler-Bernoulli kiriş teorisi ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan nanokompozit kirişlerin titreşim denklemi aşağıdaki gibi elde edilir (Kong vd. 2008):

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + A_{55}l_d^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{2.172}$$

2.5.3. Kompozit nanokirişlerin Euler-Bernoulli kiriş ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan burkulma denklemleri

Bu alt başlıkta, kompozit nanokirişlerin burkulmasını veren problem değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ve Euler-Bernoulli kiriş teorisi ile türetilecektir. Bu problem için tek parametreli Winkler zemin modeli düşünülmüştür. Kompozit nanokirişin şekil değiştirme enerjisi ifadesi Denklem (2.168)'teki gibi bir önceki bölümde çıkarılmıştı. Winkler

zemini üzerinde ve eksenel yüke maruz nanokiriş için dış yüklerin yaptığı iş şu şekilde yazılır:

$$\Lambda = -\frac{1}{2}\int_0^L \left[P\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 + c_w W^2 \right] dx \tag{2.173}$$

Şekil değiştirme enerjisi ve dış yüklerin yaptığı işin birinci varyasyonları aşağıdaki gibi yazılır (Mercan vd., 2017):

$$\begin{aligned}\delta U = \int_0^L \int_A \left(\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + m_{ij}\delta\chi_{ij}\right) dA dx = \int_0^L (D_{11} + A_{55} l_d^2)\frac{d^4W}{dx^4}\delta W dx \\ + \left[-(D_{11} + A_{55} l_d^2)\frac{d^3W}{dx^3}\delta W \right. \\ \left. + (D_{11} + A_{55} l_d^2)\frac{d^2W}{dx^2}\delta\frac{dW}{dx} \right]_0^L\end{aligned} \tag{2.174}$$

$$\delta\Lambda = \int_0^L -\left(c_w W + P\frac{d^2W}{dx^2}\right)\delta W dx + \left[\left(Q + P\frac{dW}{dx}\right)\delta W - M\delta\frac{dW}{dx}\right]_0^L \tag{2.175}$$

Yukarıdaki ifadeler minimum toplam potansiyel enerji prensibinde yerine yazılır ve gerekli matematiksel adımlar gerçekleştirilirse, Euler-Bernoulli nanokompozit kirişinin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan burkulma problemi aşağıdaki gibi elde edilir (Mercan vd., 2017):

$$D_{11}\frac{d^4W}{dx^4} + A_{55} l_d^2 \frac{d^4W}{dx^4} + P\frac{d^2W}{dx^2} + c_w W = 0 \tag{2.176}$$

Son olarak, probleme ait sınır koşulları aşağıdaki gibi bulunur (Mercan vd., 2017):

$$Q + D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + A_{55} l_d^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + P\frac{dW}{dx} = 0 \; veya \; \delta w = 0 \tag{2.177}$$

$$-M - D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A_{55} l_d^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \; veya \; \delta\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{2.178}$$

2.6. Yönetici ve Hareket Denklemlerinin Yerel Olmayan Şekil Değiştirme Değişimi Teorisi ile Elde Edilmesi

Yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisi (nonlocal strain gradient theory) Lim vd. (2015) tarafından önerilen boyut etkisine bağlı bir elastisite teorisidir. Bu elastisite teorisi, σ_{ij}^{T} ile gösterilen bir toplam gerilme tensörü tanımlar ve σ_{ij}^{T}, hem yerel olmayan gerilme tensörü σ_{ij}'yi hem de yüksek mertebeden yerel olmayan gerilme tensörü $\sigma_{ijm}^{(1)}$'yi formülasyonlarına dahil eder (El-Borgi vd., 2018). Bu teoriye göre, bir referans noktasındaki toplam gerilme hem o noktanın şekil değiştirmesine ve onun gradyanına hem de malzemenin diğer tüm noktalarının şekil değiştirmesine ve onların gradyanına bağlıdır (El-Borgi vd., 2018). Toplam gerilme tensörü aşağıdaki gibi tanıtılır (Lim vd., 2015):

$$\sigma_{ij}^{T} = \sigma_{ij} - \nabla\sigma_{ijm}^{(1)} \tag{2.179}$$

σ_{ij} ve $\sigma_{ijm}^{(1)}$ sırasıyla aşağıdaki gibi yazılırlar (Lim vd., 2015; Li vd., 2016).

$$\sigma_{xx} = \int_{0}^{L} E\alpha_0(x, x', e_0 a)\varepsilon'_{xx}(x')dx' \tag{2.180}$$

$$\sigma_{xx}^{(1)} = l_s^2 \int_{0}^{L} E\alpha_1(x, x', e_1 a)\varepsilon'_{xx,x}(x')dx' \tag{2.181}$$

Burada, l_s şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan malzeme uzunluk ölçek parametresidir. Burada sözü edilen şekil değiştirme değişimi teorisinin Aifantis (1999) tarafından önerilen teori olduğu belirtilmelidir. Yukarıda verilen integral kurucu ilişkilerin çözümünün zor olması nedeniyle Eringen (1983) eşdeğer diferansiyel model önermiştir (El-Borgi vd., 2018). Buna dayanarak, $e_0 = e_1$ kabul ederek Denklemler (2.180) ve (2.181) aşağıdaki gibi basitleştirilebilir (El-Borgi vd., 2018):

$$(1 - (e_0 a)^2\nabla^2)\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \tag{2.182}$$

$$(1 - (e_0 a)^2\nabla^2)\sigma_{xx}^{(1)} = l_s^2 E\nabla\varepsilon_{xx} \tag{2.183}$$

Denklemler (2.182) ve (2.183)'ün Denklem (2.179)'da yerine yazılmasıyla yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisinin kurucu denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left(1-(e_0a)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma_{ij}^{T}=E\left(1-l_s^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varepsilon_{xx} \tag{2.184}$$

Bu tez çalışmasında yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisi, kompozit nanotüplerin ve dairesel olmayan nanoçubukların burulmalı titreşimini incelemek için kullanılacaktır.

2.6.1. Kompozit nanotüplerin yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan burulmalı titreşim denklemleri

Bu alt başlık, fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli ve gözeneksiz kompozit nanotüplerin burulmalı titreşimini veren problem yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisi ile türetilmesini gösterir. Kompozit nanotüpe ait kinetik enerji ve dış yüklerin yaptığı iş daha önceki bölümlerde tanımlanmıştı. Bu bölümde farklı olarak şekil değiştirme enerjisi yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisi temelinde şu şekilde yazılır:

$$U=\int_V\left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+\sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij,i}\right)dV \tag{2.185}$$

Önceki bölümlerde diğer teorilerde yapılan işlemler gibi Hamilton prensibi yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisinin formülasyonları ile kullanıldığında, hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir (El-Borgi vd., 2018):

$$-\rho^J\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}-k_e\theta(x,t)+\frac{\partial M_b}{\partial x}=0 \tag{2.186}$$

Ayrıca, Denklem (2.182) ve (2.183)'den aşağıdaki iki eşitlik yazılabilir (El-Borgi vd., 2018):

$$M_b^{(0)} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M_b^{(0)}}{\partial x^2} = \mu^J \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \tag{2.187}$$

$$M_b^{(1)} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M_b^{(1)}}{\partial x^2} = l_s^2 \mu^J \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.188}$$

Burada, $M_b^{(0)}$ ve $M_b^{(1)}$ sırasıyla yerel olmayan burulma momenti ve yüksek mertebeden yerel olmayan burulma momentidir. Ayrıca, Denklem (2.179)'dan aşağıdaki eşitlik rahatlıkla yazılabilir:

$$M_b = M_b^{(0)} - \frac{\partial M_b^{(1)}}{\partial x} \tag{2.189}$$

Denklemler (2.187) ve (2.188), Denklem (2.189)'da yerine yazılırsa:

$$M_b = (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M_b}{\partial x^2} + \left(1 - l_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \mu^J \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \tag{2.190}$$

elde edilir. Denklem (2.186)'nın x'e göre bir kez türevinin alınması ve yukarıda yerine yazılması ile M_b aşağıdaki gibi hesaplanır (El-Borgi vd., 2018):

$$M_b = \mu^J \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} - \mu^J l_s^2 \frac{\partial^3 \theta(x,t)}{\partial x^3} + (e_0 a)^2 \left(\rho^J \frac{\partial^3 \theta(x,t)}{\partial x \partial t^2} + k_e \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right) \tag{2.191}$$

Elde edilen M_b ifadesinin hareket denkleminde yerine yazılması ile yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan burulmalı titreşim problemini veren denklem aşağıdaki gibi türetilir (El-Borgi vd., 2018):

$$\begin{aligned} &\mu^J \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} - \mu^J l_s^2 \frac{\partial^4 \theta(x,t)}{\partial x^4} + (e_0 a)^2 \left(\rho^J \frac{\partial^4 \theta(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + k_e \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2}\right) \\ &- k_e \theta(x,t) - \rho^J \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \tag{2.192}$$

Yukarıdaki yönetici denklem, hem yerel olmayan elastisite teorisinin hem de Aifantis (1999) tarafından önerilen şekil değiştirme değişimi teorisinin etkilerini bir arada sunmakta ve ayrıca, elastik ortam etkilerini de inceleyebilmektedir.

2.6.2. Dairesel olmayan nanoçubukların yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan burulmalı titreşim denklemleri

Bu alt başlıkta, elastik bir ortamın içindeki dairesel olmayan nanoçubukların burulmalı titreşimini veren problem yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisi ile elde edilecektir. Bilindiği üzere, burulma etkileri analiz edilirken, kesit gerilmesine maruz kalan çubukların deformasyon sonrasında aynı geometrik şekilde kaldığı varsayılır. Ancak; üçgen, eliptik ve dikdörtgen kesitlerde kesit çarpılması kaçınılmazdır. Kesit bozulmasını temsil eden formülasyonlara bir çarpılma fonksiyonunun dâhil edilmesi, tasarımcılara analiz sırasında ve malzeme seçiminde büyük avantajlar sağlayacaktır. Burulma dönmesinin küçük olduğu farklı kesitlerde kesit çarpılması çok fazla dikkate alınmaz. Ancak, araştırmacılar bu küçük miktardaki dönmenin ne kadar olduğu konusunda kesin bir bilgi vermemekte, bunun üzerine bir de çarpılma fonksiyonu ihmal edilerek model ile gerçeklik arasında ilişki kurulması zorlaşmaktadır. En azından burulma problemleri için, dönme küçük olsun ya da olmasın bir çarpılma fonksiyonu tanımlamak faydalı olacaktır. Bununla beraber, literatürde karşılaşılan çalışmaların büyük bir kısmı içi boş veya dolu dairesel kesitli, ankastre mesnetli ve konsol çubukların analizlerini sunmaktadır. Bu çalışmada incelenecek olan nano yapılardan bir tanesi olan deforme olabilen yaylar ile mesnetlenmiş dairesel olmayan nanoçubuklar, literatürde bulunmayan bir modeli sunar.

Bu çalışmada, Şekil 2.9 ve Şekil 2.10'da göserilen nanoçubuklar çalışılacaktır. Farklı kesitler için çarpılma fonksiyonları ($\xi = \xi(y,z)$) aşağıdaki gibi yazılmıştır:

i) Eliptik kesit için (Khosravi vd., 2020):

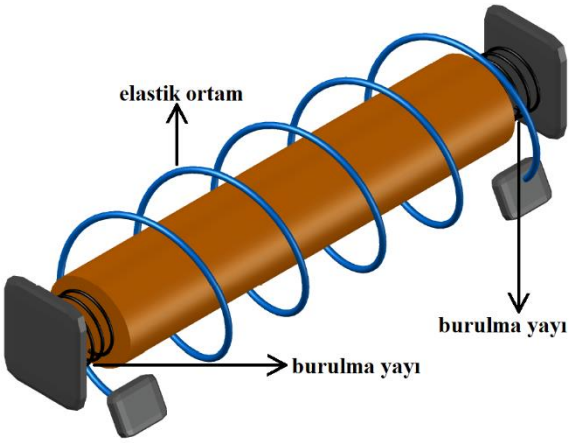
$$\xi(y,z) = yz\left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}\right) \tag{2.193}$$

Burada, r_1 ve r_2 eliptik nanoçubuğun z ve y yönlerindeki yarıçaplarıdır.

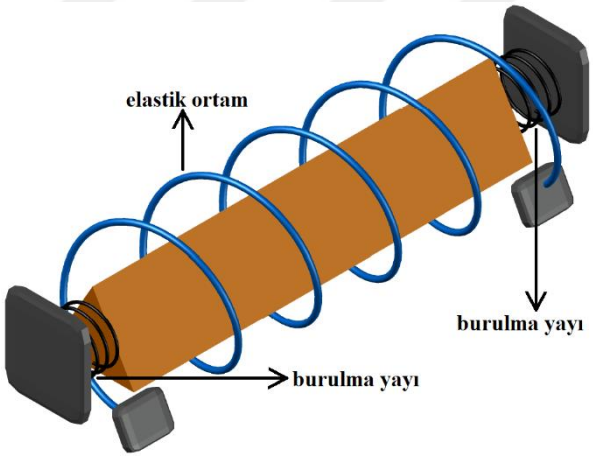
ii) Eşkenar üçgen kesit için (Alizadeh Hamidi vd., 2020):

$$\xi(y,z) = \frac{2\sqrt{3}}{6r_3} y(3z^2 - y^2) \tag{2.194}$$

Burada, r_3 eşkenar üçgenin kenar uzunluğudur.



Şekil 2.9. Elastik bir ortam içinde olan eliptik kesite sahip nanoçubuk



Şekil 2.10. Elastik bir ortam içinde olan eşkenar üçgen kesite sahip nanoçubuk

Dairesel olmayan kesitlerin yer değiştirme alanları alanları aşağıdaki gibi tanımlanır (Hassannejad vd., 2022):

$$u_x(x,y,z,t) = \xi(y,z)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} \tag{2.195}$$

$$u_y(x,y,z,t) = -z\theta(x,t) \tag{2.196}$$

$$u_z(x,y,z,t) = -y\theta(x,t) \tag{2.197}$$

Yukarıda tanımlanan yer değiştirme alanına dayanarak, dairesel olmayan nanoçubukların şekil değiştirmeleri aşağıdaki gibi hesaplanır (Hassannejad vd., 2022):

$$\varepsilon_{xy} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - z\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{2.198}$$

$$\varepsilon_{xz} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + y\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{2.199}$$

Şekil değiştirme bileşenlerinden yola çıkarak, dairesel olmayan çubukların gerilmeleri aşağıdaki gibi elde edilir (Hassannejad vd., 2022):

$$\sigma_{xy} = \mu\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - z\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{2.200}$$

$$\sigma_{xz} = \mu\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + y\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{2.201}$$

Daha önceki dinamik problemler gibi burada da yönetici denklemi etmek için Hamilton prensibi kullanılır. Burada, dış yüklerin yaptığı iş Denklem (2.83)'deki gibi işlemlere dâhil edilecektir. Ancak, dairesel olmayan kesitlerde çarpılma fonksiyonu yer değiştirme alanına dâhil edildiği için, şekil değiştirme enerjisi ve kinetik enerji yeniden elde edilecektir. Şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu, dairesel olmayan çubukların şekil değiştirme ifadeleri yerlerine yazıldığında aşağıdaki gibi elde edilir (Hassannejad vd., 2022):

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \delta U\, dt = &\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{L}\left[\int_{A}\left(\sigma_{xy}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - z\right) + \sigma_{xz}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + y\right)\right)dA\right]\frac{\partial \delta\theta}{\partial x}\,dx dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2}\int_{A}\left[\left(\sigma_{xy}^{(1)}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - z\right) + \sigma_{xz}^{(1)}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + y\right)\right)\right]_{0}^{L}\frac{\partial \delta\theta}{\partial x}\,dx dt\end{aligned} \tag{2.202}$$

Çarpılma fonksiyonunu içeren klasik ve klasik olmayan tork ifadeleri aşağıdaki gibi yazılır (Hassannejad vd., 2022):

$$M_{bI} = \int_{A}\left(\sigma_{xy}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - z\right) + \sigma_{xz}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + y\right)\right)dA \tag{2.203}$$

$$M_{bII} = \int_{A}\left(\sigma_{xy}^{(1)}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - z\right) + \sigma_{xz}^{(1)}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + y\right)\right)dA \tag{2.204}$$

Bu tork ifadeleri ile, şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu aşağıdaki gibi yeniden yazılır:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{0}^{L} M_{bI} \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} dx dt + \int_{t_1}^{t_2} [M_{bII}]_0^L \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} dt$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} (M_{bI} \delta\theta|_0^L - \int_{0}^{L} \frac{\partial M_{bI}}{\partial x} \delta\theta dx) dt + \int_{t_1}^{t_2} [M_{bII}]_0^L \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} dt \quad (2.205)$$

Dairesel olmayan kesitlere ait kinetik enerji ifadesi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\xi^2(y,z) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \right)^2 + (y^2 + z^2) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right) dV \quad (2.206)$$

Polar atalet momenti $J = \int_A (y^2 + z^2) dA$ ve kütle polar atalet momenti $I_A = \rho \int_A (y^2 + z^2) dA$ yukarıdaki denklemde yerine yazıldığında:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \xi^2(y,z) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \right)^2 dA dx + \frac{1}{2} I_A \int_0^L \int_A \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.207)$$

elde edilir. Kinetik enerjinin birinci varyasyonu:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta K dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\rho I_\xi \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} - I_A \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) \delta\theta dx dt - \rho I_\xi \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} \delta\theta \Big|_0^L dt \quad (2.208)$$

gibi hesaplanır. Burada, I_ξ aşağıdaki gibi tanımlanır (Hassannejad vd., 2022):

$$I_\xi = \int_A \xi^2 (y^2 + z^2) dA \quad (2.209)$$

Varyasyon ifadeleri Hamilton prensibinde yerine yazıldığında (Hassannejad vd., 2022):

$$\frac{\partial M_{bI}}{\partial x} = I_A \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \rho I_\xi \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} + k_e \theta \tag{2.210}$$

$$\left[M_{bI} + \rho I_\xi \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2}\right]_0^L = 0, \qquad [\theta]_0^L = 0 \tag{2.211}$$

$$[M_{bII}]_0^L = 0, \qquad \left[\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]_0^L = 0 \tag{2.212}$$

ifadeleri elde edilir. Dairesel olmayan kesitlerin şekil değiştirme alanlarına bağlı olarak aşağıdaki iki eşitlik yazılabilir (Hassannejad vd., 2022):

$$M_{xy} - (e_0 a)^2 \nabla^2 M_{xy} = (1 - l_s^2 \nabla^2) \frac{\partial \theta}{\partial x} \int_A \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - z\right)^2 dA \tag{2.213}$$

$$M_{xz} - (e_0 a)^2 \nabla^2 M_{xz} = (1 - l_s^2 \nabla^2) \frac{\partial \theta}{\partial x} \int_A \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + y\right)^2 dA \tag{2.214}$$

Yukarıdaki iki tork ifadesi, $I_B = \int_A \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - z\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + y\right)^2\right] dA$ ile aşağıdaki gibi kompakt bir formda yazılır:

$$M_{bI} - (e_0 a)^2 \nabla^2 M_{bI} = I_B \mu \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - l_s^2 \nabla^3 \theta\right) \tag{2.215}$$

Denklem (2.210)'un x'e göre bir kez türevinin alınması ve yukarıdaki eşitlikte yerine yazılması ile çarpılma fonksiyonu içeren dairesel olmayan kesitlerin yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan torku aşağıdaki gibi türetilir:

$$\begin{aligned} M_{bI} = (e_0 a)^2 &\left(I_A \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} - \rho I_\xi \frac{\partial^5 \theta}{\partial x^3 \partial t^2} + k_e \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \\ &+ I_B \mu \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - l_s^2 \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3}\right) \end{aligned} \tag{2.216}$$

Son olarak, Denklem (2.216)'nın x'e göre bir kez türevinin alınması ve Denklem (2.210)'da yerine yazılması, elastik bir ortam ile çevrili dairesel olmayan nanoçubukların yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan burulmalı titreşim denklemini aşağıdaki gibi verir (Hassannejad vd., 2022):

$$\rho I_\xi \frac{\partial^4\theta}{\partial x^2\partial t^2} - I_A\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - k_e\theta + (e_0a)^2\left(I_A\frac{\partial^4\theta}{\partial x^2\partial t^2} - \rho I_\xi\frac{\partial^6\theta}{\partial x^4\partial t^2} + k_e\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right) + I_B\mu\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - l_s^2\frac{\partial^4\theta}{\partial x^4}\right) = 0 \tag{2.217}$$

2.7. Yönetici ve Hareket Denklemlerinin Şekil Değiştirme Değişimi Teorisi ile Elde Edilmesi

Şekil değiştirme değişimi teorisi (strain gradient theory, ŞDDT) Lam vd. (2003) tarafından sunulan boyut etkisine bağlı bir elastisite teorisidir. Bu teorinin yönetici denklemleri, iki klasik malzeme parametresinin yanında üç ilave malzeme uzunluk ölçek parametresi içerir. Şekil değiştirme değişimi teorisi temelinde, şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki gibi ifade edilir (Lam vd. 2003):

$$U = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + p_i\gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)}\eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}\chi_{ij}\right)dV \tag{2.218}$$

Anlaşılacağı üzere, yukarıdaki ifadede değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ile ortak olan kısım mevcuttur. σ_{ij}, ε_{ij}, m_{ij}, χ_{ij} ifadeleri daha önceki bölümlerde tanıtıldığından, bu bölümde tekrardan yazılmamıştır. Burada, γ_i ve $\eta_{ijk}^{(1)}$ sırasıyla dilatasyon (genleşme) değişimi vektörü ve deviatorik uzama değişimi tansörü iken p_i ve $\tau_{ijk}^{(1)}$ yüksek mertebeden gerilme tensörleridir ve aşağıdaki gibi tanımlanırlar (Lam vd. 2003; Ansari vd., 2013):

$$\gamma_i = \varepsilon_{mm,i} \tag{2.219}$$

$$p_i = 2\mu l_0^2\gamma_i \tag{2.220}$$

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k}\right) - \frac{1}{15}\delta_{ij}\left(\varepsilon_{mm,k} + 2\varepsilon_{mk,m}\right) - \frac{1}{15}\left[\delta_{jk}(\varepsilon_{mm,i} + 2\varepsilon_{mi,m)} + \delta_{ki}(\varepsilon_{mm,j} + 2\varepsilon_{mj,m}\right] \tag{2.221}$$

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2\mu l_1^2\eta_{ijk}^{(1)} \tag{2.222}$$

Denklemler (2.219) ve (2.221)'deki l_0 ve l_1 malzeme uzunluk ölçek parametreleridir. Hatırlatmak gerekirse; bu teorideki üçüncü malzeme uzunluk ölçek parametresi m_{ij}'nin içinde l_d olarak tanımlanmıştır. Bu tez çalışmasında, şekil değiştirme değişimi teorisi

sadece kompozit nanotüplerin burulmalı titreşimini incelemek için kullanılacaktır. Fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli ve gözeneksiz kompozit nanotüplerin burulmalı titreşimini veren problem üç malzeme uzunluk ölçek parametresi içeren şekil değiştirme değişimi teorisi ile elde edilecektir. Bu analizde, nanotüp herhangi bir elastik ortamda bulunmadığından ve serbest titreşim olduğundnan dış yükler tarafından yapılan iş sıfırdır. Önceki bölümlerde kompozit nanotüplere ait ε, σ, m ve χ bileşenleri elde edilmişti. Denklem (2.219)'dan sıfır olmayan bileşen elde edilemez. Bu yüzden, yani $\gamma_x = \gamma_y = \gamma_z = 0$ olduğundan, p_x, p_y ve p_z de sıfırdır. Denklem (2.221) ile $\eta_{ijk}^{(1)}$'nin sıfır olmayan bileşenleri aşağıdaki gibi yazılır (Ansari vd., 2013):

$$\eta_{yyy}^{(1)} = \frac{z}{5}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{2.223}$$

$$\eta_{zzz}^{(1)} = -\frac{y}{5}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{2.224}$$

$$\eta_{xyx}^{(1)} = \eta_{yxx}^{(1)} = \eta_{xxy}^{(1)} = -\frac{4z}{15}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{2.225}$$

$$\eta_{xxz}^{(1)} = \eta_{zxx}^{(1)} = \eta_{xzx}^{(1)} = \frac{4y}{15}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{2.226}$$

$$\eta_{yyz}^{(1)} = \eta_{zyy}^{(1)} = \eta_{yzy}^{(1)} = -\frac{y}{15}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{2.227}$$

$$\eta_{zzy}^{(1)} = \eta_{zyz}^{(1)} = \eta_{yzz}^{(1)} = \frac{y}{15}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{2.228}$$

Yukarıda elde edilen bileşenlerin Denklem (2.222)'de yerine yazılmasıyla (Ansari vd. 2013):

$$\tau_{yyy}^{(1)} = \frac{2\mu l_1^2 z}{5}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{2.229}$$

$$\tau_{zzz}^{(1)} = -\frac{2\mu l_1^2 y}{5}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{2.230}$$

$$\tau_{xyx}^{(1)} = \tau_{yxx}^{(1)} = \tau_{xxy}^{(1)} = -\frac{8\mu l_1^2 z}{15}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{2.231}$$

$$\tau_{xxz}^{(1)} = \tau_{zxx}^{(1)} = \tau_{xzx}^{(1)} = \frac{8\mu l_1^2 y}{15}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{2.232}$$

$$\tau_{yyz}^{(1)} = \tau_{zyy}^{(1)} = \tau_{yzy}^{(1)} = -\frac{2\mu l_1^2 y}{15}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{2.233}$$

$$\tau_{zzy}^{(1)} = \tau_{zyz}^{(1)} = \tau_{yzz}^{(1)} = \frac{2\mu l_1^2 y}{15}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{2.234}$$

hesaplanır. Elde edilen bileşenler ile kompozit nanotüpün şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki gibi yeniden yazılır (Ansari vd., 2013):

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int_0^L \int_A \left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + p_i\gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)}\eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}\chi_{ij}\right)dAdx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L \left((\mu^J + 3\mu^A l_d^2)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{8}{15}\mu^J l_1^2 + \frac{1}{4}\mu^J l_d^2\right)\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right)^2 \right) dx \end{aligned} \tag{2.235}$$

Yukarıda elde edilen şekil değişitirme enejisi ve kompozit nanotüplere ait daha önce defalarca kullanılan kinetik enerji Hamilton prensibinde yerlerine yazıldığında, şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan yönetici denklem ve sınır şartları aşağıdaki gibi elde edilir (Ansari vd. 2013):

$$-\left(\frac{8}{15}\mu^J l_1^2 + \frac{1}{4}\mu^J l_d^2\right)\frac{\partial^4\theta}{\partial x^4} + (\mu^J + 3\mu^A l_d^2)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \rho^J\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0 \tag{2.236}$$

$$\left(\frac{8}{15}\mu^J l_1^2 + \frac{1}{4}\mu^J l_d^2\right)\frac{\partial^3\theta}{\partial x^3} - (\mu^J + 3\mu^A l_d^2)\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0 \; veya \; \delta\theta = 0 \tag{2.237}$$

$$\left(\frac{8}{15}\mu^J l_1^2 + \frac{1}{4}\mu^J l_d^2\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0 \; veya \; \delta\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0 \tag{2.238}$$

Yönetici denklem incelendiğinde üç malzeme uzunluk ölçek parametresinden l_0'ın burulmalı titreşim analizinde bir etkisinin olmadığı ve sadece l_1 ve l_d'nin etkili olduğu anlaşılır. Ayrıca, $l_1 = 0$ olarak düşünüldüğünde, yönetici denklem ve sınır şartlarının değiştirilmiş gerilme çifti teorisine indirgendiğini belirtmekte fayda vardır.

2.8. Kaynak Araştırması

Bu alt bölümde, litertürde bulunan ve tez konusuyla alakalı bazı çalışmaların özet bilgileri sunulmuştur.

İpci ve Yıldırım (2021), konik kesite sahip FD bir mikro kirişin serbest titreşim analizini teorik olarak sunmuştur. Mikro kirişin malzeme özelliklerinin yükseklik doğrultusunda değiştiği varsayılmıştır. Germanyum ve silikondan imal edilmiş mikro kirişin titreşimi değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ve Euler-Bernoulli kiriş teorisi ile incelenmiştir. Konsol mikro kiriş için yapılan çözümlerde, çeşitli parametrelerin çalışmada tanımlanan frekans oranına etkileri gösterilmiştir.

Turan ve Kahya (2018), seramik ve metal fazlardan oluşturulan FD kirişin serbest titreşim analizini birinci mertebe kayma deformasyonu teorisi ile ele almışlardır. Problemin çözümü, önerilen trigonometrik seri fonksiyonları ile her iki ucu ankastre, konsol ve her iki ucu basit mesnet şartları için gerçekleştirilmiştir. Çeşitli parametrelerin etkisi, hesaplanan boyutsuz frekans değerleri ile sunulmuştur.

Li ve Hu (2017), iki yönde fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden oluşan FDNT'lerin serbest burulmalı titreşim analizini sunmuşlardır. Bu çalışmada, FDNT'ün alüminyum ve silisyum karbürden meydana geldiği varsayılmıştır ve her iki ucu ankastre mesnet ile bir ucu ankastre diğer ucu serbest sınır durumları incelenmiştir. Yerel olmayan elastisite teorisi temelinde FDNT'lerin kapalı çözümlerinin sunulduğu bu makalede, çeşitli parametrelerin etkisi incelenmiştir.

Gheshlaghi vd. (2010), homojen malzemeden meydana gelen nanotüplerin boyut etkisine bağlı burulmalı titreşimini değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ile sunmuşlardır. Li ve Hu (2019), iki yönde fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden oluşan FDNT'lerin serbest burulmalı titreşim analizini bu sefer değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ile sunmuşlardır. Bu çalışmalarında Li ve Hu (2019), kayma gerilmeleri ve dönme açıları için sonuçlar vermişlerdir.

Mercan vd. (2017), Winkler-Pasternak zemini üzerindeki silisyum karbür nanotellerin burkulmasını çeşitli boyut etkili teoriler ile sunmuşlardır. Yerel olmayan elastisite teorisi,

şekil değiştirme değişimi teorisi (Lam), değiştirilmiş gerilme çifti teorisi, yerel olmayan yüzey enerji teorisinin kullanıldığı bu çalışmada, Navier metodu ile basit mesnetli durum için burkulma yükleri elde edilmiştir.

Numanoğlu ve Civalek (2019), elastik bir ortam ile çevrili dairesel nanoçubukların burulmalı titreşim analizini sunmuşlardır. Yerel olmayan elastisite teorisine dayanan sonlu elemanlar metodunu kullandıkları bu çalışmada, burulma titreşimine ait frekansları yerel olmayan parametre, sınır şartı ve elastik ortam rijitliğine bağlı olarak incelemişlerdir. Numanoğlu vd. (2022), Timoshenko kiriş teorisi ve yerel olmayan elastisite teorisine dayanan nanokirişlerin termal etkiler altındaki titreşimini sonlu elemanlar çözümü ile incelemişlerdir.

Rahmani ve Pedram (2014), her iki ucu basit mesnete sahip FD nanokirişlerin titreşimini yerel olmayan elastisite ve Timoshenko kiriş teorileri ile sunmuşlardır. Bu çalışmada, malzeme özellikleri yükseklik boyunca kuvvet kuralına göre değişen FD nanokirişlerin frekansları çeşitli yerel olmayan parametre, narinlik oranı ve malzeme değişim katsayısına göre incelenmiştir.

Shen vd. (2016), fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden oluşan içi dolu dairesel kesite sahip şaftların burulmasını, yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisi ile incelemişlerdir. Malzeme değişimi yarıçap boyunca gerçekleşen bu çalışmada, frekanslar, dönme açısı ve gerilmeler bir takım şekiller ile gösterilmiştir.

Taşkın ve Demirhan (2020), fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli kirişlerin serbest titreşim analizini iki değişkenli kayma deformasyon teorisi ile sunmuşlardır. İki farklı gözenek dağılımı ile düşünülen FD kirişlerin analizinde Navier tipi çözüm yaklaşımı benimsenmiştir. Ardından, basit mesnetli FD kiriş için uzunluk/kalınlık oranının, malzeme değişim katsayısının ve gözeneklilik katsayısının etkilerini içeren çeşitli örnekler gösterilmiştir.

Babaei vd. (2015), malzeme özellikleri güç kuralına göre yükseklik doğrultusunda değişen mikro kirişlerin boyut etkisine bağlı serbest titreşimini araştırmışlardır. Basit mesnetli FD mikro kiriş için boyut etkisi değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ile ele

alınmıştır. Çelik ve alüminadan oluşan mikro kirişin ilk beş moda ait boyutsuz frekans değerleri değişen boyut parametresi ve malzeme değişim katsayısı için sunulmuştur.

Ermiş vd. (2022), ortotropik Pasternak zemini üzerindeki eksenel yönde FD malzemeden oluşan kavisli kirişlerin serbest titreşimini karışık sonlu elemanlar metodu ile sunmuşlardır. Jena vd. (2022a), Winkler-Pasternak zemini üzerindeki FD kirişlerin serbest titreşimini üç farklı rijit sınır koşulu için sunmuşlardır. Pradhan ve Chakraverty (2013) Euler-Bernoulli ve Timoshenko teorilerine göre modellenen FD kirişlerin titreşimlerini Rayleigh-Ritz metodu ile sunmuşlardır. Winkler-Pasternak zemini üzerindeki FD kirişlerin eğilmesi ve serbest titreşimi, Chaabane (2019) tarafından basit mesnet koşulu için Navier çözümü kullanılarak incelenmiştir. Wattanasakulpong ve Ungbhakorn (2014) kesitinde gözenekler bulunan ve malzeme özellikleri güç kuralına göre değişim gösteren FD kirişlerin lineer ve lineer olmayan titreşimlerini elastik sınır koşullarında sunmuşlardır. Araştırmacılar bu çalışmalarında diferansiyel dönüşüm metodu (differential transform method, DTM) kullanmışlar ve düzenli dağılıma sahip gözenek modelini incelemişlerdir. Akbaş (2018), malzeme özellikleri yüksekliği doğrultusunda değişen fonksiyonel derecelendirilmiş bir kirişin statik ve dinamik analizlerini sonlu elemanlar yöntemi ile gerçekleştirmiştir.

Jena vd. (2022b), kesitinde gözenekler bulunan FD mikro ölçekli kirişlerin serbest titreşimini dört farklı rijit sınır koşulu için sunmuşlardır. Bu çalışmalarında iki farklı çözüm metodu kullanmışlar ve boyut etkisini değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ile ele almışlardır. Refaeinejad vd. (2017), Rahmani ve Jandaghian (2015), Rahmani vd. (2017), Ebrahimi ve Barati (2016) FD yerel olmayan nanokirişlerin çeşitli analizlerini yüksek mertebeden kayma deformasyon teorilerini kullanarak sunmuşlardır. Akbaş (2017), çatlak içeren fonksiyonel derecelendirilmiş konsol bir mikro kirişin titreşimini değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ve Euler-Bernoulli kiriş teorisi ile incelemiştir.

Wattanasakulpong ve Ungbhakorn (2013), karbon nanotüpler ile güçlendirilmiş kirişlerin eğilme, burkulma ve titreşim analizlerini sunmuşlardır. Winkler-Pasternak zemin etkisinin ve yüksek mertedebeden kayma deformasyon teorilerinin düşünüldüğü bu çalışmada, Navier çözüm yaklaşımı kullanılmıştır.

Wattanasakulpong ve Mao (2017), deforme olabilen sınır koşullarına sahip karbon nanotüpler ile güçlendirilmiş kirişlerin burkulma ve titreşim analizlerini Timoshenko kiriş teorisi ile sunmuşlardır. Bu çalışmada, problemin çözümü için Chebyshev kollokasyon metodu (Chebyshev collocation method) kullanmışlardır.

Civalek vd. (2021), basit mesnetli ve karbon nanotüpler ile güçlendirilmiş mikro kirişlerin serbest titreşim analizini değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ile sunmuşlardır. Bu çalışmada yazarlar, Euler-Bernoulli kiriş teorisi, Rayleigh kiriş teorisi ve kayma etkilerini içeren üç farklı kiriş teorisini daha kullanmışlar ve çözümlerini Navier metodu ile yapmışlardır.

Borjalilou vd. (2019), karbon nanotüpler ile güçlendirilmiş nano ölçekli kirişlerin burkulma, eğilme ve titreşim analizlerini Timoshenko kiriş teorisi ve yerel olmayan elastisite teorisi ile sunmuşlardır. Araştırmacılar bu çalışmasında, üç farklı karbon nanotüp dağılımı ve üç farklı rijit sınır koşulunun sonuçlarını incelemişlerdir.

Bu tez çalışmasının amacı, çeşitli nanokompozit yapıların genel (rijit ve rijit olmayan) sınır koşullarındaki analizlerini gerçekleştirebilen çözümlerini sunmaktır. Yukarıda kısaca özetlenen çalışmalar ve literatürde bu tez çalışmasının konusuyla ilgili bulunan çalışmalar incelendiğinde kiriş modellerini sunanların çok büyük bir kısmının basit mesnet koşulunu ele aldığı görülmektedir. Basit mesnet koşulundan sonra en çok ankastre mesnet koşulu çalışılmıştır. Çubuk modellerini sunan çalışmalar ise her iki ucu ankatre mesnet ve bir ucu ankastre diğer ucu serbest üzerine yoğunlaşmıştır. Rijit sınır koşulları, kısıt koşullarını tam yerine getirdiği varsayılan idealize edilmiş sınır koşullarıdır. Ancak, bu sınır koşullarının pratik uygulamalarında bu kısıtların tam olarak yerine getirilmesi mümkün değildir. Mesnetlerde illa ki az ya da çok çökme veya dönme meydana gelecektir. Öyle ki, iç ve dış parametrelerde meydana gelen küçük değişimlerden bile etkilenen ve mekanik tepkilerinde önemli sonuçlar meydana gelen nano ölçekli yapılarda mesnet durumunun değişimi de büyük önem arz edecektir. Bu tez çalışması, çeşitli nanokompozit yapıları deforme olabilen mesnetler ile modelleyerek boyut etkisine bağlı analizlerini gerçekleştirebilen çözümlerini Fourier trigonometrik serileri ve Stoke dönüşümünün beraber kullanılmasına dayanan bir yaklaşım ile sunmaktadır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, ilk önce benimsenen çözüm yöntemi tanıtılacaktır. Benimsenen çözüm yöntemi Fourier sinüs ve kosinüs serilerinin Stoke dönüşümü ile beraber kullanılmasına dayanmaktadır. Ardından, bir önceki bölümde elde edilen burkulma ve titreşim denklemlerine çözüm yöntemi uygulanarak deforme olabilen ve rijit sınır şartlarında analizleri gerçekleştirebilen özdeğer problemleri kurulacaktır.

3.1. Fourier Serileri

Fourier serileri Fransız matematikçi ve fizikçi Jean Baptiste Joseph Fourier (21 Mart 1768 - 16 Mayıs 1830) tarafından bulunmuş ve ısı transferi ve titreşim problemlerine uygulanması başlatılmıştır (https://shellbuckling.com/cv/fourier.pdf). Periyodik bir fonksiyonu basit dalgalı fonksiyonların toplamına çeviren Fourier serileri, kuantum mekaniği, elektrik mühendisliği ve ekonomi gibi çeşitli alanların çalışmalarında kullanılmaktadır (Kadıoğlu, 2018).

3.1.1. Fourier Kosinüs Serisi

Bir $f(x)$ fonksiyonunun tanım fonksiyonu aşağıdaki gibi bir kosinüs serisi olarak düşünülebilir:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.1}$$

Burada, C_n kosinüs serisi içinde tanımlanan Fourier katsayısıdır. Bu eşitliğin her iki tarafı $cos\left(\frac{\bar{n}\pi x}{L}\right)$ ile çarpılıp $[-L, L]$ aralığında integrali alındığında:

$$\int_{-L}^{L} f(x) cos\left(\frac{\bar{n}\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^{L} \sum_{n=1}^{\infty} C_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{\bar{n}\pi x}{L}\right) dx \tag{3.2}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte toplam sembolü ve sabit değerler integralin dışına yazılabilir.

$$\int_{-L}^{L} f(x)cos\left(\frac{\bar{n}\pi x}{L}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)cos\left(\frac{\bar{n}\pi x}{L}\right)dx \tag{3.3}$$

$\bar{n} \neq 0$ ve $\bar{n} = n$ olduğunda:

$$\int_{-L}^{L} f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = C_n L \tag{3.4}$$

elde edilir. Buradan da C_n aşağıdaki gibi yazılır:

$$C_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \tag{3.5}$$

$n \neq 0$ olduğundan, C_n $f(x)$ fonksiyonu cinsinden aşağıdaki gibi elde edilmiş olur:

$$C_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{3.6}$$

3.1.2. Fourier Sinüs Serisi

Bu bölümde kosinüs serisine benzer adımlar sinüs serisi için yapılacaktır. Benzer şekilde, bir $\overline{f(x)}$ fonksiyonunun tanım fonksiyonu aşağıdaki gibi bir sinüs serisi olarak seçilebilir:

$$\overline{f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.7}$$

Burada, B_n sinüs serisi içinde tanımlanan Fourier katsayısını temsil eder. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı $sin\left(\frac{\bar{n}\pi x}{L}\right)$ ile çarpılıp $[-L, L]$ aralığında integrali alındığı zaman:

$$\int_{-L}^{L} \overline{f(x)}sin\left(\frac{\bar{n}\pi x}{L}\right)dx = \int_{-L}^{L} \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)sin\left(\frac{\bar{n}\pi x}{L}\right)dx \tag{3.8}$$

elde edilir. Toplam sembolü ve sabit değerler integralin dışına yazıldığında:

$$\int_{-L}^{L} \overline{f(x)} sin\left(\frac{\bar{n}\pi x}{L}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_{-L}^{L} sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) sin\left(\frac{\bar{n}\pi x}{L}\right) dx \tag{3.9}$$

olur. $\bar{n} = n$ olduğunda:

$$\int_{-L}^{L} \overline{f(x)} sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = B_n L \tag{3.10}$$

elde edilir. Buradan da B_n yalnız bırakıldığında:

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \overline{f(x)} sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{3.11}$$

olur. Ve en nihayetinde B_n $\overline{f(x)}$ fonksiyonu cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} \overline{f(x)} sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1,2,3, \ldots \tag{3.12}$$

3.2. Stoke Dönüşümü

William Thomson (1824-1907) tarafından bulunan Stoke dönüşümü ismini Stokes' Gabriel Stoke (1819-1903)'den almaktadır (Kadıoğlu, 2018). Yüzey tiplerine ve sınırlarına bağlı olan Stoke dönüşümleri genel bir teoremdir ve bu dönüşümü yapabilmek için parçalı ve düzgün yüzeyler bulunması gerekmektedir. Düzgün yüzeyler, sadece türevlerin sürekli olması anlamına gelmektedir. Parçalı olması durumu ise Stoke dönüşümlerinin birden fazla yüzeylerde kullanılabilmesi olarak tanımlanır. Yüzey integrallerini, basit eğrisel integrallere dönüştürmek için de kullanılan Stoke dönüşümlerinin uygulanabilmesi için, yüzey sınırı kendini kesmeyen, kapalı parçalı, düzgün bir eğri olması gerekmektedir (Kadıoğlu, 2018). Bu tez çalışmasında, Fourier serileri Stoke dönüşümü ile birlikte kullanılarak deforme olabilen sınır şartları çeşitli problemlere dahil edilecektir. İlk önce Fourier sinüs serisi ile tanımlanan fonksiyona Stoke dönüşümü uygulanacaktır. Denklem (3.7)'nin bir kez türevi alındığında:

$$\overline{f(x)}' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} B_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.13}$$

olur. Yukarıdaki fonksiyon bir Fourier kosinüs serisi ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\overline{f(x)}' = \frac{b_0}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.14}$$

Yukarıdaki denklemde verilen b_0 ve b_n katsayıları açık formda aşağıdaki gibi yazılır:

$$b_0 = \frac{2}{L}\int_0^L \overline{f(x)}' dx = \frac{2}{L}\left(\bar{f}_L - \bar{f}_0\right) \tag{3.15}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \overline{f(x)}' cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \qquad (n = 1,2, \dots) \tag{3.16}$$

Yukarıdaki denklemlerde $\bar{f}_L = \overline{f(L)}$ ve $\bar{f}_0 = \overline{f(0)}$ olduğunu belirtmek gerekir. Açık ifadesi verilen b_n katsayısı kısmi integrasyon uygulanarak aşağıdaki gibi bulunur:

$$b_n = \frac{2}{L}\left[\overline{f(x)} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L + \frac{2}{L}\left(\frac{n\pi}{L}\int_0^L \overline{f(x)} sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\right) \tag{3.17}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\left((-1)^n \bar{f}_L - \bar{f}_0\right) + \frac{n\pi x}{L} B_n \tag{3.18}$$

Yukarıda verilen matematiksel işlemler Stoke dönüşümü olarak bilinmektedir. Sinüs serisi ile tanımlanan $\overline{f(x)}$ fonksiyonunun ilk dört türevi aşağıdaki gibidir (Kim ve Kim, 2001):

$$\frac{d\overline{f(x)}}{dx} = \frac{\bar{f}_L - \bar{f}_0}{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\left((-1)^n \bar{f}_L - \bar{f}_0\right)}{L} + \frac{n\pi}{L} B_n\right) cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.19}$$

$$\frac{d^2\overline{f(x)}}{dx^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2\left((-1)^n \bar{f}_L - \bar{f}_0\right)}{L} + \frac{n\pi}{L} B_n\right) sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.20}$$

$$\frac{d^3\overline{f(x)}}{dx^3} = \frac{\overline{f_L}'' - \overline{f_0}''}{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\left((-1)^n\overline{f_L}'' - \overline{f_0}''\right)}{L} - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\frac{2\left((-1)^n\overline{f_L} - \overline{f_0}\right)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\right)\right)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.21)$$

$$\frac{d^4\overline{f(x)}}{dx^4} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2\left((-1)^n\overline{f_L}'' - \overline{f_0}''\right)}{L} - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\frac{2\left((-1)^n\overline{f_L} - \overline{f_0}\right)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\right)\right)sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.22)$$

$\overline{f(x)}$ fonksiyonunun daha yüksek mertebeden türevleri ise literatürde aşağıdaki gibi verilmiştir (Yaylı, 2019; Yaylı vd., 2022; Uzun vd., 2023):

$$\frac{d^5\overline{f(x)}}{dx^5} = \frac{\overline{f_L}^{(4)} - \overline{f_0}^{(4)}}{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\left((-1)^n\overline{f_L}^{(4)} - \overline{f_0}^{(4)}\right)}{L} - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\frac{2\left((-1)^n\overline{f_L}'' - \overline{f_0}''\right)}{L}\right) + \frac{n^4\pi^4}{L^4}\left(\frac{2\left((-1)^n\overline{f_L} - \overline{f_0}\right)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\right)\right)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.23)$$

$$\frac{d^6\overline{f(x)}}{dx^6} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2\left((-1)^n\overline{f}_L^{(4)} - \overline{f}_0^{(4)}\right)}{L} - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\frac{2\left((-1)^n\overline{f}_L'' - \overline{f}_0''\right)}{L}\right) + \frac{n^4\pi^4}{L^4}\left(\frac{2\left((-1)^n\overline{f}_L - \overline{f}_0\right)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\right)\right)sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.24)$$

$$\frac{d^7\overline{f(x)}}{dx^7} = \frac{\overline{f}_L^{(6)} - \overline{f}_0^{(6)}}{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\left((-1)^n\overline{f}_L^{(6)} - \overline{f}_0^{(6)}\right)}{L} - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\frac{2\left((-1)^n\overline{f}_L^{(4)} - \overline{f}_0^{(4)}\right)}{L}\right) + \frac{n^4\pi^4}{L^4}\left(\frac{2\left((-1)^n\overline{f}_L'' - \overline{f}_0''\right)}{L}\right) - \frac{n^6\pi^6}{L^6}\left(\frac{2\left((-1)^n\overline{f}_L - \overline{f}_0\right)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\right)\right)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.25)$$

$$\frac{d^8\overline{f(x)}}{dx^8} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2\left((-1)^n\overline{f}_L^{(6)} - \overline{f}_0^{(6)}\right)}{L} - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\frac{2\left((-1)^n\overline{f}_L^{(4)} - \overline{f}_0^{(4)}\right)}{L}\right) + \frac{n^4\pi^4}{L^4}\left(\frac{2\left((-1)^n\overline{f}_L'' - \overline{f}_0''\right)}{L}\right) - \frac{n^6\pi^6}{L^6}\left(\frac{2\left((-1)^n\overline{f}_L - \overline{f}_0\right)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\right)\right)sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.26)$$

Yukarıda sinüs serisi için gösterilen adımların benzeri kosinüs serisi için yapıldığı zaman ilk üç türev aşağıdaki gibi hesaplanır (Kadıoğlu ve Yaylı, 2017):

$$\frac{df(x)}{dx} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} C_n sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.27}$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{f_L{}' - f_0{}'}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2((-1)^n f_L{}' - f_0{}')}{L} - \frac{n^2\pi^2}{L^2} C_n\right) cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.28}$$

$$\frac{d^3f(x)}{dx^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \left(\frac{2(-(-1)^n f_L{}' + f_0{}')}{L} + \frac{n^2\pi^2}{L^2} C_n\right) sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.29}$$

Bundan sonraki bölümlerde, yukarıda tanıtılan çözüm yöntemi ile daha önceden elde edilen yönetici denklemlerin çözümleri gerçekleştirilecektir. Anlaşılcağı üzere, yukarıda verilmiş olan türevler zamandan bağımsızdır. Bu yüzden titreşim denklemlerindeki zamana bağlı burulma açısı, deplasman ve dönme ifadeleri zamandan bağımsız duruma getirildikten sonra çözüm yöntemi uygulanır. Bahsedilen ifadeler, $w(x,t) = W(x)e^{i\omega t}$, $\theta(x,t) = \varphi(x)e^{i\omega t}$ ve $\phi(x,t) = \psi(x)e^{i\omega t}$ ile değişkenlerine ayrılır. Burada, ω açısal frekanstır.

3.3. Kompozit Nanotüplerin Yerel Olmayan Elastisite Teorisine Dayanan Burulmalı Titreşim Denkleminin Çözümü

Bu bölümde kompozit nanotüpün Denklem (2.86)'daki gibi elde edilen yönetici denklemi $\theta(x,t) = \varphi(x)e^{i\omega t}$ ile yeniden yazılırsa:

$$\begin{aligned} \mu^J \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} - k_e\varphi(x) + \omega^2\rho^J\varphi(x) + (e_0a)^2 k_e \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \\ - \omega^2(e_0a)^2\rho^J \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = 0 \end{aligned} \tag{3.30}$$

olur. Burada, $\varphi(x)$ burulma açısı fonksiyonudur. Bu tez çalışmasının tamamında $\varphi(x)$ Fourier sinüs fonksiyonu olarak tanımlanacaktır. $\overline{f(x)} = \varphi(x)$ olarak düşündüğümüzde, kompozit nanotüpün her iki sınır noktaları ve bu iki sınır noktası arasında $\varphi(x)$ aşağıdaki gibi yazılır:

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_0 & x = 0 \\ \varphi_L & x = L \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) & 0 < x < L \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

Yerel olmayan burulmalı titreşim problemi için ikinci mertebeden türeve kadar ihtiyaç vardır. $\varphi(x)$ fonksiyonunun ilk iki türevi daha önceden elde edilen Fourier sinüs fonksiyonlarının türevlerinin uyarlanması ile şu şekilde yazılır:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{\varphi_L - \varphi_0}{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2((-1)^n\varphi_L - \varphi_0)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\right)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.32}$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2((-1)^n\varphi_L - \varphi_0)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\right)sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.33}$$

3.3.1. Kompozit nanotüplerin yerel olmayan elastisite teorisine dayanan statik burulma denklemi

Bilinmeyen Fourier katsayısının bulunmasının ardından kompozit nanotüplerin yerel olmayan elastisite teorisine dayanan statik burulma denklemi yazılabilir. Denklemler (3.31) - (3.33) Denklem (3.30)'da yerine yazılırsa:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[(\mu^J + (e_0a)^2k_e - \omega^2(e_0a)^2\rho^J)\left(-\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2((-1)^n\varphi_L - \varphi_0)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\right)\right) + (\omega^2\rho^J - k_e)B_n\Bigg]sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0 \tag{3.34}$$

elde edilir. Bu eşitliğin çözülmesi ile yerel olmayan burulma titreşimi için Fourier katsayısı $B_n^{YOET-NT}$ aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$B_n^{YOET-NT} = \frac{2n\pi(\mu^J + (e_0a)^2(k_e - \rho^J\omega^2))\varphi_0}{\mu^J n^2\pi^2 + (L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2)(k_e - \rho^J\omega^2)} - \frac{2(-1)^n n\pi(\mu^J + (e_0a)^2(k_e - \rho^J\omega^2))\varphi_L}{\mu^J n^2\pi^2 + (L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2)(k_e - \rho^J\omega^2)} \tag{3.35}$$

Fourier katsayısının hesaplanmasının ardından burulma açısını hesaplamamıza imkan veren eşitlik aşağıdaki gbi elde edilir:

$$\varphi(x)^{YOET-NT} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n\pi(\mu^J + (e_0a)^2(k_e - \rho^J\omega^2))\varphi_0}{\mu^J n^2\pi^2 + (L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2)(k_e - \rho^J\omega^2)} - \frac{2(-1)^n n\pi(\mu^J + (e_0a)^2(k_e - \rho^J\omega^2))\varphi_L}{\mu^J n^2\pi^2 + (L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2)(k_e - \rho^J\omega^2)}\right) sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{3.36}$$

3.3.2. Kompozit nanotüplerin yerel olmayan elastisite teorisine dayanan özdeğer problemi

Bu alt başlıkta, Fourier sinüs serisi ve Stoke dönüşümüne dayanan çözümün özdeğer problemi elde edilecektir. Bunun için yerel olmayan kompozit nanotüpün burulma momenti, burulma yayı ve burulma fonksiyonunun çarpımına eşitlenir. Böylece, yerel olmayan kompozit nanotüpün $x = 0$ ve $x = L$ noktaları için aşağıdaki eşitlikler kurulur:

$$(e_0a)^2k_e\frac{\partial\theta}{\partial x} + (e_0a)^2\rho^J\frac{\partial^3\theta}{\partial x\partial t^2} + \mu^J\frac{\partial\theta}{\partial x}|_{x=0} = K_0\varphi_0 \tag{3.37}$$

$$(e_0a)^2k_e\frac{\partial\theta}{\partial x} + (e_0a)^2\rho^J\frac{\partial^3\theta}{\partial x\partial t^2} + \mu^J\frac{\partial\theta}{\partial x}|_{x=0} = -K_L\varphi_L \tag{3.38}$$

Burada, K_0 ve K_L kompozit nanotüpün sırasıyla $x = 0$ ve $x = L$ uçlarındaki deforme olabilen burulma yaylarının rijitlikleridir. Denklemler (3.37) ve (3.38) ile aşağıdaki iki denklem takımı kurulur:

$$\left(-K_0+\frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L}-\frac{(e_0a)^2k_e}{L}-\frac{\mu^J}{L}\right.$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L(k_e-\rho^J\omega^2)(\mu^J+(e_0a)^2(k_e-\rho^J\omega^2))}{\mu^Jn^2\pi^2+k_e(L^2+n^2\pi^2(e_0a)^2)-(L^2+n^2\pi^2(e_0a)^2)\rho^J\omega^2}\right)\varphi_0$$
$$+\left(-\frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L}+\frac{(e_0a)^2k_e}{L}+\frac{\mu^J}{L}\right. \tag{3.39}$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nL(k_e-\rho^J\omega^2)(\mu^J+(e_0a)^2(k_e-\rho^J\omega^2))}{\mu^Jn^2\pi^2+k_e(L^2+n^2\pi^2(e_0a)^2)-(L^2+n^2\pi^2(e_0a)^2)\rho^J\omega^2}\right)\varphi_L$$
$$=0$$

$$\left(-\frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L}+\frac{(e_0a)^2k_e}{L}+\frac{\mu^J}{L}\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nL(k_e-\rho^J\omega^2)(\mu^J+(e_0a)^2(k_e-\rho^J\omega^2))}{\mu^Jn^2\pi^2+k_e(L^2+n^2\pi^2(e_0a)^2)-(L^2+n^2\pi^2(e_0a)^2)\rho^J\omega^2}\right)\varphi_0$$
$$+\left(-K_L+\frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L}-\frac{(e_0a)^2k_e}{L}-\frac{\mu^J}{L}\right. \tag{3.40}$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L(k_e-\rho^J\omega^2)(\mu^J+(e_0a)^2(k_e-\rho^J\omega^2))}{\mu^Jn^2\pi^2+k_e(L^2+n^2\pi^2(e_0a)^2)-(L^2+n^2\pi^2(e_0a)^2)\rho^J\omega^2}\right)\varphi_L$$
$$=0$$

Bu iki denklem takımı aşağıdaki gibi bir özdeğer problemi olarak da kurulabilir:

$$\begin{bmatrix}Z_{11}^{YOET} & Z_{12}^{YOET}\\ Z_{21}^{YOET} & Z_{22}^{YOET}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_0\\ \varphi_L\end{bmatrix}=0 \tag{3.41}$$

Kompozit nanotüpün frekanslarını bulmak için katsayılar matrisinin determinatını sıfıra eşitleyip özdeğerlerini elde etmemiz gerekir. Yani,

$$\begin{vmatrix} Z_{11}^{YOET} & Z_{12}^{YOET} \\ Z_{21}^{YOET} & Z_{22}^{YOET} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.42}$$

eşitliğinin çözülmesi ve ω değerlerinin bulunması gerekir. Bu katsayılar matrisinin elemanları ise şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} & Z_{11}^{YOET} \\ & = -K_0 + \frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L} - \frac{(e_0a)^2k_e}{L} - \frac{\mu^J}{L} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L(k_e - \rho^J\omega^2)(\mu^J + (e_0a)^2(k_e - \rho^J\omega^2))}{\mu^J n^2\pi^2 + k_e(L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2) - (L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2)\rho^J\omega^2} \end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned} & Z_{12}^{YOET} \\ & = -\frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L} + \frac{(e_0a)^2k_e}{L} + \frac{\mu^J}{L} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L(k_e - \rho^J\omega^2)(\mu^J + (e_0a)^2(k_e - \rho^J\omega^2))}{\mu^J n^2\pi^2 + k_e(L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2) - (L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2)\rho^J\omega^2} \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} & Z_{21}^{YOET} \\ & = -\frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L} + \frac{(e_0a)^2k_e}{L} + \frac{\mu^J}{L} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L(k_e - \rho^J\omega^2)(\mu^J + (e_0a)^2(k_e - \rho^J\omega^2))}{\mu^J n^2\pi^2 + k_e(L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2) - (L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2)\rho^J\omega^2} \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned} & Z_{22}^{YOET} \\ & = -K_L + \frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L} - \frac{(e_0a)^2k_e}{L} - \frac{\mu^J}{L} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L(k_e - \rho^J\omega^2)(\mu^J + (e_0a)^2(k_e - \rho^J\omega^2))}{\mu^J n^2\pi^2 + k_e(L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2) - (L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2)\rho^J\omega^2} \end{aligned} \tag{3.46}$$

Ayrıca, k_e'ler sıfıra eşitlenirse yerel olmayan problem elastik ortam etkisinden bağımsız duruma gelir ve bu durum için katsayılar matrisinin elemanları aşağıdaki formlara indirgenir:

$$\overline{Z_{11}^{YOET}} = -K_0 + \frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L} - \frac{\mu^J}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2L\rho^J\omega^2(\mu^J - (e_0a)^2\rho^J\omega^2)}{\mu^J n^2\pi^2 - (L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2)\rho^J\omega^2} \tag{3.47}$$

$$\overline{Z_{12}^{YOET}} = -\frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L} + \frac{\mu^J}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n L\rho^J\omega^2(\mu^J - (e_0a)^2\rho^J\omega^2)}{\mu^J n^2\pi^2 - (L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2)\rho^J\omega^2} \tag{3.48}$$

$$\overline{Z_{21}^{YOET}} = -\frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L} + \frac{\mu^J}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n L\rho^J\omega^2(\mu^J - (e_0a)^2\rho^J\omega^2)}{\mu^J n^2\pi^2 - (L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2)\rho^J\omega^2} \tag{3.49}$$

$$\overline{Z_{22}^{YOET}} = -K_L + \frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L} - \frac{\mu^J}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2L\rho^J\omega^2(\mu^J - (e_0a)^2\rho^J\omega^2)}{\mu^J n^2\pi^2 - (L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2)\rho^J\omega^2} \tag{3.50}$$

3.4. Kompozit Rayleigh Nanokirişlerinin Yerel Olmayan Elastisite Teorisine Dayanan Titreşim Denkleminin Çözümü

Bu bölümde, kompozit nanokirişlerin Denklem (2.106)'daki gibi elde edilen ve Rayleigh kiriş teorisine dayanan serbest titreşim denklemi çözülecektir. İlk önce, kompozit nanokirişin Denklem (2.106)'daki gibi elde edilen yönetici denklemi $w(x,t) = W(x)e^{i\omega t}$ ile yeniden yazılırsa:

$$D_{11}\frac{d^4W}{dx^4} - \omega^2 I_0 W + \omega^2(e_0a)^2 I_0\frac{d^2W}{dx^2} + \omega^2 I_2\frac{d^2W}{dx^2} - \omega^2(e_0a)^2 I_2\frac{d^4W}{dx^4} + c_w W - (e_0a)^2\, c_w\frac{d^2W}{dx^2} - c_g\frac{d^2W}{dx^2} + (e_0a)^2\, c_g\frac{d^4W}{dx^4} = 0 \tag{3.51}$$

durumunu alır. Bu tez çalışmasının tamamında $W(x)$ Fourier sinüs fonksiyonu olarak tanımlanacaktır. $\overline{f(x)} = W(x)$ olarak düşündüğümüzde, kompozit nanokirişlerin her iki sınır noktaları ve bu iki sınır noktası arasında $W(x)$ aşağıdaki gibi yazılır:

$$W(x) = \begin{bmatrix} W_0 & x = 0 \\ W_L & x = L \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) & 0 < x < L \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

Yerel olmayan titreşim problemi için dördüncü mertebeden türeve kadar ihtiyaç vardır. $W(x)$ fonksiyonunun ilk dört türevi, daha önceden elde edilen Fourier sinüs serisinin tüevlerinin uyarlanması ile şu şekilde yazılır:

$$\frac{dW(x)}{dx} = \frac{W_L - W_0}{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2((-1)^n W_L - W_0)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\right) cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.53}$$

$$\frac{d^2W(x)}{dx^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2((-1)^n W_L - W_0)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\right) sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3W(x)}{dx^3} = {} & \frac{W_L'' - W_0''}{L} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2((-1)^n W_L'' - W_0'')}{L}\right. \\ & \left. - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\frac{2((-1)^n W_L - W_0)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\right)\right) cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned} \tag{3.55}$$

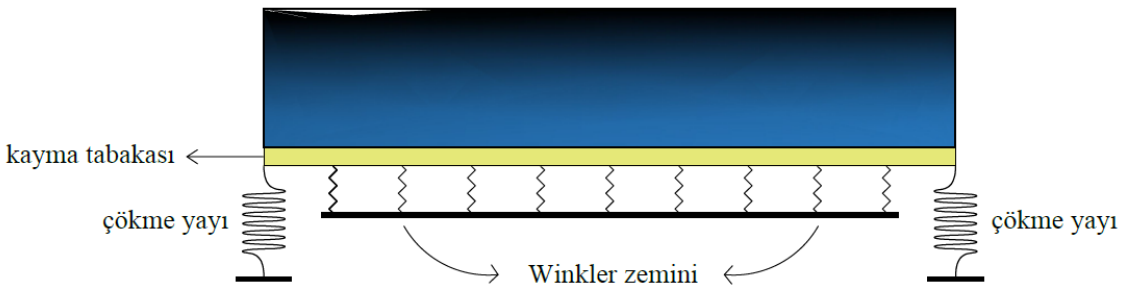
$$\begin{aligned} \frac{d^4W(x)}{dx^4} = {} & -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2((-1)^n W_L'' - W_0'')}{L}\right. \\ & \left. - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\frac{2((-1)^n W_L - W_0)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\right)\right) sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned} \tag{3.56}$$

3.4.1. Kompozit Rayleigh nanokirişlerinin yerel olmayan titreşimine dayanan statik çökme denklemi

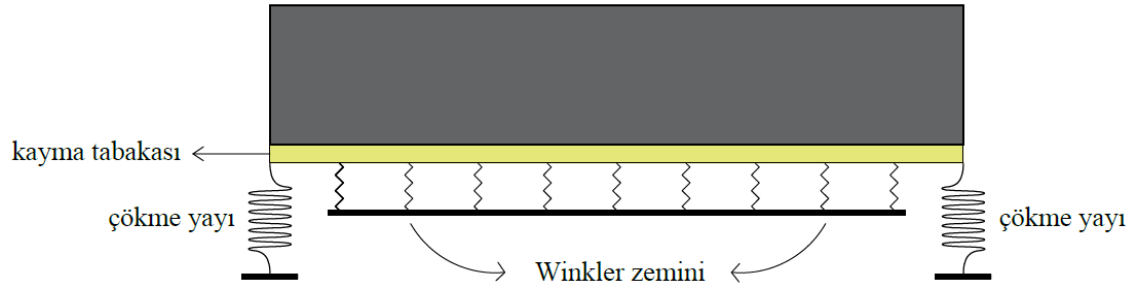
Bu alt başlıkta, serbest titreşim hareketi yapan kompozit nanokirişlerin yerel olmayan elastisite teorisine ve Rayleigh kiriş teorisine dayanan bilinmeyen Fourier katsayısı bulunacaktır. Fourier katsayısının bulunmasının ardından serbest titreşim hareketi yapan kompozit nanokirişler için statik denklem yazılacaktır. Denklemler (3.52)-(3.56) Denklem (3.51)'de yerine yazılırsa:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\Big(D_{11}\ -\omega^2(e_0a)^2I_2 + (e_0a)^2\,c_g\Big)\Bigg(-\frac{n\pi}{L}\Bigg(\frac{2((-1)^nW_L''-W_0'')}{L} - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\Bigg(\frac{2((-1)^nW_L-W_0)}{L}+\frac{n\pi}{L}B_n\Bigg)\Bigg)\Bigg) + \Big(\omega^2(e_0a)^2I_0+\omega^2I_2-(e_0a)^2\,c_w - c_g\Bigg)\Bigg(-\frac{n\pi}{L}\Bigg(\frac{2((-1)^nW_L-W_0)}{L}+\frac{n\pi}{L}B_n\Bigg)\Bigg)(c_w - \omega^2I_0)B_n\Bigg]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=0 \tag{3.57}$$

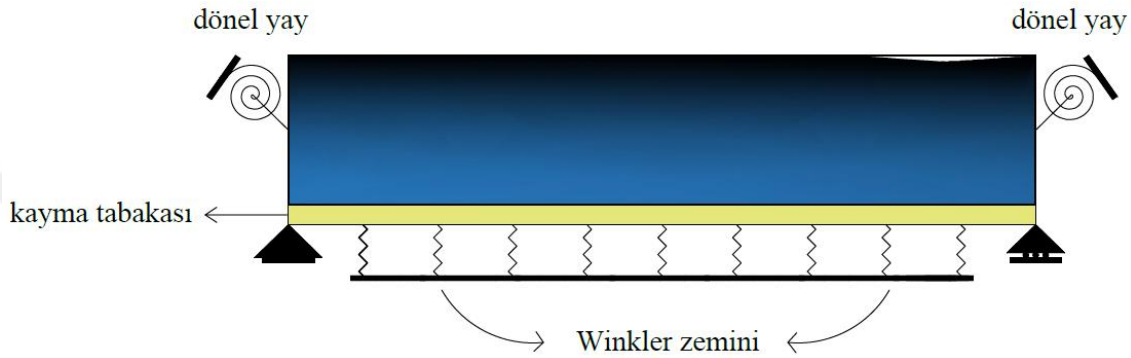
elde edilir. Denklem (3.57)'nin çözülmesi ile Fourier katsayısı B_n yerel olmayan titreşim için hesaplanır. Kompozit nanokirişlerin çözümlerinde iki farklı Fourier katsayısı hesaplanacaktır. Hesaplanan Fourier katsayılarından bir tanesi deforme olabilen çökme yayları ile modellenmiş kompozit nanokirişler için $B_n^{YOET-TT}$ ile gösterilirken diğeri deforme olabilen dönel yaylar ile modellenmiş kompozit nanokirişler için $B_n^{YOET-RR}$ ile gösterilicektir. Çökme yayları ile modellenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit ve karbon nanotüp takviyeli kompozit nanokirişler sırasıyla Şekiller 3.1 ve 3.2'de gösterilirken dönel yaylar ile modellenmiş olanları Şekiller 3.3 ve 3.4'te gösterilmiştir.



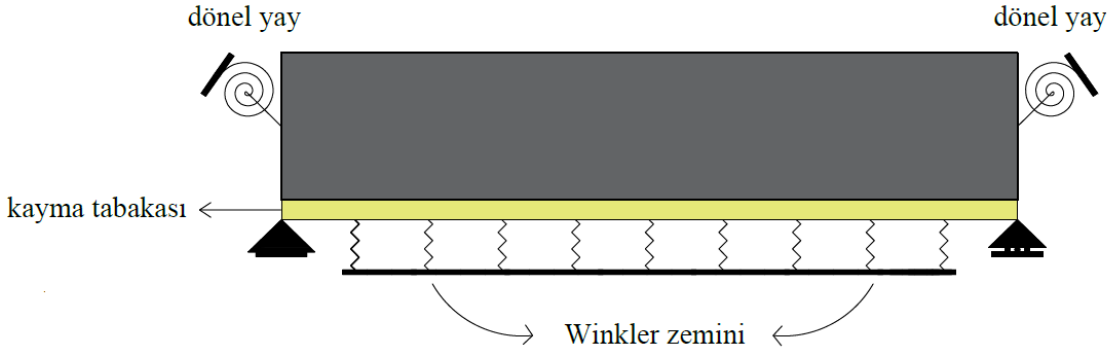
Şekil 3.1. Çökme yayları ile modellenmiş FD kompozit nanokiriş



Şekil 3.2. Çökme yayları ile modellenmiş karbon nanotüp takviyeli kompozit nanokiriş



Şekil 3.3. Dönel yaylar ile modellenmiş FD kompozit nanokiriş



Şekil 3.4. Dönel yaylar ile modellenmiş karbon nanotüp takviyeli kompozit nanokiriş

$B_n^{YOET-TT}$ hesaplanırken $W_0'' = W_L'' = 0$ şartı uygulanırken $B_n^{YOET-RR}$ hesaplanırken $W_0 = W_L = 0$ şartı uygulanacaktır. Verilen bilgiler ve Denklem (3.57)'nin çözülmesi ile $B_n^{YOET-TT}$ ve $B_n^{YOET-RR}$, yerel olmayan Rayleigh kompozit nanokirişlerin titreşim problemi için aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$B_n^{YOET-TT} = \frac{2n\pi(-L^2\Xi_1\omega^2 + n^2\pi^2\Xi_2 + \Xi_3 c_g + L^2(e_0a)^2 c_w)W_0}{\mathrm{D}_{11}n^4\pi^4 - \Xi_3\Xi_4\omega^2 + \Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} - \frac{2(-1)^n n\pi(-L^2\Xi_1\omega^2 + n^2\pi^2\Xi_2 + \Xi_3 c_g + L^2(e_0a)^2 c_w)W_L}{\mathrm{D}_{11}n^4\pi^4 - \Xi_3\Xi_4\omega^2 + \Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \quad (3.58)$$

$$B_n^{YOET-RR} = -\frac{2L^2 n\pi\left(\Xi_2 + (e_0a)^2 c_g\right)W_0''}{\mathrm{D}_{11}n^4\pi^4 - \Xi_3\Xi_4\omega^2 + \Xi_3\left(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w\right)} + \frac{2(-1)^n L^2 n\pi\left(\Xi_2 + (e_0a)^2 c_g\right)W_L''}{\mathrm{D}_{11}n^4\pi^4 - \Xi_3\Xi_4\omega^2 + \Xi_3\left(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w\right)} \quad (3.59)$$

Yukarıdaki denklemlerde Ξ_1, Ξ_2, $\Xi_3$ve Ξ_4 aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Xi_1 = (e_0a)^2 I_0 + I_2 \quad (3.60)$$

$$\Xi_2 = \mathrm{D}_{11} - (e_0a)^2 I_2\omega^2 \quad (3.61)$$

$$\Xi_3 = L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2 \quad (3.62)$$

$$\Xi_4 = L^2 I_0 + n^2\pi^2 I_2 \quad (3.63)$$

Yukarıda hesaplanan Fourier katsayılarının kullanılmasıyla, serbest titreşim yapan Winkler-Pasternak zemini üzerindeki yerel olmayan kompozit nanokirişlerin statik çökme ifadeleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$W(x)^{YOET-TT} = \sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(\frac{2n\pi(-L^2\Xi_1\omega^2 + n^2\pi^2\Xi_2 + \Xi_3 c_g + L^2(e_0a)^2 c_w)W_0}{\mathrm{D}_{11}n^4\pi^4 - \Xi_3\Xi_4\omega^2 + \Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} - \frac{2(-1)^n n\pi(-L^2\Xi_1\omega^2 + n^2\pi^2\Xi_2 + \Xi_3 c_g + L^2(e_0a)^2 c_w)W_L}{\mathrm{D}_{11}n^4\pi^4 - \Xi_3\Xi_4\omega^2 + \Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)}\right) \quad (3.64)$$

$$W(x)^{YOET-RR} = \sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(-\frac{2L^2 n\pi\left(\Xi_2 + (e_0a)^2 c_g\right)W_0''}{\mathrm{D}_{11}n^4\pi^4 - \Xi_3\Xi_4\omega^2 + \Xi_3\left(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w\right)}\right. \\ \left. + \frac{2(-1)^n L^2 n\pi\left(\Xi_2 + (e_0a)^2 c_g\right)W_L''}{\mathrm{D}_{11}n^4\pi^4 - \Xi_3\Xi_4\omega^2 + \Xi_3\left(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w\right)}\right) \tag{3.65}$$

3.4.2. Kompozit Rayleigh nanokirişlerinin yerel olmayan titreşimi için özdeğer problemi

Bu alt başlıkta, kompozit nanokirişlerin yerel olmayan titreşimi için Fourier sinüs serisi ve Stoke dönüşümüne dayanan çözümün özdeğer problemi elde edilecektir. Bunun için yerel olmayan kompozit nanokirişin eğilme momenti dönel yaylar ile ve kesme kuvveti çökme yayları ile ilişkilendirilerek kuvvet sınır koşulları yazılır. İlk önce, çökme yayları ile modellenmiş kompozit nanokirişlere ait özdeğer problemi kurulacaktır. Çökme yayları ile modellenmiş yerel olmayan kompozit nanokirişin $x = 0$ ve $x = L$ noktaları için aşağıdaki eşitlikler kurulur:

$$-(e_0a)^2 c_g \frac{d^3W}{dx^3} + (e_0a)^2 c_w \frac{dW}{dx} \\ -\omega^2(e_0a)^2 I_0 \frac{dW}{dx} + \omega^2(e_0a)^2 I_2 \frac{d^3W}{dx^3} - D_{11}\frac{d^3W}{dx^3}|_{x=0} = T_0 W_0 \tag{3.66}$$

$$-(e_0a)^2 c_g \frac{d^3W}{dx^3} + (e_0a)^2 c_w \frac{dW}{dx} \\ -\omega^2(e_0a)^2 I_0 \frac{dW}{dx} + \omega^2(e_0a)^2 I_2 \frac{d^3W}{dx^3} - D_{11}\frac{d^3W}{dx^3}|_{x=L} = -T_L W_L \tag{3.67}$$

Burada, T_0 ve T_L kompozit nanokirişin sırasıyla $x = 0$ ve $x = L$ uçlarındaki deforme olabilen çökme yaylarının rijitliklerini temsil etmektedir. Denklemler (3.66) ve (3.67) ile yerel olmayan titreşim problemi için aşağıdaki iki denklem takımı kurulur:

$$\left(-T_0-\frac{(e_0a)^2c_w}{\mathrm{L}}+\frac{(e_0a)^2I_0\omega^2}{\mathrm{L}}\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L\Xi_5(-D_{11}n^2\pi^2+(e_0a)^2\left(\Xi_4\omega^2-(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)\right))}{-D_{11}n^4\pi^4+\Xi_3\Xi_4\omega^2-\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right)W_0$$
$$+\left(\frac{(e_0a)^2c_w}{\mathrm{L}}-\frac{(e_0a)^2I_0\omega^2}{\mathrm{L}}\right. \tag{3.68}$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nL\Xi_5(-D_{11}n^2\pi^2+(e_0a)^2\left(\Xi_4\omega^2-(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)\right))}{-D_{11}n^4\pi^4+\Xi_3\Xi_4\omega^2-\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right)W_L$$
$$=0$$
$$\left(\frac{(e_0a)^2c_w}{\mathrm{L}}-\frac{(e_0a)^2I_0\omega^2}{\mathrm{L}}\right.$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nL\Xi_5(-D_{11}n^2\pi^2+(e_0a)^2\left(\Xi_4\omega^2-(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)\right))}{-D_{11}n^4\pi^4+\Xi_3\Xi_4\omega^2-\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right)W_0$$
$$+\left(-T_L-\frac{(e_0a)^2c_w}{\mathrm{L}}+\frac{(e_0a)^2I_0\omega^2}{\mathrm{L}}\right. \tag{3.69}$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L\Xi_5(-D_{11}n^2\pi^2+(e_0a)^2\left(\Xi_4\omega^2-(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)\right))}{-D_{11}n^4\pi^4+\Xi_3\Xi_4\omega^2-\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right)W_L=0$$

Burada, Ξ_5 şu şekilde tanımlanır:

$$\Xi_5=I_0\omega^2-c_w \tag{3.70}$$

Bu iki denklem takımı, aşağıdaki gibi bir özdeğer problemi olarak da yazılabilir:

$$\begin{bmatrix}\Gamma_{11}^{YOET-TT} & \Gamma_{12}^{YOET-TT}\\ \Gamma_{21}^{YOET-TT} & \Gamma_{22}^{YOET-TT}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_0\\ W_L\end{bmatrix}=0 \tag{3.71}$$

Çökme yayları ile modellenen kompozit nanokirişin yerel olmayan titreşim frekanslarını bulmak için katsayılar matrisinin determinatını sıfıra eşitleyip özdeğerlerini elde etmemiz gerekir. Yani,

$$\begin{vmatrix} \Gamma_{11}^{YOET-TT} & \Gamma_{12}^{YOET-TT} \\ \Gamma_{21}^{YOET-TT} & \Gamma_{22}^{YOET-TT} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.72}$$

eşitliğinin çözülmesi ve ω değerlerinin hesaplanması gerekir. Bu katsayılar matrisinin elemanları ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} &\Gamma_{11}^{YOET-TT} \\ &= -T_0 - \frac{(e_0a)^2 c_w}{\mathrm{L}} + \frac{(e_0a)^2 I_0 \omega^2}{\mathrm{L}} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L\Xi_5(-D_{11}n^2\pi^2 + (e_0a)^2(\Xi_4\omega^2 - (n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)))}{-D_{11}n^4\pi^4 + \Xi_3\Xi_4\omega^2 - \Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \end{aligned} \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned} &\Gamma_{12}^{YOET-TT} \\ &= \frac{(e_0a)^2 c_w}{\mathrm{L}} - \frac{(e_0a)^2 I_0 \omega^2}{\mathrm{L}} \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L\Xi_5(-D_{11}n^2\pi^2 + (e_0a)^2(\Xi_4\omega^2 - (n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)))}{-D_{11}n^4\pi^4 + \Xi_3\Xi_4\omega^2 - \Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned} &\Gamma_{21}^{YOET-TT} \\ &= \frac{(e_0a)^2 c_w}{\mathrm{L}} - \frac{(e_0a)^2 I_0 \omega^2}{\mathrm{L}} \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L\Xi_5(-D_{11}n^2\pi^2 + (e_0a)^2(\Xi_4\omega^2 - (n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)))}{-D_{11}n^4\pi^4 + \Xi_3\Xi_4\omega^2 - \Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\Gamma_{22}^{YOET-TT} = -T_L - \frac{(e_0a)^2 c_w}{\mathrm{L}} + \frac{(e_0a)^2 I_0 \omega^2}{\mathrm{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L\Xi_5(-D_{11}n^2\pi^2 + (e_0a)^2(\Xi_4\omega^2 - (n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)))}{-D_{11}n^4\pi^4 + \Xi_3\Xi_4\omega^2 - \Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \tag{3.76}$$

Çökme yayları ile modellenen kompozit nanokirişlerde T_0 ve T_L sıfır ve sıfırdan büyük değerler alabilir. T_0 ve T_L'nin sıfır ayarlanması durumunda, nanokiriş her iki ucundan serbest (mesnetsiz) modellenmiş gibi davranır. Nanokirişin bir ucunda bulunan çökme yayının rijitliğinin çok yüksek ($T_0 \approx \infty$) diğer ucunda bulunan çökme yayının rijitliğinin çok düşük ($T_L \approx 0$) ayarlanması ile bir ucu basit mesnet diğer ucu serbest olarak modellenmiş nanokirişlerin sonuçları elde edilir. Son olarak, her iki yay rijitliğinin çok yüksek ($T_0 = T_L \approx \infty$) ayarlanması ise nanokirişin her iki ucundan basit mesnetli model gibi davranmasını sağlamaktadır

Şimdi ise, dönel yaylar ile modellenmiş kompozit nanokirişlere ait özdeğer problemi kurulacaktır. Dönel yaylar ile modellenmiş yerel olmayan kompozit nanotüpün $x = 0$ ve $x = L$ noktaları için aşağıdaki eşitlikler kurulur:

$$-(e_0a)^2 c_g \frac{d^2W}{dx^2} + (e_0a)^2 c_w W - \omega^2(e_0a)^2 I_0 W + \omega^2(e_0a)^2 I_2 \frac{d^2W}{dx^2} - D_{11}\frac{d^2W}{dx^2}|_{x=0} = -R_0 \frac{dW_0}{dx} \tag{3.77}$$

$$-(e_0a)^2 c_g \frac{d^2W}{dx^2} + (e_0a)^2 c_w W - \omega^2(e_0a)^2 I_0 W + \omega^2(e_0a)^2 I_2 \frac{d^2W}{dx^2} - D_{11}\frac{d^2W}{dx^2}|_{x=L} = R_L \frac{dW_L}{dx} \tag{3.78}$$

Burada, R_0 ve R_L kompozit nanokirişin sırasıyla $x = 0$ ve $x = L$ uçlarındaki deforme olabilen dönel yayların rijitlikleridir. Denklemler (3.77) ve (3.78) ile aşağıdaki iki denklem takımı yazılır:

$$\left(D_{11} + (e_0 a)^2 c_g - \omega^2 (e_0 a)^2 I_2 \right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Ln^2\pi^2(\Xi_2 + (e_0 a)^2 c_g) R_0}{D_{11} n^4 \pi^4 - \Xi_3 \Xi_4 \omega^2 + \Xi_3 (n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \right) W_0''$$
$$+ \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n Ln^2\pi^2(\Xi_2 + (e_0 a)^2 c_g) R_0}{D_{11} n^4 \pi^4 - \Xi_3 \Xi_4 \omega^2 + \Xi_3 (n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \right) W_L'' \quad (3.79)$$
$$= 0$$

$$\left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n Ln^2\pi^2(\Xi_2 + (e_0 a)^2 c_g) R_L}{D_{11} n^4 \pi^4 - \Xi_3 \Xi_4 \omega^2 + \Xi_3 (n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \right) W_0''$$
$$+ \left(D_{11} + (e_0 a)^2 c_g - \omega^2 (e_0 a)^2 I_2 \right. \quad (3.80)$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Ln^2\pi^2(\Xi_2 + (e_0 a)^2 c_g) R_L}{D_{11} n^4 \pi^4 - \Xi_3 \Xi_4 \omega^2 + \Xi_3 (n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \right) W_L'' = 0$$

Yine aynı şekilde, yukarıda verilen iki denklem takımı ile aşağıdaki gibi bir özdeğer problemi kurulur:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^{YOET-RR} & \Gamma_{12}^{YOET-RR} \\ \Gamma_{21}^{YOET-RR} & \Gamma_{22}^{YOET-RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0'' \\ W_L'' \end{bmatrix} = 0 \quad (3.81)$$

Dönel yaylar ile modellenen kompozit nanokirişin dönel atalet etkisini içeren yerel olmayan serbest titreşim frekanslarını bulmak için katsayılar matrisinin determinatını sıfıra eşitleyip özdeğerlerini hesplamamız gerekir. Yani,

$$\begin{vmatrix} \Gamma_{11}^{YOET-RR} & \Gamma_{12}^{YOET-RR} \\ \Gamma_{21}^{YOET-RR} & \Gamma_{22}^{YOET-RR} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.82)$$

eşitliği çözüldüğünde özdeğerler bize titreşim frekanslarını verir. Bu katsayılar matrisinin elemanları aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Gamma_{11}^{YOET-RR} = D_{11} + (e_0a)^2c_g - \omega^2(e_0a)^2I_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Ln^2\pi^2(\Xi_2 + (e_0a)^2c_g)R_0}{D_{11}n^4\pi^4 - \Xi_3\Xi_4\omega^2 + \Xi_3(n^2\pi^2c_g + L^2c_w)} \tag{3.83}$$

$$\Gamma_{12}^{YOET-RR} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n Ln^2\pi^2(\Xi_2 + (e_0a)^2c_g)R_0}{D_{11}n^4\pi^4 - \Xi_3\Xi_4\omega^2 + \Xi_3(n^2\pi^2c_g + L^2c_w)} \tag{3.84}$$

$$\Gamma_{21}^{YOET-RR} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n Ln^2\pi^2(\Xi_2 + (e_0a)^2c_g)R_L}{D_{11}n^4\pi^4 - \Xi_3\Xi_4\omega^2 + \Xi_3(n^2\pi^2c_g + L^2c_w)} \tag{3.85}$$

$$\Gamma_{22}^{YOET-RR} = D_{11} + (e_0a)^2c_g - \omega^2(e_0a)^2I_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Ln^2\pi^2(\Xi_2 + (e_0a)^2c_g)R_L}{D_{11}n^4\pi^4 - \Xi_3\Xi_4\omega^2 + \Xi_3(n^2\pi^2c_g + L^2c_w)} \tag{3.86}$$

Yukarıda elde edilen çözümler ile kompozit nanokirişlerin yerel olmayan titreşim frekansları keyfi sınır koşullarında bulunabilir. Dönel yaylar ile modellenen kompozit nanokirişlerde, R_0 ve R_L sıfırdan büyük değerler alabilir. Bu model aynı zamanda basit mesnetler ile desteklendiğinden R_0 ve R_L'nin sıfıra çok yakın ayarlanması durumunda nanokiriş, her iki ucundan sadece basit mesnetler ile modellenmiş gibi davranır. Nanokirişin bir ucunda bulunan dönel yayın rijitliğinin çok yüksek ($R_0 \approx \infty$), diğer ucunda bulunan dönel yayın rijitliğinin çok düşük ($R_L \approx 0$) ayarlanması ile bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnet olarak modellenmiş nanokirişlerin sonuçları elde edilir. Son olarak, her iki dönel yay rijitliğinin çok yüksek ($R_0 = R_L \approx \infty$) ayarlanması ise nanokirişin her iki ucundan ankastre mesnetli model gibi davranmasını sağlamaktadır.

Yukarıda elde edilen katsayılar matrisinin elemanları bazı parametrelerin ihmal edilmesi ile çeşitli alt problemlere indirgenebilir. Bu alt problemlerden bazıları aşağıda verilmiştir:

i) Pasternak zemin parametresi ihmal edilip determinantın sıfıra eşitlenmesi, Winkler zemini üzerindeki Rayleigh nanokompozit kirişinin titreşim frekanslarını verir.

ii) Hem Winkler hem de Pasternak zemin parametrelerinin ihmal edilip determinantın sıfıra eşitlenmesi, herhangi bir zemin etkisinde olmayan Rayleigh nanokompozit kirişinin titreşim frekanslarını verir.

iii) Dönel atalet momentinin ihmal edilip determinantın sıfıra eşitlenmesi, Winkler-Pasternak zemini üzerindeki Euler-Bernoulli nanokompozit kirişinin titreşim frekanslarını verir.

iv) Hem Pasternak zemin parametresinin hem de dönel atalet momentinin ihmal edilip determinantın sıfıra eşitlenmesi, Winkler zemini üzerindeki Euler-Bernoulli nanokompozit kirişinin titreşim frekanslarını verir.

v) Hem her iki zemin parametresinin hem de dönel atalet momentinin ihmal edilip determinantın sıfıra eşitlenmesi, herhangi bir zemin etkisinde olmayan Euler-Bernoulli nanokompozit kirişinin titreşim frekanslarını verir.

3.5. Kompozit Euler-Bernoulli Nanokirişlerinin Yerel Olmayan Elastisite Teorisine Dayanan Burkulma Denkleminin Çözümü

Bu bölümde kompozit nanokirişlerin Denklem (2.114)'deki gibi elde edilen ve Euler-Bernoulli kiriş teorisine dayanan burkulma denklemi çözülecektir. Yerel olmayan burkulma problemi için $W(x)$ fonksiyonunun dördüncü mertebeden türevine kadar ihtiyaç vardır. $W(x)$ fonksiyonunun ilk dört türevi bir önceki bölümde yazıldığı için tekrar yazılmamıştır. Titreşim için gerçekleştirilen benzer adımlar burkulma için gerçekleştirilecektir. İlk önce, yerel olmayan burkulma için Fourier katsayıları bulunacaktır. Bulunan Fourier katsayıları ile statik denklemler gösterilecektir. Ardından, yerel olmayan burkulma yüklerini veren özdeğer problemleri elde edilecektir.

3.5.1. Kompozit Euler-Bernoulli nanokirişlerinin yerel olmayan burkulmasına dayanan statik çökme denklemi

Bu alt başlıkta eksenel bir P kuvvetinin etki ettiği kompozit nanokirişlerin Euler-Bernoulli kiriş teorisi ve yerel olmayan elastisite teorisine dayanan bilinmeyen Fourier katsayıları bulunacaktır. Fourier katsayılarının bulunmasının ardından kompozit nanokirişler için statik denklemler yazılacaktır. Denklemler (3.52)-(3.56) Denklem (2.114)'de yerine yazılırsa:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\Big(D_{11}+(e_0a)^2\,c_g - (e_0a)^2P\Big)\left(-\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2((-1)^nW_L''-W_0'')}{L} - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\frac{2((-1)^nW_L-W_0)}{L}+\frac{n\pi}{L}B_n\right)\right)\right) + \Big(P-(e_0a)^2\,c_w - c_g\Big)\left(-\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2((-1)^nW_L-W_0)}{L}+\frac{n\pi}{L}B_n\right)\right) + c_wB_n\Bigg]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=0 \tag{3.87}$$

elde edilir. Denklem (3.87)'nin çözülmesi ile Fourier katsayısı B_n, yerel olmayan burkulma için hesaplanır. Burkulma için hesaplanan Fourier katsayılarından bir tanesi deforme olabilen çökme yayları ile modellenmiş kompozit nanokirişler için $\overline{B_n^{YOET-TT}}$ ile gösterilirken, diğeri deforme olabilen dönel yaylar ile modellenmiş kompozit nanokirişler için $\overline{B_n^{YOET-RR}}$ ile gösterilicektir. Denklem (3.87)'nin çözülmesi ile $\overline{B_n^{YOET-TT}}$ ve $\overline{B_n^{YOET-RR}}$ yerel olmayan Euler-Bernoulli kompozit nanokirişlerin burkulma problemi için aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$\overline{B_n^{YOET-TT}} = \frac{2n\pi(L^2P+n^2\pi^2\Xi_6-\Xi_3c_g-L^2(e_0a)^2c_w)W_0}{L^2n^2P\pi^2+n^4\pi^4\Xi_6-\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)} - \frac{2(-1)^nn\pi(L^2P+n^2\pi^2\Xi_6-\Xi_3c_g-L^2(e_0a)^2c_w)W_L}{L^2n^2P\pi^2+n^4\pi^4\Xi_6-\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)} \tag{3.88}$$

$$\overline{B_n^{YOET-RR}} = -\frac{2L^2n\pi(-\Xi_6+(e_0a)^2c_g)W_0''}{-L^2n^2P\pi^2-\Xi_6n^4\pi^4+\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)} + \frac{2(-1)^nL^2n\pi(-\Xi_6+(e_0a)^2c_g)W_L''}{-L^2n^2P\pi^2-\Xi_6n^4\pi^4+\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)} \tag{3.89}$$

Yukarıdaki denklemlerde Ξ_6 aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Xi_6 = -D_{11} + P(e_0a)^2 \tag{3.90}$$

Yukarıda hesaplanan Fourier katsayıları ile P eksenel yüküne maruz kalan Winkler-Pasternak zemini üzerindeki yerel olmayan Euler-Bernoulli kompozit nanokirişlerin statik çökme ifadeleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned}
&\overline{W(x)^{YOET-TT}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(\frac{2n\pi(L^2P + n^2\pi^2\Xi_6 - \Xi_3c_g - L^2(e_0a)^2c_w)W_0}{L^2n^2P\pi^2 + n^4\pi^4\Xi_6 - \Xi_3(n^2\pi^2c_g + L^2c_w)}\right. \\
&\left. - \frac{2(-1)^n n\pi(L^2P + n^2\pi^2\Xi_6 - \Xi_3c_g - L^2(e_0a)^2c_w)W_L}{L^2n^2P\pi^2 + n^4\pi^4\Xi_6 - \Xi_3(n^2\pi^2c_g + L^2c_w)}\right)
\end{aligned} \tag{3.91}$$

$$\begin{aligned}
&\overline{W(x)^{YOET-RR}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(-\frac{2L^2n\pi(-\Xi_6 + (e_0a)^2c_g)W_0''}{-L^2n^2P\pi^2 - \Xi_6n^4\pi^4 + \Xi_3(n^2\pi^2c_g + L^2c_w)}\right. \\
&\left. + \frac{2(-1)^n L^2n\pi(-\Xi_6 + (e_0a)^2c_g)W_L''}{-L^2n^2P\pi^2 - \Xi_6n^4\pi^4 + \Xi_3(n^2\pi^2c_g + L^2c_w)}\right)
\end{aligned} \tag{3.92}$$

3.5.2. Kompozit Euler-Bernoulli nanokirişlerinin yerel olmayan burkulması için özdeğer problemi

Bu alt başlıkta, Euler-Bernoulli kompozit nanokirişlerinin yerel olmayan burkulması için özdeğer problemleri elde edilecektir. İlk önce, burkulma problemine ait eğilme momenti dönel yaylar ile ve kesme kuvveti çökme yayları ile ilişkilendirilerek kuvvet sınır koşulları yazılır. Çökme yayları ile modellenmiş ve P eksenel yüküne maruz yerel olmayan kompozit nanokirişin $x = 0$ ve $x = L$ noktaları için aşağıdaki eşitlikler kurulur:

$$\begin{aligned}
&(e_0a)^2P\frac{d^3W}{dx^3} - (e_0a)^2c_g\frac{d^3W}{dx^3} + (e_0a)^2c_w\frac{dW}{dx} \\
&-P\frac{dW}{dx} - D_{11}\frac{d^3W}{dx^3}|_{x=0} = T_0W_0
\end{aligned} \tag{3.93}$$

$$(e_0a)^2P\frac{d^3W}{dx^3} - (e_0a)^2c_g\frac{d^3W}{dx^3} + (e_0a)^2c_w\frac{dW}{dx} \tag{3.94}$$

$$-P\frac{dW}{dx} - D_{11}\frac{d^3W}{dx^3}|_{x=L} = -T_L W_L$$

Denklemler (3.93) ve (3.94) ile aşağıdaki iki denklem takımı kurulur:

$$\begin{aligned}
&\left(-T_0 - \frac{(e_0a)^2 c_w}{\mathrm{L}} + \frac{P}{\mathrm{L}}\right. \\
&\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Lc_w(-L^2P - n^2\pi^2\Xi_6 + n^2\pi^2(e_0a)^2c_g + L^2(e_0a)^2c_w)}{-L^2n^2P\pi^2 - n^4\pi^4\Xi_6 + n^2\pi^2\Xi_3 c_g + L^2\Xi_3 c_w}\right) W_0 \\
&+ \left(\frac{(e_0a)^2 c_w}{\mathrm{L}} - \frac{P}{\mathrm{L}}\right. \\
&\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n Lc_w(-L^2P - n^2\pi^2\Xi_6 + n^2\pi^2(e_0a)^2c_g + L^2(e_0a)^2c_w)}{-L^2n^2P\pi^2 - n^4\pi^4\Xi_6 + n^2\pi^2\Xi_3 c_g + L^2\Xi_3 c_w}\right) W_L \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.95}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{(e_0a)^2 c_w}{\mathrm{L}} - \frac{P}{\mathrm{L}}\right. \\
&\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n Lc_w(-L^2P - n^2\pi^2\Xi_6 + n^2\pi^2(e_0a)^2c_g + L^2(e_0a)^2c_w)}{-L^2n^2P\pi^2 - n^4\pi^4\Xi_6 + n^2\pi^2\Xi_3 c_g + L^2\Xi_3 c_w}\right) W_0 \\
&+ \left(-T_L - \frac{(e_0a)^2 c_w}{\mathrm{L}} + \frac{P}{\mathrm{L}}\right. \\
&\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Lc_w(-L^2P - n^2\pi^2\Xi_6 + n^2\pi^2(e_0a)^2c_g + L^2(e_0a)^2c_w)}{-L^2n^2P\pi^2 - n^4\pi^4\Xi_6 + n^2\pi^2\Xi_3 c_g + L^2\Xi_3 c_w}\right) W_L = 0
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Titreşim probleminin çözümüne benzer şekilde, bu iki denklem takımı aşağıdaki gibi bir özdeğer problemi olarak yazılır:

$$\begin{bmatrix} \overline{\Gamma_{11}^{YOET-TT}} & \overline{\Gamma_{12}^{YOET-TT}} \\ \overline{\Gamma_{21}^{YOET-TT}} & \overline{\Gamma_{22}^{YOET-TT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0 \\ W_L \end{bmatrix} = 0 \tag{3.97}$$

Çökme yayları ile modellenen kompozit nanokirişin yerel olmayan burkulma yüklerini bulmak için aşağıdaki determinant çözülmelidir:

$$\begin{vmatrix} \overline{\Gamma_{11}^{YOET-TT}} & \overline{\Gamma_{12}^{YOET-TT}} \\ \overline{\Gamma_{21}^{YOET-TT}} & \overline{\Gamma_{22}^{YOET-TT}} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.98}$$

Çözümden sonra elde edilen özdeğerler bize nanokompozit kirişin burkulma yüklerini verir. Yukarıdaki katsayılar matrisinin elemanları ise şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} &\overline{\Gamma_{11}^{YOET-TT}} \\ &= -T_0 - \frac{(e_0 a)^2 c_w}{\mathrm{L}} + \frac{P}{\mathrm{L}} \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Lc_w(-L^2P - n^2\pi^2\Xi_6 + n^2\pi^2(e_0a)^2c_g + L^2(e_0a)^2c_w)}{-L^2n^2P\pi^2 - n^4\pi^4\Xi_6 + n^2\pi^2\Xi_3c_g + L^2\Xi_3c_w} \end{aligned} \tag{3.99}$$

$$\overline{\Gamma_{12}^{YOET-TT}} = \frac{(e_0a)^2 c_w}{\mathrm{L}} - \frac{P}{\mathrm{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L c_w(-L^2P - n^2\pi^2\Xi_6 + n^2\pi^2(e_0a)^2 c_g + L^2(e_0a)^2 c_w)}{-L^2n^2P\pi^2 - n^4\pi^4\Xi_6 + n^2\pi^2\Xi_3 c_g + L^2\Xi_3 c_w} \tag{3.100}$$

$$\overline{\Gamma_{21}^{YOET-TT}} = \frac{(e_0a)^2 c_w}{\mathrm{L}} - \frac{P}{\mathrm{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L c_w(-L^2P - n^2\pi^2\Xi_6 + n^2\pi^2(e_0a)^2 c_g + L^2(e_0a)^2 c_w)}{-L^2n^2P\pi^2 - n^4\pi^4\Xi_6 + n^2\pi^2\Xi_3 c_g + L^2\Xi_3 c_w} \tag{3.101}$$

$$\overline{\Gamma_{22}^{YOET-TT}} = -T_L - \frac{(e_0a)^2 c_w}{\mathrm{L}} + \frac{P}{\mathrm{L}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L c_w(-L^2P - n^2\pi^2\Xi_6 + n^2\pi^2(e_0a)^2 c_g + L^2(e_0a)^2 c_w)}{-L^2n^2P\pi^2 - n^4\pi^4\Xi_6 + n^2\pi^2\Xi_3 c_g + L^2\Xi_3 c_w} \tag{3.102}$$

Şimdi ise dönel yaylar ile modellenmiş ve P eksenel yüküne maruz kalan kompozit nanokirişlere ait özdeğer problemi kurulacaktır. Dönel yaylar ile modellenmiş bu kompozit nanokirişin $x = 0$ ve $x = L$ noktaları için aşağıdaki eşitlikler kurulur:

$$(e_0a)^2 P\frac{d^2W}{dx^2} - (e_0a)^2 c_g\frac{d^2W}{dx^2} + (e_0a)^2 c_w W - D_{11}\frac{d^2W}{dx^2}|_{x=0} = -R_0\frac{dW_0}{dx} \tag{3.103}$$

$$(e_0a)^2 P\frac{d^2W}{dx^2} - (e_0a)^2 c_g\frac{d^2W}{dx^2} + (e_0a)^2 c_w W - D_{11}\frac{d^2W}{dx^2}|_{x=L} = R_L\frac{dW_L}{dx} \tag{3.104}$$

Denklemler (3.103) ve (3.104) ile W_0'' ve W_L'''ye bağlı aşağıdaki iki denklem sistemi yazılır:

$$\left(D_{11}+(e_0a)^2c_g-(e_0a)^2P\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Ln^2\pi^2(-\Xi_6+(e_0a)^2c_g)R_0}{-L^2n^2P\pi^2-n^4\pi^4\Xi_6+n^2\pi^2\Xi_3c_g+L^2\Xi_3c_w}\right)W_0''$$

$$+\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nLn^2\pi^2(-\Xi_6+(e_0a)^2c_g)R_0}{-L^2n^2P\pi^2-n^4\pi^4\Xi_6+n^2\pi^2\Xi_3c_g+L^2\Xi_3c_w}\right)W_L''=0 \tag{3.105}$$

$$\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nLn^2\pi^2(-\Xi_6+(e_0a)^2c_g)R_L}{-L^2n^2P\pi^2-n^4\pi^4\Xi_6+n^2\pi^2\Xi_3c_g+L^2\Xi_3c_w}\right)W_0''$$

$$+\left(D_{11}+(e_0a)^2c_g-(e_0a)^2P\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Ln^2\pi^2(-\Xi_6+(e_0a)^2c_g)R_L}{-L^2n^2P\pi^2-n^4\pi^4\Xi_6+n^2\pi^2\Xi_3c_g+L^2\Xi_3c_w}\right)W_L'' \tag{3.106}$$

$$=0$$

Bu iki denklem sistemi, aşağıdaki gibi bir özdeğer problemi olarak da yazılabilir:

$$\begin{bmatrix}\overline{\Gamma_{11}^{YOET-RR}} & \overline{\Gamma_{12}^{YOET-RR}}\\ \overline{\Gamma_{21}^{YOET-RR}} & \overline{\Gamma_{22}^{YOET-RR}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_0''\\ W_L''\end{bmatrix}=0 \tag{3.107}$$

Dönel yaylar ile modellenen kompozit nanokirişin yerel olmayan burkulma yüklerini bulmak için katsayılar matrisinin determinatını sıfıra eşitleyip özdeğerlerini elde etmemiz gerekir. Yani,

$$\begin{vmatrix}\overline{\Gamma_{11}^{YOET-RR}} & \overline{\Gamma_{12}^{YOET-RR}}\\ \overline{\Gamma_{21}^{YOET-RR}} & \overline{\Gamma_{22}^{YOET-RR}}\end{vmatrix}=0 \tag{3.108}$$

eşitliği çözüldüğünde, özdeğerler bize dönel yaylar ile modellenmiş kompozit nanokirişlerin burkulma yüklerini verir. Bu katsayılar matrisinin elemanları aşağıdaki gibi yazılır:

$$\overline{\Gamma_{11}^{YOET-RR}} = D_{11} + (e_0a)^2 c_g - (e_0a)^2 P + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Ln^2\pi^2(-\Xi_6 + (e_0a)^2 c_g)R_0}{-L^2n^2P\pi^2 - n^4\pi^4\Xi_6 + n^2\pi^2\Xi_3 c_g + L^2\Xi_3 c_w} \tag{3.109}$$

$$\overline{\Gamma_{12}^{YOET-RR}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n Ln^2\pi^2(-\Xi_6 + (e_0a)^2 c_g)R_0}{-L^2n^2P\pi^2 - n^4\pi^4\Xi_6 + n^2\pi^2\Xi_3 c_g + L^2\Xi_3 c_w} \tag{3.110}$$

$$\overline{\Gamma_{21}^{YOET-RR}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n Ln^2\pi^2(-\Xi_6 + (e_0a)^2 c_g)R_L}{-L^2n^2P\pi^2 - n^4\pi^4\Xi_6 + n^2\pi^2\Xi_3 c_g + L^2\Xi_3 c_w} \tag{3.111}$$

$$\overline{\Gamma_{22}^{YOET-RR}} = D_{11} + (e_0a)^2 c_g - (e_0a)^2 P + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Ln^2\pi^2(-\Xi_6 + (e_0a)^2 c_g)R_L}{-L^2n^2P\pi^2 - n^4\pi^4\Xi_6 + n^2\pi^2\Xi_3 c_g + L^2\Xi_3 c_w} \tag{3.112}$$

Yukarıda elde edilen çözümler ile yerel olmayan burkulma yükleri keyfi sınır koşullarında bulunabilir. Ayrıca, yukarıda elde edilen katsayılar matrisinin elemanlarında bazı parametrelerin ihmal edilmesi ile burkulmanın çeşitli alt problemleri çözülebilir. Burkulmaya ait alt problemlerden bazıları aşağıda verilmiştir:

i) Pasternak zemin parametresi ihmal edilip determinantın sıfıra eşitlenmesi, Winkler zemini üzerindeki Euler-Bernoulli nanokompozit kirişinin burkulma yüklerini verir.

ii) Pasternak zemin parametresi ihmal edilip Winkler zemin parametresinin neredeyse sıfır olacak kadar küçük ayarlanması ve determinantın sıfıra eşitlenmesi, herhangi bir zemin etkisinde olmayan Euler-Bernoulli nanokompozit kirişinin burkulma yüklerini verir.

3.6. Kompozit Timoshenko Nanokirişlerinin Yerel Olmayan Elastisite Teorisine Dayanan Titreşim Denkleminin Çözümü

Bu bölüm, kompozit nanokirişlerin Denklemler (2.132) ve (2.133)'deki gibi elde edilen ve Timoshenko kiriş teorisine dayanan serbest titreşim denkleminin çözülmesine

ayrılmıştır. İlk önce, kompozit nanokirişin Denklem (2.132)'deki gibi elde edilen yönetici denklemi $w(x,t) = W(x)e^{i\omega t}$ ve $\phi(x,t) = \psi(x)e^{i\omega t}$ ile yeniden yazılırsa:

$$\kappa A_{55}\frac{d^2W}{dx^2} + \kappa A_{55}\frac{d\psi}{dx} - c_w W + c_g\frac{d^2W}{dx^2} + (e_0a)^2 c_w\frac{d^2W}{dx^2} - (e_0a)^2 c_g\frac{d^4W}{dx^4} - \omega^2(e_0a)^2 I_0\frac{d^2W}{dx^2} + \omega^2 I_0 W = 0 \tag{3.113}$$

elde edilir. Aynı dönüşümler (2.133)'e uygulanıp x'e göre bir kez türevi alındığında aşağıdaki eşitlik oluşturulur:

$$D_{11}\frac{d^3\psi}{dx^3} - \kappa A_{55}\frac{d^2W}{dx^2} - \kappa A_{55}\frac{d\psi}{dx} - \omega^2(e_0a)^2 I_2\frac{d^3\psi}{dx^3} + \omega^2 I_2\frac{d\psi}{dx} = 0 \tag{3.114}$$

Burada, toplam sembolü dışındaki ifadeleri yok etmek için x'e göre bir kez türev alma işlemini yaptığımızı belirtmemiz gerekir. Bu tez çalışmasının tamamında $W(x)$'in Fourier sinüs fonksiyonu olarak tanımlandığı daha önce belirtilmişti. Çalışmanın tamamında $\psi(x)$ fonksiyonu Fourier kosinüs fonksiyonu olarak tanımlanır. $f(x) = \psi(x)$ olarak düşündüğümüzde, kompozit nanokirişlerin her iki sınır noktaları ve bu iki sınır noktası arasında $\psi(x)$ aşağıdaki gibi yazılır:

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_0 & x = 0 \\ \psi_L & x = L \\ \sum_{n=1}^{\infty} C_n cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) & 0 < x < L \end{bmatrix} \tag{3.115}$$

Timoshenko nanokompozit kirişlerinin yerel olmayan titreşim probleminde $W(x)$ için dördüncü mertebeden türeve kadar $\psi(x)$ için ise üçüncü mertebeden türeve kadar ihtiyaç vardır. $W(x)$ fonksiyonunun ilk dört türevi daha önceden yazılmıştır. $\psi(x)$ fonksiyonunun ilk üç türevi ise şu şekilde yazılır:

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} C_n sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.116}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{{\psi_L}' - {\psi_0}'}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2((-1)^n {\psi_L}' - {\psi_0}')}{L} - \frac{n^2\pi^2}{L^2} C_n\right) cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.117}$$

$$\frac{d^3\psi(x)}{dx^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \left(\frac{2(-(-1)^n {\psi_L}' + {\psi_0}')}{L} + \frac{n^2\pi^2}{L^2} C_n\right) sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.118}$$

3.6.1. Kompozit Timoshenko nanokirişlerinin yerel olmayan titreşimine dayanan statik çökme denklemi

Bu alt başlıkta, serbest titreşim hareketi yapan kompozit nanokirişlerin yerel olmayan elastisite teorisine ve Timoshenko kiriş teorisine dayanan bilinmeyen Fourier katsayıları bulunacaktır. Bu problemi iki denklem ve iki fonksiyon yönetmektedir. Bu sebeple, iki model için de ikişer Fourier katsayısı (B_n ve C_n) bulunacaktır. Denklemler (3.52)-(3.56) ve Denklemler (3.116)-(3.118), Denklemler (3.113) ve (3.114)'te yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[& \left(-(e_0a)^2 c_g\right) \Bigg(-\frac{n\pi}{L} \Bigg(\frac{2((-1)^n W_L'' - W_0'')}{L} \\
& - \frac{n^2\pi^2}{L^2} \left(\frac{2((-1)^n W_L - W_0)}{L} + \frac{n\pi}{L} B_n \right) \Bigg) \Bigg) \\
& + \big(\kappa A_{55} \\
& + c_g + (e_0a)^2 c_w - \omega^2 (e_0a)^2 I_0\big) \Bigg(-\frac{n\pi}{L} \Bigg(\frac{2((-1)^n W_L - W_0)}{L} \\
& + \frac{n\pi}{L} B_n \Bigg) \Bigg) + (\omega^2 I_0 - c_w) B_n + \kappa A_{55} \left(-\frac{n\pi}{L} C_n\right) \Bigg] sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.119}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(D_{11}-\omega^2(e_0a)^2I_2)\left(\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2(-(-1)^n\psi_L{}'+\psi_0{}')}{L}+\frac{n^2\pi^2}{L^2}C_n\right)\right)\right.$$
$$+(-\kappa A_{55})\left(-\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2((-1)^nW_L-W_0)}{L}+\frac{n\pi}{L}B_n\right)\right) \quad (3.120)$$
$$\left.+(\omega^2I_2-\kappa A_{55})\left(-\frac{n\pi}{L}C_n\right)\right]sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=0$$

elde edilir. Yukarıdaki iki denklemin çözülmesi ile Fourier katsayıları B_n ve C_n yerel olmayan titreşim için hesaplanır. $B_n^{YOET-TT}$ ve $C_n^{YOET-TT}$ hesaplanırken $\psi_0'=\psi_L'=W_0''=W_L''=0$ şartı uygulanırken $B_n^{YOET-RR}$ ve $C_n^{YOET-RR}$ hesaplanırken $W_0''=W_L''=W_0=W_L=0$ şartı uygulanacaktır. Verilen bilgiler ve Denklemler (3.119)-(3.120)'nin çözülmesi ile $B_n^{YOET-TT}$, $C_n^{YOET-TT}$, $B_n^{YOET-RR}$ ve $C_n^{YOET-RR}$ yerel olmayan Timoshenko kompozit nanokirişlerin titreşim problemi için aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$B_n^{YOET-TT}=-\frac{2n\pi(L^2\Xi_7+\Xi_8(\Xi_3c_g+L^2(e_0a)^2c_w))[W_0-(-1)^nW_L]}{L^2(-\mathrm{D}_{11}\mathrm{A}_{55}\kappa n^4\pi^4+\Xi_9)-\Xi_8(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)} \quad (3.121)$$

$$C_n^{YOET-TT}=\frac{2\mathrm{A}_{55}\kappa L^5(I_0\omega^2-c_w)[W_0-(-1)^nW_L]}{L^2(-\mathrm{D}_{11}\mathrm{A}_{55}\kappa n^4\pi^4+\Xi_9)-\Xi_8(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)} \quad (3.122)$$

$$B_n^{YOET-RR}=-\frac{2\mathrm{A}_{55}\kappa L^4n\pi\Xi_2[\psi_0'-(-1)^n\psi_L']}{L^2(-\mathrm{D}_{11}\mathrm{A}_{55}\kappa n^4\pi^4+\Xi_9)-\Xi_8(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)} \quad (3.123)$$

$$C_n^{YOET-RR}$$
$$=\frac{2L\Xi_2\left(L^2(\mathrm{A}_{55}\kappa n^2\pi^2-\Xi_3I_0\omega^2)+\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)\right)[\psi_0'-(-1)^n\psi_L']}{L^2(-\mathrm{D}_{11}\mathrm{A}_{55}\kappa n^4\pi^4+\Xi_9)-\Xi_8(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)} \quad (3.124)$$

Burada, Ξ_7, Ξ_8 ve Ξ_9 aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Xi_7=-\mathrm{A}_{55}\kappa(n^2\pi^2(e_0a)^2I_2+L^2\Xi_1)\omega^2+(e_0a)^2\Xi_3I_0I_2\omega^4$$
$$+\mathrm{D}_{11}n^2\pi^2(\mathrm{A}_{55}\kappa-(e_0a)^2I_0\omega^2) \quad (3.125)$$

$$\Xi_8=\mathrm{A}_{55}\kappa L^2+\mathrm{D}_{11}n^2\pi^2-\Xi_3I_2\omega^2 \quad (3.126)$$

$$\Xi_9=\Xi_3(\mathrm{D}_{11}n^2\pi^2I_0+\mathrm{A}_{55}\kappa\Xi_4)\omega^2-{\Xi_3}^2I_0I_2\omega^4 \quad (3.127)$$

Yukarıda hesaplanan Fourier katsayıları ile, serbest titreşim yapan Winkler-Pasternak zemini üzerindeki yerel olmayan Timoshenko kompozit nanokirişlerinin çökme ve dönme ifadeleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$W(x)^{YOET-TT} = \sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(-\frac{2n\pi\left(L^2\Xi_7+\Xi_8\left(\Xi_3 c_g+L^2(e_0a)^2c_w\right)\right)W_0}{L^2(-\mathrm{D}_{11}\mathrm{A}_{55}\kappa n^4\pi^4+\Xi_9)-\Xi_8\left(n^2\pi^2c_g+L^2c_w\right)}\right. \\ \left.+\frac{2n\pi(L^2\Xi_7+\Xi_8(\Xi_3c_g+L^2(e_0a)^2c_w))(-1)^nW_L}{L^2(-\mathrm{D}_{11}\mathrm{A}_{55}\kappa n^4\pi^4+\Xi_9)-\Xi_8(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right) \quad (3.128)$$

$$W(x)^{YOET-RR} = \sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(-\frac{2\mathrm{A}_{55}\kappa L^4 n\pi\Xi_2[\psi_0'-(-1)^n\psi_L']}{L^2(-\mathrm{D}_{11}\mathrm{A}_{55}\kappa n^4\pi^4+\Xi_9)-\Xi_8(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right) \quad (3.129)$$

$$\psi(x)^{YOET-TT} = \sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(\frac{2\mathrm{A}_{55}\kappa L^5(I_0\omega^2-c_w)[W_0-(-1)^nW_L]}{L^2(-\mathrm{D}_{11}\mathrm{A}_{55}\kappa n^4\pi^4+\Xi_9)-\Xi_8(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right) \quad (3.130)$$

$$\psi(x)^{YOET-RR} = \sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(\frac{2L\Xi_2\left(L^2(\mathrm{A}_{55}\kappa n^2\pi^2-\Xi_3I_0\omega^2)+\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)\right)\psi_0'}{L^2(-\mathrm{D}_{11}\mathrm{A}_{55}\kappa n^4\pi^4+\Xi_9)-\Xi_8(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right. \\ \left.-\frac{2L\Xi_2\left(L^2(\mathrm{A}_{55}\kappa n^2\pi^2-\Xi_3I_0\omega^2)+\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)\right)(-1)^n\psi_L'}{L^2(-\mathrm{D}_{11}\mathrm{A}_{55}\kappa n^4\pi^4+\Xi_9)-\Xi_8(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right) \quad (3.131)$$

3.6.2. Kompozit Timoshenko nanokirişlerinin yerel olmayan titreşimi için özdeğer problemi

Bu alt başlıkta, kompozit Timoshenko nanokirişlerinin yerel olmayan titreşimi için Fourier sinüs ve kosinüs serileri ve Stoke dönüşümüne dayanan çözüm ile özdeğer problemi elde edilecektir. Çökme yayları ile modellenmiş yerel olmayan kompozit Timoshenko nanokirişi için aşağıdaki eşitlikler kurulur:

$$\kappa A_{55}\frac{\partial w}{\partial x}+\kappa A_{55}\phi$$
$$+(e_0a)^2c_w\frac{\partial w}{\partial x}-(e_0a)^2c_g\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(e_0a)^2I_0\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}|_{x=0}=T_0W_0 \quad (3.132)$$

$$\kappa A_{55}\frac{\partial w}{\partial x}+\kappa A_{55}\phi$$
$$+(e_0a)^2c_w\frac{\partial w}{\partial x}-(e_0a)^2c_g\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(e_0a)^2I_0\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}|_{x=L}=-T_LW_L \quad (3.133)$$

Denklemler (3.132) ve (3.133) ile Timoshenko nanokompozit kirişlerinin yerel olmayan titreşim problemi için aşağıdaki iki denklem takımı kurulur:

$$\left(-T_0-\frac{\kappa A_{55}}{L}-\frac{(e_0a)^2c_w}{\mathrm{L}}+\frac{(e_0a)^2I_0\omega^2}{\mathrm{L}}\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L\Xi_5(n^2\pi^2(e_0a)^2c_g\Xi_8-L^2(\Xi_{10}-(e_0a)^2c_w\Xi_8))}{n^2\pi^2\Xi_3\Xi_8c_g-L^2(D_{11}\Xi_{11}+\Xi_3\Xi_{12}\omega^2-\Xi_3\Xi_8c_w)}\right)W_0$$
$$+\left(\frac{\kappa A_{55}}{L}+\frac{(e_0a)^2c_w}{\mathrm{L}}-\frac{(e_0a)^2I_0\omega^2}{\mathrm{L}}\right. \quad (3.134)$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nL\Xi_5(n^2\pi^2(e_0a)^2c_g\Xi_8-L^2(\Xi_{10}-(e_0a)^2c_w\Xi_8))}{n^2\pi^2\Xi_3\Xi_8c_g-L^2(D_{11}\Xi_{11}+\Xi_3\Xi_{12}\omega^2-\Xi_3\Xi_8c_w)}\right)W_L=0$$

$$\left(\frac{\kappa A_{55}}{L}+\frac{(e_0a)^2c_w}{\mathrm{L}}-\frac{(e_0a)^2I_0\omega^2}{\mathrm{L}}\right.$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nL\Xi_5(n^2\pi^2(e_0a)^2c_g\Xi_8-L^2(\Xi_{10}-(e_0a)^2c_w\Xi_8))}{n^2\pi^2\Xi_3\Xi_8c_g-L^2(D_{11}\Xi_{11}+\Xi_3\Xi_{12}\omega^2-\Xi_3\Xi_8c_w)}\right)W_0$$
$$+\left(-T_L-\frac{\kappa A_{55}}{L}-\frac{(e_0a)^2c_w}{\mathrm{L}}+\frac{(e_0a)^2I_0\omega^2}{\mathrm{L}}\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L\Xi_5(n^2\pi^2(e_0a)^2c_g\Xi_8-L^2(\Xi_{10}-(e_0a)^2c_w\Xi_8))}{n^2\pi^2\Xi_3\Xi_8c_g-L^2(D_{11}\Xi_{11}+\Xi_3\Xi_{12}\omega^2-\Xi_3\Xi_8c_w)}\right)W_L=0 \quad (3.135)$$

Burada, Ξ_{10}, Ξ_{11} ve Ξ_{12} şu şekilde tanımlanır:

$$\Xi_{10}=D_{11}n^2\pi^2(-\kappa A_{55}+(e_0a)^2I_0\omega^2) \quad (3.136)$$
$$\Xi_{11}=-\kappa A_{55}n^4\pi^4+n^2\pi^2\Xi_3I_0\omega^2 \quad (3.137)$$
$$\Xi_{12}=\kappa A_{55}\Xi_4-\Xi_3I_0I_2\omega^2 \quad (3.138)$$

Bu iki denklem takımı yardımıyla, çökme yayları ile modellenmiş Timoshenko nanokompozit kirişleri için aşağıdaki gibi bir özdeğer problemi kurulabilir:

$$\begin{bmatrix}\Gamma_{11}^{YOET-TT} & \Gamma_{12}^{YOET-TT}\\ \Gamma_{21}^{YOET-TT} & \Gamma_{22}^{YOET-TT}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_0\\ W_L\end{bmatrix}=0 \quad (3.139)$$

Yukarıdaki özdeğer probleminde bulunan $2x2$ boyutundaki katsayılar matrisinin elemanları aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Gamma_{11}^{YOET-TT}=-T_0-\frac{\kappa A_{55}}{L}-\frac{(e_0a)^2c_w}{\mathrm{L}}+\frac{(e_0a)^2I_0\omega^2}{\mathrm{L}}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L\Xi_5(n^2\pi^2(e_0a)^2c_g\Xi_8-L^2(\Xi_{10}-(e_0a)^2c_w\Xi_8))}{n^2\pi^2\Xi_3\Xi_8c_g-L^2(D_{11}\Xi_{11}+\Xi_3\Xi_{12}\omega^2-\Xi_3\Xi_8c_w)} \quad (3.140)$$

$$\Gamma_{12}^{YOET-TT} = \frac{\kappa A_{55}}{L} + \frac{(e_0a)^2 c_w}{\mathrm{L}} - \frac{(e_0a)^2 I_0 \omega^2}{\mathrm{L}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L \Xi_5 (n^2\pi^2 (e_0a)^2 c_g \Xi_8 - L^2(\Xi_{10} - (e_0a)^2 c_w \Xi_8))}{n^2\pi^2 \Xi_3 \Xi_8 c_g - L^2(D_{11}\Xi_{11} + \Xi_3 \Xi_{12}\omega^2 - \Xi_3 \Xi_8 c_w)} \tag{3.141}$$

$$\Gamma_{21}^{YOET-TT} = \frac{\kappa A_{55}}{L} + \frac{(e_0a)^2 c_w}{\mathrm{L}} - \frac{(e_0a)^2 I_0 \omega^2}{\mathrm{L}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L \Xi_5 (n^2\pi^2 (e_0a)^2 c_g \Xi_8 - L^2(\Xi_{10} - (e_0a)^2 c_w \Xi_8))}{n^2\pi^2 \Xi_3 \Xi_8 c_g - L^2(D_{11}\Xi_{11} + \Xi_3 \Xi_{12}\omega^2 - \Xi_3 \Xi_8 c_w)} \tag{3.142}$$

$$\Gamma_{22}^{YOET-TT} = -T_L - \frac{\kappa A_{55}}{L} - \frac{(e_0a)^2 c_w}{\mathrm{L}} + \frac{(e_0a)^2 I_0 \omega^2}{\mathrm{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L \Xi_5 (n^2\pi^2 (e_0a)^2 c_g \Xi_8 - L^2(\Xi_{10} - (e_0a)^2 c_w \Xi_8))}{n^2\pi^2 \Xi_3 \Xi_8 c_g - L^2(D_{11}\Xi_{11} + \Xi_3 \Xi_{12}\omega^2 - \Xi_3 \Xi_8 c_w)} \tag{3.143}$$

Şimdi ise her iki ucunda basit mesnetler ve dönel yaylar ile modellenmiş kompozit Timoshenko nanokirişlerine ait özdeğer problemi kurulacaktır. Bu modelin $x = 0$ ve $x = L$ noktaları için aşağıdaki eşitlikler kurulur:

$$D_{11}\frac{\partial \phi}{\partial x} + (e_0a)^2 c_w w - (e_0a)^2 c_g \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (e_0a)^2 I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (e_0a)^2 I_2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial t^2}|_{x=0} = R_0 \psi_0 \tag{3.144}$$

$$D_{11}\frac{\partial \phi}{\partial x} + (e_0a)^2 c_w w - (e_0a)^2 c_g \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (e_0a)^2 I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (e_0a)^2 I_2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial t^2}|_{x=0} = -R_L \psi_L \tag{3.145}$$

Denklemler (3.144) ve (3.145) ile aşağıdaki iki denklem takımı yazılır:

$$\left(D_{11}-\omega^2(e_0a)^2I_2\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L\Xi_2(L^2\Xi_{13}+\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w))R_0}{L^2(D_{11}A_{55}\kappa n^4\pi^4-\Xi_9)+\Xi_3\Xi_8(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right)\psi_0' \tag{3.146}$$

$$+\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nL\Xi_2(L^2\Xi_{13}+\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w))R_0}{L^2(D_{11}A_{55}\kappa n^4\pi^4-\Xi_9)+\Xi_3\Xi_8(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right)\psi_L'=0$$

$$\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nL\Xi_2(L^2\Xi_{13}+\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w))R_1}{L^2(D_{11}A_{55}\kappa n^4\pi^4-\Xi_9)+\Xi_3\Xi_8(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right)\psi_0'$$

$$+\left(D_{11}-\omega^2(e_0a)^2I_2\right. \tag{3.147}$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L\Xi_2(L^2\Xi_{13}+\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w))R_1}{L^2(D_{11}A_{55}\kappa n^4\pi^4-\Xi_9)+\Xi_3\Xi_8(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right)\psi_L'=0$$

Burada, Ξ_{13} aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Xi_{13}=A_{55}\kappa n^2\pi^2-\Xi_3I_0\omega^2 \tag{3.148}$$

Yukarıda ψ_0' ve ψ_L''ye bağlı olarak kurulan özdeğer problemi ve katsayılar matrisinin elemanları aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{bmatrix}\Gamma_{11}^{YOET-RR} & \Gamma_{12}^{YOET-RR}\\ \Gamma_{21}^{YOET-RR} & \Gamma_{22}^{YOET-RR}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_0'\\ \psi_L'\end{bmatrix}=0 \tag{3.149}$$

$$\Gamma_{11}^{YOET-RR} = D_{11} - \omega^2 (e_0 a)^2 I_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L\Xi_2 (L^2\Xi_{13} + \Xi_3 (n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)) R_0}{L^2 (D_{11} A_{55} \kappa n^4 \pi^4 - \Xi_9) + \Xi_3 \Xi_8 (n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \tag{3.150}$$

$$\Gamma_{12}^{YOET-RR} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L\Xi_2 (L^2\Xi_{13} + \Xi_3 (n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)) R_0}{L^2 (D_{11} A_{55} \kappa n^4 \pi^4 - \Xi_9) + \Xi_3 \Xi_8 (n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \tag{3.151}$$

$$\Gamma_{21}^{YOET-RR} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L\Xi_2 (L^2\Xi_{13} + \Xi_3 (n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)) R_1}{L^2 (D_{11} A_{55} \kappa n^4 \pi^4 - \Xi_9) + \Xi_3 \Xi_8 (n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \tag{3.152}$$

$$\Gamma_{22}^{YOET-RR} = D_{11} - \omega^2 (e_0 a)^2 I_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L\Xi_2 (L^2\Xi_{13} + \Xi_3 (n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)) R_1}{L^2 (D_{11} A_{55} \kappa n^4 \pi^4 - \Xi_9) + \Xi_3 \Xi_8 (n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \tag{3.153}$$

Yukarıda yerel olmayan Timoshenko nanokompozit kirişleri için elde edilen katsayılar matrisinin elemanları bazı parametrelerin ihmal edilmesi ile çeşitli alt problemlere indirgenebilir. Bu alt probemlerden bazıları şöyledir:

i. Pasternak zemin parametresi ihmal edilip determinantın sıfıra eşitlenmesi, Winkler zemini üzerindeki Timoshenko nanokompozit kirişinin titreşim frekanslarını verir.

ii. Hem Winkler hem de Pasternak zemin parametrelerinin ihmal edilip determinantın sıfıra eşitlenmesi, herhangi bir zemin etkisinde olmayan Timoshenko nanokompozit kirişinin titreşim frekanslarını verir.

3.7. Kompozit Timoshenko Nanokirişlerinin Yerel Olmayan Elastisite Teorisine Dayanan Burkulma Denkleminin Çözümü

Bu bölümde, kompozit nanokirişlerin Denklemler (2.139) ve (2.140)'daki gibi elde edilen ve Timoshenko kiriş teorisine dayanan burkulma denklemi çözülecektir. Burada, Denklem (2.139) olduğu gibi çözüme dâhil edilecektir. Ancak, Denklem (2.140)'ın toplam dışında sembol kalmamasını sağlamak için x'e göre bir kez türevi alındıktan sonra

çözümü yapılacaktır. (2.140)'ın x'e göre bir kez türevi alındığı zaman aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$D_{11}\frac{d^3\psi}{dx^3} - \kappa A_{55}\frac{d^2W}{dx^2} - \kappa A_{55}\frac{d\psi}{dx} = 0 \tag{3.154}$$

3.7.1. Kompozit Timoshenko nanokirişlerinin yerel olmayan burkulmasına dayanan statik çökme denklemi

Bu alt başlıkta, burkulma probemi için kompozit nanokirişlerin yerel olmayan elastisite teorisine ve Timoshenko kiriş teorisine dayanan bilinmeyen Fourier katsayıları bulunacaktır. Titreşim problemine benzer şekilde, Denklemler (3.52)-(3.56) ve Denklemler (3.116)-(3.118), Denklemler (2.139) ve (3.154)'te yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[&\left((e_0a)^2P-(e_0a)^2c_g\right)\left(-\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2((-1)^nW_L'' - W_0'')}{L}\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\frac{2((-1)^nW_L - W_0)}{L}+\frac{n\pi}{L}B_n\right)\right)\right)\\&+\left(\kappa A_{55}+c_g+(e_0a)^2c_w\right.\\&\left.-P\right)\left(-\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2((-1)^nW_L - W_0)}{L}+\frac{n\pi}{L}B_n\right)\right)+(-c_w)B_n\\&+\kappa A_{55}\left(-\frac{n\pi}{L}C_n\right)\Bigg]sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=0\end{aligned} \tag{3.155}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[&(D_{11})\left(\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2(-(-1)^n\psi_L'+\psi_0')}{L}+\frac{n^2\pi^2}{L^2}C_n\right)\right)\\&+(-\kappa A_{55})\left(-\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2((-1)^nW_L - W_0)}{L}+\frac{n\pi}{L}B_n\right)\right)\\&+(-\kappa A_{55})\left(-\frac{n\pi}{L}C_n\right)\Bigg]sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=0\end{aligned} \tag{3.156}$$

elde edilir. Denklemler (3.155)-(3.125)'nın çözülmesi ile $\overline{B_n^{YOET-TT}}$, $\overline{C_n^{YOET-TT}}$, $\overline{B_n^{YOET-RR}}$ ve $\overline{C_n^{YOET-RR}}$ yerel olmayan Timoshenko kompozit nanokirişlerin burkulma problemi için aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\overline{B_n^{YOET-TT}} = \frac{2n\pi(\Xi_{14} - \Xi_{15}(\Xi_3 c_g + L^2(e_0 a)^2 c_w))[W_0 - (-1)^n W_L]}{\mathrm{D}_{11} n^4 P\pi^4 \Xi_3 + \Xi_{16} + \Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \tag{3.157}$$

$$\overline{C_n^{YOET-TT}} = \frac{2\mathrm{A}_{55}\kappa L^5 c_w[W_0 - (-1)^n W_L]}{\mathrm{D}_{11} n^4 P\pi^4 \Xi_3 + \Xi_{16} + \Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \tag{3.158}$$

$$\overline{B_n^{YOET-RR}} = -\frac{2\mathrm{D}_{11}\mathrm{A}_{55}\kappa L^4 n\pi[\psi_0' - (-1)^n \psi_L']}{\mathrm{D}_{11} n^4 P\pi^4 \Xi_3 + \Xi_{16} + \Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \tag{3.159}$$

$$\overline{C_n^{YOET-RR}} = \frac{2\mathrm{D}_{11} L(\Xi_{17} + \Xi_3(m^2\pi^2 c_g + L^2 c_w))[\psi_0' - (-1)^n \psi_L']}{-\mathrm{D}_{11} n^4 P\pi^4 \Xi_3 - \Xi_{16} - \Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \tag{3.160}$$

Burada, Ξ_{14}, Ξ_{15}, Ξ_{16} ve Ξ_{17} aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Xi_{14} = \mathrm{A}_{55}\kappa L^4 P + \mathrm{D}_{11} L^2 n^2(-\mathrm{A}_{55}\kappa + P)\pi^2 + n^2 P\pi^2 \Xi_{15}(e_0 a)^2 \tag{3.161}$$

$$\Xi_{15} = \mathrm{A}_{55}\kappa L^2 + \mathrm{D}_{11} n^2\pi^2 \tag{3.162}$$

$$\Xi_{16} = \mathrm{A}_{55}\kappa L^2 n^2\pi^2(L^2 P + n^2\pi^2 \Xi_6) \tag{3.163}$$

$$\Xi_{17} = L^2 n^2(\mathrm{A}_{55}\kappa - P)\pi^2 - n^4 P\pi^4(e_0 a)^2 \tag{3.164}$$

Yukarıda hesaplanan Fourier katsayıları yardımıyla Winkler-Pasternak zemini üzerindeki yerel olmayan Timoshenko kompozit nanokirişlerin çökme ve dönme ifadeleri, P eksenel yükü altında aşağıdaki gibi yazılır:

$$\overline{W(x)^{YOET-TT}} = \sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(\frac{2n\pi(\Xi_{14} - \Xi_{15}(\Xi_3 c_g + L^2(e_0 a)^2 c_w))[W_0 - (-1)^n W_L]}{\mathrm{D}_{11} n^4 P\pi^4 \Xi_3 + \Xi_{16} + \Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)}\right) \tag{3.165}$$

$$\overline{W(x)^{YOET-RR}} = \sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(-\frac{2\mathrm{D}_{11}\mathrm{A}_{55}\kappa L^4 n\pi[\psi_0' - (-1)^n \psi_L']}{\mathrm{D}_{11} n^4 P\pi^4 \Xi_3 + \Xi_{16} + \Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)}\right) \tag{3.166}$$

$$\overline{\psi(x)^{YOET-TT}} = \sum_{n=1}^{\infty} cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(\frac{2\mathrm{A}_{55}\kappa L^5 c_w[W_0-(-1)^n W_L]}{\mathrm{D}_{11}n^4P\pi^4\Xi_3+\Xi_{16}+\Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right) \tag{3.167}$$

$$\overline{\psi(x)^{YOET-RR}} = \sum_{n=1}^{\infty} cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(\frac{2\mathrm{D}_{11}L(\Xi_{17}+\Xi_3(m^2\pi^2c_g+L^2c_w))[\psi_0'-(-1)^n\psi_L']}{-\mathrm{D}_{11}n^4P\pi^4\Xi_3-\Xi_{16}-\Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right) \tag{3.168}$$

3.7.2. Kompozit Timoshenko nanokirişlerinin yerel olmayan burkulması için özdeğer problemi

Bu alt başlıkta, kompozit Timoshenko nanokirişlerinin yerel olmayan burkulması için özdeğer problemi elde edilecektir. *P* eksenel yüküne maruz kalan ve çökme yayları ile modellenmiş yerel olmayan kompozit Timoshenko nanokirişi için aşağıdaki eşitlikler kurulur:

$$\kappa A_{55}\frac{dW}{dx}+\kappa A_{55}\psi+(e_0a)^2c_w\frac{dW}{dx} -(e_0a)^2c_g\frac{d^3W}{dx^3}+(e_0a)^2P\frac{d^3W}{dx^3}|_{x=0}=T_0W_0 \tag{3.169}$$

$$\kappa A_{55}\frac{dW}{dx}+\kappa A_{55}\psi+(e_0a)^2c_w\frac{dW}{dx} -(e_0a)^2c_g\frac{d^3W}{dx^3}+(e_0a)^2P\frac{d^3W}{dx^3}|_{x=L}=-T_LW_L \tag{3.170}$$

Denklemler (3.169) ve (3.170) ile Timoshenko nanokompozit kirişlerinin yerel olmayan burkulma problemi için aşağıdaki iki denklem takımı kurulur:

$$\left(-T_0-\frac{A_{55}\kappa}{L}-\frac{(e_0a)^2c_w}{L}\right.$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Lc_w(n^2\pi^2\Xi_{18}+\Xi_{15}(e_0a)^2(n^2\pi^2c_g+L^2c_w))}{-D_{11}n^4P\pi^4\Xi_3-\Xi_{16}+\Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right)W_0$$
$$+\left(\frac{A_{55}\kappa}{L}+\frac{(e_0a)^2c_w}{L}\right. \tag{3.171}$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nLc_w(n^2\pi^2\Xi_{18}+\Xi_{15}(e_0a)^2(n^2\pi^2c_g+L^2c_w))}{-D_{11}n^4P\pi^4\Xi_3-\Xi_{16}+\Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right)W_L=0$$

$$\left(\frac{A_{55}\kappa}{L}+\frac{(e_0a)^2c_w}{L}\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nLc_w(n^2\pi^2\Xi_{18}+\Xi_{15}(e_0a)^2(n^2\pi^2c_g+L^2c_w))}{-D_{11}n^4P\pi^4\Xi_3-\Xi_{16}+\Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right)W_0$$
$$+\left(-T_L-\frac{A_{55}\kappa}{L}-\frac{(e_0a)^2c_w}{L}\right. \tag{3.172}$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Lc_w(n^2\pi^2\Xi_{18}+\Xi_{15}(e_0a)^2(n^2\pi^2c_g+L^2c_w))}{-D_{11}n^4P\pi^4\Xi_3-\Xi_{16}+\Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right)W_L=0$$

Burada, Ξ_{18} aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Xi_{18}=D_{11}A_{55}\kappa L^2-2P\Xi_{15}(e_0a)^2 \tag{3.173}$$

Denklemler (3.171) ve (3.172) kullanılarak, çökme yayları ile modellenmiş Timoshenko nanokompozit kirişleri için kurulan özdeğer problemi ve katsayılar matrisinin elemanları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix}\overline{\Gamma_{11}^{YOET-TT}} & \overline{\Gamma_{12}^{YOET-TT}}\\ \overline{\Gamma_{21}^{YOET-TT}} & \overline{\Gamma_{22}^{YOET-TT}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_0\\W_L\end{bmatrix}=0 \tag{3.174}$$

$$\overline{\Gamma_{11}^{YOET-TT}} = -T_0 - \frac{A_{55}\kappa}{L} - \frac{(e_0a)^2 c_w}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Lc_w(n^2\pi^2\Xi_{18} + \Xi_{15}(e_0a)^2(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w))}{-D_{11}n^4P\pi^4\Xi_3 - \Xi_{16} + \Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \tag{3.175}$$

$$\overline{\Gamma_{12}^{YOET-TT}} = \frac{A_{55}\kappa}{L} + \frac{(e_0a)^2 c_w}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n Lc_w(n^2\pi^2\Xi_{18} + \Xi_{15}(e_0a)^2(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w))}{-D_{11}n^4P\pi^4\Xi_3 - \Xi_{16} + \Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \tag{3.176}$$

$$\overline{\Gamma_{21}^{YOET-TT}} = \frac{A_{55}\kappa}{L} + \frac{(e_0a)^2 c_w}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n Lc_w(n^2\pi^2\Xi_{18} + \Xi_{15}(e_0a)^2(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w))}{-D_{11}n^4P\pi^4\Xi_3 - \Xi_{16} + \Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \tag{3.177}$$

$$\overline{\Gamma_{22}^{YOET-TT}} = -T_L - \frac{A_{55}\kappa}{L} - \frac{(e_0a)^2 c_w}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Lc_w(n^2\pi^2\Xi_{18} + \Xi_{15}(e_0a)^2(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w))}{-D_{11}n^4P\pi^4\Xi_3 - \Xi_{16} + \Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \tag{3.178}$$

Dönme yayları ile modellenen ve P eksenel yüküne maruz Timoshenko kirişinin $x = 0$ ve $x = L$ noktaları için aşağıdaki eşitlikler kurulur:

$$D_{11}\frac{d\psi}{dx} + (e_0a)^2 c_w W - (e_0a)^2 c_g \frac{d^2W}{dx^2}|_{x=0} = R_0\psi_0 \tag{3.179}$$

$$D_{11}\frac{d\psi}{dx} + (e_0a)^2 c_w W - (e_0a)^2 c_g \frac{d^2W}{dx^2}|_{x=0} = -R_L\psi_L \tag{3.180}$$

Denklemler (3.179) ve (3.180) ile aşağıdaki iki denklem takımı yazılır:

$$\left(D_{11}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2D_{11}L(\Xi_{17}+\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w))R_0}{-D_{11}n^4P\pi^4\Xi_3-\Xi_{16}+\Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right)\psi_0' + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nD_{11}L(\Xi_{17}+\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w))R_0}{-D_{11}n^4P\pi^4\Xi_3-\Xi_{16}+\Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right)\psi_L' = 0 \tag{3.181}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nD_{11}L(\Xi_{17}+\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w))R_L}{-D_{11}n^4P\pi^4\Xi_3-\Xi_{16}+\Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right)\psi_0' + \left(D_{11} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2D_{11}L(\Xi_{17}+\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w))R_L}{-D_{11}n^4P\pi^4\Xi_3-\Xi_{16}+\Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)}\right)\psi_L' = 0 \tag{3.182}$$

Yukarıdaki denklem takımı, ψ_0' ve ψ_L''ye bağlı olarak bir özdeğer problemi şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix}\overline{\Gamma_{11}^{YOET-RR}} & \overline{\Gamma_{12}^{YOET-RR}}\\ \overline{\Gamma_{21}^{YOET-RR}} & \overline{\Gamma_{22}^{YOET-RR}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_0'\\ \psi_L'\end{bmatrix} = 0 \tag{3.183}$$

Katsayılar matrisine ait elemanlar ise aşağıdaki gibidir:

$$\overline{\Gamma_{11}^{YOET-RR}} = D_{11}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2D_{11}L(\Xi_{17}+\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w))R_0}{-D_{11}n^4P\pi^4\Xi_3-\Xi_{16}+\Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)} \tag{3.184}$$

$$\overline{\Gamma_{12}^{YOET-RR}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nD_{11}L(\Xi_{17}+\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w))R_0}{-D_{11}n^4P\pi^4\Xi_3-\Xi_{16}+\Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)} \tag{3.185}$$

$$\overline{\Gamma_{21}^{YOET-RR}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nD_{11}L(\Xi_{17}+\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w))R_L}{-D_{11}n^4P\pi^4\Xi_3-\Xi_{16}+\Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2c_g+L^2c_w)} \tag{3.186}$$

$$\overline{\Gamma_{22}^{YOET-RR}} = D_{11} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2D_{11}L(\Xi_{17} + \Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w))R_L}{-D_{11}n^4 P\pi^4 \Xi_3 - \Xi_{16} + \Xi_{15}\Xi_3(n^2\pi^2 c_g + L^2 c_w)} \tag{3.187}$$

Bu bölümde verilen katsayılar matrislerinin determinantlarının sıfıra eşitlenip özdeğerleri bulunduğunda, Timoshenko nanokompozit kirişlerinin burkulma yükleri hesaplanmış olur. Ayrıca, yukarıda yerel olmayan Timoshenko nanokompozit kirişleri için elde edilen katsayılar matrisinin elemanlarında bazı parametrelerin ihmal edilmesi burkulmanın çeşitli alt problemlerini verir. Bu alt probemlerden bazıları şöyledir:

i. Pasternak zemin parametresi ihmal edilip determinantın sıfıra eşitlenmesi, Winkler zemini üzerindeki Timoshenko nanokompozit kirişinin burkulma yüklerini verir.

ii. Hem Winkler hem de Pasternak zemin parametrelerinin ihmal edilip determinantın sıfıra eşitlenmesi, herhangi bir zemin etkisinde olmayan Timoshenko nanokompozit kirişinin burkulma yüklerini verir.

3.8. Kompozit Nanotüplerin Değiştirilmiş Gerilme Çifti Teorisine Dayanan Burulmalı Titreşim Denkleminin Çözümü

Kompozit nanotüpün Denklem (2.159)'daki gibi elde edilen titreşim denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\frac{1}{4}\mu^J l_d^2 \frac{d^4\varphi(x)}{dx^4} - (\mu^J + 3\mu^A l_d^2)\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} - \omega^2\rho^J\varphi(x) = 0 \tag{3.189}$$

$\varphi(x)$ fonksiyonunun ilk iki türevi daha önce yazılmıştı. Anlaşılacağı üzere, bu problemde $\varphi(x)$ fonksiyonunun dördüncü türevine kadar ihtiyaç vardır. $\varphi(x)$ fonksiyonunun üçüncü ve dördüncü türevleri aşağıdaki gibi yazılırlar:

$$\frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} = \frac{\varphi_L'' - \varphi_0''}{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2((-1)^n\varphi_L'' - \varphi_0'')}{L} - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\frac{2((-1)^n\varphi_L - \varphi_0)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\right)\right)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.190}$$

$$\frac{d^4\varphi(x)}{dx^4} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2((-1)^n\varphi_L'' - \varphi_0'')}{L} - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\frac{2((-1)^n\varphi_L - \varphi_0)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\right)\right)sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.191}$$

3.8.1. Kompozit nanotüplerin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan statik burulma denklemi

Bilinmeyen Fourier katsayısının bulunmasının ardından kompozit nanotüplerin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan statik burulma denklemi yazılabilir. $\varphi(x)$ fonksiyonunun kendisi ve gerekli olan türevleri Denklem (3.189)'da yerine yazılırsa:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{4}\mu^J l_d^2\right)\left(-\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2((-1)^n\varphi_L'' - \varphi_0'')}{L} - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\frac{2((-1)^n\varphi_L - \varphi_0)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\right)\right)\right) - (\mu^J + 3\mu^A l_d^2)\left(-\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2((-1)^n\varphi_L - \varphi_0)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\right)\right) - (\omega^2\rho^J)B_n\right]sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0 \tag{3.192}$$

elde edilir. Bu eşitliğin çözülmesi ile Fourier katsayısı $B_n^{DGÇT-NT}$ değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ile ele alınan burulma için aşağıdaki gibi hesaplanır (Uzun ve Yaylı, 2022):

$$B_n^{DGÇT-NT} = \frac{2n\pi(4\mu^J L^2 + (12\mu^A L^2 + \mu^J n^2\pi^2)l_d^2)(\varphi_0 - (-1)^n\varphi_L)}{4\mu^J L^2 n^2\pi^2 - 4L^4\omega^2\rho^J + 12\mu^A L^2 n^2\pi^2 l_d^2 + \mu^J n^4\pi^4 l_d^2} \tag{3.193}$$

$B_n^{DGÇT-NT}$'nin hesaplanmasının ardından burulma açısını hesaplayan eşitlik aşağıdaki gbi elde edilir:

$$\varphi(x)^{DGÇT-NT} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n\pi(4\mu^J L^2 + (12\mu^A L^2 + \mu^J n^2\pi^2)l_d^2)(\varphi_0 - (-1)^n\varphi_L)}{4\mu^J L^2 n^2\pi^2 - 4L^4\omega^2\rho^J + 12\mu^A L^2 n^2\pi^2 l_d^2 + \mu^J n^4\pi^4 l_d^2}\right) sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{3.194}$$

3.8.2. Kompozit nanotüplerin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan özdeğer problemi

Bu alt başlıkta, kompozit nanotüplerin burulmalı titreşimi için değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan özdeğer problemi elde edilecektir. Bunun için kompozit nanotüpün değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan burulma momenti, burulma yayı ve burulma fonksiyonunun çarpımına eşitlenir. Böylece, kompozit nanotüpün $x = 0$ ve $x = L$ noktaları için aşağıdaki eşitlikler kurulur:

$$(\mu^J + 3\mu^A l_d^2)\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{1}{4}\mu^J l_d^2\frac{\partial^3\theta}{\partial x^3}|_{x=0} = K_0\varphi_0 \tag{3.195}$$

$$(\mu^J + 3\mu^A l_d^2)\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{1}{4}\mu^J l_d^2\frac{\partial^3\theta}{\partial x^3}|_{x=0} = -K_L\varphi_L \tag{3.196}$$

Denklemler (3.195) ve (3.196) ile aşağıdaki iki denklem takımı kurulur (Uzun ve Yaylı, 2022):

$$\left(-K_0-\frac{3\mu^A l_d^2}{L}-\frac{\mu^J}{L}\right.$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L\rho^J\omega^2(4\mu^J L^2+12\mu^A L^2 l_d^2+\mu^J n^2\pi^2 l_d^2}{-4\mu^J L^2 n^2\pi^2+4L^4\rho^J\omega^2-12\mu^A L^2 n^2\pi^2 l_d^2-\mu^J n^4\pi^4 l_d^2}\right)\varphi_0$$
$$+\left(\frac{3\mu^A l_d^2}{L}+\frac{\mu^J}{L}\right. \tag{3.197}$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n L\rho^J\omega^2(4\mu^J L^2+12\mu^A L^2 l_d^2+\mu^J n^2\pi^2 l_d^2}{-4\mu^J L^2 n^2\pi^2+4L^4\rho^J\omega^2-12\mu^A L^2 n^2\pi^2 l_d^2-\mu^J n^4\pi^4 l_d^2}\right)\varphi_L=0$$

$$\left(\frac{3\mu^A l_d^2}{L}+\frac{\mu^J}{L}\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n L\rho^J\omega^2(4\mu^J L^2+12\mu^A L^2 l_d^2+\mu^J n^2\pi^2 l_d^2}{-4\mu^J L^2 n^2\pi^2+4L^4\rho^J\omega^2-12\mu^A L^2 n^2\pi^2 l_d^2-\mu^J n^4\pi^4 l_d^2}\right)\varphi_0$$
$$+\left(-K_L-\frac{3\mu^A l_d^2}{L}-\frac{\mu^J}{L}\right. \tag{3.198}$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L\rho^J\omega^2(4\mu^J L^2+12\mu^A L^2 l_d^2+\mu^J n^2\pi^2 l_d^2}{-4\mu^J L^2 n^2\pi^2+4L^4\rho^J\omega^2-12\mu^A L^2 n^2\pi^2 l_d^2-\mu^J n^4\pi^4 l_d^2}\right)\varphi_L=0$$

Bu iki denklem takımı ile aşağıdaki gibi bir özdeğer problemi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix}Z_{11}^{DGÇT} & Z_{12}^{DGÇT}\\ Z_{21}^{DGÇT} & Z_{22}^{DGÇT}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_0\\ \varphi_L\end{bmatrix}=0 \tag{3.199}$$

Kompozit nanotüpün değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan titreşim frekanslarını bulmak için katsayılar matrisinin determinatını sıfıra eşitleyip özdeğerlerini elde etmemiz gerekir. Katsayılar matrisinin elemanları aşağıdaki gibi yazılır:

$$Z_{11}^{DGÇT} = -K_0 - \frac{3\mu^A l_d^2}{L} - \frac{\mu^J}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L\rho^J\omega^2(4\mu^J L^2 + 12\mu^A L^2 l_d^2 + \mu^J n^2\pi^2 l_d^2}{-4\mu^J L^2 n^2\pi^2 + 4L^4\rho^J\omega^2 - 12\mu^A L^2 n^2\pi^2 l_d^2 - \mu^J n^4\pi^4 l_d^2} \tag{3.200}$$

$$Z_{12}^{DGÇT} = \frac{3\mu^A l_d^2}{L} + \frac{\mu^J}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L\rho^J\omega^2(4\mu^J L^2 + 12\mu^A L^2 l_d^2 + \mu^J n^2\pi^2 l_d^2}{-4\mu^J L^2 n^2\pi^2 + 4L^4\rho^J\omega^2 - 12\mu^A L^2 n^2\pi^2 l_d^2 - \mu^J n^4\pi^4 l_d^2} \tag{3.201}$$

$$Z_{21}^{DGÇT} = \frac{3\mu^A l_d^2}{L} + \frac{\mu^J}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L\rho^J\omega^2(4\mu^J L^2 + 12\mu^A L^2 l_d^2 + \mu^J n^2\pi^2 l_d^2}{-4\mu^J L^2 n^2\pi^2 + 4L^4\rho^J\omega^2 - 12\mu^A L^2 n^2\pi^2 l_d^2 - \mu^J n^4\pi^4 l_d^2} \tag{3.202}$$

$$Z_{22}^{DGÇT} = -K_L - \frac{3\mu^A l_d^2}{L} - \frac{\mu^J}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L\rho^J\omega^2(4\mu^J L^2 + 12\mu^A L^2 l_d^2 + \mu^J n^2\pi^2 l_d^2}{-4\mu^J L^2 n^2\pi^2 + 4L^4\rho^J\omega^2 - 12\mu^A L^2 n^2\pi^2 l_d^2 - \mu^J n^4\pi^4 l_d^2} \tag{3.203}$$

3.9. Kompozit Rayleigh Nanokirişlerinin Değiştirilmiş Gerilme Çifti Teorisine Dayanan Titreşim Denkleminin Çözümü

Kompozit nanokirişlerin Denklem (2.169)'daki gibi elde edilen titreşim denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$D_{11}\frac{d^4W}{dx^4} + A_{55}l_d^2\frac{d^4W}{dx^4} - \omega^2 I_0 W + \omega^2 I_2\frac{d^2W}{dx^2} = 0 \tag{3.204}$$

Yukarıdaki titreşim problemi hem dönel atalet etkisini hem de malzeme uzunluk ölçek parametresinin etkisini barındırır. Dönel atalet etkisini ihmal ettiğimizde Euler-Bernoulli nanokompozit kirişi için değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan titreşim denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$D_{11}\frac{d^4W}{dx^4}+A_{55}l_d^2\frac{d^4W}{dx^4}-\omega^2 I_0 W=0 \tag{3.205}$$

3.9.1. Kompozit Rayleigh nanokirişlerinin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan statik çökme denklemi

Bu bölümde, değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan titreşim problemi için bilinmeyen Fourier katsayısı iki farklı elastik mesnetlenme koşulu için bulunacaktır. $W(x)$ fonksiyonunun kendisi ve gerekli olan türevleri Denklem (3.204)'de yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[(D_{11}+A_{55}l_d^2)\Bigg(-\frac{n\pi}{L}\Bigg(\frac{2((-1)^nW_L''-W_0'')}{L}\\ -\frac{n^2\pi^2}{L^2}\Bigg(\frac{2((-1)^nW_L-W_0)}{L}+\frac{n\pi}{L}B_n\Bigg)\Bigg)\Bigg)\\ +(\omega^2I_2)\Bigg(-\frac{n\pi}{L}\Bigg(\frac{2((-1)^nW_L-W_0)}{L}+\frac{n\pi}{L}B_n\Bigg)\Bigg)\\ -(\omega^2I_0)B_n\Bigg]sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)=0\end{aligned} \tag{3.206}$$

elde edilir. Bu eşitliğin çözülmesi ile Fourier katsayıları $B_n^{DGÇT-TT}$ ve $B_n^{DGÇT-RR}$ değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ile ele alınan titreşim problemi için aşağıdaki gibi hesaplanırlar:

$$B_n^{DGÇT-TT} = \frac{2n\pi(-L^2 I_2\omega^2 + n^2\pi^2(D_{11} + A_{55}l_d^2))(W_0 - (-1)^n W_L)}{D_{11}n^4\pi^4 - L^2(L^2 I_0 + n^2\pi^2 I_2)\omega^2 + A_{55}l_d^2 n^4\pi^4} \tag{3.207}$$

$$B_n^{DGÇT-RR} = -\frac{2L^2 n\pi(D_{11} + A_{55}l_d^2)(\mathrm{W}_0'' - (-1)^n \mathrm{W}_L'')}{D_{11}n^4\pi^4 - L^2(L^2 I_0 + n^2\pi^2 I_2)\omega^2 + A_{55}l_d^2 n^4\pi^4} \tag{3.208}$$

$B_n^{DGÇT-TT}$ ve $B_n^{DGÇT-RR}$ ile çökmeyi hesaplayan eşitlikler aşağıdaki gibi elde edilir:

$$W(x)^{DGÇT-TT} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n\pi(-L^2 I_2\omega^2 + n^2\pi^2(D_{11} + A_{55}l_d^2))(W_0 - (-1)^n W_L)}{D_{11}n^4\pi^4 - L^2(L^2 I_0 + n^2\pi^2 I_2)\omega^2 + A_{55}l_d^2 n^4\pi^4}\right) sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{3.209}$$

$$W(x)^{DGÇT-RR} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2L^2 n\pi(D_{11} + A_{55}l_d^2)(\mathrm{W}_0'' - (-1)^n \mathrm{W}_L'')}{D_{11}n^4\pi^4 - L^2(L^2 I_0 + n^2\pi^2 I_2)\omega^2 + A_{55}l_d^2 n^4\pi^4}\right) sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{3.210}$$

3.9.2. Kompozit Rayleigh nanokirişlerinin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan özdeğer problemi

Bu alt başlıkta, kompozit Rayleigh nanokirişlerinin serbest titreşimi için değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan özdeğer problemleri elde edilecektir. Çökme yayı ile modellenmiş kompozit nanokirişin $x = 0$ ve $x = L$ noktaları için kuvvet sınır koşulları şu şekilde yazılır:

$$I_2\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2} - D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - A_{55}l_d^2\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}|_{x=0} = T_0 W_0 \tag{3.211}$$

$$I_2\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2} - D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - A_{55}l_d^2\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}|_{x=L} = -T_L W_L \tag{3.212}$$

Denklemler (3.211) ve (3.212) ile çökme yaylarıyla modellenmiş ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan nanokompozit kirişlerin titreşimi için aşağıdaki iki denklem takımı kurulur:

$$\left(-T_0+\frac{I_2\omega^2}{L}\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2LI_0\omega^2(-D_{11}n^2\pi^2+L^2I_2\omega^2-A_{55}l_d^2n^2\pi^2)}{-D_{11}n^4\pi^4+L^4I_0\omega^2+L^2n^2\pi^2I_2\omega^2-A_{55}l_d^2n^4\pi^4}\right)W_0$$
$$+\left(-\frac{I_2\omega^2}{L}\right.$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nLI_0\omega^2(-D_{11}n^2\pi^2+L^2I_2\omega^2-A_{55}l_d^2n^2\pi^2)}{-D_{11}n^4\pi^4+L^4I_0\omega^2+L^2n^2\pi^2I_2\omega^2-A_{55}l_d^2n^4\pi^4}\right)W_L=0 \quad (3.213)$$

$$\left(-\frac{I_2\omega^2}{L}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nLI_0\omega^2(-D_{11}n^2\pi^2+L^2I_2\omega^2-A_{55}l_d^2n^2\pi^2)}{-D_{11}n^4\pi^4+L^4I_0\omega^2+L^2n^2\pi^2I_2\omega^2-A_{55}l_d^2n^4\pi^4}\right)W_0$$
$$+\left(-T_L+\frac{I_2\omega^2}{L}\right. \quad (3.214)$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2LI_0\omega^2(-D_{11}n^2\pi^2+L^2I_2\omega^2-A_{55}l_d^2n^2\pi^2)}{-D_{11}n^4\pi^4+L^4I_0\omega^2+L^2n^2\pi^2I_2\omega^2-A_{55}l_d^2n^4\pi^4}\right)W_L=0$$

Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan titreşim problemi için verilen yukarıdaki iki denklem takımı ile aşağıdaki özdeğer problemi oluşturulur:

$$\begin{bmatrix}\Gamma_{11}^{DGÇT-TT} & \Gamma_{12}^{DGÇT-TT}\\ \Gamma_{21}^{DGÇT-TT} & \Gamma_{22}^{DGÇT-TT}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_0\\ W_L\end{bmatrix}=0 \quad (3.215)$$

Bu özdeğer problemindeki katsayılar matrisinin elemanları aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Gamma_{11}^{DGÇT-TT} = -T_0 + \frac{I_2\omega^2}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2LI_0\omega^2(-D_{11}n^2\pi^2 + L^2I_2\omega^2 - A_{55}l_d^2n^2\pi^2)}{-D_{11}n^4\pi^4 + L^4I_0\omega^2 + L^2n^2\pi^2I_2\omega^2 - A_{55}l_d^2n^4\pi^4} \tag{3.216}$$

$$\Gamma_{12}^{DGÇT-TT} = -\frac{I_2\omega^2}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^nLI_0\omega^2(-D_{11}n^2\pi^2 + L^2I_2\omega^2 - A_{55}l_d^2n^2\pi^2)}{-D_{11}n^4\pi^4 + L^4I_0\omega^2 + L^2n^2\pi^2I_2\omega^2 - A_{55}l_d^2n^4\pi^4} \tag{3.217}$$

$$\Gamma_{21}^{DGÇT-TT} = -\frac{I_2\omega^2}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^nLI_0\omega^2(-D_{11}n^2\pi^2 + L^2I_2\omega^2 - A_{55}l_d^2n^2\pi^2)}{-D_{11}n^4\pi^4 + L^4I_0\omega^2 + L^2n^2\pi^2I_2\omega^2 - A_{55}l_d^2n^4\pi^4} \tag{3.218}$$

$$\Gamma_{22}^{DGÇT-TT} = -T_L + \frac{I_2\omega^2}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2LI_0\omega^2(-D_{11}n^2\pi^2 + L^2I_2\omega^2 - A_{55}l_d^2n^2\pi^2)}{-D_{11}n^4\pi^4 + L^4I_0\omega^2 + L^2n^2\pi^2I_2\omega^2 - A_{55}l_d^2n^4\pi^4} \tag{3.219}$$

Dönme yayı ile modellenmiş kompozit nanokirişin $x = 0$ ve $x = L$ noktaları için aşağıdaki denklemler kurulur:

$$-D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A_{55}l_d^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=0} = -R_0\frac{dW_0}{dx} \tag{3.220}$$

$$-D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A_{55}l_d^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=L} = -R_L\frac{dW_L}{dx} \tag{3.221}$$

Denklemler (3.220) ve (3.221) ile dönel yaylarla modellenmiş ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan nanokompozit kirişlerin titreşimi için aşağıdaki iki denklem sistemi elde edilir:

$$\left(D_{11} + A_{55} l_d^2 \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2Ln^2\pi^2 (D_{11} + A_{55} l_d^2) R_0}{D_{11} n^4 \pi^4 - L^2 (L^2 I_0 + n^2 \pi^2 I_2) \omega^2 + A_{55} l_d^2 n^4 \pi^4} \right) W_0'' \tag{3.222}$$

$$+ \left(- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n Ln^2\pi^2 (D_{11} + A_{55} l_d^2) R_0}{D_{11} n^4 \pi^4 - L^2 (L^2 I_0 + n^2 \pi^2 I_2) \omega^2 + A_{55} l_d^2 n^4 \pi^4} \right) W_L'' = 0$$

$$\left(- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n Ln^2\pi^2 (D_{11} + A_{55} l_d^2) R_L}{D_{11} n^4 \pi^4 - L^2 (L^2 I_0 + n^2 \pi^2 I_2) \omega^2 + A_{55} l_d^2 n^4 \pi^4} \right) W_0''$$

$$+ \left(D_{11} + A_{55} l_d^2 \right. \tag{3.223}$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2Ln^2\pi^2 (D_{11} + A_{55} l_d^2) R_L}{D_{11} n^4 \pi^4 - L^2 (L^2 I_0 + n^2 \pi^2 I_2) \omega^2 + A_{55} l_d^2 n^4 \pi^4} \right) W_L'' = 0$$

Yukarıdaki iki denklem sistemi ile aşağıdaki özdeğer problemi kurulur:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^{DGÇT-RR} & \Gamma_{12}^{DGÇT-RR} \\ \Gamma_{21}^{DGÇT-RR} & \Gamma_{22}^{DGÇT-RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0'' \\ W_L'' \end{bmatrix} = 0 \tag{3.224}$$

Bu özdeğer problemindeki katsayılar matrisinin elemanları aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Gamma_{11}^{DGÇT-RR} = D_{11} + A_{55} l_d^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2Ln^2\pi^2 (D_{11} + A_{55} l_d^2) R_0}{D_{11} n^4 \pi^4 - L^2 (L^2 I_0 + n^2 \pi^2 I_2) \omega^2 + A_{55} l_d^2 n^4 \pi^4} \tag{3.225}$$

$$\Gamma_{12}^{DGÇT-RR} = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n Ln^2\pi^2 (D_{11} + A_{55} l_d^2) R_L}{D_{11} n^4 \pi^4 - L^2 (L^2 I_0 + n^2 \pi^2 I_2) \omega^2 + A_{55} l_d^2 n^4 \pi^4} \tag{3.226}$$

$$\Gamma_{21}^{DGÇT-RR} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L n^2 \pi^2 (D_{11} + A_{55} l_d^2) R_L}{D_{11} n^4 \pi^4 - L^2 (L^2 I_0 + n^2 \pi^2 I_2)\omega^2 + A_{55} l_d^2 n^4 \pi^4} \tag{3.227}$$

$$\Gamma_{22}^{DGÇT-RR} = D_{11} + A_{55} l_d^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 L n^2 \pi^2 (D_{11} + A_{55} l_d^2) R_L}{D_{11} n^4 \pi^4 - L^2 (L^2 I_0 + n^2 \pi^2 I_2)\omega^2 + A_{55} l_d^2 n^4 \pi^4} \tag{3.228}$$

3.10. Kompozit Euler-Bernoulli Nanokirişlerinin Değiştirilmiş Gerilme Çifti Teorisine Dayanan Burkulma Denkleminin Çözümü

Bu bölümde, kompozit nanokirişlerin Denklem (2.176)'daki gibi elde edilen yönetici denklemi çözülecektir. Bu denklem hem malzeme uzunluk ölçek parametresinin hem de Winkler zemininin etkisini içermektedir.

3.10.1. Kompozit Euler-Bernoulli nanokirişlerinin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan statik çökme denklemi

Bu alt bölümde, değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan ve P eksenel yükü etkisindeki kompozit nanokirişlerin burkulma problemi için bilinmeyen Fourier katsayısı iki farklı elastik mesnetlenme koşulu için ve Winkler zemini etkisinde bulunacaktır. $W(x)$ fonksiyonunun kendisi ve gerekli olan türevleri Denklem (2.176)'da yerine yazılırsa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[(D_{11} + A_{55} l_d^2) \Bigg(-\frac{n\pi}{L} \Bigg(\frac{2((-1)^n W_L'' - W_0'')}{L} - \frac{n^2\pi^2}{L^2} \Bigg(\frac{2((-1)^n W_L - W_0)}{L} + \frac{n\pi}{L} B_n \Bigg) \Bigg) \Bigg) + (P) \Bigg(-\frac{n\pi}{L} \Bigg(\frac{2((-1)^n W_L - W_0)}{L} + \frac{n\pi}{L} B_n \Bigg) \Bigg) + (c_w) B_n \Bigg] sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0 \tag{3.229}$$

elde edilir. Bu eşitliğin çözülmesi ile Fourier katsayıları $\overline{B_n^{DGÇT-T}}$ ve $\overline{B_n^{DGÇT-RR}}$ değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ile ele alınan burkulma problemi için aşağıdaki gibi hesaplanırlar:

$$\overline{B_n^{DGÇT-TT}} = \frac{2n\pi(-L^2P + n^2\pi^2(D_{11} + A_{55}l_d^2))(W_0 - (-1)^n W_L)}{-L^2n^2P\pi^2 + n^4\pi^4(D_{11} + A_{55}l_d^2) + L^4c_w} \tag{3.230}$$

$$\overline{B_n^{DGÇT-RR}} = -\frac{2L^2n\pi(D_{11} + A_{55}l_d^2)(W_0'' - (-1)^n W_L'')}{-L^2n^2P\pi^2 + n^4\pi^4(D_{11} + A_{55}l_d^2) + L^4c_w} \tag{3.231}$$

$\overline{B_n^{DGÇT-TT}}$ ve $\overline{B_n^{DGÇT-RR}}$ ile değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan çökmeyi hesaplayan eşitlikler aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\overline{W(x)^{DGÇT-TT}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n\pi(-L^2P + n^2\pi^2(D_{11} + A_{55}l_d^2))(W_0 - (-1)^n W_L)}{-L^2n^2P\pi^2 + n^4\pi^4(D_{11} + A_{55}l_d^2) + L^4c_w}\right) sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{3.232}$$

$$\overline{W(x)^{DGÇT-RR}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2L^2n\pi(D_{11} + A_{55}l_d^2)(W_0'' - (-1)^n W_L'')}{-L^2n^2P\pi^2 + n^4\pi^4(D_{11} + A_{55}l_d^2) + L^4c_w}\right) sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{3.233}$$

3.10.2. Kompozit Euler-Bernoulli nanokirişlerinin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan özdeğer problemi

Bu alt başlıkta, kompozit Euler-Bernoulli nanokirişlerinin burkulması için değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan özdeğer problemleri elde edilecektir. Çökme yayı ile modellenmiş kompozit nanokirişin $x = 0$ ve $x = L$ noktaları için aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$-D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - A_{55}l_d^2\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - P\frac{dW}{dx}|_{x=0} = T_0W_0 \tag{3.234}$$

$$-D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - A_{55}l_d^2\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - P\frac{dW}{dx}|_{x=L} = -T_LW_L \tag{3.235}$$

Denklemler (3.234) ve (3.235) ile çökme yaylarıyla modellenmiş ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan nanokompozit kirişlerin burkulması için aşağıdaki iki denklem takımı kurulur:

$$\left(-T_0+\frac{P}{L}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L(L^2P-n^2\pi^2(D_{11}+A_{55}l_d^2))c_w}{-L^2n^2P\pi^2+n^4\pi^4(D_{11}+A_{55}l_d^2)+L^4c_w}\right)W_0$$
$$+\left(-\frac{P}{L}\right.$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nL(L^2P-n^2\pi^2(D_{11}+A_{55}l_d^2))c_w}{-L^2n^2P\pi^2+n^4\pi^4(D_{11}+A_{55}l_d^2)+L^4c_w}\right)W_L=0 \quad (3.236)$$

$$\left(-\frac{P}{L}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nL(L^2P-n^2\pi^2(D_{11}+A_{55}l_d^2))c_w}{-L^2n^2P\pi^2+n^4\pi^4(D_{11}+A_{55}l_d^2)+L^4c_w}\right)W_0$$
$$+\left(-T_L+\frac{P}{L}\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L(L^2P-n^2\pi^2(D_{11}+A_{55}l_d^2))c_w}{-L^2n^2P\pi^2+n^4\pi^4(D_{11}+A_{55}l_d^2)+L^4c_w}\right)W_L=0 \quad (3.237)$$

Burkulma problemi için verilen iki denklem takımı aşağıdaki gibi bir özdeğer problemi olarak yazılabilir:

$$\begin{bmatrix}\overline{\Gamma_{11}^{DGÇT-TT}} & \overline{\Gamma_{12}^{DGÇT-TT}}\\ \overline{\Gamma_{21}^{DGÇT-TT}} & \overline{\Gamma_{22}^{DGÇT-TT}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_0\\W_L\end{bmatrix}=0 \quad (3.238)$$

Bu özdeğer problemindeki katsayılar matrisinin elemanları aşağıdaki gibidir:

$$\overline{\Gamma_{11}^{DGÇT-TT}}=-T_0+\frac{P}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L(L^2P-n^2\pi^2(D_{11}+A_{55}l_d^2))c_w}{-L^2n^2P\pi^2+n^4\pi^4(D_{11}+A_{55}l_d^2)+L^4c_w} \quad (3.239)$$

$$\overline{\Gamma_{12}^{DGÇT-TT}} = -\frac{P}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L(L^2P - n^2\pi^2(D_{11} + A_{55}l_d^2))c_w}{-L^2n^2P\pi^2 + n^4\pi^4(D_{11} + A_{55}l_d^2) + L^4c_w} \tag{3.240}$$

$$\overline{\Gamma_{21}^{DGÇT-TT}} = -\frac{P}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L(L^2P - n^2\pi^2(D_{11} + A_{55}l_d^2))c_w}{-L^2n^2P\pi^2 + n^4\pi^4(D_{11} + A_{55}l_d^2) + L^4c_w} \tag{3.241}$$

$$\overline{\Gamma_{22}^{DGÇT-TT}} = -T_L + \frac{P}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L(L^2P - n^2\pi^2(D_{11} + A_{55}l_d^2))c_w}{-L^2n^2P\pi^2 + n^4\pi^4(D_{11} + A_{55}l_d^2) + L^4c_w} \tag{3.242}$$

Dönel yaylar ile modellenmiş ve DGÇT'ne dayanan kompozit nanokirişin $x = 0$ ve $x = L$ noktaları için aşağıdaki denklemler kurulur:

$$-D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A_{55}l_d^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=0} = -R_0\frac{dW_0}{dx} \tag{3.243}$$

$$-D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A_{55}l_d^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=L} = -R_L\frac{dW_L}{dx} \tag{3.244}$$

Denklemler (3.243) ve (3.244) ile dönel yaylar ile modellenmiş ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan nanokompozit kirişlerin burkulması için aşağıdaki iki denklem takımı kurulur:

$$\begin{aligned}\left(D_{11} + A_{55}l_d^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Ln^2\pi^2(D_{11} + A_{55}l_d^2)R_0}{-L^2n^2P\pi^2 + n^4\pi^4(D_{11} + A_{55}l_d^2) + L^4c_w}\right)W_0'' \\ + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n Ln^2\pi^2(D_{11} + A_{55}l_d^2)R_0}{-L^2n^2P\pi^2 + n^4\pi^4(D_{11} + A_{55}l_d^2) + L^4c_w}\right)W_L'' \\ = 0\end{aligned} \tag{3.245}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n Ln^2\pi^2(D_{11}+A_{55}l_d^2)R_L}{-L^2n^2P\pi^2+n^4\pi^4(D_{11}+A_{55}l_d^2)+L^4c_w}\right)W_0''$$

$$+\left(D_{11}+A_{55}l_d^2\right. \tag{3.246}$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Ln^2\pi^2(D_{11}+A_{55}l_d^2)R_L}{-L^2n^2P\pi^2+n^4\pi^4(D_{11}+A_{55}l_d^2)+L^4c_w}\right)W_L''=0$$

Yukarıdaki iki denklem takımı ile aşağıdaki gibi bir özdeğer problemi ile ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix}\overline{\Gamma_{11}^{DGÇT-RR}} & \overline{\Gamma_{12}^{DGÇT-RR}}\\ \overline{\Gamma_{21}^{DGÇT-RR}} & \overline{\Gamma_{22}^{DGÇT-RR}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_0''\\ W_L''\end{bmatrix}=0 \tag{3.247}$$

Bu özdeğer problemindeki katsayılar matrisinin elemanları ise aşağıdaki gibi yazılır:

$$\overline{\Gamma_{11}^{DGÇT-RR}}=D_{11}+A_{55}l_d^2$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Ln^2\pi^2(D_{11}+A_{55}l_d^2)R_0}{-L^2n^2P\pi^2+n^4\pi^4(D_{11}+A_{55}l_d^2)+L^4c_w} \tag{3.248}$$

$$\overline{\Gamma_{12}^{DGÇT-RR}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n Ln^2\pi^2(D_{11}+A_{55}l_d^2)R_0}{-L^2n^2P\pi^2+n^4\pi^4(D_{11}+A_{55}l_d^2)+L^4c_w} \tag{3.249}$$

$$\overline{\Gamma_{21}^{DGÇT-RR}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n Ln^2\pi^2(D_{11}+A_{55}l_d^2)R_L}{-L^2n^2P\pi^2+n^4\pi^4(D_{11}+A_{55}l_d^2)+L^4c_w} \tag{3.250}$$

$$\overline{\Gamma_{22}^{DGÇT-RR}}=D_{11}+A_{55}l_d^2$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Ln^2\pi^2(D_{11}+A_{55}l_d^2)R_L}{-L^2n^2P\pi^2+n^4\pi^4(D_{11}+A_{55}l_d^2)+L^4c_w} \tag{3.251}$$

3.11. Kompozit Nanotüplerin Yerel Olmayan Şekil Değiştirme Değişimi Teorisine Dayanan Burulmalı Titreşim Denkleminin Çözümü

Bu bölümde, yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisi temelinde kompozit nanotüpün Denklem (2.192)'deki gibi elde edilen yönetici denklemi, sadece x'e bağlı olarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned}\mu^J \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} - \mu^J l_s^2 \frac{d^4\varphi(x)}{dx^4} \\ + (e_0 a)^2 \left(-\omega^2 \rho^J \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + k_e \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \right) - k_e \varphi(x) \\ + \omega^2 \rho^J \varphi(x) = 0\end{aligned} \tag{3.252}$$

Yukarıdaki titreşim denklemi hem Aifantis (1999) tarafından sunulan şekil değiştirme değişimi teorisini hem de Eringen (1983) tarafından sunulan yerel olmayan elastisite teorisini içerir. Denklemde, yerel olmayan parametreyi ihmal edersek Aifantis (1999) tarafından önerilen şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan kompozit nanotüpün burulmalı titreşim denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mu^J \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} - \mu^J l_s^2 \frac{d^4\varphi(x)}{dx^4} - k_e \varphi(x) + \omega^2 \rho^J \varphi(x) = 0 \tag{3.253}$$

3.11.1. Kompozit nanotüplerin yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan statik burulma denklemi

Bu bölümde, kompozit nanotüplerin yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan Fourier katsayısı bulunacaktır. $\varphi(x)$ fonksiyonunun kendisinin, ikinci ve dördüncü türevlerinin Denklem (3.252)'de yerine yazılmasıyla aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[(-\mu^J l_s^2)\Bigg(-\frac{n\pi}{L}\Bigg(\frac{2((-1)^n\varphi_L'' - \varphi_0'')}{L} - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\Bigg(\frac{2((-1)^n\varphi_L - \varphi_0)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\Bigg)\Bigg)\Bigg) - (\mu^J - (e_0a)^2\omega^2\rho^J) + (e_0a)^2k_e)\Bigg(-\frac{n\pi}{L}\Bigg(\frac{2((-1)^n\varphi_L - \varphi_0)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\Bigg)\Bigg) + (\omega^2\rho^J - k_e)B_n\Bigg]sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0 \tag{3.254}$$

Bu eşitliğin çözülmesi ile Fourier katsayısı $B_n^{YOŞDDT}$ yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisi ile ele alınan burulma titreşimi için aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$B_n^{YOŞDDT} = \frac{2n\pi(L^2(\mu^J + (e_0a)^2(k_e - \omega^2\rho^J)) + \mu^J n^2\pi^2 l_s^2)(\varphi_0 - (-1)^n\varphi_L)}{L^2(\mu^J n^2\pi^2 + (L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2)(k_e - \omega^2\rho^J)) + \mu^J n^4\pi^4 l_s^2} \tag{3.255}$$

$B_n^{YOŞDDT}$'nin hesaplanmasının ardından yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan burulma açısını hesaplayan eşitlik aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\varphi(x)^{YOŞDDT} = \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\frac{2n\pi(L^2(\mu^J + (e_0a)^2(k_e - \omega^2\rho^J)) + \mu^J n^2\pi^2 l_s^2)\varphi_0}{L^2(\mu^J n^2\pi^2 + (L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2)(k_e - \omega^2\rho^J)) + \mu^J n^4\pi^4 l_s^2} - \frac{2n\pi(L^2(\mu^J + (e_0a)^2(k_e - \omega^2\rho^J)) + \mu^J n^2\pi^2 l_s^2)(-1)^n\varphi_L}{L^2(\mu^J n^2\pi^2 + (L^2 + n^2\pi^2(e_0a)^2)(k_e - \omega^2\rho^J)) + \mu^J n^4\pi^4 l_s^2}\Bigg)sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{3.256}$$

3.11.2. Kompozit nanotüplerin yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan özdeğer problemi

Bu alt başlıkta, kompozit nanotüplerin burulma titreşimi için yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan özdeğer problemi elde edilecektir. Yerel olmayan

şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan tork ifadesi ile kompozit nanotüpün $x = 0$ ve $x = L$ noktaları için aşağıdaki eşitlikler kurulur:

$$\mu^J \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} - \mu^J l_s^2 \frac{\partial^3\theta(x,t)}{\partial x^3} + (e_0a)^2\left(\rho^J \frac{\partial^3\theta(x,t)}{\partial x\partial t^2} + k_e \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)|_{x=0} = K_0\varphi_0 \tag{3.257}$$

$$\mu^J \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} - \mu^J l_s^2 \frac{\partial^3\theta(x,t)}{\partial x^3} + (e_0a)^2\left(\rho^J \frac{\partial^3\theta(x,t)}{\partial x\partial t^2} + k_e \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)|_{x=L} = -K_L\varphi_L \tag{3.258}$$

Denklemler (3.257) ve (3.258)'in çözülmesi ile aşağıdaki iki denklem takımı türetilir:

$$\begin{aligned}&\left(-K_0 + \frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L} - \frac{(e_0a)^2k_e}{L} - \frac{\mu^J}{L}\right.\\&\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L(k_e - \rho^J\omega^2)(L^2(e_0a)^2(k_e - \rho^J\omega^2) + \mu^J\Xi_{19})}{k_eL^2\Xi_3 - L^2\Xi_3\rho^J\omega^2 + \mu^Jn^2\pi^2\Xi_{19}}\right)\varphi_0\\&+\left(-\frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L} + \frac{(e_0a)^2k_e}{L} + \frac{\mu^J}{L}\right.\\&\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^nL(k_e - \rho^J\omega^2)(L^2(e_0a)^2(k_e - \rho^J\omega^2) + \mu^J\Xi_{19})}{k_eL^2\Xi_3 - L^2\Xi_3\rho^J\omega^2 + \mu^Jn^2\pi^2\Xi_{19}}\right)\varphi_L = 0\end{aligned} \tag{3.259}$$

$$\left(-\frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L}+\frac{(e_0a)^2k_e}{L}+\frac{\mu^J}{L}\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^nL(k_e-\rho^J\omega^2)(L^2(e_0a)^2(k_e-\rho^J\omega^2)+\mu^J\Xi_{19})}{k_eL^2\Xi_3-L^2\Xi_3\rho^J\omega^2+\mu^Jn^2\pi^2\Xi_{19}}\right)\varphi_0$$
$$+\left(-K_L+\frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L}-\frac{(e_0a)^2k_e}{L}-\frac{\mu^J}{L}\right. \tag{3.260}$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L(k_e-\rho^J\omega^2)(L^2(e_0a)^2(k_e-\rho^J\omega^2)+\mu^J\Xi_{19})}{k_eL^2\Xi_3-L^2\Xi_3\rho^J\omega^2+\mu^Jn^2\pi^2\Xi_{19}}\right)\varphi_L=0$$

Burada, Ξ_{19} şu şekilde tanımlanır:

$$\Xi_{19}=L^2+n^2\pi^2l_s^2 \tag{3.261}$$

Denklemler (2.259) ve (2.260)'da verilen denklem sistemleri ile aşağıdaki gibi bir özdeğer problem kurulur:

$$\begin{bmatrix}Z_{11}^{YOŞDDT} & Z_{12}^{YOŞDDT}\\ Z_{21}^{YOŞDDT} & Z_{22}^{YOŞDDT}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_0\\ \varphi_L\end{bmatrix}=0 \tag{3.262}$$

Kompozit nanotüpün yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan titreşim frekanslarını bulmak için katsayılar matrisinin determinatını sıfıra eşitleyip özdeğerlerini elde etmemiz gerekir. Katsayılar matrisinin elemanları $Z_{11}^{YOŞDDT}$, $Z_{12}^{YOŞDDT}$, $Z_{21}^{YOŞDDT}$, $Z_{22}^{YOŞDDT}$ aşağıdaki gibi yazılır:

$$Z_{11}^{YOŞDDT}=-K_0+\frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L}-\frac{(e_0a)^2k_e}{L}-\frac{\mu^J}{L}$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L(k_e-\rho^J\omega^2)(L^2(e_0a)^2(k_e-\rho^J\omega^2)+\mu^J\Xi_{19})}{k_eL^2\Xi_3-L^2\Xi_3\rho^J\omega^2+\mu^Jn^2\pi^2\Xi_{19}} \tag{3.263}$$

$$Z_{12}^{YOŞDDT} = -\frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L} + \frac{(e_0a)^2k_e}{L} + \frac{\mu^J}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L(k_e - \rho^J\omega^2)(L^2(e_0a)^2(k_e - \rho^J\omega^2) + \mu^J\Xi_{19})}{k_eL^2\Xi_3 - L^2\Xi_3\rho^J\omega^2 + \mu^Jn^2\pi^2\Xi_{19}} \quad (3.264)$$

$$Z_{21}^{YOŞDDT} = -\frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L} + \frac{(e_0a)^2k_e}{L} + \frac{\mu^J}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L(k_e - \rho^J\omega^2)(L^2(e_0a)^2(k_e - \rho^J\omega^2) + \mu^J\Xi_{19})}{k_eL^2\Xi_3 - L^2\Xi_3\rho^J\omega^2 + \mu^Jn^2\pi^2\Xi_{19}} \quad (3.265)$$

$$Z_{22}^{YOŞDDT} = -K_L + \frac{(e_0a)^2\rho^J\omega^2}{L} - \frac{(e_0a)^2k_e}{L} - \frac{\mu^J}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L(k_e - \rho^J\omega^2)(L^2(e_0a)^2(k_e - \rho^J\omega^2) + \mu^J\Xi_{19})}{k_eL^2\Xi_3 - L^2\Xi_3\rho^J\omega^2 + \mu^Jn^2\pi^2\Xi_{19}} \quad (3.266)$$

3.12. Dairesel Olmayan Nanoçubukların Yerel Olmayan Şekil Değiştirme Değişimi Teorisine Dayanan Burulmalı Titreşim Denkleminin Çözümü

Bu bölümde, dairesel olmayan nanoçubukların yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan burulmalı titreşim denklemi $\theta(x,t) = \varphi(x)e^{i\omega t}$ ile yeniden yazılırsa:

$$-\omega^2\rho I_\xi \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \omega^2 I_A\varphi(x) - k_e\varphi(x) + (e_0a)^2\left(-\omega^2 I_A\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \omega^2\rho I_\xi\frac{d^4\varphi(x)}{dx^4} + k_e\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\right) + I_B\mu\left(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} - l_s^2\frac{d^4\varphi(x)}{dx^4}\right) = 0 \quad (3.267)$$

elde edilir. Yukarıdaki titreşim denklemi dairesel olmayan kesitlerin burulmalı titreşimine çarpılma fonksiyonlarını da dâhil eder. Denklemde yerel olmayan parametre ihmal edilirse Aifantis (1999) tarafından önerilen şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan dairesel olmayan nanoçubukların burulmalı titreşim denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$-\omega^2\rho I_\xi \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \omega^2 I_A \varphi(x) - k_e\varphi(x) + I_B\mu\left(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} - l_s^2\frac{d^4\varphi(x)}{dx^4}\right) = 0 \tag{3.268}$$

3.12.1. Dairesel olmayan nanoçubukların yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan statik denklemi

Bu bölümde, dairesel olmayan nanoçubukların yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan Fourier katsayısı bulunacaktır. Denklem (3.267)'de $\varphi(x)$ fonksiyonunun kendisi ve gerekli olan türevleri yerine yazıldığında aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[&\left((e_0a)^2\omega^2\rho I_\xi - I_B\mu l_s^2\right)\left(-\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2((-1)^n\varphi_L'' - \varphi_0'')}{L} - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\frac{2((-1)^n\varphi_L - \varphi_0)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\right)\right)\right)\\ &- \left(-\omega^2\rho I_\xi - (e_0a)^2\omega^2 I_A + (e_0a)^2 k_e + I_B\mu\right)\left(-\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2((-1)^n\varphi_L - \varphi_0)}{L} + \frac{n\pi}{L}B_n\right)\right)\\ &+ (\omega^2 I_A - k_e)B_n\Bigg] sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0\end{aligned} \tag{3.269}$$

Bu eşitliğin çözülmesi ile Fourier katsayısı $\overline{B_n^{YOŞDDT}}$ yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisi ile ele alınan dairesel olmayan nanoçubuklar için aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\overline{B_n^{YOŞDDT}} = \frac{2n\pi(-k_e L^2(e_0a)^2 + L^2(e_0a)^2\omega^2 I_A - \Xi_{19}\mu I_B + \Xi_3\rho\omega^2 I_\xi)\varphi_0}{L^2\Xi_3\omega^2 \mathrm{I}_A - \mu I_B n^2\pi^2\Xi_{19} - \Xi_3(k_e L^2 - n^2\pi^2\rho\omega^2 I_\xi)} - \frac{2(-1)^n n\pi(-k_e L^2(e_0a)^2 + L^2(e_0a)^2\omega^2 I_A - \Xi_{19}\mu I_B + \Xi_3\rho\omega^2 I_\xi)\varphi_L}{L^2\Xi_3\omega^2 \mathrm{I}_A - \mu I_B n^2\pi^2\Xi_{19} - \Xi_3(k_e L^2 - n^2\pi^2\rho\omega^2 I_\xi)} \quad (3.270)$$

$\overline{B_n^{YOŞDDT}}$'nin hesaplanmasının ardından dairesel olmayan kesitlerin yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan burulma açısını hesaplayan eşitlik aşağıdaki gbi elde edilir:

$$\overline{\varphi(x)^{YOŞDDT}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n\pi(L^2(e_0a)^2(-k_e + \omega^2 I_A) - \Xi_{19}\mu I_B + \Xi_3\rho\omega^2 I_\xi)\varphi_0}{L^2\Xi_3\omega^2 \mathrm{I}_A - \mu I_B n^2\pi^2\Xi_{19} - \Xi_3(k_e L^2 - n^2\pi^2\rho\omega^2 I_\xi)} - \frac{2(-1)^n n\pi(L^2(e_0a)^2(-k_e + \omega^2 I_A) - \Xi_{19}\mu I_B + \Xi_3\rho\omega^2 I_\xi)\varphi_L}{L^2\Xi_3\omega^2 \mathrm{I}_A - \mu I_B n^2\pi^2\Xi_{19} - \Xi_3(k_e L^2 - n^2\pi^2\rho\omega^2 I_\xi)}\right) sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.271)$$

3.11.2. Dairesel olmayan nanoçubukların yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan özdeğer problemi

Bu alt başlıkta dairesel olmayan nanoçubukların çarpılma fonksiyonlarını içeren burulmalı titreşimi için yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan özdeğer problemi elde edilecektir. Yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan tork ifadesi ile dairesel olmayan nanoçubuğun $x = 0$ ve $x = L$ noktaları için aşağıdaki kuvvet sınır koşulları yazılır:

$$(e_0a)^2\left(I_A\frac{\partial^3\theta}{\partial x\partial t^2} - \rho I_\xi\frac{\partial^5\theta}{\partial x^3\partial t^2} + k_e\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + I_B\mu\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} - l_s^2\frac{\partial^3\theta}{\partial x^3}\right)|_{x=0} = K_0\varphi_0 \quad (3.272)$$

$$(e_0a)^2\left(I_A\frac{\partial^3\theta}{\partial x\partial t^2} - \rho I_\xi\frac{\partial^5\theta}{\partial x^3\partial t^2} + k_e\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + I_B\mu\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} - l_s^2\frac{\partial^3\theta}{\partial x^3}\right)|_{x=L} = -K_L\varphi_L \quad (3.273)$$

Denklemler (3.272) ve (3.273) ile kurulan iki denklem takımından aşağıdaki özdeğer problemi oluşturulur:

$$\begin{bmatrix} \overline{Z_{11}^{YOŞDDT}} & \overline{Z_{12}^{YOŞDDT}} \\ \overline{Z_{21}^{YOŞDDT}} & \overline{Z_{22}^{YOŞDDT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_L \end{bmatrix} = 0 \tag{3.274}$$

Dairesel olmayan nanoçubukların yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan titreşim frekanslarını bulmak için, yukarıdaki özdeğer probleminde bulunan katsayılar matrisinin determinatını sıfıra eşitleyip özdeğerlerini elde etmemiz gerekir. Katsayılar matrisinin elemanları $\overline{Z_{11}^{YOŞDDT}}$, $\overline{Z_{12}^{YOŞDDT}}$, $\overline{Z_{21}^{YOŞDDT}}$, $\overline{Z_{22}^{YOŞDDT}}$ aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} &\overline{Z_{11}^{YOŞDDT}} \\ &= -K_0 + \frac{(e_0a)^2\omega^2 I_A}{L} - \frac{k_e(e_0a)^2}{L} - \frac{\mu I_B}{L} \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L(k_e - \omega^2 I_A)(L^2(e_0a)^2(k_e - \omega^2 I_A) + \mu\Xi_{19} I_B - n^2\pi^2\rho\omega^2 I_\xi)}{-L^2\Xi_3\omega^2 I_A + \mu n^2\pi^2\Xi_{19} I_B + \Xi_3(k_e L^2 - n^2\pi^2\rho\omega^2 I_\xi)} \end{aligned} \tag{3.275}$$

$$\overline{Z_{12}^{YOŞDDT}} = -\frac{(e_0a)^2\omega^2 I_A}{L} + \frac{k_e(e_0a)^2}{L} + \frac{\mu I_B}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L(k_e - \omega^2 I_A)(L^2(e_0a)^2(k_e - \omega^2 I_A) + \mu\Xi_{19} I_B - n^2\pi^2\rho\omega^2 I_\xi)}{-L^2\Xi_3\omega^2 I_A + \mu n^2\pi^2\Xi_{19} I_B + \Xi_3(k_e L^2 - n^2\pi^2\rho\omega^2 I_\xi)} \tag{3.276}$$

$$\overline{Z_{21}^{YOŞDDT}} = -\frac{(e_0a)^2\omega^2 I_A}{L} + \frac{k_e(e_0a)^2}{L} + \frac{\mu I_B}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L(k_e - \omega^2 I_A)(L^2(e_0a)^2(k_e - \omega^2 I_A) + \mu\Xi_{19} I_B - n^2\pi^2\rho\omega^2 I_\xi)}{-L^2\Xi_3\omega^2 I_A + \mu n^2\pi^2\Xi_{19} I_B + \Xi_3(k_e L^2 - n^2\pi^2\rho\omega^2 I_\xi)} \tag{3.277}$$

$$\overline{Z_{22}^{YOŞDDT}} = -K_0 + \frac{(e_0a)^2\omega^2 I_A}{L} - \frac{k_e(e_0a)^2}{L} - \frac{\mu I_B}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L(k_e - \omega^2 I_A)(L^2(e_0a)^2(k_e - \omega^2 I_A) + \mu\Xi_{19} I_B - n^2\pi^2\rho\omega^2 I_\xi)}{-L^2\Xi_3\omega^2 I_A + \mu n^2\pi^2\Xi_{19} I_B + \Xi_3(k_e L^2 - n^2\pi^2\rho\omega^2 I_\xi)} \tag{3.278}$$

3.13. Kompozit Nanotüplerin Şekil Değiştirme Değişimi Teorisine Dayanan Burulmalı Titreşim Denkleminin Çözümü

Bu bölümde, kompozit nanotüplerin şekil değiştirme değişimi teorisine (Lam) dayanan burulmalı titreşim denklemi $\theta(x,t) = \varphi(x)e^{i\omega t}$ ile yeniden yazılırsa:

$$-\left(\frac{8}{15}\mu^J l_1^2 + \frac{1}{4}\mu^J l_d^2\right)\frac{d^4\varphi(x)}{dx^4} + (\mu^J + 3\mu^A l_d^2)\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \omega^2\rho^J\varphi(x) = 0 \tag{3.279}$$

elde edilir. Yukarıdaki titreşim denklemi kompozit nanotüplerin burulmalı titreşimine iki malzeme uzunluk ölçek parametresi dâhil eder. Denklemde l_1 ihmal edilirse, değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan kompozit nanotüplerin burulmalı titreşim denklemi elde edilir.

3.13.1. Kompozit nanotüplerin şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan statik denklemi

Bu bölümde, kompozit nanotüplerin şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan Fourier katsayısı bulunacaktır. Denklem (3.279)'da $\varphi(x)$ fonksiyonunun kendisi ve gerekli olan türevleri yerine yazıldığında aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\left(-\frac{8}{15}\mu^{J}l_1^2+\frac{1}{4}\mu^{J}l_d^2\right)\left(-\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2((-1)^n\varphi_L''-\varphi_0'')}{L}-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\frac{2((-1)^n\varphi_L-\varphi_0)}{L}+\frac{n\pi}{L}B_n\right)\right)\right)+(\mu^{J}+3\mu^{A}l_d^2)\left(-\frac{n\pi}{L}\left(\frac{2((-1)^n\varphi_L-\varphi_0)}{L}+\frac{n\pi}{L}B_n\right)\right)+(\omega^2\rho^{J})B_n\Bigg]sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)=0 \tag{3.280}$$

Bu eşitliğin çözülmesi ile Fourier katsayısı B_n^{SDDT} şekil değiştirme değişimi teorisi ile ele alınan kompozit nanotüpler için aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$B_n^{SDDT}=\frac{2n\pi(180L^2\mu^{A}l_d^2+\mu^{J}(60L^2+n^2\pi^2\Xi_{20}))(\varphi_0-(-1)^n\varphi_L)}{-60L^2(L^2\rho^{J}\omega^2-3\mu^{A}l_d^2n^2\pi^2)+\mu^{J}(60L^2n^2\pi^2+n^4\pi^4\Xi_{20})} \tag{3.281}$$

Burada, Ξ_{20} aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Xi_{20}=15l_d^2+32l_1^2 \tag{3.282}$$

B_n'nin hesaplanmasının ardından kompozit nanotüplerin şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan burulma açısını hesaplayan eşitlik aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\varphi(x)^{\S DDT} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n\pi(180L^2\mu^A l_d^2+\mu^J(60L^2+n^2\pi^2\Xi_{20}))\varphi_0}{-60L^2(L^2\rho^J\omega^2-3\mu^A l_d^2 n^2\pi^2)+\mu^J(60L^2n^2\pi^2+n^4\pi^4\Xi_{20})}\right. \quad (3.283)$$
$$\left. -\frac{2n\pi(180L^2\mu^A l_d^2+\mu^J(60L^2+n^2\pi^2\Xi_{20}))(-1)^n\varphi_L}{-60L^2(L^2\rho^J\omega^2-3\mu^A l_d^2 n^2\pi^2)+\mu^J(60L^2n^2\pi^2+n^4\pi^4\Xi_{20})}\right) sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

3.13.2. Kompozit nanotüplerin şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan özdeğer problemi

Bu alt başlıkta, kompozit nanotüplerin iki malzeme uzunluk ölçek parametresi içeren burulmalı titreşimi için şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan özdeğer problemi elde edilecektir. Şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan tork ifadesi ile kompozit nanotüpün $x = 0$ ve $x = L$ noktaları için aşağıdaki eşitlikler kurulur:

$$\left(\frac{8}{15}\mu^J l_1^2+\frac{1}{4}\mu^J l_d^2\right)\frac{\partial^3\theta}{\partial x^3}-(\mu^J+3\mu^A l_d^2)\frac{\partial\theta}{\partial x}|_{x=0}=K_0\varphi_0 \quad (3.284)$$

$$\left(\frac{8}{15}\mu^J l_1^2+\frac{1}{4}\mu^J l_d^2\right)\frac{\partial^3\theta}{\partial x^3}-(\mu^J+3\mu^A l_d^2)\frac{\partial\theta}{\partial x}|_{x=L}=-K_L\varphi_L \quad (3.285)$$

Denklemler (3.284) ve (3.285) ile kurulan iki denklem takımından aşağıdaki özdeğer problemi oluşturulur:

$$\begin{bmatrix} Z_{11}^{\S DDT} & Z_{12}^{\S DDT} \\ Z_{21}^{\S DDT} & Z_{22}^{\S DDT} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_0 \\ \varphi_L\end{bmatrix}=0 \quad (3.286)$$

Kompozit nanotüplerin şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan titreşim frekanslarını bulmak için, Denklem (3.286)'daki katsayılar matrisinin determinatını sıfıra eşitleyip özdeğerlerini elde etmemiz gerekir. Katsayılar matrisinin elemanları aşağıdaki gibi yazılır:

$$Z_{11}^{SDDT} = -K_0 - \frac{3\mu^A l_d^2}{L} - \frac{\mu^J}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L\rho^J\omega^2\left(180\mu^A l_d^2 L^2 + \mu^J(60L^2 + n^2\pi^2\Xi_{20})\right)}{60L^2(L^2\rho^J\omega^2 - 3\mu^A l_d^2 n^2\pi^2) - \mu^J(60L^2 n^2\pi^2 + n^4\pi^4\Xi_{20})} \quad (3.287)$$

$$Z_{12}^{SDDT} = \frac{3\mu^A l_d^2}{L} + \frac{\mu^J}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L\rho^J\omega^2\left(180\mu^A l_d^2 L^2 + \mu^J(60L^2 + n^2\pi^2\Xi_{20})\right)}{60L^2(L^2\rho^J\omega^2 - 3\mu^A l_d^2 n^2\pi^2) - \mu^J(60L^2 n^2\pi^2 + n^4\pi^4\Xi_{20})} \quad (2.288)$$

$$Z_{21}^{SDDT} = \frac{3\mu^A l_d^2}{L} + \frac{\mu^J}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n L\rho^J\omega^2\left(180\mu^A l_d^2 L^2 + \mu^J(60L^2 + n^2\pi^2\Xi_{20})\right)}{60L^2(L^2\rho^J\omega^2 - 3\mu^A l_d^2 n^2\pi^2) - \mu^J(60L^2 n^2\pi^2 + n^4\pi^4\Xi_{20})} \quad (2.289)$$

$$Z_{22}^{SDDT} = -K_L - \frac{3\mu^A l_d^2}{L} - \frac{\mu^J}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L\rho^J\omega^2\left(180\mu^A l_d^2 L^2 + \mu^J(60L^2 + n^2\pi^2\Xi_{20})\right)}{60L^2(L^2\rho^J\omega^2 - 3\mu^A l_d^2 n^2\pi^2) - \mu^J(60L^2 n^2\pi^2 + n^4\pi^4\Xi_{20})} \quad (3.290)$$

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu doktora tezi, deforme olabilen sınır koşullarına sahip çeşitli nanokompozit yapıların farklı boyut etkili sürekli ortam teorilerine dayanan serbest titreşim ve burkulma analizlerini konu almıştır. Her bir problem tipine ait yönetici denklemlere Fourier serileri ve Stoke dönüşümü uygulanarak özdeğer problemleri oluşturulmuştur. Her problem için elde edilen özdeğer problemini çözebilmek için MATHEMATICA programlama dili kullanılmıştır. Bu bölümde, nanokompozit yapıların boyutsuz serbest titreşim frekansları ve boyutsuz burkulma yükleri tablo ve grafiklerle sunulmuş ve analizlere etki eden parametreler göz önünde bulundurularak detaylı bir tartışma yapılmıştır.

4.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kompozit Nanokirişlerin Analizleri

Bu alt bölümde, fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli ve gözeneksiz kompozit dikdörtgen kesitli nanokirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizleri gerçekleştirilecektir. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin üst yüzeyi tamamen seramik, alt yüzeyi ise tamamen metal olacak şekilde tasarlanmıştır. Seramik bileşen için zirkonya, metal bileşen için alüminyumun özellikleri kullanılmıştır. Aksi belirtilmedikçe, fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişler için kullanılan malzeme özellikleri ve geometrik özellikler şu şekildedir: $E_s = 151\ GPa$, $E_m = 70\ GPa$, $\rho_s = 3000\ kg/m^3$, $\rho_m = 2707\ kg/m^3$, $\upsilon_s = \upsilon_m = 0{,}3$, $b = 2\ nm$, $h = 2b = 4\ nm$ ve $L = 20h = 80\ nm$. Ayrıca, çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişler için bazı boyutsuz parametreler kullanılmıştır. Kullanılan boyutsuz formdaki parametrelerden bazıları şu şekildedir:

$$\overline{c_w} = \frac{c_w L^4}{E_m I} \tag{4.1}$$

$$\overline{c_g} = \frac{c_g L^2}{E_m I} \tag{4.2}$$

$$\overline{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_s A}{E_s I}} \tag{4.3}$$

$$\bar{P} = \frac{P L^2}{E_s I} \tag{4.4}$$

Yukarıdaki denklemlerde, $\overline{c_w}$ ve $\overline{c_g}$ sırasıyla boyutsuz Winkler ve Pasternak zemin parametrelerini belirtirken $\bar{\omega}$ ve $\bar{P}$ sırasıyla boyutsuz titreşim frekansı ve boyutsuz burkulma yüküdür. Son olarak, burada, $I = bh^3/12$ ve $A = bh$ olduğunu belirtmekte fayda vardır. Bunlara ek olarak, yay rijitlikleri de boyutsuz formda kullanılmıştır ve fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişler için aşağıdaki gibi yazılırlar:

$$\overline{T_0} = \frac{T_0 L^3}{E_s I} \tag{4.5}$$

$$\overline{T_L} = \frac{T_L L^3}{E_s I} \tag{4.6}$$

$$\overline{R_0} = \frac{R_0 L}{E_s I} \tag{4.7}$$

$$\overline{R_L} = \frac{R_L L}{E_s I} \tag{4.8}$$

Burada, $\overline{T_0}$ ve $\overline{T_L}$ boyutsuz çökme yay rijitliklerini (çökme yayı parametrelerini), $\overline{R_0}$ ve $\overline{R_L}$ boyutsuz dönel yay rijitliklerini (dönel yay parametrelerini) temsil etmektedir. Kompozit nanokirişlerin deforme olabilen sınır koşullarındaki analizlerine geçmeden önce bazı karşılaştırma çalışmaları sunulacaktır. Bu karşılaştırma çalışmaları ile sunulan çözümlerin doğruluğu ispatlanmış olacaktır. Aşağıda verilen bazı karşılaştırmalar homojen malzemeden oluşturulan kirişler/nanokirişler için iken bazıları ise fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit kirişler/nanokirişler içindir. Güç kuralına uyan fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerde $p = 0$ ayarlayıp ve boyutsuz zemin parametrelerini seramik malzemeye bağlı olarak boyutlu forma çevirirsek, karşılaştırma çalışmalarında incelenen homojen malzemeden oluşan nanokirişlerin frekanslarını veya burkulma yüklerini elde ederiz. Diğer bir yöntem olarak, seramik ve metal malzemelerin özelliklerini homojen malzemenin özelliklerine ayarlamak da aynı çözümleri vermektedir.

Çizelgeler 4.1 ve 4.2'de, Toğun ve Bağdatlı (2016a) tarafından yerel olmayan homojen nanokirişlerin her iki ucu basit mesnetli ve her iki ucu ankastre mesnetli durumu için sunulan boyutsuz frekansları ile karşılaştırma çalışmaları sunulmuştur. Basit mesnetli nanokiriş için hem çökme yayları hem de dönel yaylar ile mesnetlenmiş model ile karşılaştırma yapılmıştır. Bu karşılaştırmalar, Denklemler (3.72) ve (3.82)'nin dönel

atalet momentinin sıfıra eşitlenerek çözülmesi ile yapılmıştır. Daha önce, çökme yayları ile modellenen nanokirişte $\overline{T_0} = \overline{T_L}$ ve $\overline{R_0} = \overline{R_L}$'nin sırasıyla yeteri kadar büyük ve yeteri kadar küçük atanmasının her iki ucu basit mesnet sınır şartını sağlayacağından bahsedilmişti. Bu sebeple, Çizelge 4.1 ile verilen karşılaştırma çalışmalarında $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$ ve $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$ düşünülmüştür. Frekanslar $\overline{c_w} = 100$ ve $\overline{c_g} = 50$ için hesaplanmıştır. Terim sayısı on, yirmi ve otuz için karşılaştırmalar gerçekleştirilmiştir ve düşük terim ile çözüm yapılmasına rağmen mükemmel uyum yakalanmıştır. Buradan, basit mesnetli kirişlerin frekanslarını elde etmek istediğimizde düşük terim sayısı kullanabileceğimiz sonucuna varırız.

Çizelge 4.1. Winkler-Pasternak zemini üzerindeki yerel olmayan Euler-Bernoulli nanokirişinin boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet)

mod numarası	$\frac{e_0 a}{L}$	Toğun ve Bağdatlı (2016a)	Bu çalışma					
			$\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$			$\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$		
			$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$
1	0,0	26,2848	26,2848	26,2848	26,2848	26,2848	26,2848	26,2848
	0,1	26,1178	26,1178	26,1178	26,1178	26,1178	26,1178	26,1178
	0,2	25,7550	25,7550	25,7550	25,7550	25,7550	25,7550	25,7550
	0,3	25,3982	25,3982	25,3982	25,3982	25,3982	25,3982	25,3982
	0,4	25,1247	25,1247	25,1247	25,1247	25,1247	25,1247	25,1247
2	0,0	60,2699	60,2699	60,2699	60,2699	60,2699	60,2699	60,2699
	0,1	56,4919	56,4919	56,4919	56,4919	56,4919	56,4919	56,4919
	0,2	51,7514	51,7514	51,7514	51,7514	51,7514	51,7514	51,7514
	0,3	49,1551	49,1551	49,1551	49,1551	49,1551	49,1551	49,1551
	0,4	47,8219	47,8219	47,8219	47,8219	47,8219	47,8219	47,8219

Çizelge 4.2. Winkler-Pasternak zemini üzerindeki yerel olmayan Euler-Bernoulli nanokirişinin boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (ankastre mesnet-ankastre mesnet)

mod numarası	Toğun ve Bağdatlı (2016a)	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{10}$				
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
		40,2133	38,9211	38,529	38,3396	38,228
		$n = 60$	$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
1	37,7969	38,1545	38,1024	38,0636	38,0335	38,0095
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$	
		37,9899	37,9736	37,9599	37,9481	
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
		72,7855	71,0228	70,4537	70,1722	70,0043
		$n = 60$	$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
2	69,3394	69,8927	69,8132	69,7537	69,7075	69,6705
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$	
		69,6403	69,6151	69,5939	69,5756	
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
		104,876	101,979	101,13	100,722	100,483
		$n = 60$	$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
3	99,5596	100,325	100,213	100,13	100,066	100,014
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$	
		99,9725	99,9377	99,9083	99,8831	

Çizelge 4.2, her iki ucu ankastre mesnetli ve $\overline{c_w} = 10$ ve $\overline{c_g} = 50$ zemin parametrelerine sahip yerel olmayan nanokirişlerin boyutsuz frekanslarını $e_0 a/L = 0{,}2$ için karşılaştırmaktadır. Bu tez çalışmasında sunulan çözüm ile bulunan sonuçlar için $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{10}$ düşünülmüştür. Çizelge'den de anlaşılacağı üzere, her iki ucu ankastre mesnetli nanokirişler için düşük terim sayıları yeterli değildir. Bu yüzden yüz kırk terime kadar çözüm yapılmıştır. Terim sayısı arttıkça Toğun ve Bağdatlı (2016a) tarafından elde edilen frekanslar ile bu çalışmada sunulan çözüm ile bulunan frekanslar arasındaki fark azalmaktadır. Yüz kırk terim bu çalışma için yeterli bulunduğundan terim sayısı daha

fazla arttırılmamıştır. Anlaşılacağı üzere, bu mesnet koşulu için de güzel bir uyum yakalanmıştır.

Çizelgeler 4.3 ve 4.4'te, Winkler zeminindeki Euler-Bernoulli kirişinin boyutsuz klasik frekanslarının çeşitli çözüm yöntemleri ile karşılaştırılması iki farklı rijit sınır koşulu için gerçekleştirilmiştir. Bu karşılaştırma çalışmalarında, sabit özelliklere sahip kiriş düşünülmüştür ve referanslarda bu özellikler şu şekildedir: $E = \rho = I = A = \overline{c_w} = 1$. Basit mesnetli kirişin frekansları, hem çökme yayları hem de dönel yaylar ile modellenmiş kirişler için otuz terim ile gerçekleştirilen çözümler ile karşılaştırılmıştır. Denklemler (3.72) ve (3.82)'de yerel olmayan parametre, Pasternak zemin parametresi ve dönel atalet momentinin sıfıra eşitlenmesi ile frekanslar elde edilmiştir. Toplamda dört farklı yöntem ile karşılaştırma yapılmıştır. Bunlar: Adomian dekompozisyon metodu (Adomian Decomposition Method, ADM), homotopi pertürbasyon metodu (Homotopy Perturbation Method, HPM), DTM ve diferensiyel kuadratür eleman metodu (differential quadrature element method, DQEM)'dur ve sırasıyla Coşkun vd. (2014), Mutman (2013), Balkaya vd. (2009) ve Chen (2000) tarafından çalışılmışlardır. Literatürde başka yöntemler ile basit mesnet için elde edilen frekanslar, bu çalışmada bulunanlar ile mükemmel bir uyum sağlamıştır.

Çizelge 4.3. Winkler zemini üzerindeki Euler-Bernoulli kirişinin boyutsuz klasik frekanslarının çeşitli çözüm yöntemleri ile karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet)

Yöntem	$\bar{\omega} = \omega\sqrt{\frac{\rho A}{c_w}}$				
	mod 1	mod 2	mod 3	mod 4	mod 5
ADM	9,92014	39,4911	88,8321	157,9168	246,7421
HPM	9,92014	39,4911	88,8321	157,9168	246,7421
DTM	9,92014	39,4911	88,8321	-	-
DQEM	9,92014	39,4913	89,4002	-	-
Bu çalışma, $n = 30$ ($\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$)	9,92014	39,4911	88,8321	157,9168	246,7421
Bu çalışma, $n = 30$ ($\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$)	9,92014	39,4911	88,8321	157,9168	246,7421

Çizelge 4.4'te her iki ucu ankastre mesnetli kirişlerin boyutsuz klasik frekanslarının karşılaştırılması yapılmıştır. Daha önceki karşılaştırmalarda terim sayısının seçilmesi için çalışmalar yapıldığından, burada yapılmamış ve terim sayısı yüz kırk alınmıştır. Ankastre mesnet için, literatürde bulunan ve başka yöntemler ile elde edilen sonuçlar ile güzel bir uyum yakalandığı anlaşılabilir.

Çizelge 4.4. Winkler zemini üzerindeki Euler-Bernoulli kirişinin boyutsuz klasik frekanslarının çeşitli çözüm yöntemleri ile karşılaştırılması (ankastre mesnet-ankastre mesnet)

Yöntem	$\bar{\omega} = \omega\sqrt{\frac{\rho A}{c_w}}$				
	mod 1	mod 2	mod 3	mod 4	mod 5
ADM	22,3956	61,6809	120,908	199,862	298,557
HPM	22,3956	61,6809	120,908	199,862	298,557
DTM	22,3733	61,6728	120,903	199,859	298,556
DQEM	22,3956	61,6811	120,910	199,885	298,675
Bu çalışma, $n = 140$ $(\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{10})$	22,5265	62,041	121,622	201,04	300,338

Yukarıda verilen karşılaştırmalar rijit sınır koşulları ile yapılmıştır. Şimdi ise, deforme olabilen sınır koşullarının karşılaştırılması yapılacaktır. Çizelgeler 4.5-4.9'da, Lai vd. (2008) tarafından ADM kullanılarak çeşitli elastik sınır koşullarındaki homojen kirişler için elde edilen boyutsuz klasik frekans değerleri ile bu çalışmada hesaplananlar karşılaştırılmıştır. Bu çizelgelerde terim sayısının etkisini deforme olabilen sınır koşulları için incelemek de mümkündür. Çizelge 4.5 ve Çizelge 4.6'da verilen ve Lai vd. (2008) tarafından sunulan boyutsuz klasik frekanslar değişen $\overline{T_0} = \overline{T_L}$ yay rijitlikleri için $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-5}$ düşünülerek elde edilmiştir. Dönel yayların rijitlikleri sıfıra çok yakın olduğundan Lai vd. (2008) tarafından bulunan frekansları, bu tezde Denklem (3.72)'de verilen çözüm ile bulunan özdeğerler ile karşılaştırmak uygun görülmüştür. Ayrıca, yerel olmayan parametre, dönel atalet momenti, c_w ve c_g sıfıra eşitlenmiştir. Çizelgelerde terim sayıları otuzdan yüz kırka kadar düşünülmüştür. Sonuçlar arasında çok iyi bir uyum yakalandığı kolaylıkla anlaşılabilir. Terim sayısının artması ile boyutsuz frekanslarda

meydana gelen farklar da bu örneklerden rahatlıkla incelenebilir. Yüksek terim sayılarında yapılan çözümlerde, artık bir yerden sonra frekanslarda çok küçük değişimler meydana gelmektedir. Bu sebeple terim sayısını daha da yükseltmek anlamlı değişimler meydana getirmeyeceği gibi çözüm süresini arttıracaktır. Bu sebeple, terim sayısının seçimi de önem arz etmektedir. Ayrıca, yüksek $\overline{T_0} = \overline{T_L}$ değerlerinde düşük terim sayısı ile gerçekleştirilen çözümlerin yüksek terimler ile gerçekleştirilen çözümler ile aynı sonuçlar verdiği görülür. Buradan diyebiliriz ki; yüksek çökme yayı rijitliklerine sahip kirişlerin frekanslarını hesaplarken düşük terim sayısı kullanabiliriz.

Çizelge 4.7 ve Çizelge 4.8'de verilen ve Lai vd. (2008) tarafından sunulan boyutsuz frekanslar, değişen $\overline{R_0} = \overline{R_L}$ dönel yay rijitlikleri için $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^5$ düşünülerek elde edilmiştir. Çökme yaylarının rijitlikleri çok yüksek olduğundan, Lai vd. (2008) tarafından bulunan frekansları bu tezde Denklem (3.82)'de verilen çözüm ile bulunan özdeğerler ile karşılaştırmak uygun görülmüştür. Bu karşılaştırmalarda da terim sayıları otuzdan yüz kırka kadar düşünülmüş ve sonuçlar arasında iyi bir uyum yakalandığı anlaşılmıştır. Çizelge 4.7 ve Çizelge 4.8'deki sonuçlar incelendiğinde, düşük $\overline{R_0} = \overline{R_L}$ değerlerinde düşük terim sayısı ile gerçekleştirilen çözümlerin yüksek terimler ile gerçekleştirilen çözümler ile aynı sonuçlar verdiği görülür. Buradan diyebiliriz ki; düşük dönel yay rijitliklerine sahip kirişlerin frekanslarını hesaplarken düşük terim sayısı kullanabiliriz.

Çizelge 4.5. Düşük rijitliğe sahip çökme yayları ile mesnetlenmiş Euler-Bernoulli kirişinin boyutsuz klasik frekanslarının karşılaştırılması (mod 1)

$\overline{T_0} = \overline{T_L}$	Lai vd. (2008)	Bu çalışma			
10^{-5}	0,0045	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		0,00450264	0,00449496	0,00449037	0,00448732
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		0,00448514	0,00448351	0,00448224	0,00448123
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		0,0044804	0,00447971	0,00447912	0,00447862
10^{-4}	0,0141	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		0,0142386	0,0142143	0,0141998	0,0141901
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		0,0141832	0,0141781	0,0141741	0,0141709
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		0,0141682	0,0141661	0,0141642	0,0141626
10^{-3}	0,0447	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		0,045026	0,0449492	0,0449033	0,0448728
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		0,044851	0,0448347	0,044822	0,0448119
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		0,0448036	0,0447967	0,0447909	0,0447859
10^{-2}	0,1414	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		0,142374	0,142131	0,141986	0,141889
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		0,141821	0,141769	0,141729	0,141697
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		0,141671	0,141649	0,14163	0,141615
0,1	0,4468	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		0,449879	0,449114	0,448657	0,448353
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		0,448136	0,447974	0,447847	0,447746
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		0,447664	0,447595	0,447537	0,447487

Çizelge 4.6. Yüksek rijitliğe sahip çökme yayları ile mesnetlenmiş Euler-Bernoulli kirişinin boyutsuz klasik frekanslarının karşılaştırılması (mod 1)

$\overline{T_0} = \overline{T_L}$	Lai vd. (2008)	Bu çalışma			
10^2	8,2757	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		8,28163	8,28015	8,27926	8,27867
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		8,27824	8,27793	8,27768	8,27748
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		8,27732	8,27718	8,27707	8,27697
10^3	9,6787	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		9,67883	9,6788	9,67879	9,67878
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		9,67877	9,67876	9,67876	9,67875
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		9,67875	9,67875	9,67874	9,67874
10^4	9,8502	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		9,85016	9,85016	9,85016	9,85016
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		9,85016	9,85016	9,85016	9,85016
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		9,85016	9,85016	9,85016	9,85016
10^5	9,8677	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		9,86766	9,86766	9,86766	9,86766
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		9,86766	9,86766	9,86766	9,86766
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		9,86766	9,86766	9,86766	9,86766
10^6	9,8694	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		9,86941	9,86941	9,86941	9,86941
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		9,86941	9,86941	9,86941	9,86941
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		9,86941	9,86941	9,86941	9,86941

Çizelge 4.7. Düşük rijitliğe sahip dönel yaylar ile mesnetlenmiş Euler-Bernoulli kirişinin boyutsuz klasik frekanslarının karşılaştırılması (mod 1)

$\overline{R_0} = \overline{R_L}$	Lai vd. (2008)	Bu çalışma			
10^{-5}	9,8694	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		9,86962	9,86962	9,86962	9,86962
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		9,86962	9,86962	9,86962	9,86962
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		9,86962	9,86962	9,86962	9,86962
10^{-4}	9,8696	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		9,8698	9,8698	9,8698	9,8698
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		9,8698	9,8698	9,8698	9,8698
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		9,8698	9,8698	9,8698	9,8698
10^{-3}	9,8714	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		9,8716	9,8716	9,8716	9,8716
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		9,8716	9,8716	9,8716	9,8716
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		9,8716	9,8716	9,8716	9,8716
10^{-2}	9,8894	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		9,88957	9,88957	9,88957	9,88957
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		9,88957	9,88957	9,88957	9,88957
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		9,88957	9,88957	9,88957	9,88957
0,1	10,0656	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		10,0659	10,0659	10,0658	10,0658
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		10,0658	10,0658	10,0658	10,0658
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		10,0658	10,0658	10,0658	10,0658

Çizelge 4.8. Yüksek rijitliğe sahip dönel yaylar ile mesnetlenmiş Euler-Bernoulli kirişinin boyutsuz klasik frekanslarının karşılaştırılması (mod 1)

$\overline{R_0} = \overline{R_L}$	Lai vd. (2008)	Bu çalışma			
10^2	21,5401	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		22,0897	21,9477	21,8641	21,8091
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		21,7701	21,7411	21,7186	21,7007
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		21,686	21,6739	21,6636	21,6548
10^3	22,2826	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		22,9118	22,7488	22,653	22,59
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		22,5453	22,5121	22,4864	22,4659
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		22,4491	22,4352	22,4235	22,4135
10^4	22,3624	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		23,0006	22,8352	22,738	22,6741
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		22,6289	22,5951	22,5691	22,5483
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		22,5313	22,5172	22,5053	22,4951
10^5	22,3705	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		23,0095	22,8439	22,7466	22,6826
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		22,6373	22,6035	22,5774	22,5566
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		22,5396	22,5255	22,5136	22,5034
10^6	22,3713	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
		23,0104	22,8448	22,7474	22,6834
		$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$	$n = 100$
		22,6381	22,6043	22,5782	22,5574
		$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$	$n = 140$
		22,5404	22,5263	22,5144	22,5042

Çizelge 4.9'da, yerel olmayan Timoshenko kirişlerinin iki ucu basit mesnet durumundaki boyutsuz titreşim frekansları Numanoğlu vd. (2021) tarafından sunulan çalışma ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma çalışmasında, nanokirişin malzeme ve geometrik özellikleri şu şekilde kullanılmıştır: $E = 30\ GPa$, $\rho = 1\ kg/m^3$, $b = 1\ nm$, $h = 2\ nm$, $L = 20\ nm$, $\upsilon = 0{,}3$. $\kappa = 5/6$ alınarak çözüm yapılan çalışmada nanokiriş, Winkler-Pasternak zemini üzerindedir. Çizelge 4.9'daki karşılaştırma, Denklemler (3.139) ve (3.149)'daki katsayılar matrislerinin otuz terim kullanılarak sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen özdeğerleri ile yapılmıştır ve Denklem (3.139)'un çözümü için $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$ düşünülürken Denklem (3.149)'un çözümü için $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$ düşünülmüştür. Anlaşılacağı üzere, mükemmel bir uyum yakalanmıştır.

Çizelge 4.10'da yerel olmayan Timoshenko nanokirişlerinin üç farklı mesnet durumundaki (basit mesnet-basit mesnet, ankastre mesnet-basit mesnet, ankastre mesnet-ankastre mesnet) boyutsuz titreşim frekansları Numanoğlu vd. (2022) tarafından sunulan çalışma ile karşılaştırılmıştır. Zemin etkisinden bağımsız bu karşılaştırma için de, bir önceki karşılaştırmada kullanılan parametreler kallanılmıştır. Her iki ucu basit mesnetli nanokirişlerin frekanslarını hesaplarken otuz terim, diğer iki sınır şartının frekanslarını hesaplarken yüz kırk terim kullanılmıştır. Çizelge 4.11, yerel olmayan Euler-Bernoulli ve Rayleigh nanokirişlerinin her iki ucu basit mesnet sınır şartındaki boyutsuz titreşim frekanslarını karşılaştırmak için verilmiştir. Numanoğlu vd. (2022) tarafından sunulan çalışma ile yapılan karşılaştırmada, nanokiriş zemin etkisinden bağımsızdır. Sonuçlar arasındaki uyum rahatlıkla görülebilir.

Çizelge 4.9. Winkler-Pasternak zemini üzerindeki yerel olmayan Timoshenko nanokirişinin boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet)

mod numarası	$\frac{e_0 a}{L}$	$\overline{c_w} = \overline{c_g} = 0$		
		Numanoğlu vd. (2021)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$
1	0,0	9,82813	9,82813	9,82813
	0,2	8,32180	8,3218	8,3218
	0,4	6,11975	6,11975	6,11975
2	0,0	38,82991	38,8299	38,8299
	0,2	24,17849	24,1785	24,1785
	0,4	14,35533	14,3553	14,3553
3	0,0	85,66191	85,6619	85,6619
	0,2	40,14543	40,1454	40,1454
	0,4	21,96298	21,963	21,963
mod numarası	$\frac{e_0 a}{L}$	$\overline{c_w} = \overline{c_g} = 10$		
		Numanoğlu vd. (2021)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$
1	0,0	14,32019	14,3202	14,3202
	0,2	13,33147	13,3315	13,3315
	0,4	12,08003	12,08	12,08
2	0,0	43,69673	43,6967	43,6967
	0,2	31,40449	31,4045	31,4045
	0,4	24,65192	24,6519	24,6519
3	0,0	90,67294	90,6729	90,6729
	0,2	49,95268	49,9527	49,9527
	0,4	36,95902	36,959	36,959

Çizelge 4.10. Yerel olmayan Timoshenko nanokirişinin boyutsuz frekanslarının çeşitli mesnet koşullarında karşılaştırılması ($\frac{e_0 a}{L} = 0{,}2$)

	Numanoğlu vd. (2022)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$
basit-basit	8,32180	8,3218	8,3218
	Numanoğlu vd. (2022)	Bu çalışma $\overline{R_0} = 10^{10}$ & $\overline{R_L} = 10^{-10}$	
ankastre-basit	12,66770	12,6687	
	Numanoğlu vd. (2022)	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{10}$	
ankastre-ankastre	18,12201	18,0784	

Çizelge 4.11. Yerel olmayan Rayleigh ve Euler-Bernoulli nanokirişlerinin boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet, $\frac{e_0 a}{L} = 0{,}2$)

mod numarası	Euler-Bernoulli nanokirişi		
	Numanoğlu vd. (2022)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$
1	8,35692	8,35692	8,35692
2	24,58230	24,5823	24,5823
3	41,62849	41,6285	41,6285
mod numarası	Rayleigh nanokirişi		
	Numanoğlu vd. (2022)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$
1	8,34834	8,34834	8,34834
2	24,48183	24,4818	24,4818
3	41,24858	41,2486	41,2486

Şimdiye kadar, homojen kirişlerin çeşitli etkiler ve sınır şartları altındaki boyutsuz frekansları karşılaştırılmıştır. Bundan sonra verilecek karşılaştırmalarda fonksiyonel derecelendirilmiş kirişler ele alınmıştır. Çizelge 4.12'de sunulan karşılaştırma, Avcar (2019) tarafından, sigmoid ve güç kuralı dağılımlarına göre iki farklı gözenek durumunu ele alan çalışma ile yapılmıştır. Bahsedilen çalışmada, her iki ucu basit mesnetli Euler-

Bernoulli kirişleri için hesaplanan boyutsuz frekans değerleri ile bu çalışmada sunulan formülasyonlar ile bulunanlar karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma için şu parametreler kullanılmıştır: $E_s = 380\ GPa$, $E_m = 70\ GPa$, $\rho_s = 3960\ kg/m^3$, $\rho_m = 2702\ kg/m^3$, $\vartheta = 0{,}1$, $p = 2$, $L/h = 5$, $\bar{\omega} = \frac{\omega L}{h}\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$. Bu karşılaştırma için dönel atalet, yerel olmayan parametre ve zemin parametreleri sıfıra eşitlenmiştir. Otuz terim kullanılarak hesaplanan frekansların literatürdeki bu çalışma ile mükemmel bir uyum içinde olduğu anlaşılmaktadır.

Çizelge 4.12. Gözenekli kirişlerinin boyutsuz klasik frekanslarının karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet)

	mod 1		
kiriş modeli	Avcar (2019)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$
FDK-I	3,992	3,99167	3,99167
FDK-DD-I	3,835	3,83489	3,83489
FDK-O-I	3,991	3,99065	3,99065
FDK-II	3,852	3,85183	3,85183
FDK-DD-II	3,648	3,64775	3,64775
FDK-O-II	3,839	3,83879	3,83879
	mod 2		
kiriş modeli	Avcar (2019)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$
FDK-I	15,967	15,9667	15,9667
FDK-DD-I	15,34	15,3395	15,3395
FDK-O-I	15,963	15,9626	15,9626
FDK-II	15,407	15,4073	15,4073
FDK-DD-II	14,591	14,591	14,591
FDK-O-II	15,355	15,3552	15,3552

Çizelge 4.13'te güç kuralı dağılımına uyan yerel olmayan FD nanokirişlerin boyutsuz frekansları, farklı mod numaraları ve sınır koşulları için karşılaştırılmıştır. Bu çalışmada, $(e_0 a)^2 = 2x10^6\ nm^2$'dir ve nanokiriş özellikleri şu şekildedir: $E_s = 390\ GPa$, $E_m =$

$210\ GPa$, $\rho_s = 3960\ kg/m^3$, $\rho_m = 7800\ kg/m^3$, $p = 1$, $L/h = 20$. Bu karşılaştırma çalışmasında zemin etkisi ihmal edilmiştir ve boyutsuz frekanslar Denklemler (3.72) ve (3.82) ile hesaplanmıştır.

Çizelge 4.13. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması

	basit mesnet-basit mesnet		
mod numarası	Rayleigh kiriş teorisi		
	Ebrahimi ve Salari (2015a)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$
1	6,3865	6,38655	6,38655
2	20,8263	20,8263	20,8263
3	37,4117	37,4117	37,4117
4	53,9323	53,9323	53,9323
mod numarası	Euler-Bernoulli kiriş teorisi		
	Eltaher vd. (2012)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$
1	6,4774	6,39374	6,39374
2	20,9248	20,9199	20,9199
3	37,7336	37,7889	37,7889
4	54,3949	54,8954	54,8954
	ankastre mesnet- ankastre mesnet		
mod numarası	Rayleigh kiriş teorisi		
	Ebrahimi ve Salari (2015a)	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{10}$	
1	14,1718	14,2462	
2	31,2445	31,3806	
mod numarası	Euler-Bernoulli kiriş teorisi		
	Eltaher vd. (2012)	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{10}$	
1	14,1735	14,2756	
2	31,2573	31,6092	

Çizelge 4.14'te güç kuralı dağılımına uyan yerel olmayan FD Timoshenko nanokirişlerinin boyutsuz frekansları birinci mod ve farklı boyut parametre değerleri için karşılaştırılmıştır. Bu çalışmada, incelenen nanokiriş için kullanılan özellikler şu şekildedir: $E_s = 390\ GPa,\ E_m = 210\ GPa,\ \rho_s = 3960\ kg/m^3,\ \rho_m = 7800\ kg/m^3,$ $\upsilon_s = 0{,}24, \upsilon_m = 0{,}3, \kappa = 5/6, L/h = 50$. Bu karşılaştırma zemin etkisinden bağımsızdır ve otuz terim ile yapılan çözümlerin sonuçları karşılaştırılmıştır.

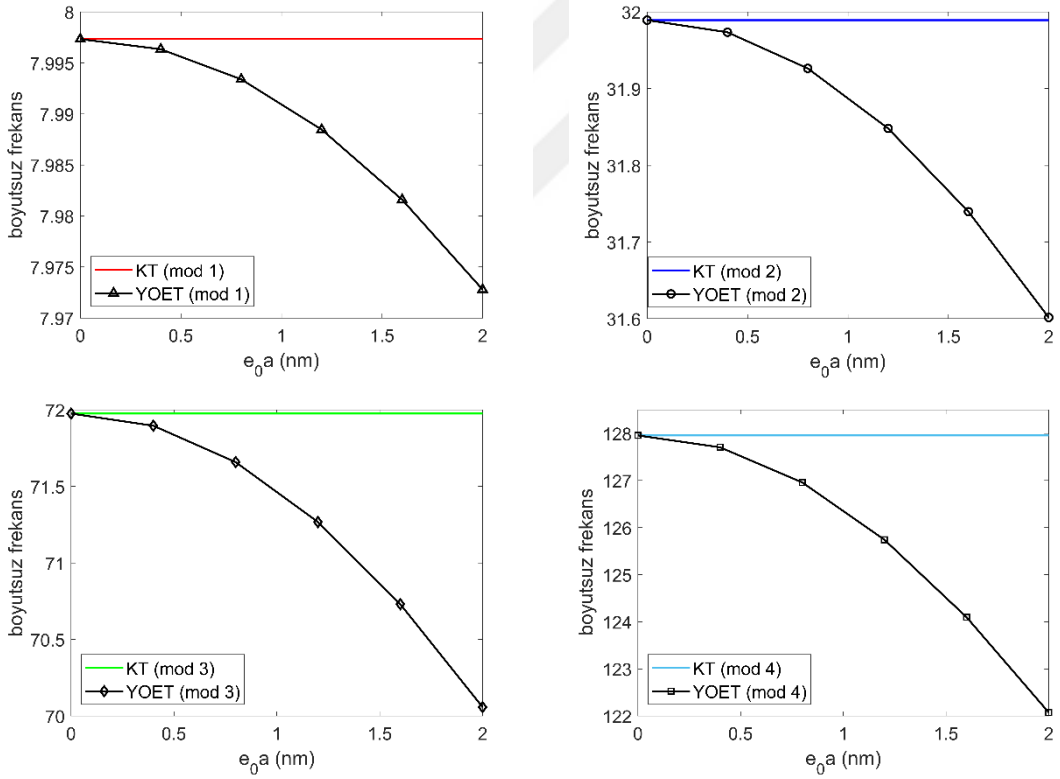
Çizelge 4.14. Yerel olmayan fonksiyonel derecelendirilmiş Timoshenko nanokirişlerinin boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet)

	$p = 1$		
$(e_0a)^2$ $(10^6\ nm^2)$	Rahmani ve Pedram (2014)	Ebrahimi ve Salari (2015b)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$ $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$
0	6,9917	6,99174004	6,99172
1	6,6703	6,67031728	6,67030
2	6,3895	6,38950303	6,38949
3	6,1414	6,14140878	6,14139
4	5,9201	5,92013713	5,92012
	$p = 5$		
$(e_0a)^2$ $(10^6\ nm^2)$	Rahmani ve Pedram (2014)	Ebrahimi ve Salari (2015b)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$ $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$
0	5,9389	5,93894397	5,93893
1	5,6659	5,66592012	5,66591
2	5,4274	5,42739007	5,42738
3	5,2166	5,21665314	5,21664
4	5,0287	5,02869994	5,02869

Hem homojen hem de fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit kirişler için yerel olmayan elastisite ve klasik elastisite teorilerine dayanan birçok karşılaştırma çalışması gösterilmiştir. Anlaşılacağı üzere, literatürde bulunan çalışmalar ile çok iyi uyum yakalanmıştır. Dikkat edilirse, karşılaştırmaların birçoğu basit mesnet sınır koşulu ile

yapılmıştır. Çünkü, literatürde sunulan çalışmaların çok büyük bir bölümü basit mesnet koşulunu çalışmıştır ve diğer rijit (ankastre, konsol) sınır koşullarına daha seyrek rastlanır. Bununla beraber, deforme olabilen sınır koşullarını sunan çalışmalar çok daha az olmakla beraber nanokompozit yapıların elastik sınır koşullarındaki çözümlerini sunan çalışmalar çok nadirdir.

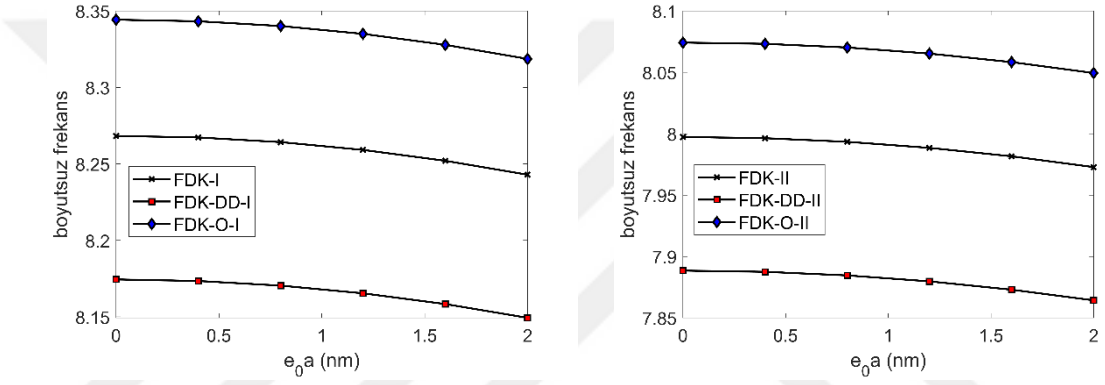
Şimdi, bu bölümün ilk paragrafında verilen malzeme özelliklerine sahip zirkonyum ve alüminyumdan oluşan nanokompozit kirişlerin yerel olmayan elastisite teorisine dayanan titreşim analizleri gerçekleştirilecektir. Başka bir durum belirtilmedikçe, $p = 4$, $e_0 a = 2\,nm$, $\vartheta = 0{,}1$, $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$, $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$ değerleri ile çözümler gerçekleştirilecektir. Ayrıca, Timoshenko kiriş teorisine dayanan analizlerde, $\kappa = 5/6$ kullanılmıştır.



Şekil 4.1. FDK-II nanokirişinin boyutsuz frekanslarının yerel olmayan parametreye göre değişimi ($\overline{c_w} = \overline{c_g} = \mathbf{0}$ & EBKT)

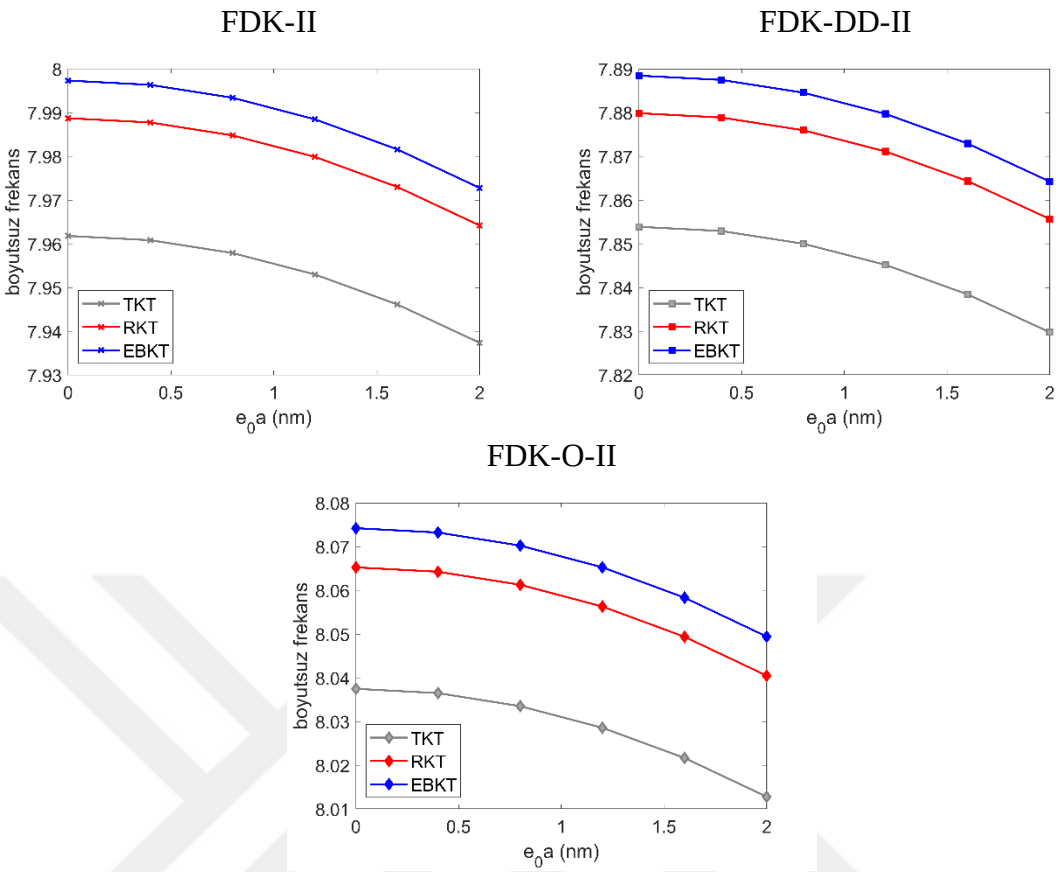
Şekil 4.1'de FDK-II kompozit nanokirişinin ilk dört moddaki boyutsuz frekanslarının yerel olmayan parametreye göre değişimleri hem yerel olmayan elastisite teorisi hem de

klasik elastisite teorisi için verilmiştir. Klasik elastisite teorisi herhangi bir boyut parametresi içermediğinden yerel olmayan parametrenin değişiminden etkilenmemekte ve $\bar{\omega}$ değerleri aynı kalmaktadır. e_0a'nın değişimi boyutsuz frekans değerlerinde önemli sayılabilecek değişimler meydana getirmektedir. Dört mod için de, e_0a'nın artmasıyla sonuçların klasik elastisiten uzaklaştığı açıkça görülebilir. Bu örnekte, yerel olmayan parametrenin titreşim modları üzerindeki etkisinin incelenmesi temel amaçtır. Anlaşılacağı üzere, birinci titreşim modunda meydana gelen değişim küçük miktarlarda iken mod numarası yükseldikçe değişim miktarı da artmaktadır. Buradan, yerel olmayan etkilerin yüksek modlarda daha belirgin olduğu sonucuna varırız.



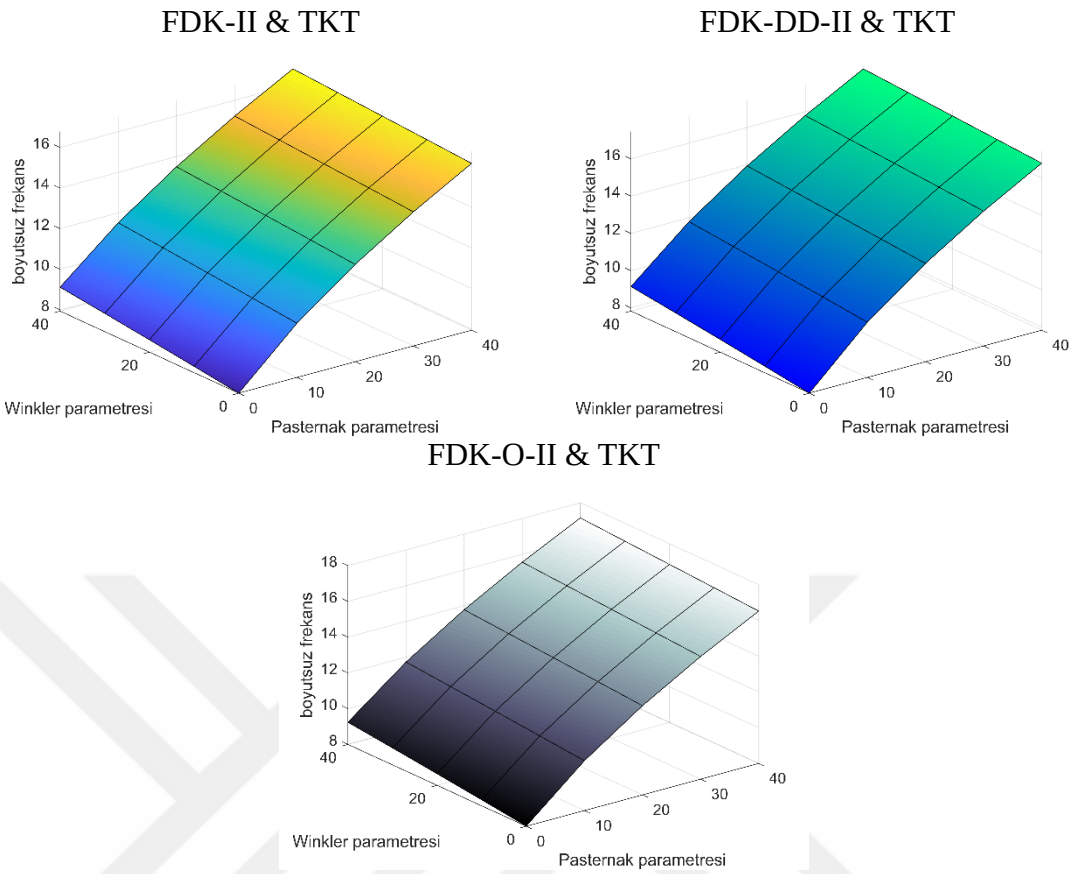
Şekil 4.2. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin birinci moddaki boyutsuz frekanslarının yerel olmayan parametreye göre değişimi ($\overline{c_w} = \overline{c_g} = \mathbf{0}$ & EBKT)

Şekil 4.2'de FD gözenekli ve gözeneksiz kompozit nanokirişlerin birinci moddaki boyutsuz frekanslarının yerel olmayan parametreye göre değişimleri sigmoid ve güç kuralı dağılımları için sunulmuştur. Burada da, e_0a'nın boyutsuz frekans değerlerinde meydana getirdiği azalma açıkça görülebilmektedir. İki malzeme dağılım tipi kıyaslandığında, sigmoid dağılımına uyan kompozit nanokirişlerin frekanslarının daha yüksek olduğu anlaşılır. Ayrıca, fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin kesitinde gözenekler olması frekanslarda fark edilebilir değişimler meydana getirmektedir. Homojen dağılıma sahip gözenekler frekansları azaltırken homojen olmayan dağılıma sahip gözenekler frekanslarda artış meydana getirir.



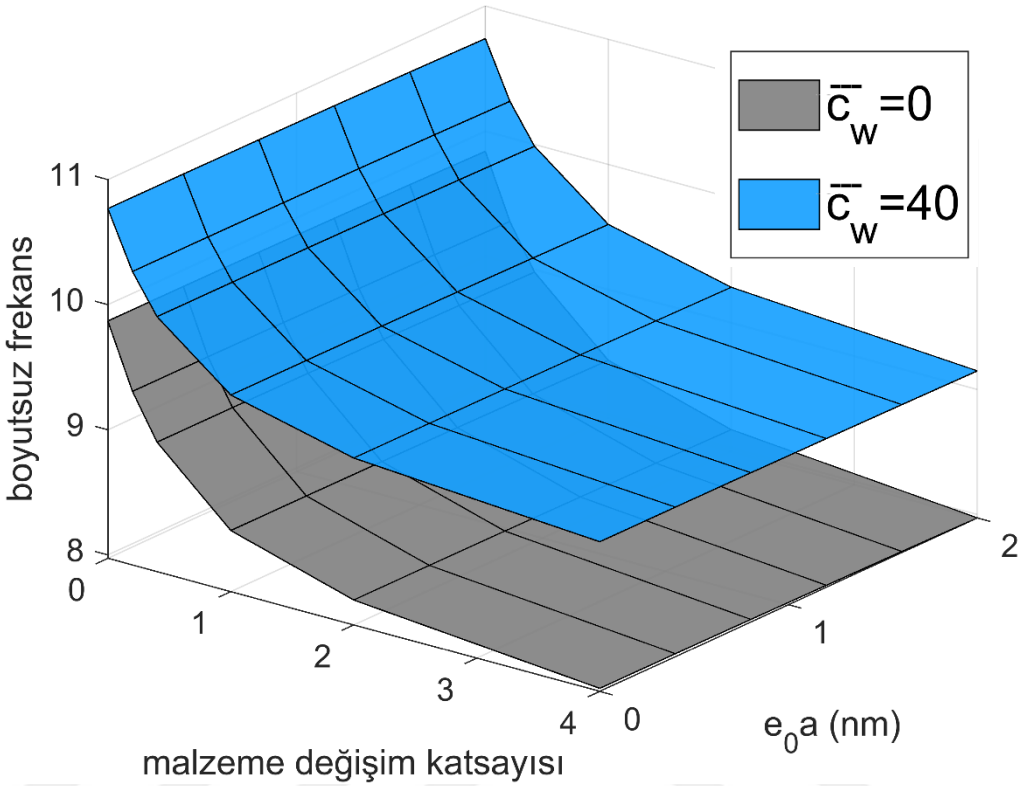
Şekil 4.3. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin farklı kiriş teorileri için boyutsuz frekanslarının yerel olmayan parametreye göre değişimi ($\overline{c_w} = \overline{c_g} = 0$ & mod 1)

Şekil 4.3'te farklı kiriş teorilerinin yerel olmayan parametreye göre değişen boyutsuz frekans değerleri FDK-II, FDK-DD-II ve FDK-O-II için çizilmiştir. Timoshenko kiriş teorisi ile elde edilen frekansların en düşük, Euler-Bernoulli kiriş teorisi ile elde edilen frekansların en yüksek olduğu görülür. Rayleigh kiriş teorisi ile elde edilen frekanslar TKT ve EBKT ile elde edilenlerin arasında olmakla beraber, EBKT ile elde edilenlere daha yakın değerdedirler.



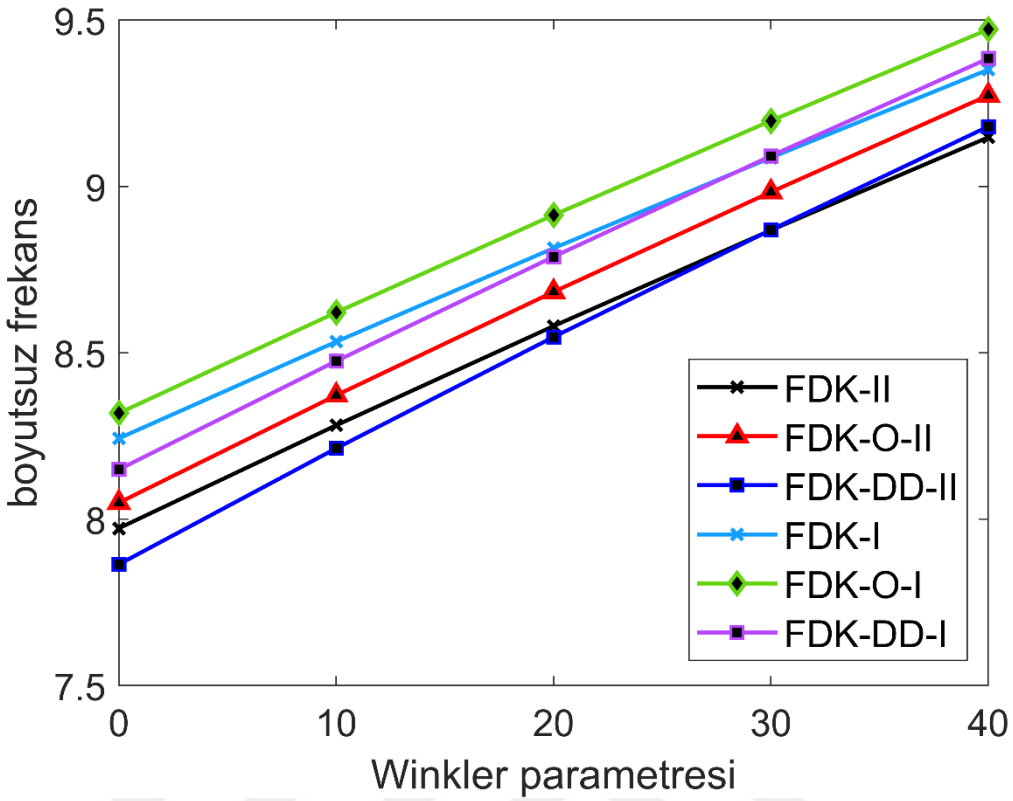
Şekil 4.4. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit Timoshenko nanokirişlerinin yerel olmayan elastisite teorisi için boyutsuz frekanslarının $\overline{c_w}$ ve $\overline{c_g}$'ye göre değişimi (mod 1)

Şekil 4.4'te gözenekli ve gözeneksiz yerel olmayan Timoshenko kompozit nanokirişlerinin boyutsuz frekanslarının değişimi, değişen boyutsuz Winkler ve Pasternak parametreleri için çizilmiştir. Bu parametrelerin her ikisinin sıfır olması durumunda, kompozit nanokiriş zemin etkisinden bağımsızdır ve en düşük frekanslar bu durum için elde edilir. $\overline{c_w}$ ve $\overline{c_g}$ arttıkça, kompozit nanokirişin frekanslarında meydana gelen artış rahatlıkla gözlemlenebilir. Burada, $\overline{c_g}$'de meydana gelen artışın kompozit nanokirişin frekanslarında meydana getirdiği değişikliğin $\overline{c_w}$'ye kıyasla çok daha fazla olması dikkat çekicidir. Bu şekil ile Pasternak zemin parametresinin etkisinin vurgulanması da amaçlanmıştır. $\overline{c_g}$'nin artması ile frekanslarda meydana gelen artışlar incelendiğinde en fazla değişimin FDK-DD-II nanokirişinin frekanslarında meydana geldiği anlaşılır. Bununla beraber, $\overline{c_g}$'nin artması ile frekanslarda meydana gelen en az oranda artış FDK-II nanokirişi için hesaplanır. Yani, $\overline{c_g}$'nin etkisi gözenekli nanokirişlerde daha fazladır.



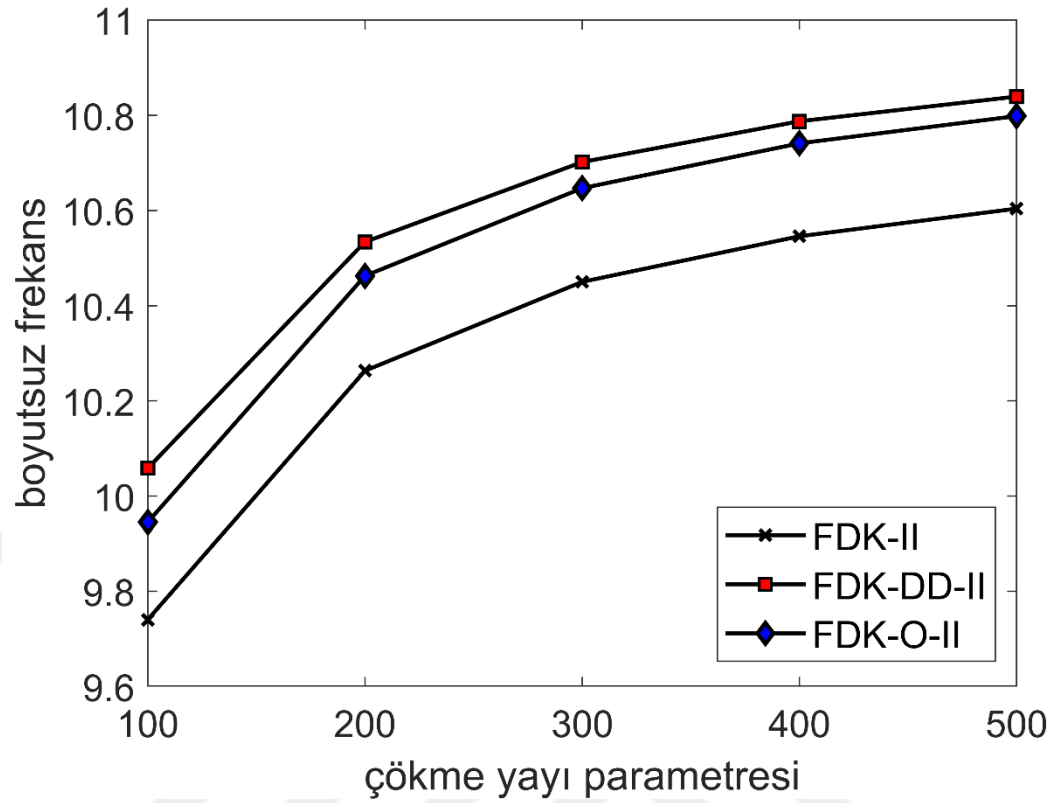
Şekil 4.5. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişin yerel olmayan elastisite teorisi için boyutsuz frekanslarının $\boldsymbol{e_0 a}$ ve $\boldsymbol{p}$'ye göre değişimi (EBKT & mod 1)

Şekil 4.5'te yerel olmayan Euler-Bernoulli kompozit gözeneksiz nanokirişlerinin zemin etkisinden bağımsız ve Winkler zemini etkisindeki boyutsuz frekanslarının değişimi, çeşitli malzeme değişim katsayısı (p) ve yerel olmayan parametre ($e_0 a$) için çizilmiştir. $e_0 a$ arttıkça frekanslarda meydana gelen azalma, birinci titreşim modu incelendiğinden çok belirgin değildir. Ancak, p arttıkça frekanslarda meydana gelen azalma bariz bir şekilde görülmektedir. Özellikle, düşük p değerlerinde meydana gelen değişim frekansları daha fazla etkilemektedir. Ayrıca, Winkler zemininin kompozit nanokirişi güçlendirici etkisi, burada bir kez daha vurgulanabilir. Ayrıca, bu örnekten Winkler zemini üzerinde olmayan FD nanokirişin malzeme değişim katsayısının ve yerel olmayan parametrenin değişiminden daha çok etkilendiği ortaya çıkmıştır.



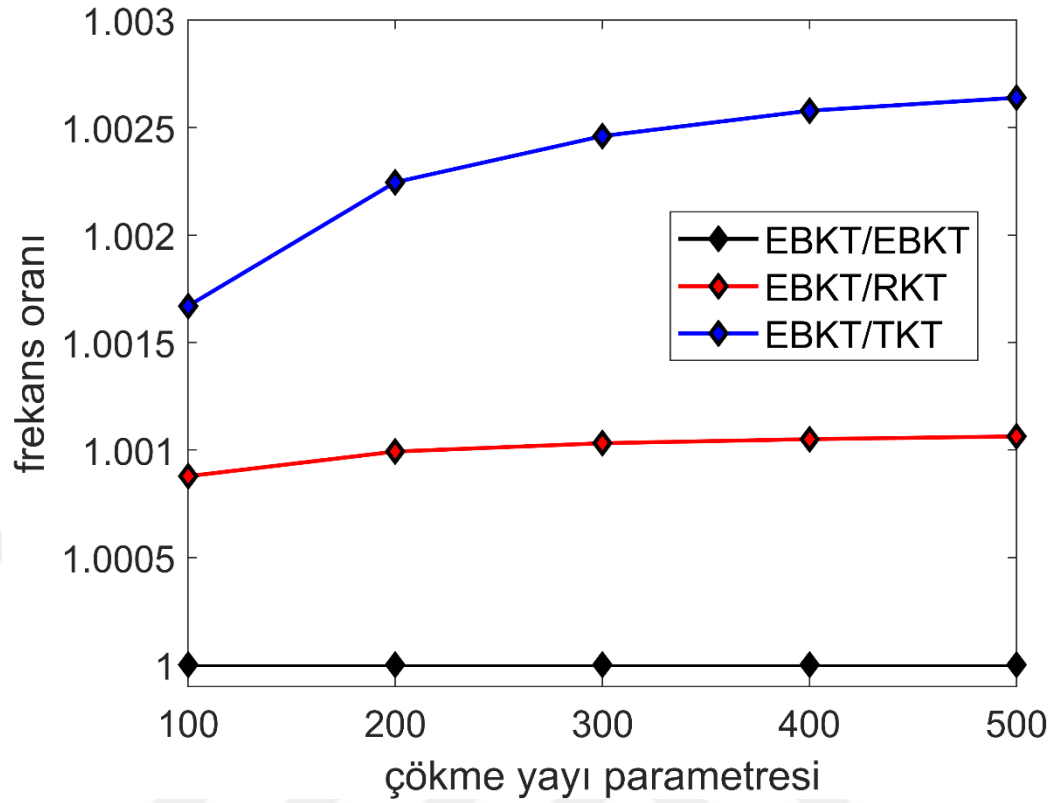
Şekil 4.6. Fonksiyonel derecelendirilmiş yerel olmayan kompozit nanokirişlerin boyutsuz frekanslarının Winkler parametresine göre değişimi ($\overline{c_g} = \mathbf{0}$ & mod 1 & EBKT)

Şekil 4.6, gözeneksiz ve gözenekli yerel olmayan Euler-Bernoulli kompozit nanokirişlerinin Winkler zemini etkisindeki boyutsuz frekanslarının değişimini, çeşitli $\overline{c_w}$ değerleri için sunmaktadır. Burada asıl vurgulanmak istenen durum, nanokiriş çeşitlerinin Winkler zemininden etkilenme derecelerinin karşılaştırılmasıdır. $\overline{c_w} = 20$'ye gelene kadar zemin etkisiz durumda gözlemlenen frekans sıralaması aynı kalırken daha yüksek $\overline{c_w}$ değerlerinde bu sıralama değişmeye başlar. FDK-DD-I'in frekansları FDK-I'den, FDK-DD-II'in frekansları da FDK-II'den daha düşük iken $\overline{c_w} = 40$ olduğunda gözenekli nanokirişlerin frekansları daha yüksek değerler alır. Buradan, homojen dağılımlı gözeneklere sahip FD kompozit nanokirişlerin Winkler parametresinden daha fazla etkilendiği çıkarımı rahatlıkla yapılabilir.



Şekil 4.7. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit yerel olmayan nanokirişlerin boyutsuz frekanslarının çökme yayı parametresine göre değişimi ($\overline{c_w} = \overline{c_g} = \mathbf{10}$ & TKT)

Şekil 4.7, eşit değerlere sahip boyutsuz çökme yayı parametrelerinin ($\overline{T}_0 = \overline{T}_L$) fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli ve gözeneksiz nanokirişlerin boyutsuz frekanslarına etkisini göstermektedir. Birinci mod için düşünülen bu çalışmada, Timoshenko kiriş teorisi kullanılmıştır. $\overline{T}_0 = \overline{T}_L$ değerlerinde meydana gelen artış, yerel olmayan frekanslarda da artış meydana getirmektedir. Burada, düşük $\overline{T}_0 = \overline{T}_L$ değerlerinde meydana gelen artışın frekanslarda daha yüksek oranda değişimler meydana getirdiği gözlemlenmektedir. $\overline{T}_0 = \overline{T}_L$ değeri arttıkça frekanslar birbirine yaklaşmakta ve değişim azalmaktadır.



Şekil 4.8. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit yerel olmayan nanokirişlerin frekans oranlarının çökme yayı parametresine göre değişimi ($\overline{c_w} = \overline{c_g} = \mathbf{10}$ & FDK-O-II)

Şekil 4.8'de, eşit değerlere sahip boyutsuz çökme yayı parametrelerinin ($\overline{T}_0 = \overline{T}_L = 100,200,300,400,500$) Euler-Bernoulli, Timoshenko ve Rayleigh nanokirişlerin frekans oranlarına etkisi gösterilmektedir. Bu örnekte, Euler-Bernoulli kiriş teorisi ile elde edilen frekansların, incelenen her kiriş teorisinin frekanslarına bölünmesiyle frekans oranları elde edilir. Burada amaç, dönel atalet ve dönel atalet ile kaymanın bir arada düşünüldüğü durumların (sırasıyla Rayleigh ve Timoshenko kiriş teorisinin) çökme yay parametresine göre etkilerini göstermektir. Euler-Bernoulli teorisi yine kendisine bölündüğünden frekans oranları sabit, en düşük ve birdir. Dönel atalet ile kaymanın bir arada kullanılması, frekansları daha çok düşürdüğü için frekans oranı en fazladır. Görüleceği üzere, $\overline{T}_0 = \overline{T}_L$ arttıkça EBKT/RBT ve EBKT/TKT ile ifade edilen frekans oranları da artmaktadır. Buradan, incelenen aralık için, yüksek çökme yayı rijitliklerinde kiriş teorisinin öneminin daha fazla olduğu anlaşılmaktadır.

Çizelge 4.15'te ve 4.16'da, Winkler-Pasternak zemini üzerindeki klasik homojen kirişlerin kritik burkulma yüklerinin Naidu ve Rao (1995) tarafından sunulan çalışma ile karşılaştırılması yapılmıştır. İlk çizelge iki parametreli zemin üzerindeki her iki ucu basit mesnetli bir klasik kiriş için verilmiştir. Bu karşılaştırmada hem çökme yaylarına sahip hem de dönel yaylara sahip nanokirişler için hesaplanan özdeğer problemlerini kullanabiliriz. Çizelge 4.15 ile gösterilen ilk karşılaştırmada, Naidu ve Rao (1995) tarafından sonlu elemanlar yöntemi ile hesaplanan boyutsuz burkulma yükleri ile bu çalışmada hesaplanan boyutsuz burkulma yükleri sunulmuştur. Bu çalışmada verilen özdeğer problemleri, yani Denklemler (3.98) ve (3.108) ile yerel olmayan parametrenin sıfır alınmasıyla yapılan çözümlerde yirmi terim kullanılmıştır. Görüleceği üzere mükemmel bir uyum yakalanmıştır.

Çizelge 4.15. Klasik homojen Euler-Bernoulli kirişlerinin boyutsuz burkulma yüklerinin karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet)

	$\overline{c_g} = 0{,}5$			$\overline{c_g} = 1{,}0$		
$\overline{c_w}$	Naidu ve Rao (1995)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$ $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$		Naidu ve Rao (1995)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$ $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$	
0,0	14,804	14,8044	14,8044	19,739	19,7392	19,7392
1,0	14,9067	14,9057	14,9057	19,84	19,8405	19,8405
100	24,937	24,9365	24,9365	29,87	29,8713	29,8713

Çizelge 4.16 ile gösterilen karşılaştırmada Naidu ve Rao (1995) tarafından, sonlu elemanlar yöntemi ile hesaplanan boyutsuz burkulma yükleri ile bu çalışmada hesaplanan boyutsuz burkulma yükleri ankastre mesnet için sunulmuştur. Bu karşılaştırma için denklem (3.108) kullanılmıştır ve yerel olmayan parametre sıfır alınmıştır. Yüz kırk terim ile yapılan çözümde güzel bir uyum yakalanmıştır. Ancak şunu belirtmek gerekir ki; terim sayısı daha yüksek kullanılsaydı daha iyi bir uyum yakalanacaktı. Bu çalışma için bu yakınsama yeterli görüldüğü için yüz kırk terimli sonuçlar verilmiştir.

Çizelge 4.16. Klasik homojen Euler-Bernoulli kirişlerinin boyutsuz burkulma yüklerinin karşılaştırılması (ankastre mesnet-ankastre mesnet)

	$\overline{c_g} = 0{,}5$		$\overline{c_g} = 1{,}0$	
$\overline{c_w}$	Naidu ve Rao (1995)	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{10}$	Naidu ve Rao (1995)	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{10}$
0,0	44,414	44,6428	49,349	49,5776
1,0	44,490	44,7183	49,425	49,6531
100	51,942	52,1279	56,877	57,0627

Çizelge 4.17'de yerel olmayan teoriye göre karşılaştırma yapılmıştır. Yirmi terim ve Denklemler (3.98) ve (3.108) ile gerçekleştirilen bu çözümde dört farklı yerel olmayan parametre değeri kullanılmıştır. Dönel atalet ve zemin etkilerinin ihmal edildiği bu karşılaştırmada mükemmel bir uyum yakalanmıştır.

Çizelge 4.17. Yerel olmayan Euler-Bernoulli nanokirişlerinin boyutsuz burkulma yüklerinin karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet, $L/h = 50$)

$e_0a = 0\ nm$		$e_0a = \sqrt{1}\ nm$	
Aydoğdu (2009)	Bu çalışma	Aydoğdu (2009)	Bu çalışma
9,8696	$\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$ 9,8696 $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$ 9,8696	9,8308	$\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$ 9,83079 $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$ 9,83079
$e_0a = \sqrt{2}\ nm$		$e_0a = \sqrt{3}\ nm$	
Aydoğdu (2009)	Bu çalışma	Aydoğdu (2009)	Bu çalışma
9,7923	$\overline{T_1} = \overline{T_2} = 10^{10}$ 9,79229 $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$ 9,79229	9,7541	$\overline{T_1} = \overline{T_2} = 10^{10}$ 9,75408 $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$ 9,75408

Çizelge 4.18'de yerel olmayan teoriye göre Euler-Bernoulli nanokirişlerinin burkulma yükleri, çeşitli terim sayıları için karşılaştırılmıştır. Nanokirişin elastisite modülü $E = 1000\ GPa$, çapı $d = 1\ nm$'dir. Ankastre mesnet için yapılan bu karşılaştırma

çalışmasında, zemin etkisi ihmal edilmiştir. Bu karşılaştırma çalışması ile terim sayısının önemi burkulma analizi için de vurgulanmış olur. Ayrıca, burkulma yükleri boyutlu formda elde edilmiş olup birimi nN'dur. Sonuçların uyumlu olduğu kolaylıkla gözlemlenebilir.

Çizelge 4.18. Yerel olmayan Euler-Bernoulli nanokirişlerinin burkulma yüklerinin (nN) karşılaştırılması (ankastre mesnet-ankastre mesnet, $L/h = 20$)

e_0a (nm)	Wang vd. (2006)	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{10}$			
0,0	4,8447	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
		5,04747	4,9784	4,9444	4,92425
		$n = 60$	$n = 70$	$n = 80$	$n = 90$
		4,91085	4,90133	4,8942	4,88866
		$n = 100$	$n = 110$	$n = 120$	$n = 130$
		4,88424	4,88063	4,87762	4,87508
		$n = 140$	$n = 150$	$n = 160$	$n = 170$
		4,8729	4,87102	4,86937	4,86791
0,5	4,72807	$n = 130$	$n = 140$	$n = 150$	$n = 160$
		4,7570	4,7549	4,7531	4,75153

Çizelge 4.19'da fonksiyonel derecelendirilmiş klasik Timoshenko kirişlerinin boyutsuz burkulma yükleri çeşitli malzeme değişim katsayısı için karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma için kullanılan parametreler şu şekildedir: $E_m = 70\ GPa$, $E_s = 380\ GPa$, $\upsilon = 0{,}3$, $\bar{P} = 12PL^2/E_m h^3$, $\kappa = 5/6$. Kahya ve Turan (2017) boyutsuz burkulma yüklerini sonlu elemanlar yöntemi ile elde etmişlerdir. Kahya ve Turan (2017)'nın sonuçları, bu tezde gerçekleştirilen yirmi terimli sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Zemin ve boyut etkilerinin sıfır alındığı bu karşılaştırmada çok iyi bir uyum yakalanmıştır.

Çizelge 4.19. Fonksiyonel derecelendirilmiş klasik Timoshenko kirişlerinin boyutsuz burkulma yüklerinin karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet, $L/h = 5$)

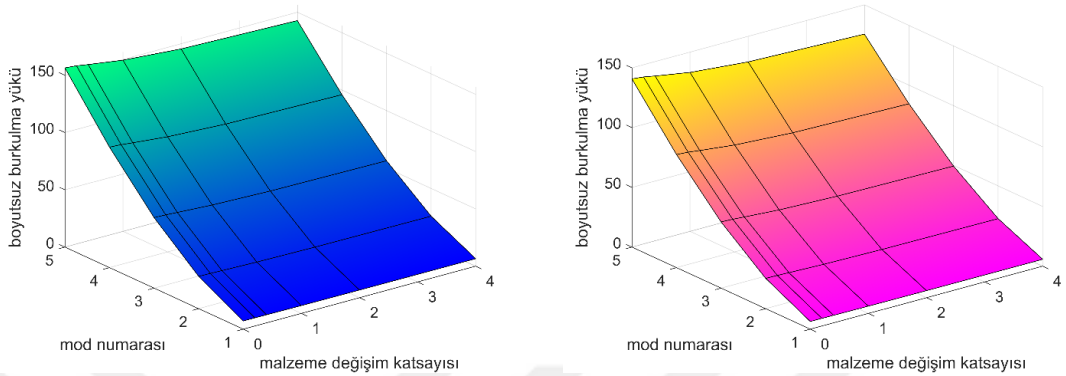
p	Kahya ve Turan (2017)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$
0,0	48,5907	48,5904	48,5904
1,0	24,5815	24,5814	24,5814
2,0	19,1617	19,1616	19,1616
5,0	15,9417	15,9417	15,9417
10,0	14,3445	14,3445	14,3445

Sırada, fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli ve gözeneksiz kompozit nanokirişlerin yerel olmayan elastisite teorisine dayanan burkulma yüklerinin incelenmesi vardır. Bu çözümler için terim sayısı yirmi alınmıştır. İlk olarak, sigmoid dağılımına uyan fonksiyonel derecelendirilmiş gözeneksiz (FDK-I) ve gözenekli (FDK-DD-I) nanokirişlerin burkulma yüklerine malzeme değişim katsayısının etkisi Şekil 4.9 ile gösterilmiştir. Malzeme değişim katsayının artması, burkulma yüklerinin azalmasına neden olmaktadır. Ayrıca, yüksek modlarda daha yüksek burkulma yükleri elde edilse de kritik burkulma yükü yapısal elemanlar için çok daha önemlidir. Fonksiyonel derecelendirilmiş nanokirişte gözeneklerin bulunması elastisite modülünü azalttığı için burkulma yüklerini düşürmektedir. Görüleceği üzere, fonksiyonel derecelendirilmiş gözeneksiz nanokirişlerin burkulma yükleri daha yüksektir. Ayrıca, gözenekli nanokirişin burkulma yükleri, malzeme değişim katsayısının artmasıyla gözeneksiz nanokirişinkilere kıyasla daha fazla düşmektedir. Malzeme değişim katsayısı, gözenekli nanokirişin burkulma yükleri üzerinde daha büyük öneme sahiptir.

Şekiller 4.10 – 4.12 sırasıyla FDK-I, FDK-DD-I VE FDK-O-I'in artan yerel olmayan parametreye göre değişen burkulma yüklerini ilk iki mod için gösterir. $\overline{c_w} = 10^{-10}$ ve $\overline{c_g} = 0$ alınarak verilen bu analizlerde, yerel olmayan parametrenin burkulma yükünü azalttığı görülür. Burkulma yüklerinin değişimi incelendiğinde, kritik burkulma yüklerinde meydana gelen değişimin daha az olduğu anlaşılır. Ayrıca, en yüksek burkulma yüklerinin FDK-I ve en düşük burkulma yüklerinin FDK-DD-I için elde

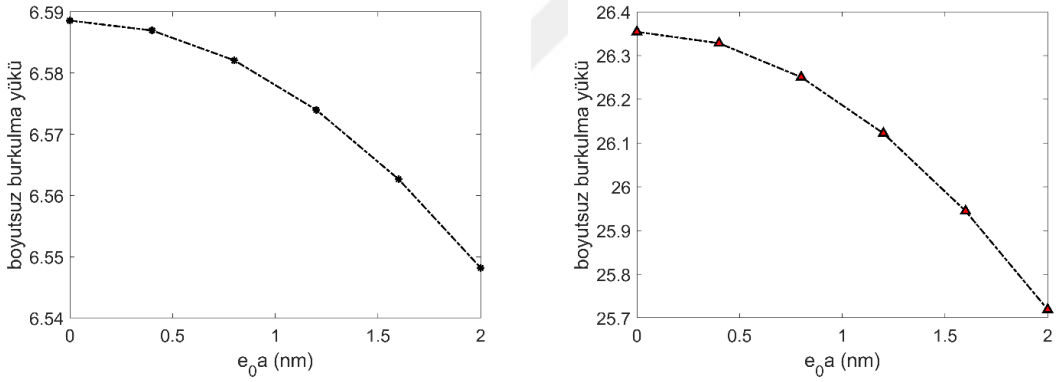
edildiğine dikkat çekmek gerekmektedir. Kesitteki gözeneklerin artması burkulma yüklerinde azalmaya neden olmaktadır.

FDK-I FDK-DD-I



Şekil 4.9. Fonksiyonel derecelendirilmiş yerel olmayan nanokirişlerin boyutsuz burkulma yüklerinin mod numarası ve malzeme değişim katsayısına göre değişimi ($\overline{c_w} = 10^{-10}$ & $\overline{c_g} = 0$)

Mod 1 Mod 2

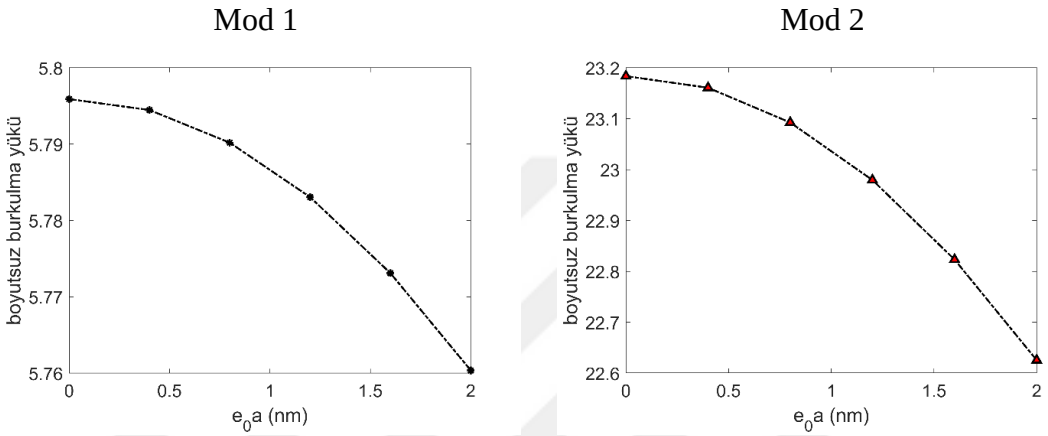


Şekil 4.10. FDK-I nanokirişlerin boyutsuz burkulma yüklerinin yerel olmayan parametreye göre değişimi ($\overline{c_w} = 10^{-10}$ & $\overline{c_g} = 0$)

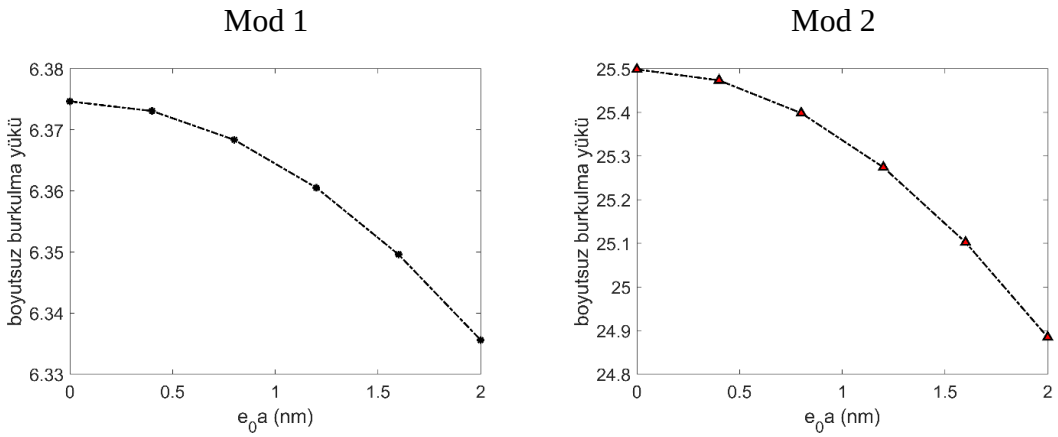
Şekiller 4.13 ve 4.14 ile Pasternak parametresinin hem Winkler parametresi üzerindeki hem de nanokiriş çeşitleri üzerindeki etkilerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla, Winkler parametresine bağlı olan ($\overline{c_w} = 40$) ve olmayan ($\overline{c_w} = 10^{-10}$) durumlar çizilmiştir. $\overline{c_g}$'nin artmasıyla, $\overline{c_w} = 10^{-10}$ düşünülen durum için daha yüksek burkulma yükü oranları elde edilmektedir. Buradan, Winkler parametresinin değeri arttıkça Pasternak parametresinin etkisi azaldığı anlaşılır. Diğer bir çıkarım ise gözenekli ve gözeneksiz durumlar için yapılabilir. Gözenekli nanokirişlerin burkulma yükü oranları

gözeneksiz olanlara kıyasla daha yüksektir. Burada, $\overline{c_g}$'nin etkisinin FDK-DD-I ve FDK-DD-II için daha dikkat çekici olduğu anlaşılır. Sigmoid ve güç kuralına uyan nanokirişler kıyaslandığında ise $\overline{c_g}$'nin etkisinin güç kuralına uyan nanokiriş için daha yüksek olduğu anlaşılır. Bu örneklerde verilen burkulma yükü oranları aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$burkulma\ yükü\ oranı = \frac{\overline{c_g} > 0\ için\ \overline{P^{YOET}}}{\overline{c_g} = 0\ için\ \overline{P^{YOET}}} \tag{4.9}$$

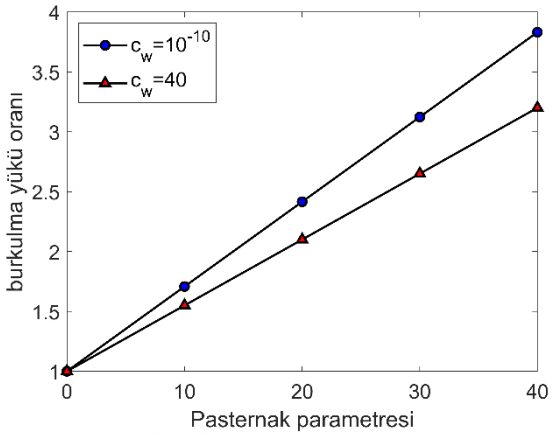


Şekil 4.11. FDK-DD-I nanokirişlerin boyutsuz burkulma yüklerinin yerel olmayan parametreye göre değişimi ($\overline{c_w} = \mathbf{10^{-10}}$ & $\overline{c_g} = \mathbf{0}$)

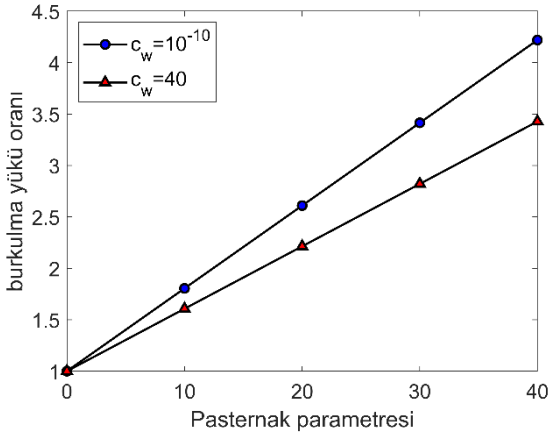


Şekil 4.12. FDK-O-I nanokirişlerin boyutsuz burkulma yüklerinin yerel olmayan parametreye göre değişimi ($\overline{c_w} = \mathbf{10^{-10}}$ & $\overline{c_g} = \mathbf{0}$)

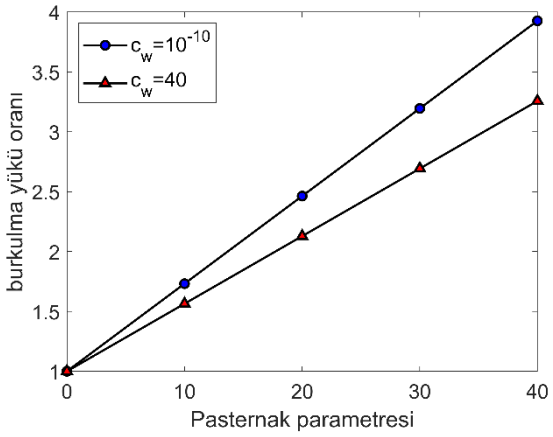
FDK-I



FDK-DD-I

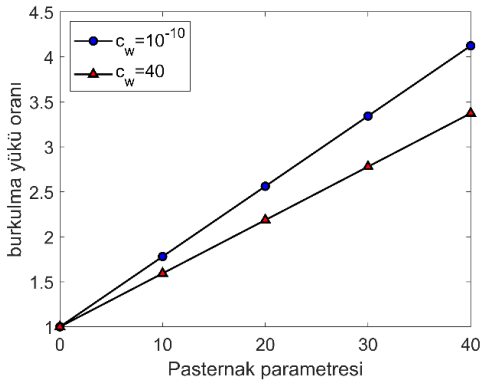


FDK-O-I

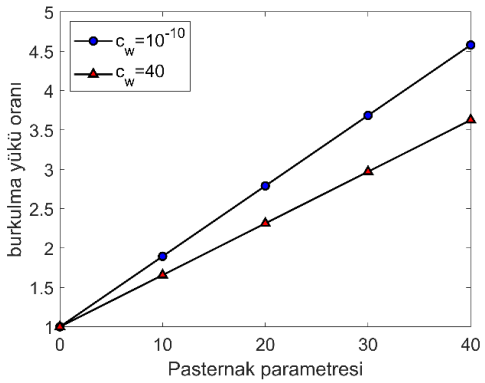


Şekil 4.13. Sigmoid kuralına uyan FD nanokirişlerin burkulma yükü oranlarının Pasternak parametresine göre değişimi

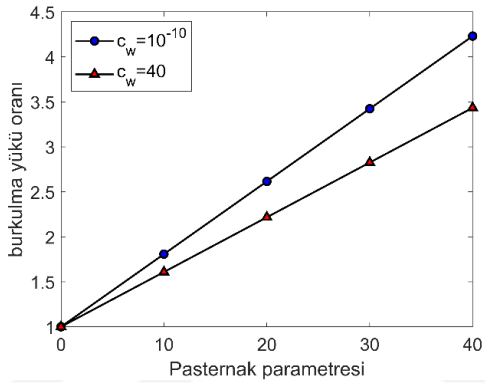
FDK-II



FDK-DD-II



FDK-O-II



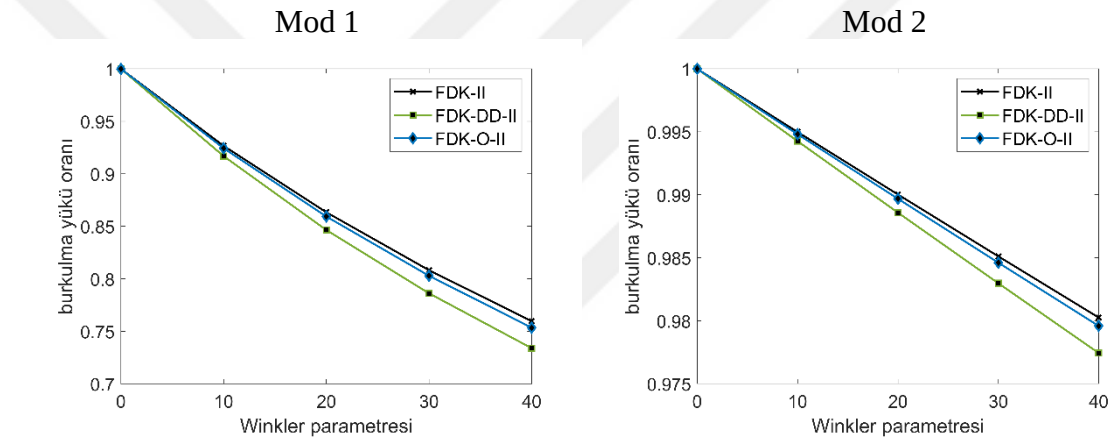
Şekil 4.14. Güç kuralına uyan FD nanokirişlerin burkulma yükü oranlarının Pasternak parametresine göre değişimi

Winkler zemininin fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin burkulma yükleri üzerindeki etkisini incelemek için Şekil 4.15 verilmiştir. Bu inceleme, burkulma yükü oranları ile sunulmuştur ve burkulma yükü oranı bu örnek için aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$burkulma\ yükü\ oranı = \frac{\overline{c_w} = 10^{-10}\ için\ \overline{P^{YOET}}}{\overline{c_w} > 0\ için\ \overline{P^{YOET}}} \tag{4.10}$$

Görüleceği üzere, Winkler parametresi ($\overline{c_w}$) arttıkça boyutsuz burkulma yükü değerlerinde azalma meydana gelir. Bunun sebebi, $\overline{c_w}$ arttıkça nanokirişin güçlenmesi ve zemin etkisinden bağımsız durum ile arasındaki farkın açılmasıdır. Burada göze çarpan ilk durum birinci moda ait boyutsuz burkulma yükü oranlarının ikinci moda ait olanlara göre daha düşük olmasıdır. Bu da demek olur ki Winkler zemininin etkisi kritik burkulma

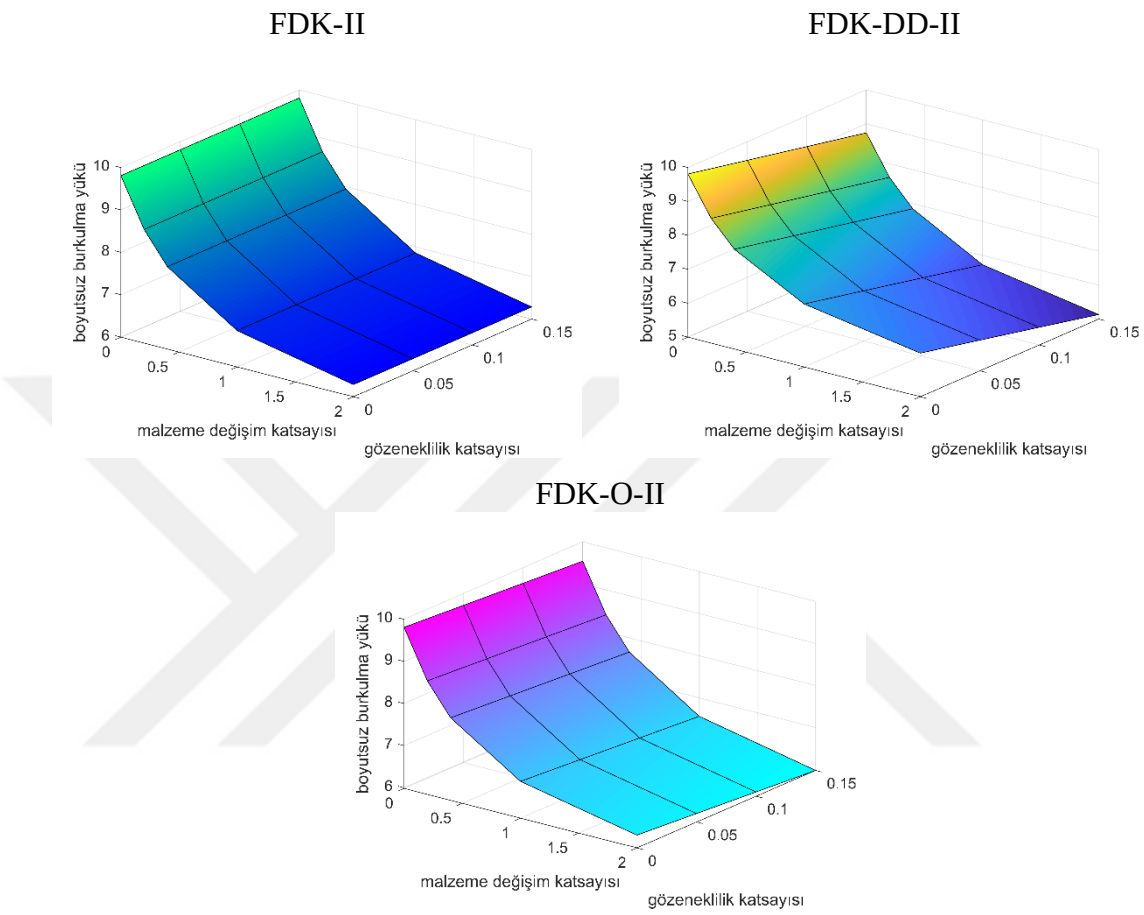
yükü için çok daha önemli değişimlere sebep olmaktadır. Bu sonuç, literatürdeki başka makaleler tarafından da desteklendiği ve mod numarası arttıkça $\overline{c_w}$'nin etkisi daha da azaldığı için daha yüksek modlar için değişimler gösterilmemiştir. Burada, bu çalışmanın amacına da uygun olarak vurgulanması gereken çok önemli bir nokta, $\overline{c_w}$'nin değişik gözenek dağılımlarına sahip nanokirişlerin burkulma yüklerine olan etkisidir. Görüleceği üzere, incelenen her bir nanokirişin boyutsuz burkulma yükü oranları grafiklerden seçilmektedir. En yüksek oranlar FDK-II için hesaplanırken en düşük boyutsuz burkulma yükü oranları FDK-DD-II için elde edilmiştir. Buradan, Winkler zemininin en çok yükseklik boyunca eşit dağılım gösteren gözeneğe sahip nanokirişleri, en az ise gözeneksiz fonksiyonel derecelendirilmiş nanokirişleri etkilediği anlaşılır.



Şekil 4.15. Güç kuralına uyan FD nanokirişlerin burkulma yükü oranlarının Winkler parametresine göre değişimi

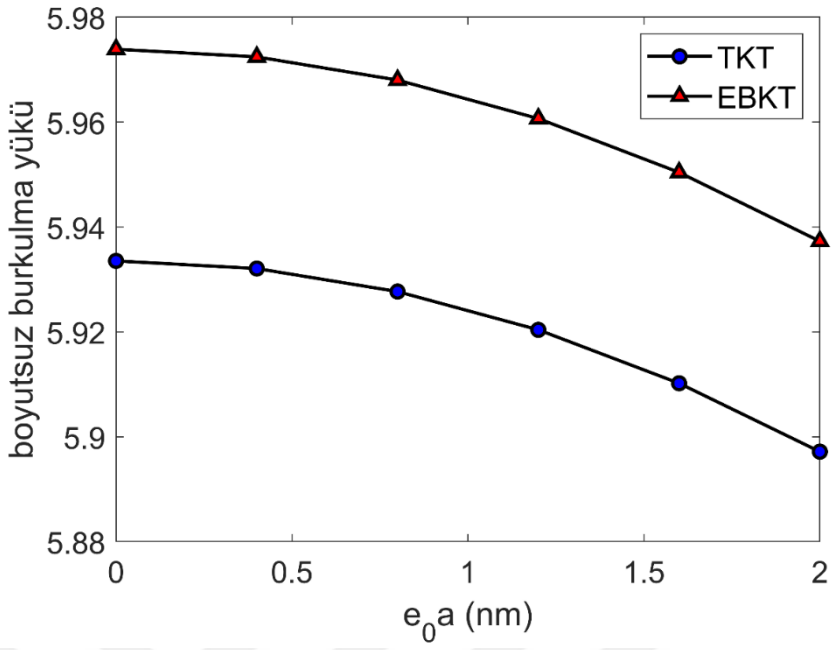
Şekil 4.16'da, gözeneklilik katsayısı ve malzeme değişim katsayısının etkileri birlikte analiz edilmiştir. Bu analiz için beş farklı malzeme değişim katsayısı, dört farklı gözeneklilik katsayısı seçilmiştir ve zemin etkileri ihmal edilmiştir. FDK-II gözeneklilikten bağımsız olduğu için gözeneklilik parametresinin değişiminden etkilenmez, sadece malzeme değişim katsayısının değişiminden etkilenir ve tekrar etmek gerekirse burkulma yükleri, malzeme değişim katsayısı arttıkça azalır. Diğer kompozit nanokiriş tiplerinde ise artan gözeneklilik katsayısı ile burkulma yüklerindeki azalma net bir şekilde gözlemlenebilmektedir. Burada incelenmesi gereken asıl kısım, malzeme değişim katsayısının gözeneklilik katsayısı üzerindeki etkisidir. Daha yüksek p değerlerinde, gözeneklilik katsayısındaki değişimin burkulma yüklerinde daha fazla bir azalmaya yol açtığı sonucuna varılmıştır. Bu da, yüksek p değerlerinde, gözenekliliğin

FD nanokirişin burkulma yüklerinde daha etkili olduğu anlamına gelmektedir. Bunlara ek olarak, gözenekilik katsayının FDK-DD-I nanokirişinin burkulma yüklerinde daha etkili olduğu fark edilmekttedir.

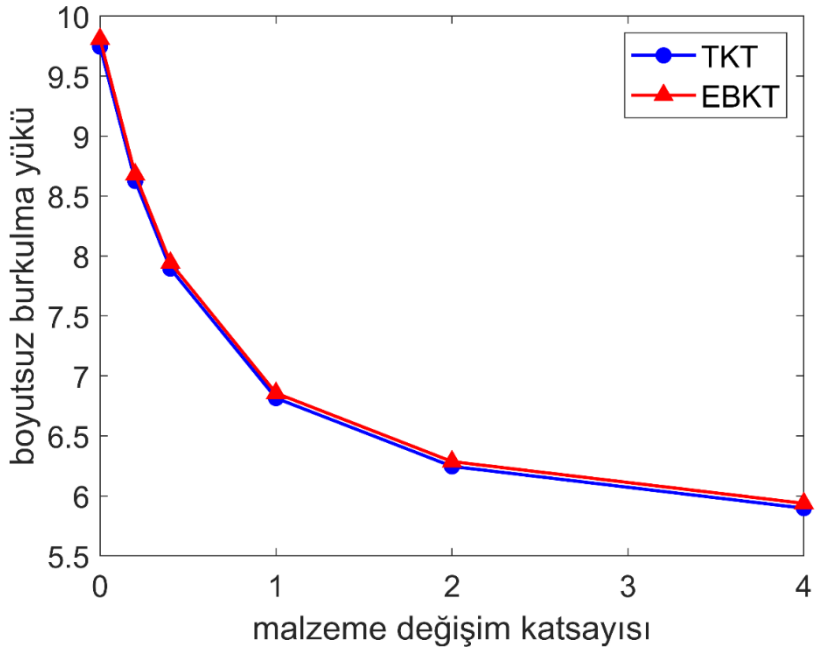


Şekil 4.16. Güç kuralına uyan FD nanokirişlerin burkulma yüklerinin malzeme değişim katsayısı ve gözeneklilik katsayısına göre değişimi

Şekiller 4.17 ve 4.18, Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine göre elde edilen burkulma yüklerini karşılaştırmaktadır. Bu örnekler için zemin etkisi ihmal edilmiş ve FDK-II nanokirişlerinin özellikleri kullanılmıştır. Yerel olmayan parametrenin ve malzeme değişim katsayısının artışı ile burkulma yüklerinde meydana gelen azalmaların her iki kiriş teorisi için de geçerli olduğu açıkça görülür. Timoshenko kiriş teorisine göre elde edilen sonuçlar titreşimde olduğu gibi burkulmada da daha düşüktür. Euler-Bernoulli kiriş teorisi kayma etkilerini inceleyemediğinden daha yüksek sonuçlar vermektedir.



Şekil 4.17. FD Euler-Bernoulli ve Timoshenko nanokirişlerinin burkulma yüklerinin yerel olmayan parametreye göre değişimi



Şekil 4.18. FD Euler-Bernoulli ve Timoshenko nanokirişlerinin burkulma yüklerinin malzeme değişim katsayısına göre değişimi

Şimdiye kadar, fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin yerel olmayan elastisite teorisine dayanan titreşim ve burkulma analizleri gerçekleştirilmiştir. Şimdi ise, değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan titreşim ve burkulma analizleri sunulacaktır. Analizlere geçmeden önce litertürde bulunan bazı çalışmalar ile karşılaştırmalar yapılacaktır. İlk karşılaştırma, Toğun ve Bağdatlı (2016b) tarafından sunulan boyutsuz titreşim frekanslarını Çizelge 4.20 ile sunar. Çizelge 4.20 her iki ucu basit mesnet durumu için hesaplanan boyutsuz titreşim frekanslarını otuz terim ile gerçekleştirilen çözümler ile karşılaştırmıştır. Çizelge 4.21'de ise her iki ucu ankastre mesnet durumu için karşılaştırma sunulmuştur ve yüz kırk terim kullanılmıştır. Her iki çizelgede de kullanılan parametreler şu şekildedir: $E = 1{,}44\ GPa,\ \rho = 1220\ kg/m^3,\ \upsilon = 0{,}38.$ Frekanslar arasında güzel bir uyum yakalandığı açıktır.

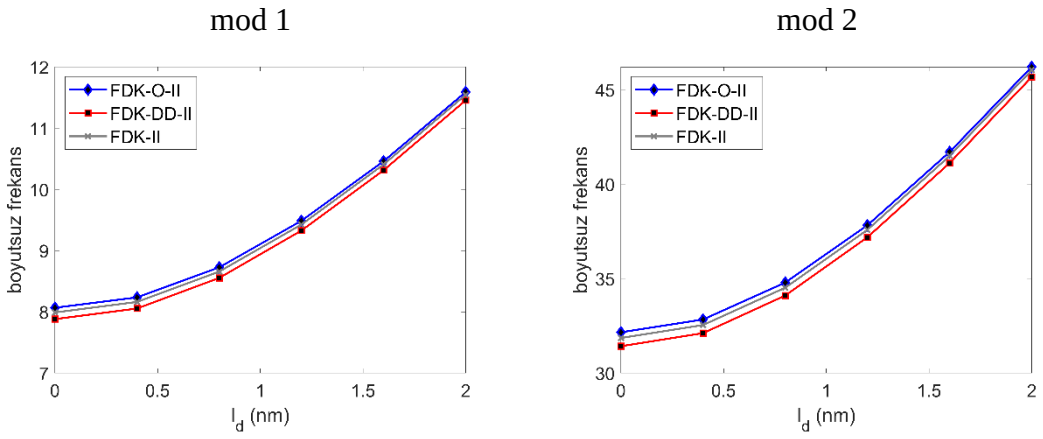
Çizelge 4.20. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan homojen küçük ölçekli kirişlerin boyutsuz titreşim frekanslarının karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet)

		$h/l_d = 1$	
mod numarası	Toğun ve Bağdatlı (2016b)	Bu tez $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$	Bu tez $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$
1	22,8238	22,8238	22,8238
2	91,2953	91,2953	91,2953
3	205,414	205,414	205,414
4	365,181	365,181	365,181
5	570,596	570,595	570,596
		$h/l_d = 2$	
mod numarası	Toğun ve Bağdatlı (2016b)	Bu tez $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$	Bu tez $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$
1	14,2579	14,2579	14,2579
2	57,0317	57,0317	57,0317
3	128,321	128,321	128,321
4	228,127	228,127	228,127
5	356,448	356,448	356,448

Çizelge 4.21. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan homojen küçük ölçekli kirişlerin boyutsuz titreşim frekanslarının karşılaştırılması (ankastre mesnet-ankastre mesnet)

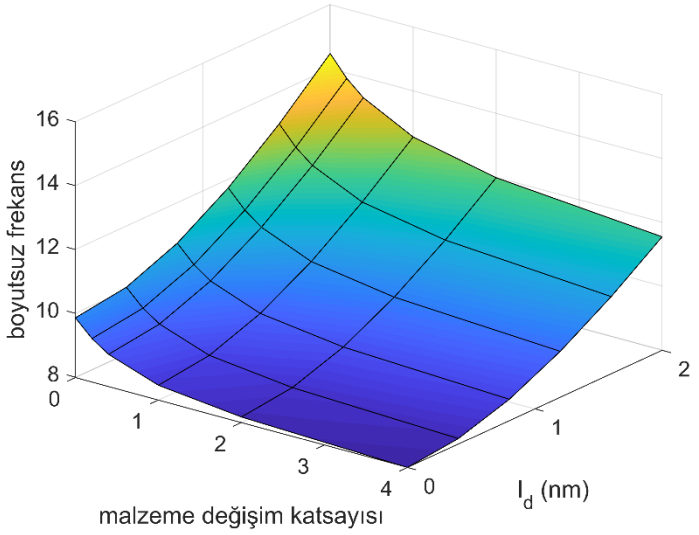
	$h/l_d = 1$	
mod numarası	Toğun ve Bağdatlı (2016b)	Bu tez $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{10}$
1	51,739	52,042
2	142,621	143,454
3	279,594	281,246
4	462,182	464,906
5	690,421	694,538
	$h/l_d = 2$	
mod numarası	Toğun ve Bağdatlı (2016b)	Bu tez $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{10}$
1	32,3211	32,5103
2	89,0944	89,6147
3	174,661	175,693
4	288,723	290,425
5	431,302	433,875

Bu aşamada, FD kompozit nanokirişlerin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan titreşim analizleri sunulacaktır. Başka bir durum belirtilmedikçe, $p = 4$, $l_d = 2\ nm$, $\vartheta = 0{,}1$, $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$, $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$ ve $n = 30$ değerleri ile çözümler gerçekleştirilecektir. Şekil 4.19'da, gözenekli ve gözeneksiz FD nanokirişlerin Rayleigh kiriş teorisi ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre elde edilen boyutsuz titreşim frekansları gösterilmiştir. Bu analizde malzeme uzunluk ölçek parametresi l_d, altı farklı değerde düşünülmüştür. Malzeme uzunluk ölçek parametresi, nanokirişte boyut etkisini değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre inceler. Görüleceği üzere, l_d arttıkça boyutsuz frekans değerlerinde de artış meydana gelir. Ayrıca bu örnekte, gözenekli ve gözeneksiz nanokirişlerin frekansları da değiştirilmiş gerilme çifti teorisinin etkisi ile karşılaştırılmıştır. En yüksek frekans değerleri FDK-O-II için elde edilirken en düşük frekans değerleri FDK-DD-II için elde edilmiştir.



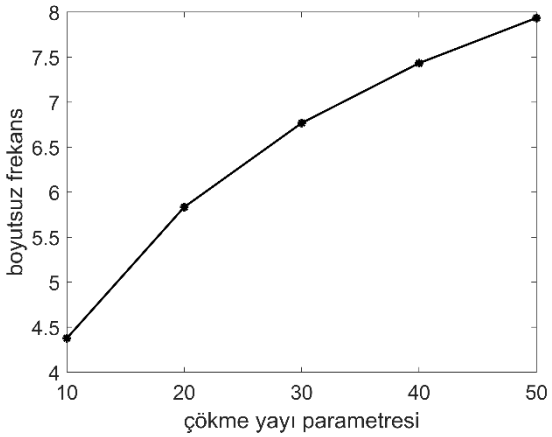
Şekil 4.19. FD Rayleigh nanokirişlerinin boyutsuz frekanslarının malzeme uzunluk ölçek parametresine göre değişimi

Şekil 4.20, FDK-II nanokirişinin boyutsuz frekanslarını malzeme değişim parametresi ve malzeme uzunluk ölçek parametresine göre gösterir. Artan l_d ve azalan p ile frekanslarda meydana gelen artış açık bir şekilde anlaşılır. Burada da rahatça gözlemlenir ki; p'nin küçük değerleri arasında meydana gelen değişim, boyutsuz frekanslarda daha büyük değişimler meydana getirmektedir. Buradan yapılacak bir diğer çıkarım ise l_d etkisidir. l_d'nin büyük değerleri arasında meydana gelen değişim, kompozit nanokirişin boyutsuz frekanslarında daha büyük değişimlere neden olmaktadır.

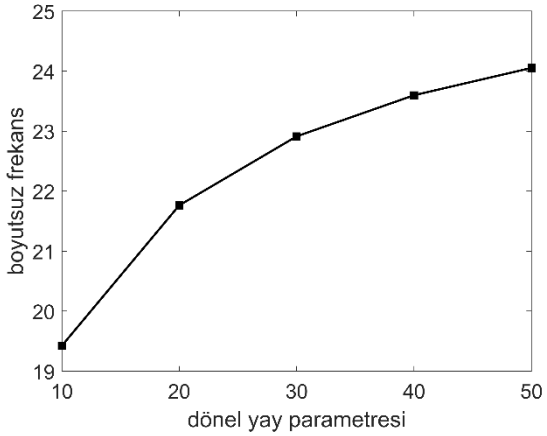


Şekil 4.20. FDK-II nanokirişinin boyutsuz frekanslarının $\boldsymbol{l_d}$ ve $\boldsymbol{p}$'ye göre değişimi (DGÇT & RKT)

Şekil 4.21 ve Şekil 4.22, FDK-II nanokirişinin Rayleigh kiriş teorisi ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre elde edilen boyutsuz titreşim frekanslarının değişimini sırasıyla, artan çökme yayı parametresi ve dönel yay parametresi için göstermektedir. Bu analizde yüz kırk terim kullanılmıştır. Şekil 4.21'de nanokirişin her iki ucundaki çökme yayı parametreleri eşit ve $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10, 20, 30, 40, 50$ olarak düşünülürken, Şekil 4.22'de nanokirişin her iki ucundaki dönel yay parametreleri eşit ve $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10, 20, 30, 40, 50$ olarak düşünülmüştür. Her iki durumda da anlaşılır ki; artan yay parametresi nanokirişin rijitliğini arttırır ve frekanslarda da artışa neden olur. Bu iki şekilden, düşük yay parametrelerinde meydana gelen artışın değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ile analiz edilen nanokirişlerin boyutsuz titreşim frekanslarında daha büyük değişimler meydana getirdiği anlaşılır. Ayrıca, incelenen aralıkta, çökme yayı parametresinde meydana gelen değişimin frekansların artışında daha büyük rol oynadığı anlaşılmaktadır.



Şekil 4.21. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin boyutsuz frekanslarının çökme yayı parametresine göre değişimi (DGÇT & RKT)



Şekil 4.22. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişlerin boyutsuz frekanslarının dönel yay parametresine göre değişimi (DGÇT & RKT)

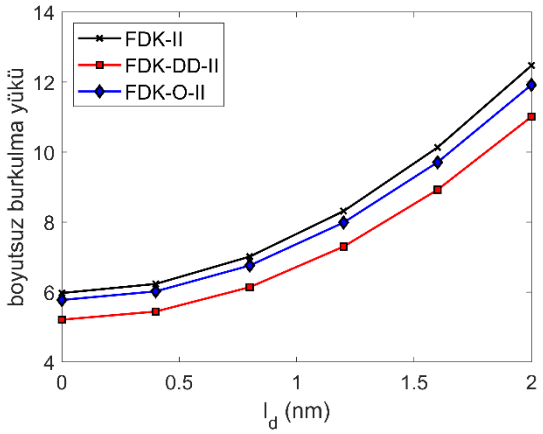
Çizelge 4.22'de homojen küçük ölçekli bir kirişin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan boyutsuz burkulma yükleri karşılaştırılmıştır. Akgöz ve Civalek (2011) tarafından sunulan bu çalışmada, Togun ve Bağdatlı (2016b) ile aynı malzeme özellikleri ($E = 1{,}44\ GPa,\quad \upsilon = 0{,}38$) kullanılmıştır. Her iki ucu basit mesnetli kirişin $l_d = 17600\ nm$ ve farklı yükseklik değerleri için verilen karşılaştırma çalışmasında otuz terim kullanılmıştır ve mükemmel bir uyum yakalandığı açıkça görülebilir.

Çizelge 4.22. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan homojen küçük ölçekli kirişlerin boyutsuz burkulma yüklerinin karşılaştırılması (basit mesnet-basit mesnet)

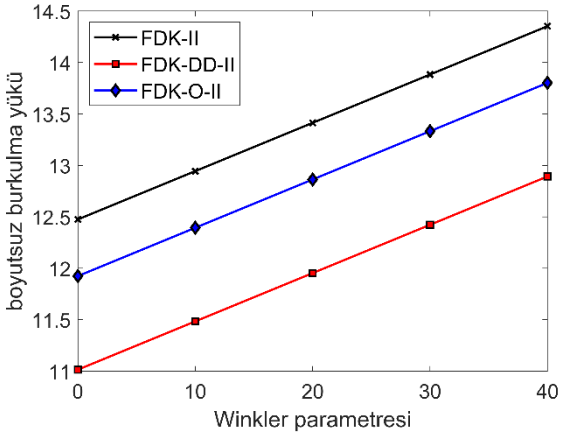
$h\ (nm)$	Akgöz ve Civalek (2011)	Bu tez $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$	Bu tez $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$
17600	52,7809	52,7809	52,7809
52800	14,6375	14,6375	14,6375
88000	11,5861	11,5861	11,5861
123200	10,7453	10,7453	10,7453
158400	10,3994	10,3994	10,3994

Şekil 4.23'te FD gözenekli ve gözeneksiz kompozit nanokirişlerin boyutsuz burkulma yükleri değişen l_d'ye göre gösterilmiştir. Bu örnek için $\overline{c_w} = 10^{-10}$ alınmıştır. Ayrıca, aksi belirtilmedikçe, değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan burkulma analizleri için kırk terim kullanıldığı belirtilmelidir. Titreşim analizine benzer olarak, l_d arttıkça burkulma yükerinde artış meydana geldiği gözlenir. En yüksek burkulma yüküne FDK-

II sahipken en düşük burkulma yüküne FDK-DD-II sahiptir. Şekil 4.24'te aynı üç nanokiriş için boyutsuz burkulma yüklerinin değişimi, artan $\overline{c_w}$ değerleri için gösterilmiştir. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan burkulma analizi için de Winkler zeminin burkulma yüklerinde artış meydana getirdiği rahatlıkla görülebilir. En yüksek ve en düşük burkulma yüküne sırasıyla FDK-II ve FDK-DD-II nanokirişlerinin sahip olduğu buradan da anlaşılabilir. Winkler parametresinin artmasıyla incelenen üç nanokirişin burkulma yüklerinde meydana gelen artışlar birbirine yakın olsa da FDK-DD-II nanokirişinin burkulma yüklerinde meydana gelen artış daha yüksek orandadır. Bununla beraber, en düşük artış oranı FDK-II için elde edilir.

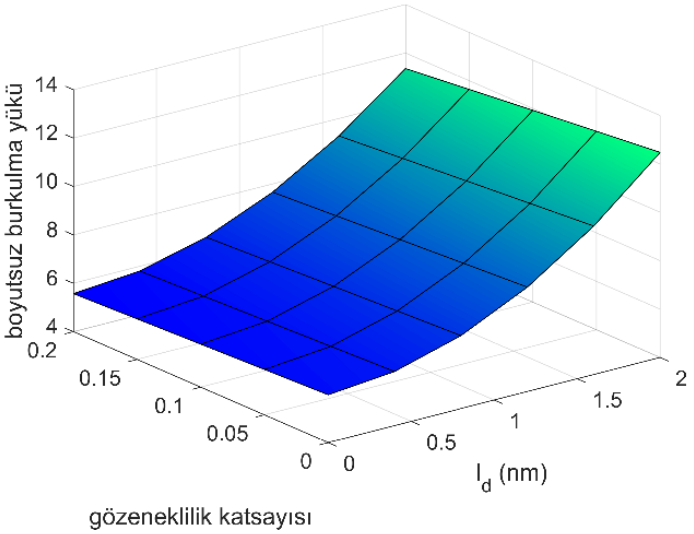


Şekil 4.23. FD kompozit nanokirişlerin boyutsuz burkulma yüklerinin malzeme uzunluk ölçek parametresine göre değişimi ($\overline{c_w} = 10^{-10}$)



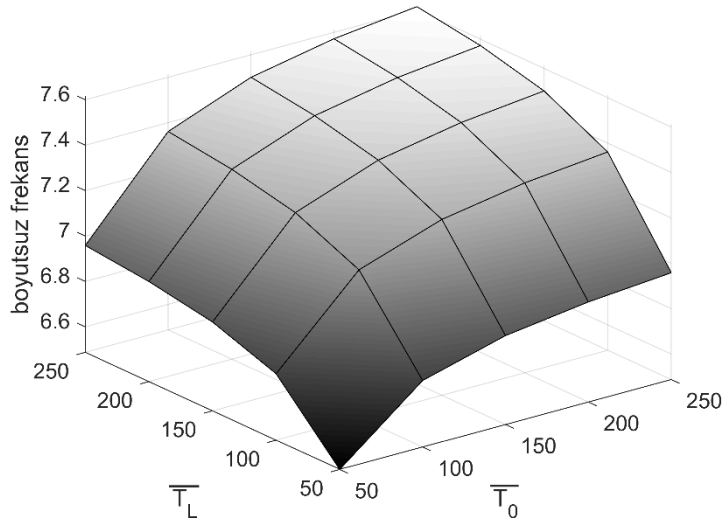
Şekil 4.24. FD kompozit nanokirişlerin boyutsuz burkulma yüklerinin Winkler parametresine göre değişimi (**DGÇT**)

Şekil 4.25'te malzeme uzunluk ölçek parametresinin ve gözeneklilik katsayısının etkileri, FDK-O-II için bir arada verilmiştir. Malzeme uzunluk ölçek parametresinin artışıyla burkulma yüklerinde meydana gelen artış bu örnekte de göze çarpmaktadır. Gözeneklilik katsayısının artması nanokirişin eğilme rijitliğinde ve kayma rijitliğinde azalmaya neden olduğundan burkulma yüklerini düşürmektedir. Ayrıca, bu örnekten gözeneklilik katsayısında meydana gelen artış ile burkulma yüklerinde meydana gelen azalmanın yüksek l_d değerleri için daha fazla göze çarptığı anlaşılmaktadır.

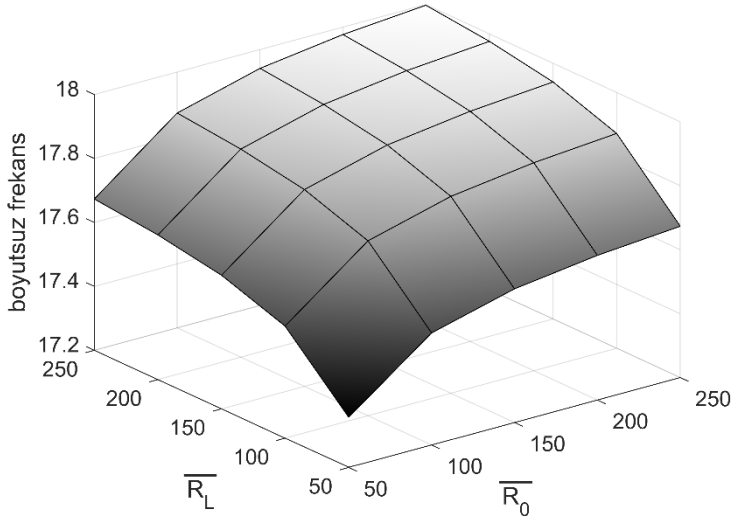


Şekil 4.25. FDK-O-II kompozit nanokirişinin boyutsuz burkulma yüklerinin $\boldsymbol{l_d}$ ve $\boldsymbol{\vartheta}$'ye göre değişimi

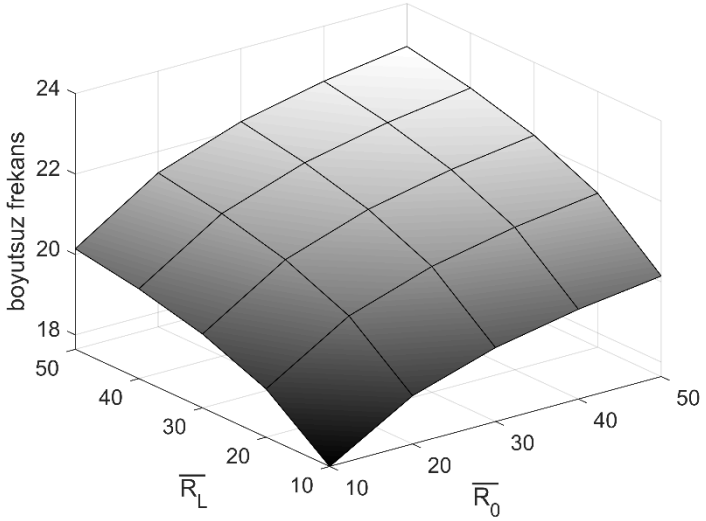
Şimdiye kadar verilen analizlerde, FD nanokirişlerin her iki ucunda bulunan elastik yaylara eşit rijitlikler atanmıştı. Ancak, sunulan çözüm yöntemi sınır koşullarının seçiminde esneklik sağlayarak yaylara eşit veya eşit olmayan sayısız rijitlik değeri atamamıza olanak verir. Bu bahsedilen özelliği göstermek için birkaç şekil sunulmuştur. Şekil 4.26 ve Şekil 4.27'de FDK-II kompozit nanokirişinin yerel olmayan elastisite teorisine dayanan frekansları sırasıyla değişen çökme yayı ve dönme yayı parametrelerine göre çizilmiştir. Şekil 4.28 ise FDK-II kompozit nanokirişinin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan frekanslarını değişen dönme yayı parametrelerine göre sunar. Bu örnekler için zemin etkisi ihmal edilmiştir. Yay parametrelerinin artması ile frekanslarda meydana gelen artış burada da açıkça görülür. Örneklerden de anlaşılacağı üzere yay rijitlikleri için sayısız kombinasyon elde edip incelemek mümkündür.



Şekil 4.26. FDK-II kompozit nanokirişinin boyutsuz frekanslarının $\overline{T_0}$ ve $\overline{T_L}$'ye göre değişimi (YOET & RKT)



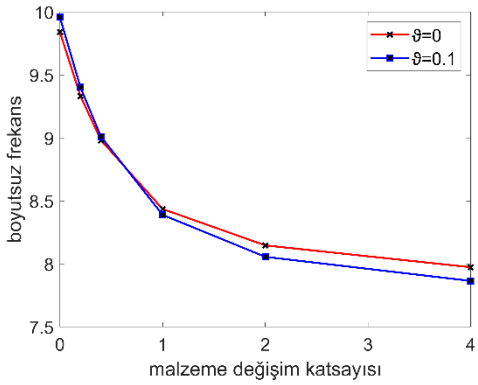
Şekil 4.27. FDK-II kompozit nanokirişinin boyutsuz frekanslarının $\overline{R_0}$ ve $\overline{R_L}$'ye göre değişimi (YOET & RKT)



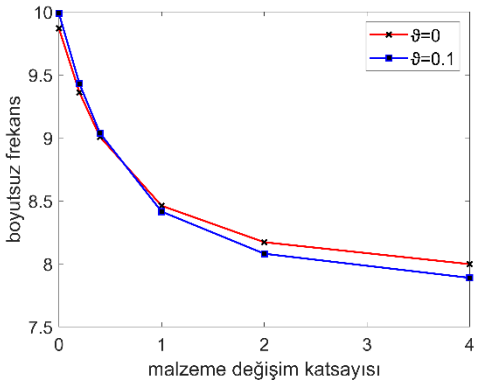
Şekil 4.28. FDK-II kompozit nanokirişinin boyutsuz frekanslarının $\overline{\boldsymbol{R_0}}$ ve $\overline{\boldsymbol{R_L}}$'ye göre değişimi (DGÇT & EBKT)

Şekil 4.29 ile hem p ve ϑ'nin etkileri bir arada incelenmiş hem de ele alınan teorilerin etkileri karşılaştırılmıştır. Bu analiz için zemin etkileri ihmal edilmiş, FDK-II ve FDK-DD-II nanokirişleri düşünülmüştür. Yerel olmayan elastisite teorisi ile elde edilen frekans değerleri için $e_0 a = 2\ nm$ ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ile elde edilen frekanslar için $l_d = 2\ nm$ alınmıştır. En küçük frekans değerleri YOET için elde edilmekle beraber sonuçlar klasik teori ile çok yakındır. En yüksek frekans değerleri DGÇT için elde edilir ve diğer teoriler ile arasındaki fark açık bir şekilde görülebilir. Daha önceki analizlerde vurgulanmış olan p'nin frekansları azaltıcı etkisi burada da görülür. Bu analizde gözenek etkisi ile ilgili vurgulanması gereken önemli bir durum söz konusudur. Görüleceği üzere, $p = 0$'da gözenekli nanokirişlerin frekansları gözeneksiz nanokirişin frekanslarından daha yüksektir. p değeri arttıkça frekanslar arasındaki fark azalmakta, hatta bir yerde kapanıp gözeneksiz nanokirişin frekansları gözenekli nanokirişin frekanslarından daha yüksek olmaktadır. Bu durum, malzeme değişim katsayısının elastisite modülünü ve kütle yoğunluğunu etkileme düzeyiyle açıklanabilir.

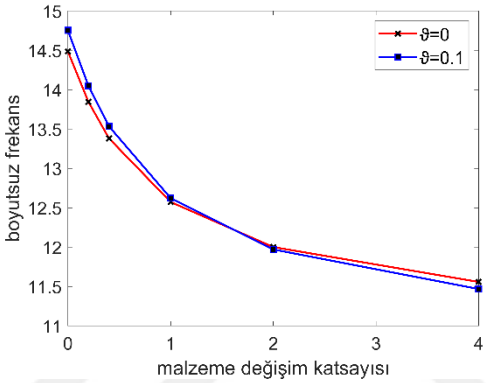
YOET



KT



DGÇT



Şekil 4.29. FD kompozit nanokirişlerin boyutsuz frekanslarının $\boldsymbol{p}$ ve $\boldsymbol{\vartheta}$'ye göre değişimi (EBKT)

4.2. Karbon Nanotüp Takviyeli Kompozit Nanokirişlerin Analizleri

Bu alt bölümde, karbon nanotüp takviyeli kompozit dikdörtgen kesitli nanokirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizleri gerçekleştirilecektir. Aksi belirtilmedikçe, karbon nanotüp takviyeli kompoziti oluşturan malzemeler için kullanılan özellikler şu şekildedir: $E^{PMMA} = 2{,}5\ GPa$, $\upsilon^{PMMA} = 0{,}3$, $\rho^{PMMA} = 1190\ kg/m^3$, $E_{11}^{KNT} = 600\ GPa$, $E_{22}^{KNT} = 10\ GPa$, $\mu_{12}^{KNT} = 17{,}2\ GPa$, $\upsilon^{KNT} = 0.19$, $\rho^{KNT} = 1400\ kg/m^3$. Ayrıca, $b = 10\ nm$, $h = 2b = 20\ nm$, $L = 20h = 400\ nm$ ve $e_0 a = h = 20\ nm$ alınmıştır. Çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişler için bazı boyutsuz parametreler kullanılmıştır. Kullanılan boyutsuz formdaki parametreler şu şekildedir (Wattanasakulpong ve Ungbhakorn, 2013):

$$\overline{\omega} = \omega L \sqrt{\frac{b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho^{PMMA} dz}{b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} E^{PMMA} dz}} \tag{4.11}$$

$$\overline{c_w} = \frac{c_w L^2}{b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} E^{PMMA} dz} \tag{4.12}$$

$$\overline{c_p} = \frac{c_p}{b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} E^{PMMA} dz} \tag{4.13}$$

$$\overline{R_0} = \frac{R_0 L}{b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} E^{PMMA} z^2 dz} \tag{4.14}$$

$$\overline{R_L} = \frac{R_L L}{b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} E^{PMMA} z^2 dz} \tag{4.15}$$

$$\overline{T_0} = \frac{T_0 L}{b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} E^{PMMA} dz} \tag{4.16}$$

$$\overline{T_L} = \frac{T_L L}{b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} E^{PMMA} dz} \tag{4.17}$$

İlk önce, KNTTK kirişler için karşılaştırma çalışmaları gösterilecektir. Çizelge 4.23'te KNTTK kirişlerin klasik teoriye dayanan boyutsuz titreşim frekansları çeşitli kiriş teorileri için karşılaştırılmıştır. Görüleceği üzere, Civalek vd. (2021)'in sonuçları ile mükemmel bir uyum yakalanmışken, Wattanasakulpong ve Ungbhakorn (2013)'ün sonuçları ile biraz fark vardır. Bu fark, Wattanasakulpong ve Ungbhakorn (2013)'ün çalışmasında, $\kappa = 1$ alınmasından kaynaklanır. Bu tez çalışmasında ve diğer karşılaştırma çalışmasında $\kappa = 5/6$ alınmıştır. Ayrıca, Çizelge 4.24'te KNTTK kirişlerin değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan boyutsuz titreşim frekansları çeşitli kiriş teorileri için Civalek vd. (2021) tarafından sunulan çalışma ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma için $l_d = h$ alınmıştır. Ayrıca her iki karşılaştırma için $L/h = 15$'tir.

Görüleceği üzere, değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayanan boyutsuz frekanslarda da mükemmel bir uyum yakalanmıştır. Her iki çizelge için $n = 30$ alınmıştır.

Şimdi, bu tez çalışmasından elde edilen frekans bulguları sunulacaktır. Şekil 4.30, KNTTK-DD nanokirişlerin yerel olmayan elastisite teorisine ve RKT'ne dayanan boyutsuz titreşim frekanslarını çeşitli V_{KNT}^* değerleri için sunmaktadır. Bu örnekte hem Winkler zemininin hem de V_{KNT}^*'nin etkileri incelenmiştir. Winkler zemininin KNTTK nanokirişlerin de frekanslarında artış meydana getirdiği açık bir şekilde görülür. Anlaşılacağı üzere, en yüksek frekans değerleri $V_{KNT}^* = 0{,}28$ için elde edilirken en düşük frekans değerleri $V_{KNT}^* = 0{,}12$ için elde edilmiştir. Nanokompozitteki KNT oranının artması malzemeyi güçlendirerek daha yüksek frekansların oluşmasına neden olmaktadır. Ayrıca, $V_{KNT}^* = 0{,}12$ durumunda Winkler zemin parametresinin titreşim frekanslarında meydana getirdiği artış daha fazladır. V_{KNT}^* arttıkça Winkler zemin parametresinin etkisi azalmaktadır.

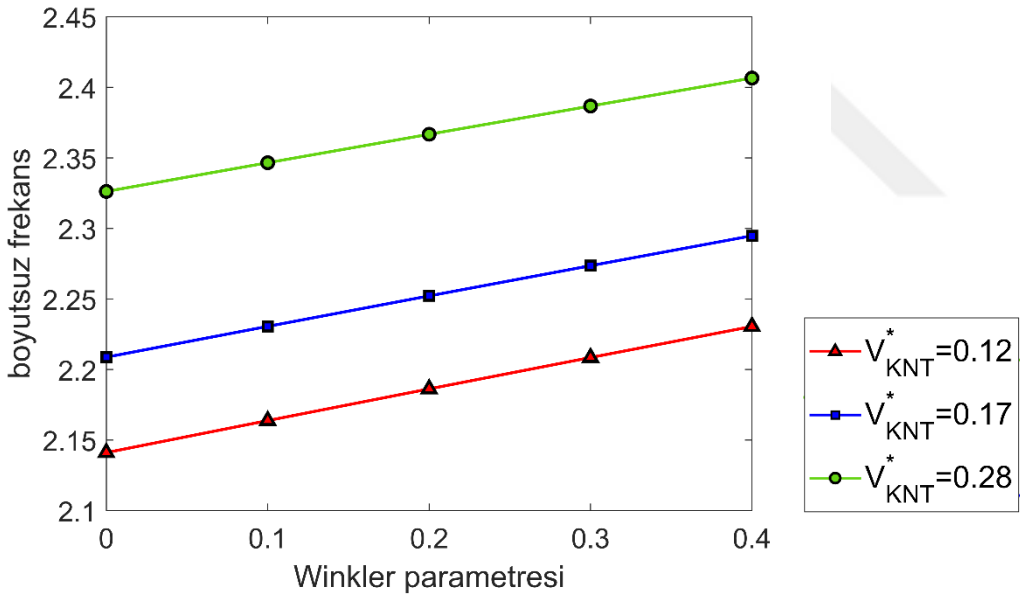
Şekil 4.31, ilk beş titreşim moduna ait boyutsuz frekansları çeşitli KNT dağılımına sahip kompozitler için inceler. Zemin etkisinin ihmal edildiği ve edilmediği durumlar için sunulan bu örnekte $V_{KNT}^* = 0{,}12$'dir ve RBKT düşünülmüştür. Her iki durum için de en yüksek frekans değerleri KNTTK-X nanokirişleri için elde edilirken en düşük frekans değerleri KNTTK-O için elde edilmiştir. Bu örnekten, KNT'lerin dağılım şeklinin önemi anlaşılmaktadır. KNT dağılımının farklılaştırılması frekanslarda önemli değişimler meydana getirmektedir.

Çizelge 4.23. KNTTK kirişlerin boyutsuz klasik frekanslarının karşılaştırılması ($V^*_{KNT} = 0{,}12$, basit mesnet-basit mesnet)

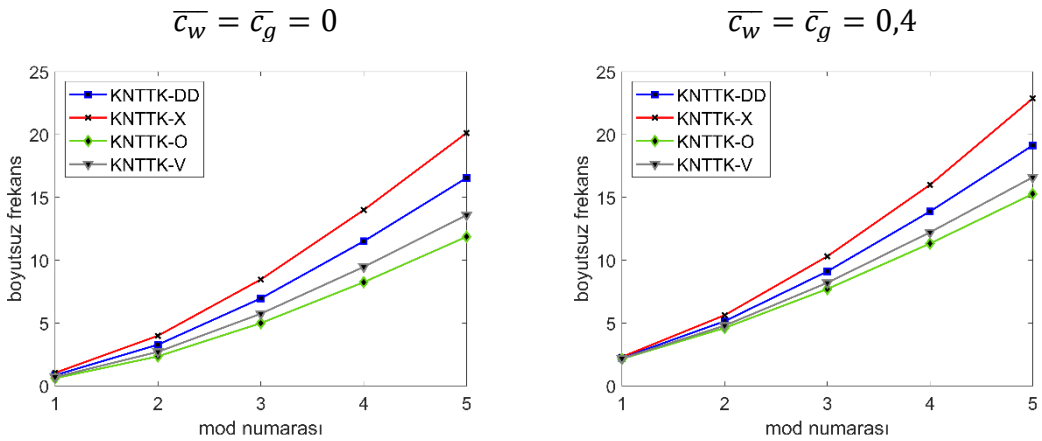
KNTTK-DD				
Kiriş teorisi	Wattanasakulpong ve Ungbhakorn (2013)	Civalek vd. (2021)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$ $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$	
EBKT	-	1,1513	1,15132	1,15132
RKT	-	1,1492	1,14922	1,14922
TKT	0,9976	0,9739	0,973875	0,973875
KNTTK-O				
Kiriş teorisi	Wattanasakulpong ve Ungbhakorn (2013)	Civalek vd. (2021)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$ $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$	
EBKT	-	0,8256	0,825551	0,825551
RKT	-	0,8241	0,824061	0,824061
TKT	0,7628	0,7521	0,752059	0,752059
KNTTK-X				
Kiriş teorisi	Wattanasakulpong ve Ungbhakorn (2013)	Civalek vd. (2021)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$ $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$	
EBKT	-	1,4005	1,40047	1,40047
RKT	-	1,3979	1,39789	1,39789
TKT	1,1485	1,1129	1,11289	1,11289
KNTTK-V				
Kiriş teorisi	Wattanasakulpong ve Ungbhakorn (2013)	Civalek vd. (2021)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$ $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$	
EBKT	-	0,9515	0,952065	0,952065
RKT	-	0,9498	0,949812	0,949812
TKT	0,8592	0,8440	0,844033	0,844033

Çizelge 4.24. DGÇT'ne dayanan KNTTK küçük ölçekli kirişlerin boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (KNTTK-DD, basit mesnet-basit mesnet)

$V_{KNT}^{*} = 0{,}12$			
Kiriş teorisi	Civalek vd. (2021)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$
EBKT	1,2256	1,22564	1,22564
RKT	1,2234	1,2234	1,2234
$V_{KNT}^{*} = 0{,}17$			
Kiriş teorisi	Civalek vd. (2021)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$
EBKT	1,4909	1,49089	1,49089
RKT	1,4882	1,48817	1,48817

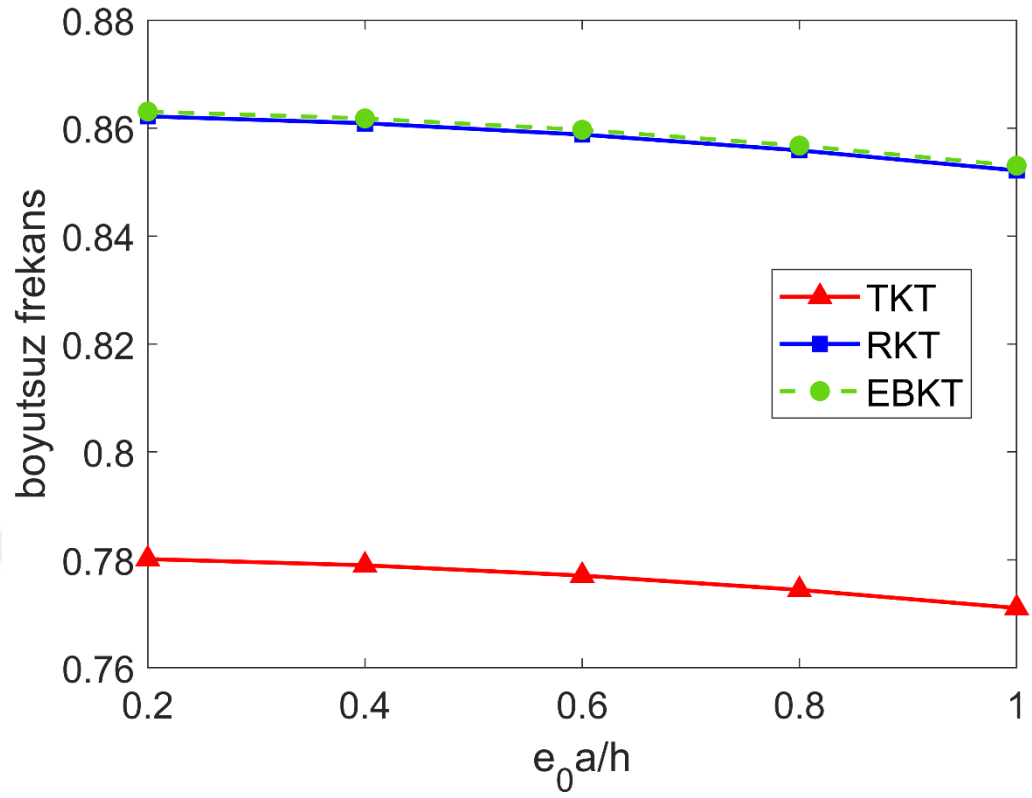


Şekil 4.30. KNTTK-DD nanokirişinin boyutsuz frekanslarının $\overline{c_w}$'ye göre değişimi ($\overline{c_g} =$ **0**, **4** & **YOET**)



Şekil 4.31. KNTTK nanokirişlerin boyutsuz frekanslarının mod numarasına göre değişimi (**YOET**)

Şekil 4.32, KNTTK-DD nanokirişlerinin frekanslarını $V_{KNT}^{*} = 0{,}12$ ile sunmaktadır. Bu şeklin sunulma amacı, hem kiriş teorilerinin KNTTK nanokirişlerin frekansları üzerindeki etkilerini hem de yerel olmayan parametrenin etkisini sunmaktır. Burada, yerel olmayan parametrenin etkisi değişen $e_0 a/h$ oranı ile incelenmiştir. Birinci mod için incelenen frekanslarda görülür ki; $e_0 a/h$'nın artışı frekanslarda azalmaya neden olur. Bununla beraber, hem dönel atalet etkilerini hem de kayma etkilerini inceleyen TKT'ne ait frekanslar en düşük değerdedir. Burada, EBKT ile elde edilen frekansların en yüksek olduğu görülse de dönel atalet etkilerini içeren RKT'nin frekans değerleri ile yakınlığı dikkat çekicidir.



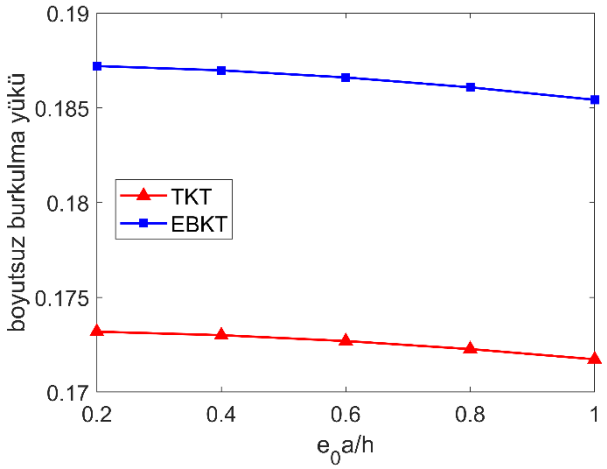
Şekil 4.32. KNTTK-DD nanokirişlerinin boyutsuz frekanslarının farklı kiriş teorilerine göre değişimi ($\overline{c_w} = \overline{c_g} = \mathbf{0}$)

Çizelge 4.25. KNTTK Timoshenko kirişlerinin boyutsuz klasik burkulma yüklerinin karşılaştırılması ($V_{KNT}^{*} = 0{,}12$, $L/h = 15$)

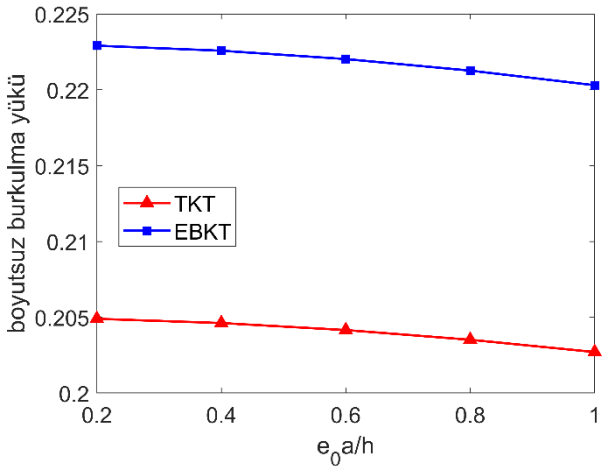
KNTTK-DD			
$\overline{c_w}; \overline{c_g}$	Wattanasakulpong ve Ungbhakorn (2013)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$
0; 0	0,1032	0,103185	0,103185
0,1; 0,02	0,1333	0,133317	0,133317
KNTTK-O			
$\overline{c_w}; \overline{c_g}$	Wattanasakulpong ve Ungbhakorn (2013)	Bu çalışma $\overline{T_0} = \overline{T_L} = 10^{10}$	Bu çalışma $\overline{R_0} = \overline{R_L} = 10^{-10}$
0; 0	0,0604	0,0603571	0,0603571
0,1; 0,02	0,0905	0,0904893	0,0904893

Çizelge 4.25'te, KNTTK kirişlerin burkulma analizi için karşılaştırma çalışması gösterilmiştir. Wattanasakulpong ve Ungbhakorn (2013)'ün klasik teoriye dayanan sonuçları ve bu tezde elde edilenler, Timoshenko kiriş teorisi ile ele alınmıştır. Bu karşılaştırma çalışmasında $\kappa = 1$ alınmıştır ve hem zemin etkili hem de zemin etkisiz burkulma yükleri karşılaştırılmıştır. Görüleceği üzere, çok iyi bir uyum yakalanmıştır.

Şekiller 4.33-4.35'de yerel olmayan TKT ve EBKT'ne dayanan burkulma yüklerinin değişimi sırasıyla $V_{KNT}^{*} = 0{,}12$, $V_{KNT}^{*} = 0{,}17$ ve $V_{KNT}^{*} = 0{,}28$ için çizilmiştir ve $\overline{c_w} = \overline{c_g} = 0.1$ alınmıştır. KNT oranı en fazla olan kompozit nanokirişin burkulma yüklerinin daha yüksek olduğu rahatlıkla görülebilir. $e_0 a/h$'nin artmasıyla, yani yerel olmayan parametrenin artmasıyla burkulma yüklerinde meydana gelen azalmayı diğer analizlerden de bilmekteyiz. Bu örnekler ile vurgulanması gereken nokta yerel olmayan parametrenin etki oranıdır. TKT ve EBKT kıyaslandığında; yerel olmayan parametrenin EBKT için daha etkili olduğu anlaşılır. Yani, $e_0 a$ arttıkça, EBKT'ne dayanan KNTTK nanokirişlerin burkulma yüklerinde meydana gelen azalma oranı daha yüksektir. Yerel olmayan parametrenin V_{KNT}^{*} değerleri için önemi araştırıldığında ise anlaşılır ki; V_{KNT}^{*} arttıkça $e_0 a$'nın önemi artar. Yani, $e_0 a$ arttıkça, $V_{KNT}^{*} = 0{,}28$ için hesaplanan burkulma yüklerinde meydana gelen azalma daha yüksek orandadır.

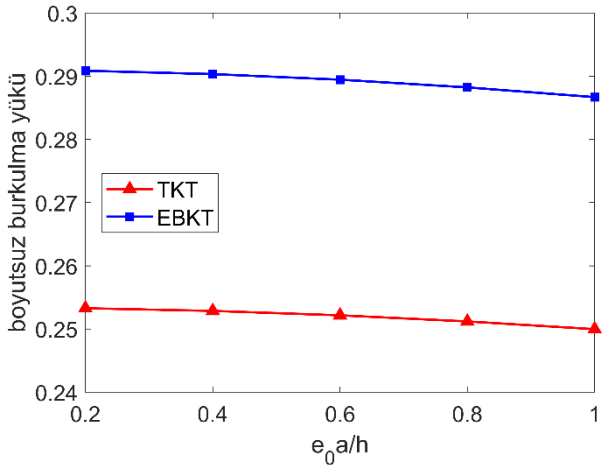


Şekil 4.33. KNTTK-DD nanokirişlerinin boyutsuz burkulma yüklerinin $\boldsymbol{e_0 a/h}$'ye göre değişimi ($\boldsymbol{V_{KNT}^{*} = 0,12}$)

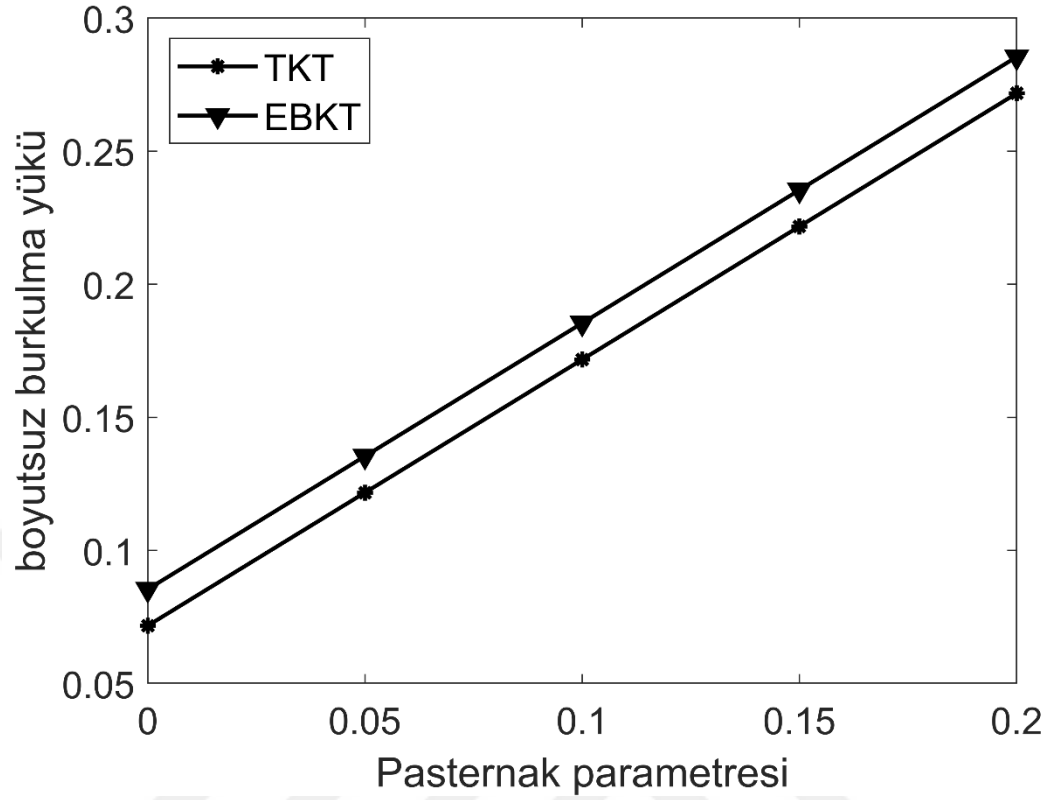


Şekil 4.34. KNTTK-DD nanokirişlerinin boyutsuz burkulma yüklerinin $\boldsymbol{e_0 a/h}$'ye göre değişimi ($\boldsymbol{V_{KNT}^* = 0,17}$)

Şekil 4.36, Pasternak parametresinin etkisini KNTTK-DD nanokiriş için inceler. Bu örnek için $V_{KNT}^* = 0{,}12$ ve $\overline{c_w} = 0{,}1$ alınırken, $\overline{c_g}$ değişen değerler ile düşünülmüştür. Buradaki amaç, Pasternak parametresinin kiriş teorisi üzerindeki etkisinin incelenmesidir. Burkulma yüklerinin değişiminden, Pasternak parametresinin Timoshenko kiriş teorisine dayanan KNTTK-DD nanokirişini daha fazla etkilediği anlaşılmıştır.

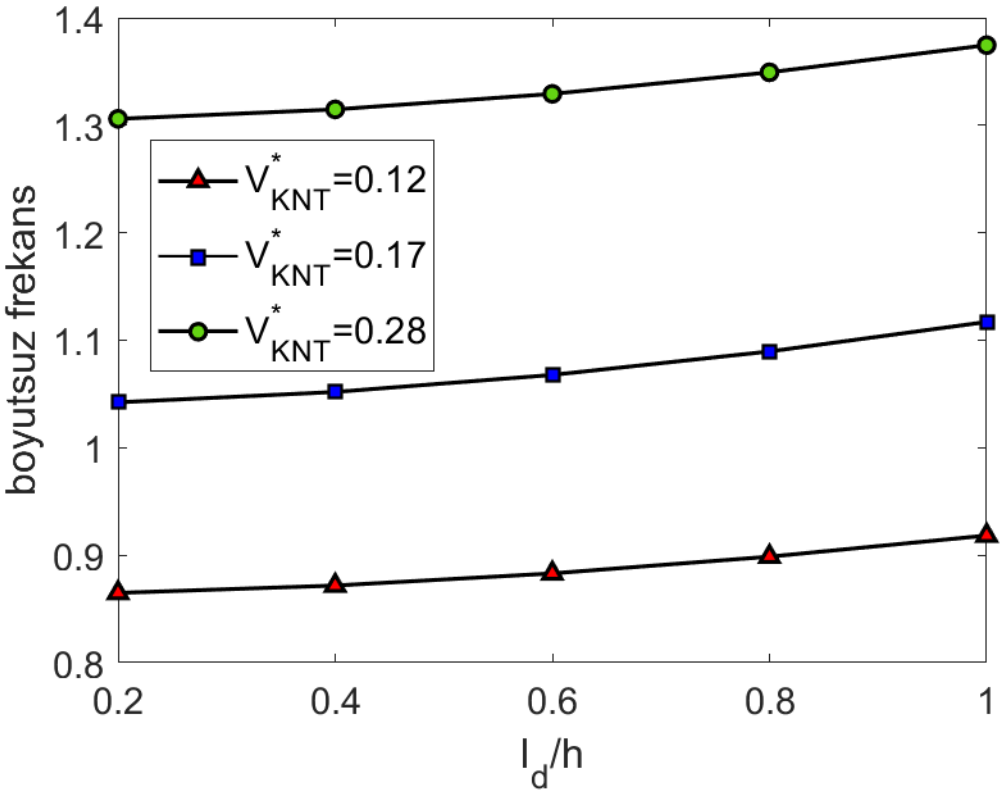


Şekil 4.35. KNTTK-DD nanokirişlerinin boyutsuz burkulma yüklerinin $\boldsymbol{e_0 a/h}$'ye göre değişimi ($\boldsymbol{V_{KNT}^* = 0,28}$)



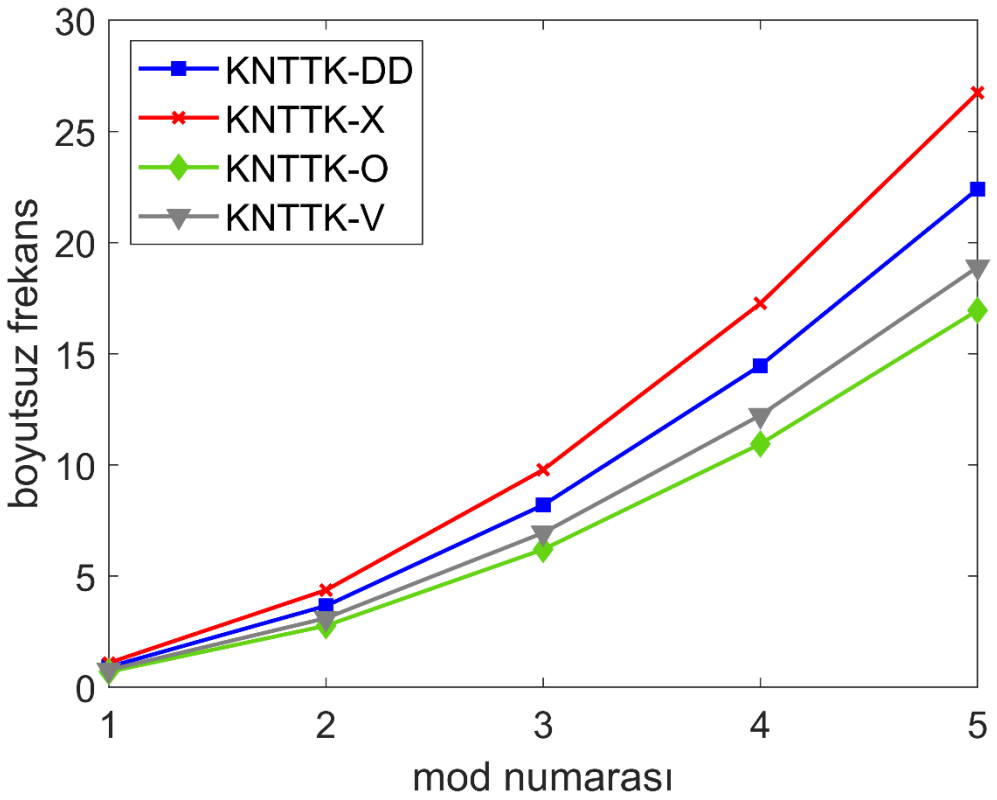
Şekil 4.36. KNTTK-DD nanokirişlerinin boyutsuz burkulma yüklerinin $\overline{c_g}$'ye göre değişimi ($\boldsymbol{V_{KNT}^* = 0,12}$)

Şekil 4.37'de, KNTTK-DD nanokirişlerinin değişen l_d/h'ye göre boyutsuz frekansları üç farklı V_{KNT}^* için çizilmiştir. Bu örnekte RKT düşünülmüştür. Artan l_d ve V_{KNT}^* ile boyutsuz frekanslarda meydana gelen artış burada da rahatça gözlemlenebilir. Burada asıl vurgulanmak istenen, l_d'nin V_{KNT}^* üzerindeki etkisidir. l_d/h arttırıldığında, boyutsuz frekanslarda meydana gelen artış oranı en yüksek $V_{KNT}^* = 0,17$ için hesaplanmıştır. Diğer taraftan, en düşük artış oranı ise $V_{KNT}^* = 0,28$ için elde edilmiştir. Ayrıca şunu belirtmek gerekir ki; başka bir durum belirtilmedikçe analizlerde $l_d = h$ alınmıştır.



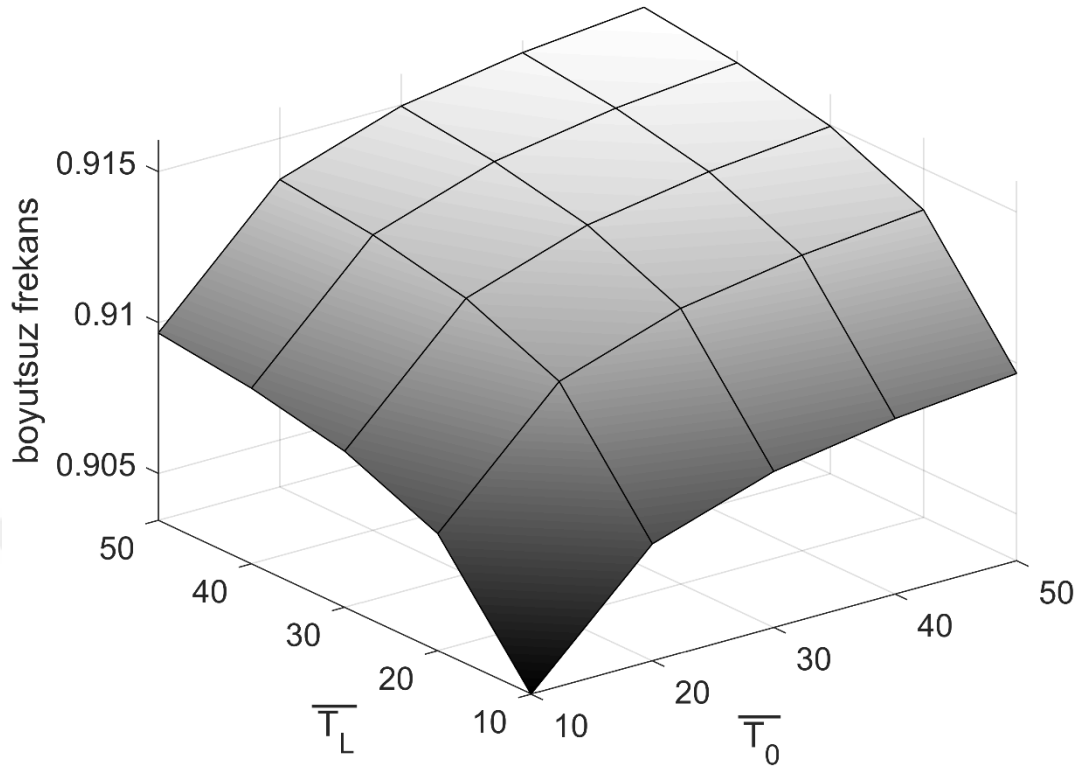
Şekil 4.37. KNTTK-DD nanokirişlerinin boyutsuz frekanslarının $\boldsymbol{l_d/h}$'ye göre değişimi ($\boldsymbol{V^*_{KNT} = 0,12}$)

Şekil 4.38'te değiştirilmiş gerilme çifti teorisine ve Rayleigh kiriş teorisine dayanan boyutsuz frekansların karşılaştırılması çeşitli KNT dağılımları için yapılmıştır. Bu örnek için $V^*_{KNT} = 0{,}12$ ve $l_d = h$'dir. İlk beş titreşim modu için çizilen bu şekilden en yüksek frekansların KNTTK-X ve en düşük frekansların KNTTK-O için elde edildiği görülür.



Şekil 4.38. DGÇT'ne dayanan KNTTK nanokirişlerinin boyutsuz frekanslarının mod numarasına göre değişimi

Şekil 4.39'da değişik rijitlikler atanmış çökme yay parametrelerine sahip KNTTK-DD nanokirişlerin frekanslarının değişimi gösterilmiştir. Bu analiz için Euler-Bernoulli kiriş teorisi ve $V_{KNT}^{*} = 0{,}12$ kullanılmıştır. Yay parametreleri sıfırdan sonsuza kadar giden sayısız rijitlikte ayarlanabilir ve bu örnekte $\overline{T}_0$ ve $\overline{T}_L$'ye on ila elli arasında değişen değerler yirmi beş farklı kombinasyon ile atanmıştır. Burada, yay parametrelerinin artışının frekanslarda meydana getirdiği artış ve bu artışın düşük rijitlik değerlerinde daha fazla göze çarptığı KNTTK nanokirişler için de vurgulanabilir.



Şekil 4.39. KNTTK-DD nanokirişinin boyutsuz frekanslarının $\overline{\boldsymbol{T_0}}$ ve $\overline{\boldsymbol{T_L}}$'ye göre değişimi

4.3. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kompozit Nanotüplerin Analizleri

Bu alt bölümde, fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanotüplerin burulmalı titreşim analizleri gerçekleştirilecektir. Nanotüpün dış yüzeyi seramik (zirkonya), iç yüzeyi metal (alüminyum) olarak düşünülmüştür ve bu malzemelerin özellikleri önceki bölümlerde verilmiştir. Aksi belirtilmedikçe, fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanotüpler için kullanılan geometrik özellikler şu şekildedir: $r_i = 1\,nm$, $r_d = 2\,nm$ ve $L = 10r_d = 20\,nm$. Ayrıca, çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişler için bazı boyutsuz parametreler kullanılmıştır. Kullanılan boyutsuz formdaki parametreler şu şekildedir:

$$\overline{\omega} = \omega L \sqrt{\frac{\rho_s}{\mu_s}} \tag{4.18}$$

$$\overline{k_e} = \frac{k_e L^2}{\mu_s J} \tag{4.19}$$

$$\overline{K_0} = \frac{K_0 L}{\mu_s J} \tag{4.20}$$

$$\overline{K_L} = \frac{K_L L}{\mu_s J} \tag{4.21}$$

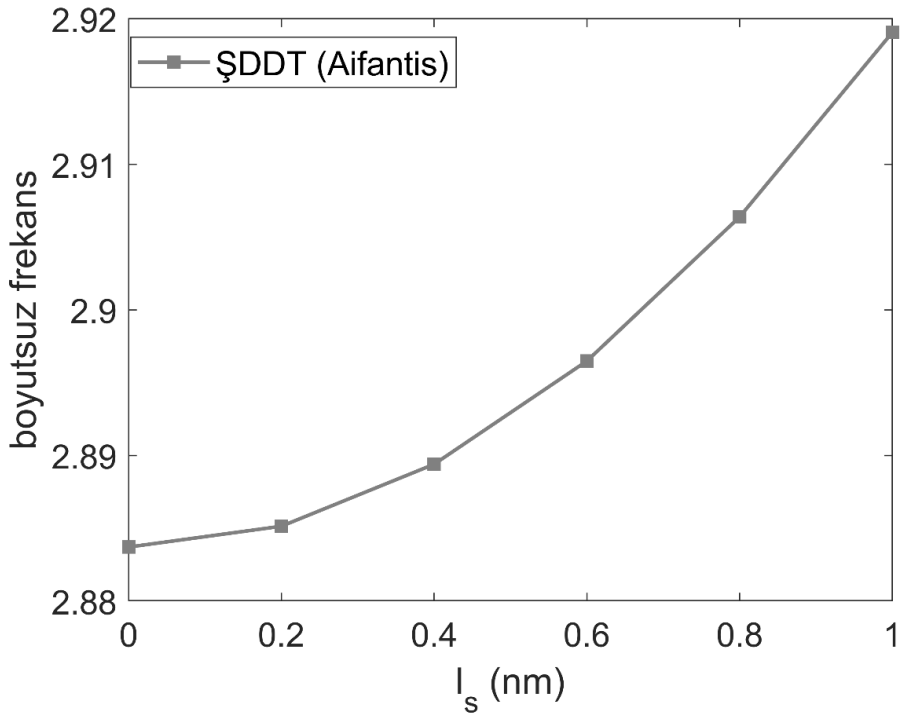
Bu tezde, aynı malzeme ve geometrik özelliklerden oluşturulmuş kompozit nanotüplerin burulmalı titreşimi farklı boyut etkili teoriler ile sunulduğundan, çoğu yerde analizler farklı teoriler için karşılaştırmalı olarak verilecektir. Ancak, ilk önce literatürde bulunan bazı çalışmalar ile birkaç karşılaştırma yapılacaktır. Çizelge 4.26 konsol klasik bir homojen burulma çubuğunun / tüpünün ilk beş moddaki boyutsuz frekans değerlerini karşılaştırmaktadır. Bu karşılaştırma çalışmasının amacı hem çözümü sağlayan uygun terim sayısını bulmak hem de uygun yay parametre değerlerinde rijit sınır koşullarının sağlanabildiğini göstermektir. Bu çalışmanın gerçekleştirilmesi için boyutsuz yay parametrelerinden bir tanesine $\overline{K_0} = 10^{10}$ verilerek ankastre mesnet koşulu sağlanırken diğer boyutsuz yay parametresine $\overline{K_L} = 10^{-10}$ verilerek serbest uç sınır şartı sağlanmıştır. Çizelgeden görülebileceği üzere sonuçlar diğer iki çalışma ile güzel bir uyum sağlamaktadır.

Çizelge 4.26. Konsol homojen çubukların / tüplerin boyutuz klasik frekanslarının karşılaştırılması

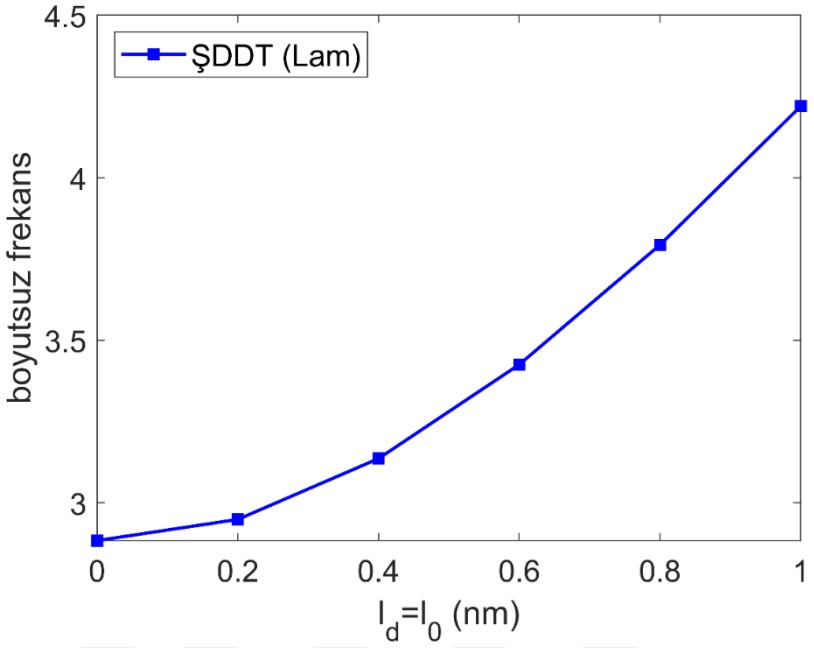
mod numarası	Bu çalışma ($\overline{K_0} = 10^{10}$ & $\overline{K_L} = 10^{-10}$) Terim sayısı					Gorman (1975)	Tabassian (2013)
	100	110	120	130	140		
1	1,57397	1,57368	1,57344	1,57324	1,57307	1,570796327	1,570795393
2	4,72191	4,72105	4,72033	4,71972	4,7192	4,712388980	4,712384480
3	7,86985	7,86841	7,86721	7,8662	7,86533	7,853981634	7,853973907
4	11,0178	11,0158	11,0141	11,0127	11,0115	10,99557429	10,99556338
5	14,1657	14,1631	14,161	14,1592	14,1576	14,13716694	14,13715287

Şekiller 4.40-4.43'te fonksiyonel derecelendirilmiş gözeneksiz nanotüplerin boyutsuz frekansları sırasıyla ŞDDT (Aifantis), ŞDDT (Lam), DGÇT ve YOET için değişen boyut parametrelerine göre çizilmiştir. Aksi belirtilmedikçe bu analizde, $p = 1$, $\overline{K_0} = \overline{K_L} =$

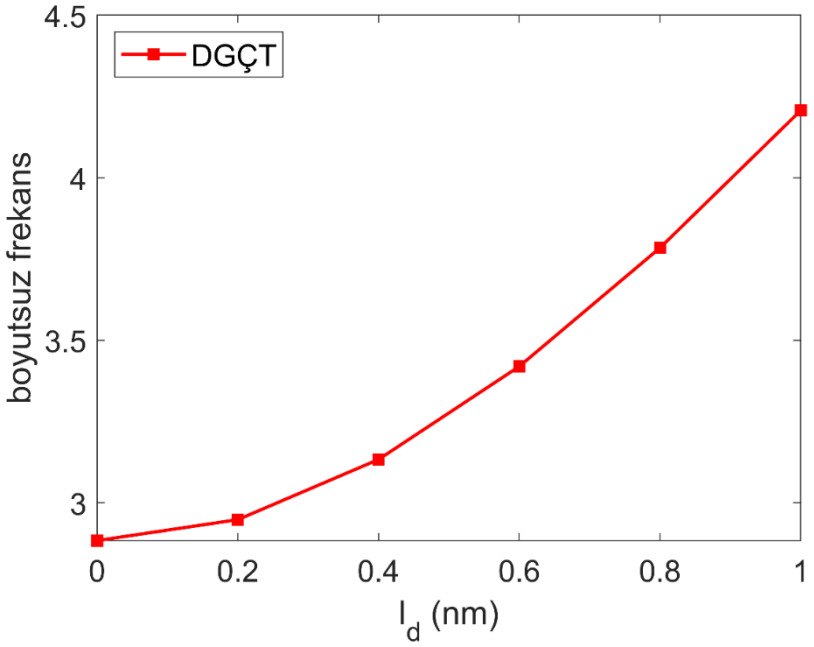
10^{10}, $n = 20$ kullanıldığı belirtilmelidir. Birinci mod için çizilen bu grafiklerden anlaşılır ki en yüksek titreşim frekansları ŞDDT (Lam) için elde edilirken en düşük titreşim frekansları YOET için elde edilir. Başlangıçta, boyut parametrelerinin sıfır olduğu durumda, bütün teoriler klasik teoriye indirgendiğinden frekanslar eşittir. Frekanslar incelendiğinde, ŞDDT (Lam) ve DGÇT için elde edilenlerin birbirlerine yakın olduğu görülür. Bununla beraber, ŞDDT (Aifantis), ŞDDT (Lam) ve DGÇT frekansların artmasına neden olurken YOET frekansların azalmasına neden olmaktadır.



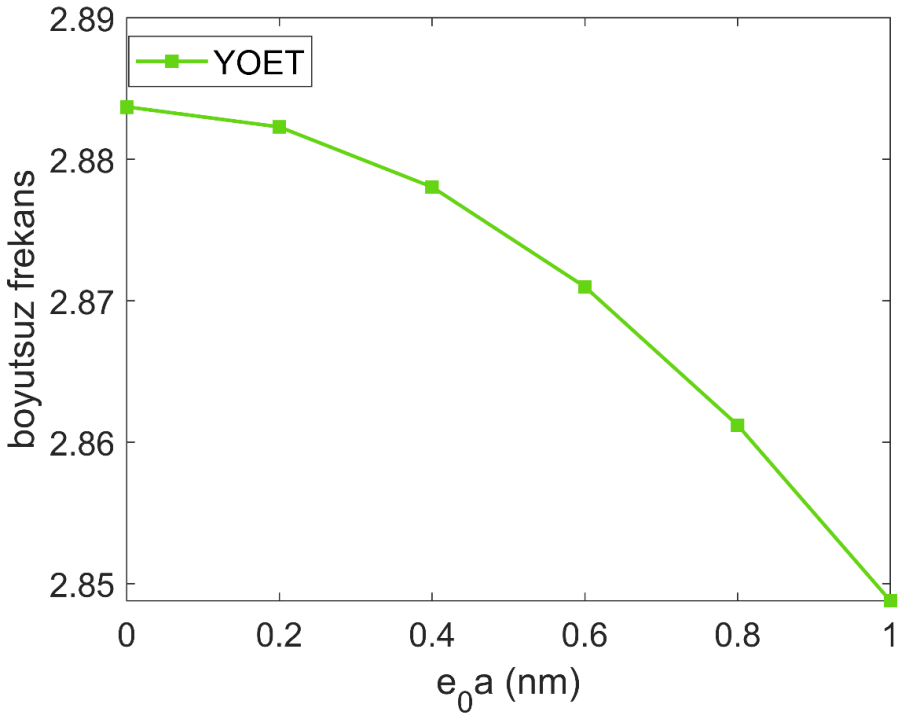
Şekil 4.40. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanotüplerin ŞDDT (Aifantis)'ne göre elde edilen frekansları



Şekil 4.41. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanotüplerin ŞDDT (Lam)'ne göre elde edilen frekansları

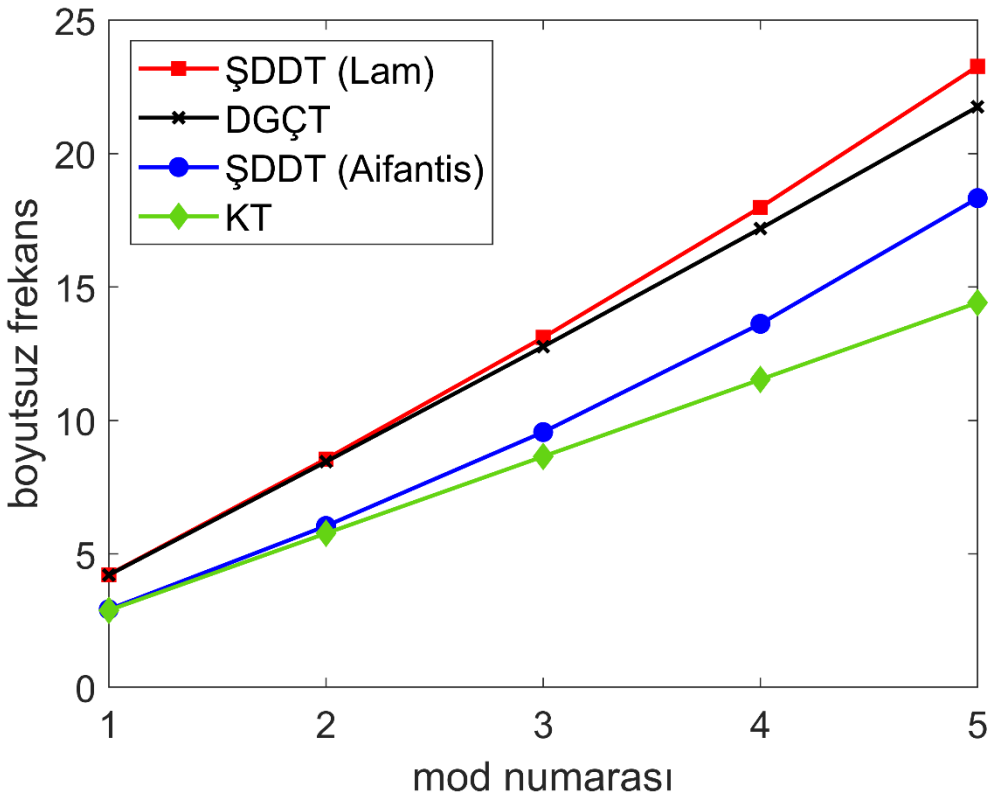


Şekil 4.42. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanotüplerin DGÇT'ne göre elde edilen frekansları



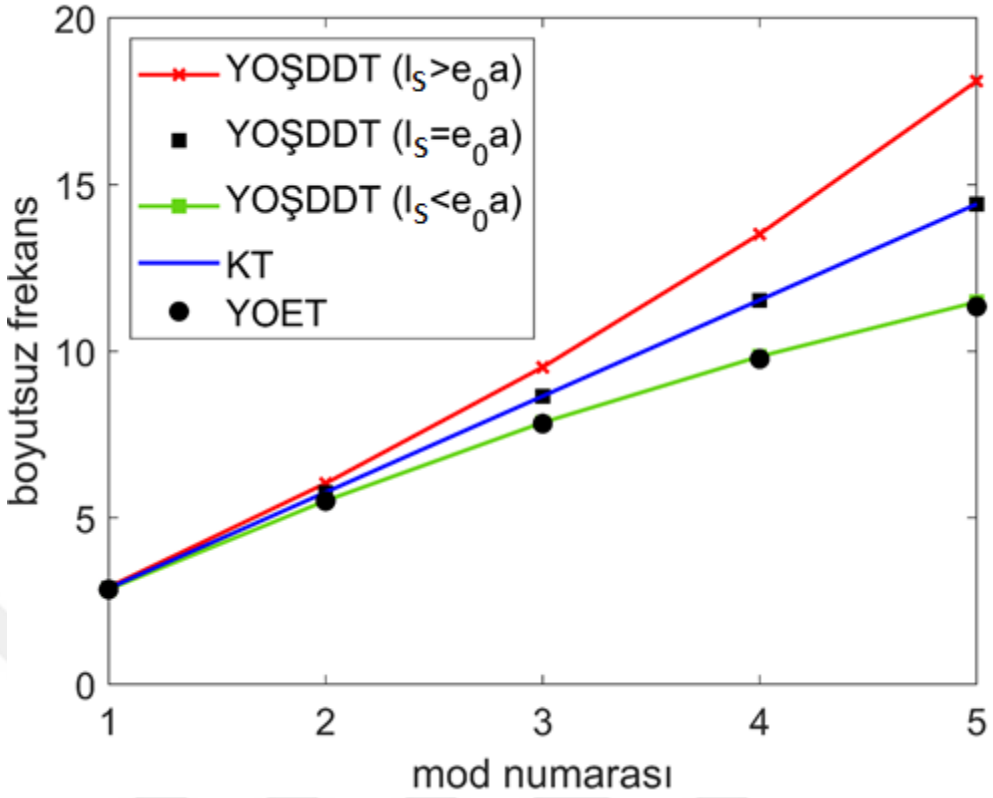
Şekil 4.43. Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanotüplerin YOET'ne göre elde edilen frekansları

Şekil 4.44'da ŞDDT (Aifantis), ŞDDT (Lam), DGÇT ve KT için frekans değerleri ilk beş mod için karşılaştırılmıştır. Bu çalışma için $p = 1$ kullanılmıştır ve her teori için boyut parametresi 1 nm alınarak analizlere dâhil edilmiştir. Birinci titreşim modlarında ŞDDT (Lam) ve DGÇT'ne ait frekanslar ile ŞDDT (Aifantis) ve KT'ye ait frekanslar neredeyse aynıdır. Mod numarası arttıkça, bütün frekanslar arasında farkların artış gösterdiği anlaşılır. Buradan, boyut etkilerinin yüksek modlar için daha etkili olduğu sonucuna varabiliriz.



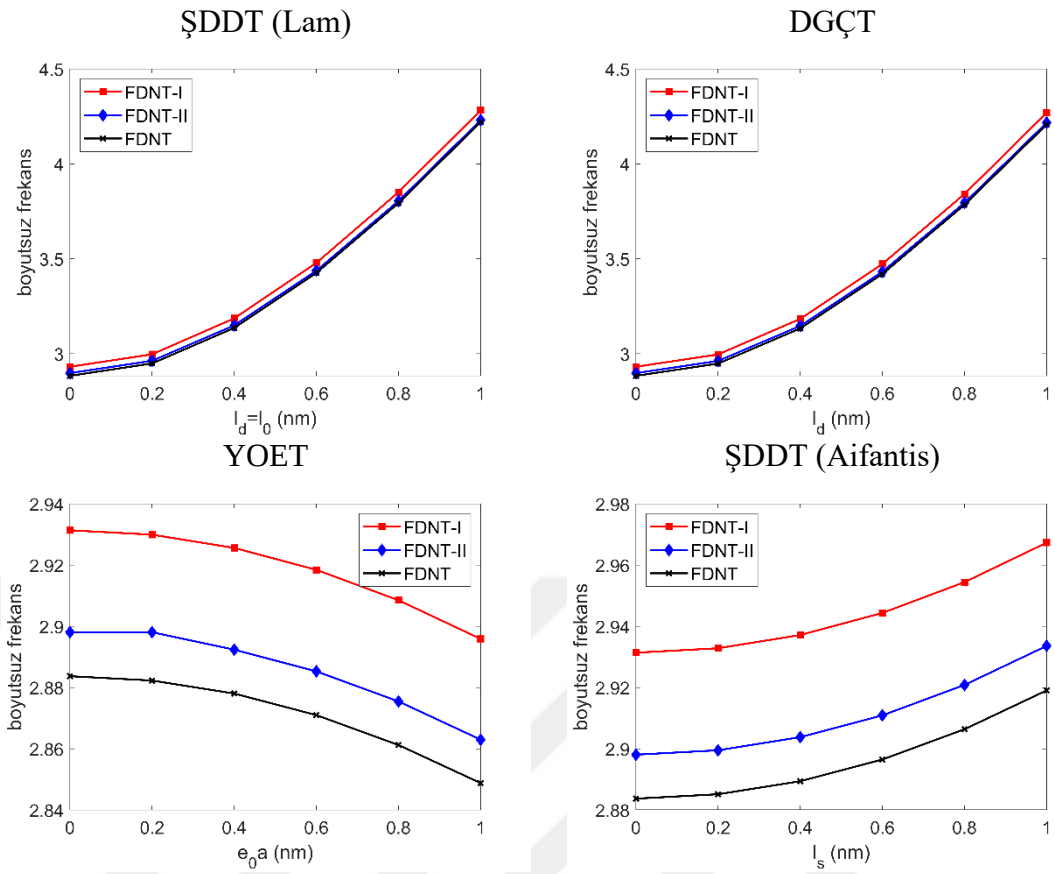
Şekil 4.44. KT'ye ait frekansların ŞDDT (Aifantis), ŞDDT (Lam) ve DGÇT'ne ait frekanslar ile karşılaştırılması

YOŞDD, YOET ve KT için frekans değerleri ilk beş mod için Şekil 4.45'te karşılaştırılmıştır. Bu çalışma için $p = 1$ kullanılmıştır ve boyut parametresi YOET için 1 nm alınırken YOŞDDT için değişik kombinasyonlar düşünülmüştür. YOŞDDT ($l_d > e_0a$) için l_d ve e_0a sırasıyla 1 nm ve 0.2 nm düşünülürken, YOŞDDT ($l_s < e_0a$) için $l_s = 0, nm$ ve $e_0a = 1\,nm$ düşünülmüştür. Son olarak, YOŞDDT ($l_s = e_0a$) için $l_s = e_0a = 1\,nm$ alınmıştır. Birinci titreşim modlarında bütün teoriler için frekanslar neredeyse aynıdır. Mod numarası arttıkça, bütün teoriler arasındaki frekans farkları bu örnekte de artış göstermektedir. Boyut etkilerinin yüksek modlar için daha etkili olduğu burada da gözlemlenebilir. Burada, KT ve YOŞDDT ($l_s = e_0a$)'nin frekansları dikkat çekicidir. Mod numarası ne olursa olsun bu iki analizin frekansları bire bir aynıdır. Yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisinde her iki boyut parametresinin eşit alınması, sonuçları klasik teoriyle aynı duruma getirmektedir.



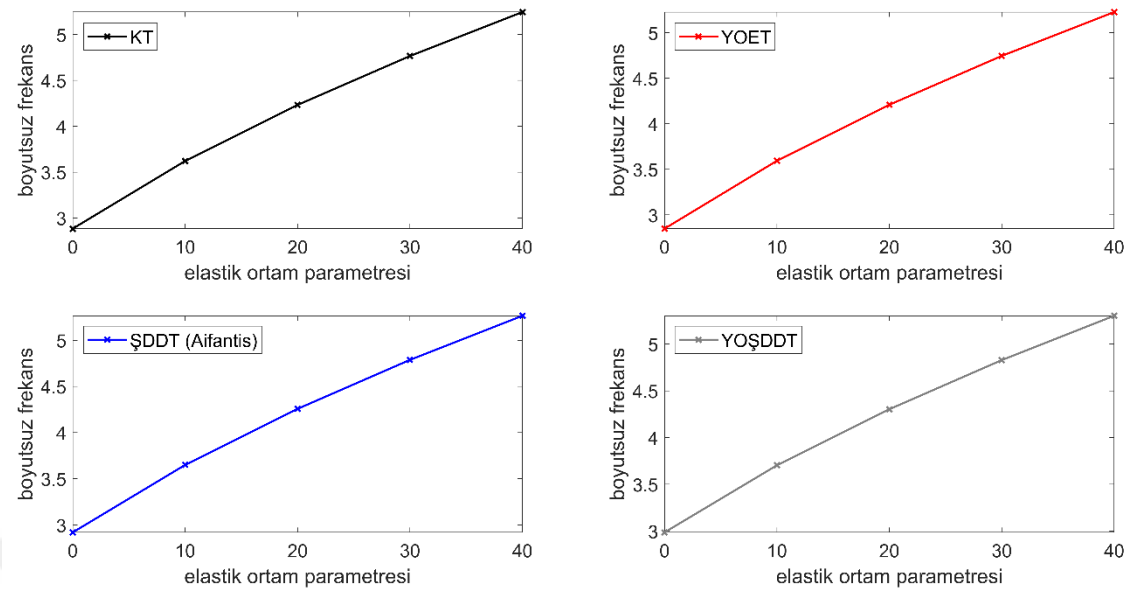
Şekil 4.45. KT'ye ait frekansların YOŞDD ve YOET'ne ait frekanslar ile karşılaştırılması

Şekil 4.46'da fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli ve gözeneksiz nanotüplerin değişik teorilere dayanan boyut parametrelerine göre boyutsuz frekanslarının değişimi gösterilmiştir. Bu çalışma için $p = 1$ ve $\vartheta = 0.1$ alınmıştır. Burada amaç, hem gözenek etkisini hem de boyut parametrelerinin etkisini incelemektir. Tüm teorilerde, boyut parametresinin sıfır alınması, sonuçları klasik teorinin sonuçlarına indirger. Bu nedenle, hepsinde FD nanotüplerin frekansları başlangıçta aynıdır. Daha iyi bir karşılaştırma yapmak adına boyut parametrelerine eşit değerler atanmıştır. FD nanotüplerin frekanslarını en çok etkileyen şekil değiştirme değişimi teorisi (Lam) ve ardından değiştirilmiş gerilme çifti teorisidir. Yerel olmayan elastisite teorisi ve şekil değiştirme değişimi teorisi (Aifantis)'nin etkileri hemen hemen aynı olmakla beraber frekansları sırasıyla azaltıcı ve arttırıcı yönde etki ederler. Ayrıca, bu çalışmadan en yüksek frekansların düzenli dağılımlı gözeneğe sahip fonksiyonel derecelendirilmiş nanotüpe ait olduğu anlaşılırken en düşük frekanslar gözeneksiz fonksiyonel derecelendirilmiş nanotüpe aittir. Bununla beraber, yerel olmayan elastisite teorisi ve şekil değiştirme değişimi teorisi (Aifantis)'nde gözenek etkisinin daha yüksek olduğu anlaşılmıştır.



Şekil 4.46. Gözenekli ve gözeneksiz nanotüplerin boyut parametrelerine göre frekanslarının değişimi

Şekil 4.47'de elastik ortam parametresinin FD nanotüplerin burulmalı titreşim frekansına etkisi gösterilmiştir. Bu çalışma için gözeneksiz nanotüp tercih edilmiş ve boyut parametreleri 1 nm alınmıştır. YOŞDDT için ise $e_0a = 1\,nm$ ve $l_s = 2\,nm$ olarak düşünülmüştür. Anlaşılacağı üzere, FD nanotüpün elastik bir ortamda olması frekanslarının artmasına neden olmaktadır. Ayrıca, YOET'ne dayanan çözümlerde frekans artışı daha dikkat çekicidir.



Şekil 4.47. Nanotüplerin elastik ortam parametresine göre frekanslarının değişimi

4.4. Dairesel Olmayan Nanoçubukların Analizleri

Bu alt bölümde tez çalışmasının son analizleri gerçekleştirilecektir. Dairesel olmayan iki kesit (üçgen ve eliptik) ve dairesel kesit ile modellenen nanoçubukların yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayanan burulmalı titreşim analizleri elastik bir ortamın etkisinde ele alınmıştır. Analizlerde kullanılan değerler aksi belirtilmedikçe şu şekildedir: $E = 70\ GPa$, $\rho = 2700\ kg/m^3$ ve $\upsilon = 0{,}3$, $L = 10\ nm$, $n = 30$. Analizler için kullanılan boyutsuz parametreler ise şöyledir:

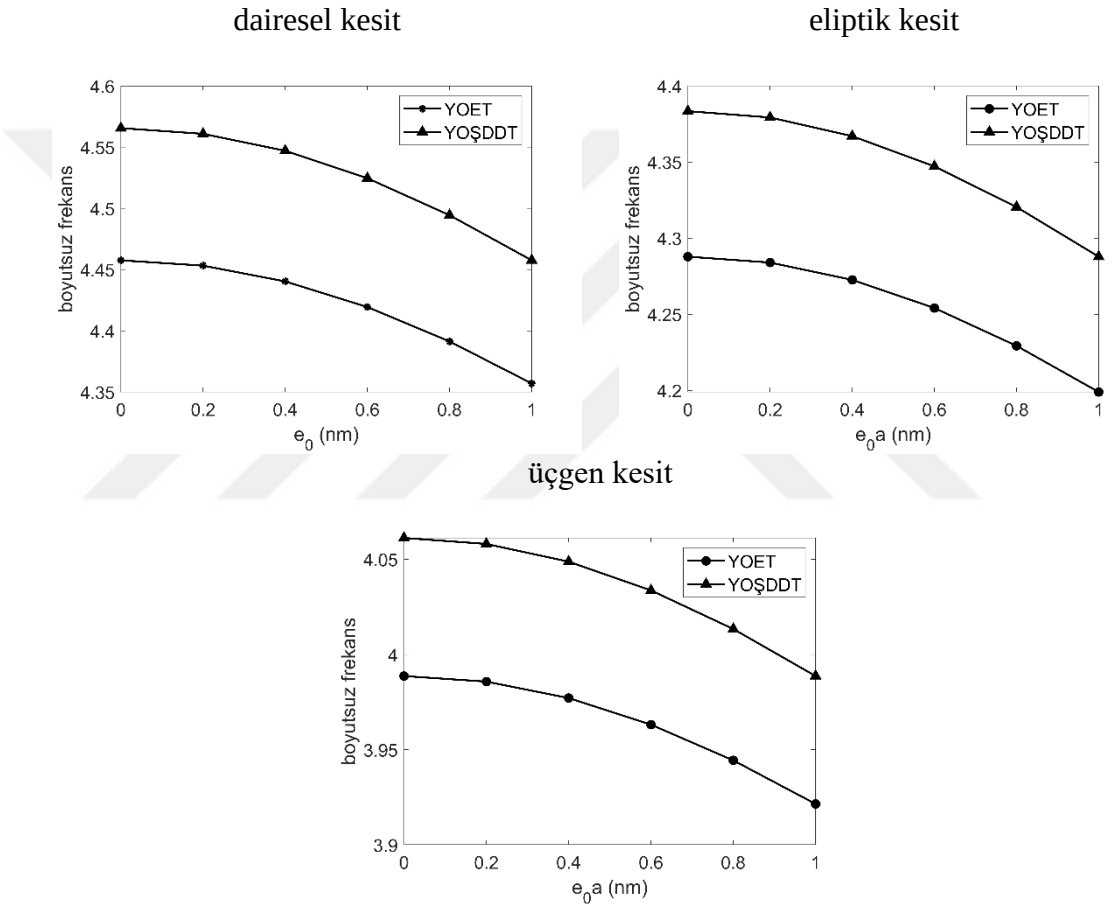
$$\bar{\omega} = \omega L \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \tag{4.22}$$

$$\overline{k_e} = \frac{k_e L^2}{\mu J} \tag{4.23}$$

$$\overline{K_0} = \frac{K_0 L}{\mu J} \tag{4.24}$$

$$\overline{K_L} = \frac{K_L L}{\mu J} \tag{4.25}$$

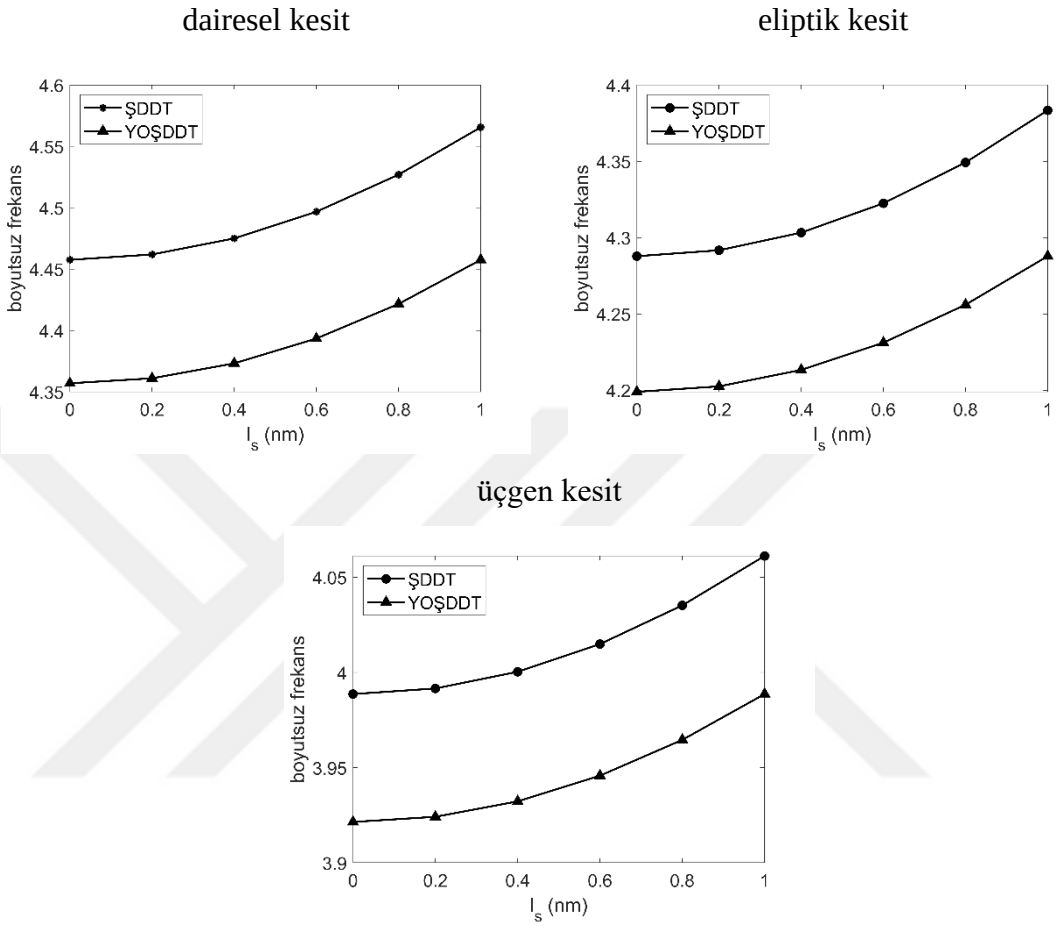
Ayrıca, dairesel kesitin yarıçapı $1\,nm$ alınırken, eliptik kesitin yarıçapları $r_1 = 1{,}20081\,nm$, $r_2 = 0{,}8\,nm$ ve eşkenar üçgen kesitin kenar uzunluğu $r_3 = 2{,}5687\,nm$ alınmıştır. Şekil 4.48'de daire, eliptik ve üçgen kesitli nanoçubukların frekanslarının değişimi yerel olmayan parametreye göre verilmiştir. Yerel olmayan parametrenin frekansları azaltıcı etkisi bütün kesitler için kolaylıkla gözlemlenmektedir. Görüleceği üzere grafikler hem YOET hem de YOŞDDT için çizilmiştir. YOET için verilen sonuçlarda $l_s = 0$ alınırken YOŞDDT için verilen sonuçlarda $l_s = 1\,nm$ alınmıştır.



Şekil 4.48. Nanoçubukların frekanslarının yerel olmayan parametreye göre değişimi

Şekil 4.49'da daire, eliptik ve üçgen kesitli nanoçubukların frekanslarının değişimi malzeme uzunluk ölçek parametresine göre verilmiştir. Malzeme uzunluk ölçek parametresinin frekansları arttırıcı etkisi bütün kesitler için kolaylıkla gözlemlenmektedir. Görüleceği üzere grafikler hem ŞDDT hem de YOŞDDT için çizilmiştir. ŞDDT için verilen sonuçlarda $e_0 a = 0$ alınırken YOŞDDT için verilen

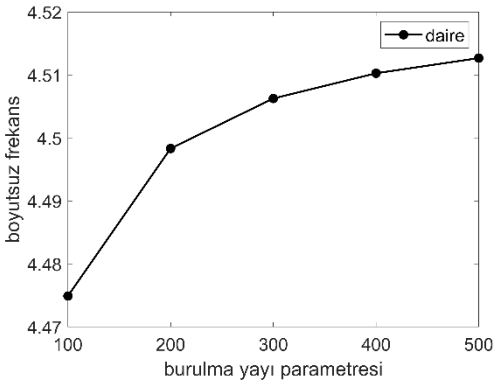
sonuçlarda $e_0 a = 1\ nm$ alınmıştır. Burada sunulan ŞDDT'nin Aifantis (1999) tarafından sunulan olduğuna dikkat çekmek gerekmektedir.



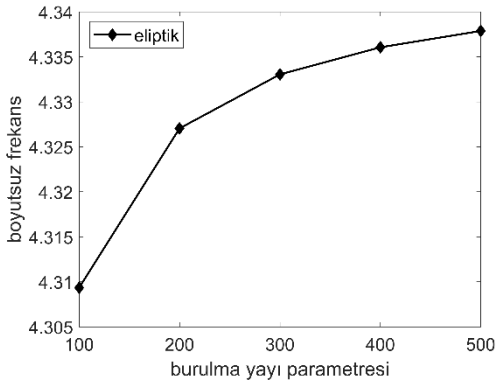
Şekil 4.49. Nanoçubukların frekanslarının $\boldsymbol{l_s}$'ye göre değişimi

Yay parametrelerinin değiştirilmesinin boyutsuz frekansları üzerindeki etkisini göstermek için Şekil 4.50 sunulmuştur. Bu örnekte dairesel, eliptik ve üçgen kesitler için boyutsuz yay parametreleri beş farklı değerde seçilmiş ve terim sayısı yüz kırk alınmıştır. Tüm kesitler için artan yay rijitliğinin frekanslarda bir artışa neden olduğu kolayca gözlemlenmektedir. Frekans artışının düşük yay rijitliğindeki değişimlerden daha fazla etkilendiği görülmektedir. Ayrıca, $\overline{K_0} = \overline{K_L}$ yüzden beş yüze çıktığında frekans değerlerindeki en yüksek artış dairesel kesitte gerçekleşirken en düşük artış üçgen kesitte gerçekleşmektedir. Bu açıdan bakıldığında yay rijitliklerinin etkisinin en fazla dairesel kesit üzerinde olduğunu söylemek mümkündür.

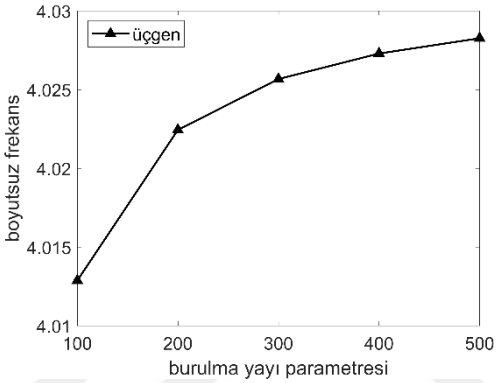
dairesel kesit



eliptik kesit

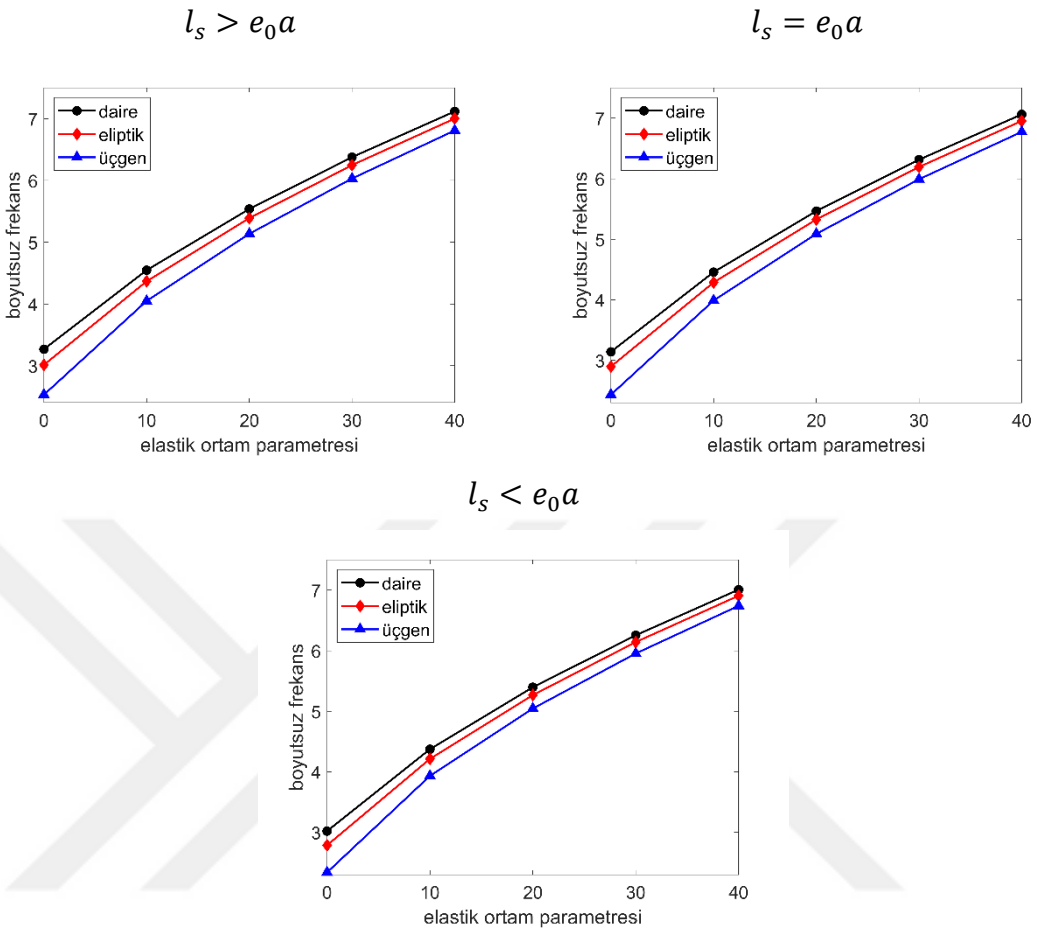


üçgen kesit



Şekil 4.50. Burulma frekanslarının $\overline{\boldsymbol{K_0}} = \overline{\boldsymbol{K_L}}$ değerlerine göre değişimi

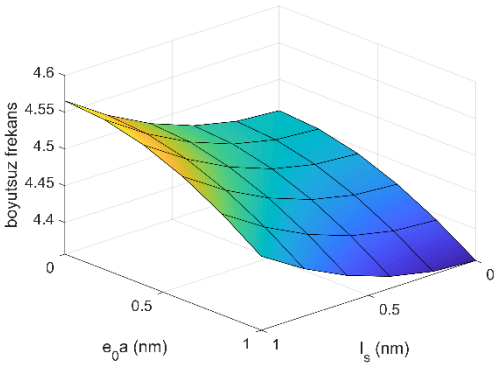
Hem kesitlerin etkisinin hem de elastik ortam etkisinin karşılaştırılması için Şekil 4.51 sunulmuştur. Görüleceği üzere en yüksek frekanslar dairesel kesit için elde edilirken en düşük frekanslar üçgen kesit için elde edilmiştir. Elastik ortam nanoçubukların burulmalı titreşim frekanslarında artış meydana getirmektedir. Frekans değişimlerini gösteren eğrilere bakıldığında, elastik ortadamdan en fazla etkilenen kesitin üçgen olduğu göze çarpmaktadır. Elastik ortamdan bağımsız durumda kolayca fark edilebilir oranda düşük frekanslara sahip üçgen kesitlerin frekansları $\overline{k_e}$ arttıkça diğer iki kesite yaklaşmaktadır.



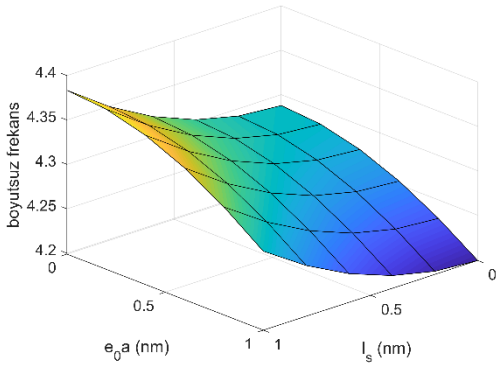
Şekil 4.51. Burulma frekanslarının elastik ortam parametresine göre değişimi

Son olarak, Şekil 4.52 her iki boyut parametresinin etkilerini bir arada inceleyebilmek için sunulmuştur. Yerel olmayan parametrenin ve malzeme uzunluk ölçek parametresinin frekansları sırasıyla azaltıcı ve arttırıcı etkileri rahatlıkla görülebilir. Ayrıca, yerel olmayan parametre ve malzeme uzunluk ölçek parametresinin eşit değerler aldığı noktalarda frekanslar hep aynıdır.

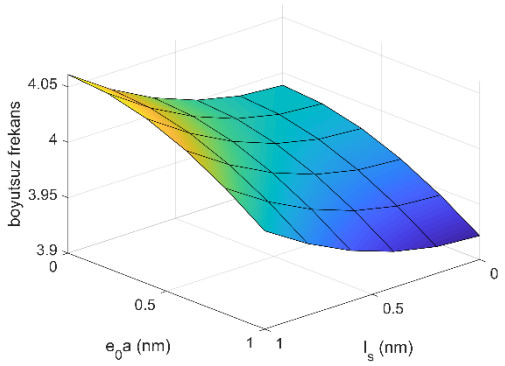
daire



eliptik



üçgen



Şekil 4.52. Boyut parametrelerinin etkilerinin bir arada gösterimi

5. SONUÇ

Bu tez kapsamında, çeşitli boyut etkili elastisite teorilerine dayalı olarak oluşturulan fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanotüplerin burulmalı titreşim, kompozit nanokirişlerin ise burkulma ve enine titreşim hesapları için genel elastik sınır koşullarının etkilerini inceleyebilen çözümler sunulmuştur. Modellemede kompozit nanotüpler için dört farklı teori kullanılmıştır: yerel olmayan elastisite teorisi, değiştirilmiş gerilme çifti teorisi, şekil değiştirme değişimi teorisi (Lam, 2003) ve yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisi. Kompozit nanokirişler için iki farklı teori kullanılmıştır: yerel olmayan elastisite teorisi ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisi. Bunlara ek olarak, elastik bir ortamda bulunan ve deforme olabilen burulma yayları ile mesnetlenmiş dairesel olmayan (eliptik ve eşkenar üçgen) kesitlere sahip nanoçubuklar için yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisine dayalı burulma titreşimlerini veren bir çözüm daha sunulmuştur. Bu tez çalışmasında sunulan çözüm yaklaşımının doğruluğu, literatürde bulunan başka akademik çalışmalar ile karşılaştırılarak sunulmuştur. Bu tez çalışması kapsamında elde edilen sonuçlar şu şekilde özetlenebilir:

Kompozit nanotüpler için elde edilen sonuçlara bakıldığı zaman yerel olmayan elastisite teorisinin etkisinin frekanslar üzerinde azaltıcı yönde olduğu; değiştirilmiş gerilme çifti teorisinin ve her iki şekil değiştirme değişimi teorisinin (Lam, 2003; Aifantis, 1999) etkisinin frekanslar üzerinde arttırıcı yönde olduğu görülmüştür. Bunların yanısıra, yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisi frekanslar üzerinde hem arttırıcı hem de azaltıcı etkilere sahip olabilmektedir. Yerel olmayan parametrenin malzeme uzunluk ölçek parametresinden daha büyük olduğu durumlarda frekanslar azalırken, yerel olmayan parametrenin malzeme uzunluk ölçek parametresinden daha küçük olduğu durumlarda frekanslar artmaktadır. Ayrıca, elastik bir ortam içinde olan kompozit nanotüplerin frekanslarının olmayanlara göre daha yüksek olduğu görülmüştür. Kompozit nanotüplerin her iki ucunda bulunan burulma yaylarının rijitliklerinin arttırılması, frekanslarda artış meydana getirmektedir.

Dairesel olmayan nanoçubuklar için elde edilen sonuçlara bakıldığı zaman en yüksek frekansların dairesel kesite, en düşük frekansların ise eşkenar üçgen kesite sahip

nanoçubuğa ait olduğu gözlenmiştir. Burulma yayı rijitliklerinin arttırılması bütün kesitlerde frekansları arttırmakla beraber, incelenen aralıkta yay rijitliklerinin etkisinin en fazla dairesel kesit üzerinde olduğu görülmüştür. Nanoçubukları çevreleyen elastik ortamın etkisi incelendiğinde ise üçgen kesitin elastik ortamın rijitliğinden en fazla etkiendiği anlaşılmıştır.

Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit nanokirişler için elde edilen sonuçlara bakıldığı zaman yerel olmayan elastisite teorisinin etkisinin frekanslar ve burkulma yükleri üzerinde azaltıcı yönde olduğu; değiştirilmiş gerilme çifti teorisinin etkisinin ise frekanslar ve burkulma yükleri üzerinde arttırıcı yönde olduğu görülmektedir. Elde edilen frekanslar ve burkulma yüklerine bakıldığı zaman en düşük değerlerin Timoshenko kiriş teorisi, en yüksek değerlerin ise Euler-Bernoulli kiriş teorisi için elde edildiği anlaşılır. Malzeme ve gözenek dağılımı kompozit nanokirişlerin frekanslarında ve burkulma yüklerinde fark edilebilir bir değişime neden olmaktadır. Burkulma analizine bakıldığında ise, her iki gözenek dağılımının da burkulma yüklerinde azalmaya neden olduğu ve en yüksek burkulma yüklerinin fonksiyonel derecelendirilmiş gözeneksiz nanokirişler için elde edildiği anlaşılır. Bununla beraber, farklı malzeme ve gözenek dağılımına sahip nanokirişlerin zemin, malzeme değişim katsayısı gibi diğer parametrelerden farklı oranlarda etkilendikleri görülmüştür. Ayrıca, malzeme değişim katsayısının artışı frekansları ve burkulma yüklerini azaltırken zemin parametrelerinin artışı frekansları ve burkulma yüklerini arttırmaktadır.

Karbon nanotüp takviyeli kompozit nanokirişler için elde edilen sonuçlara bakıldığı zaman yerel olmayan elastisite teorisinin ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisinin sonuçları sırasıyla azaltıcı ve arttıcı etkisinin burada da geçerli olduğu görülür. Bu kompozitlerde, matris içeriğindeki karbon nanotüp oranı ve karbon nanotüp dağılım şekli önemli etkilere sahiptir. Karbon nanotüp oranı yüksek olan kompozit nanokirişlerin frekans ve burkulma yükleri de daha yüksektir. Ayrıca, en yüksek frekans ve burkulma yükleri X şekilli karbon nanotüp dağılımına sahip nanokompozitler için hesaplanırken en düşük frekans ve burkulma yükleri O şekilli karbon nanotüp dağılımına sahip nanokompozitler için hesaplanmıştır.

Bundan sonraki yapılacak çalışmalarda, nanokompozit kiriş yapılarının yerel olmayan elastisite ve değiştirilmiş gerilme çifti teorilerini içeren farklı kayma deformasyonlu kiriş teorilerine dayalı modelleri kurulup incelenebilir. Buna ek olarak, bu tez çalışmasında nanokompozit kiriş yapıları için modelleri kurulmayan diğer boyut etkili teoriler (şekil değiştirme değişimi teorisi, yerel olmayan şekil değiştirme değişimi teorisi, yerel olmayan gerilme çifti teorisi, yüzey elastisite teorisi, vb.) ile modeller kurulup bu teorilerin etkileri incelenebilir. Öte yandan, termal, piezoelektrik ve viskoelastik zemin gibi etkiler de dikkate alınarak analizleri gerçekleştirelebilir.

KAYNAKLAR

Abdellah, A., Abdelhalim, A., Loghin, F., Köhler, P., Ahmad, Z., Scarpa, G., & Lugli, P. (2013). Flexible carbon nanotube based gas sensors fabricated by large-scale spray deposition. *IEEE Sensors Journal*, *13*(10), 4014-4021. https://doi.org/10.1109/JSEN.2013.2265775

Abid, N., Khan, A. M., Shujait, S., Chaudhary, K., Ikram, M., Imran, M., Haider, J., Khan, M., Khan, Q., & Maqbool, M. (2022). Synthesis of nanomaterials using various top-down and bottom-up approaches, influencing factors, advantages, and disadvantages: A review. *Advances in Colloid and Interface Science*, *300*, 102597. https://doi.org/10.1016/j.cis.2021.102597

Aifantis, E. C. (1999). Strain gradient interpretation of size effects. *Fracture Scaling*, 299-314. https://doi.org/10.1007/978-94-011-4659-3_16

Akbaş, Ş. D. (2017). Free vibration of edge cracked functionally graded microscale beams based on the modified couple stress theory. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, *17*(03), 1750033. https://doi.org/10.1142/s021945541750033x

Akbaş, Ş. D. (2018). Fonksiyonel derecelendirilmiş ortotropik bir kirişin statik ve titreşim davranışlarının incelenmesi. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, *20*(1), 69-82. https://doi.org/10.25092/baunfbed.343227

Akgöz, B. (2016) *Bir ve İki Boyutlu Mikro Yapıların Yüksek Mertebeden Elastisite Teorileri ile Statik ve Dinamik Analizleri* [Doktora Tezi]. Akdeniz Üniversitesi.

Akgöz, B., & Cívalek, Ö. (2011). Strain gradient elasticity and modified couple stress models for buckling analysis of axially loaded micro-scaled beams. *International Journal of Engineering Science*, *49*(11), 1268–1280. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2010.12.009

Ali, A. A. (2020). Nanotechnology in Civil Engineering Construction. *International Journal of Structural and Civil Engineering Research*, *9*(1), 87-90. https://doi.org/10.18178/ijscer.9.1.87-90

Alizadeh Hamidi, B., Khosravi, F., Hosseini, S. A., & Hassannejad, R. (2020). Free torsional vibration of triangle microwire based on modified couple stress theory. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, *55*(7–8), 237–245. https://doi.org/10.1177/0309324720922385

Alshorbagy, A. E., Eltaher, M., & Mahmoud, F. (2011). Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, *35*(1), 412-425. https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.07.006

Amirian, B., Hosseini-Ara, R., & Moosavi, H. (2013). Thermal vibration analysis of carbon nanotubes embedded in two-parameter elastic foundation based on nonlocal

Timoshenko's beam theory. *Archives of Mechanics*, *64*(6), 581–602. https://doi.org/10.24423/aom.718

Ansari, R., Gholami, R., & Ajori, S. (2013). Torsional vibration analysis of carbon nanotubes based on the strain gradient theory and molecular dynamic simulations. *Journal of Vibration and Acoustics*, 135(5). https://doi.org/10.1115/1.4024208

Arghavan, S., & Hematiyan, M. (2009). Torsion of functionally graded hollow tubes. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, *28*(3), 551-559. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2008.07.009

Avcar, M. (2019). Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams. *Steel and Composite Structures, An International Journal*, *30*(6), 603-615. https://doi.org/10.12989/scs.2019.30.6.603

Aydoğdu, M. (2009). A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending, buckling and vibration. *Physica E-low-dimensional Systems & Nanostructures*, *41*(9), 1651–1655. https://doi.org/10.1016/j.physe.2009.05.014

Babaei, A., Ghanbari, A., & Vakili-Tahami, F. (2015). Size-dependent behavior of functionally graded micro-beams, based on the modified couple stress theory. *Thechnology*, *3*(5), 364-372.

Bal, S., & Samal, S. S. (2007). Carbon nanotube reinforced polymer composites—A state of the art. *Bulletin of Materials Science*, *30*(4), 379-386. https://doi.org/10.1007/s12034-007-0061-2

Balkaya, M., Kaya, M. O., & Sağlamer, A. (2009). Analysis of the vibration of an elastic beam supported on elastic soil using the differential transform method. *Archive of Applied Mechanics*, *79*(2), 135-146. https://doi.org/10.1007/s00419-008-0214-9

Barretta, R., Faghidian, S. A., Marotti de Sciarra, F., Penna, R., & Pinnola, F. (2020). On torsion of nonlocal Lam strain gradient FG elastic beams. *Composite Structures*, *233*, 111550. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111550

Bauer, S., Pittrof, A., Tsuchiya, H., & Schmuki, P. (2011). Size-effects in TiO2 nanotubes: Diameter dependent anatase/rutile stabilization. *Electrochemistry Communications*, *13*(6), 538-541. https://doi.org/10.1016/j.elecom.2011.03.003

Bayda, S., Adeel, M., Tuccinardi, T., Cordani, M., & Rizzolio, F. (2019). The History of Nanoscience and Nanotechnology: From Chemical–Physical Applications to Nanomedicine. *Molecules*, *25*(1), 112. https://doi.org/10.3390/molecules25010112

Bever, M. B., & Duwez, P. E. (1970, July). On gradient composites. *In Preliminary Reports, Memoranda and Technical Notes of the ARPA Materials Summer Conference*, 117-140.

Bommala, V. K., Krishna, M. G., & Rao, C. T. (2019). Magnesium matrix composites for biomedical applications: A review. *Journal of Magnesium and Alloys*, *7*(1), 72-79. https://doi.org/10.1016/j.jma.2018.11.001

Borjalilou, V., Taati, E., & Ahmadian, M. T. (2019). Bending, buckling and free vibration of nonlocal FG-carbon nanotube-reinforced composite nanobeams: Exact solutions. *SN Applied Sciences*, 1(11), 1-15. https://doi.org/10.1007/s42452-019-1359-6

Chang, X., & Zhou, J. (2022). Static and dynamic characteristics of post-buckling of porous functionally graded pipes under thermal shock. *Composite Structures*, *288*, 115373. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115373

Chaabane, L. A., Bourada, F., Sekkal, M., Zerouati, S., Zaoui, F. Z., Tounsi, A., Derras, A., Bousahla, A. A., & Tounsi, A. (2019). Analytical study of bending and free vibration responses of functionally graded beams resting on elastic foundation. *Structural Engineering and Mechanics*, *71*(2), 185–196. https://doi.org/10.12989/sem.2019.71.2.185

Chen, C.-N. (2000). Vibration of prismatic beam on an elastic foundation by the differential quadrature element method. *Computers & Structures*, *77*(1), 1-9. https://doi.org/10.1016/s0045-7949(99)00216-3

Chen, X. L., & Liew, K. M. (2004). Buckling of rectangular functionally graded material plates subjected to nonlinearly distributed in-plane edge loads. *Smart Materials and Structures*, *13*(6), 1430-1437. https://doi.org/10.1088/0964-1726/13/6/014

Chowdhury, R., Adhikari, S., Wang, C., & Scarpa, F. (2010). A molecular mechanics approach for the vibration of single-walled carbon nanotubes. *Computational Materials Science*, *48*(4), 730-735. https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2010.03.020

Cívalek, Ö., Dastjerdi, S., Akbaş, Ş. D., & Akgöz, B. (2021). Vibration analysis of carbon nanotube-reinforced composite microbeams. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. https://doi.org/10.1002/mma.7069

Coşkun S. B., Öztürk B., & Mutman U. (2014). Adomian decomposition method for vibration of nonuniform euler beams on elastic foundation. *In Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics*, 1935-1940.

Das, K., Sen, S., & Biswas, P. (2020). A Review Paper – on the Use of Nanotechnology in Construction Industry. *SSRN Electronic Journal*. https://doi.org/10.2139/ssrn.3526716

Demir, Çiğdem. (2016). Nonlocal Vibration Analysis for Micro/Nano Beam on Winkler Foundation via DTM. *International Journal Of Engineering & Applied Sciences*, *8*(4), 108-108. https://doi.org/10.24107/ijeas.281514

Ebrahimi, F., & Salari, E. (2015a). A semi-analytical method for vibrational and buckling analysis of functionally graded nanobeams considering the physical neutral axis position. *CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences*, *105*(2), 151-181.

Ebrahimi, F., & Salari, E. (2015b). Thermal buckling and free vibration analysis of size dependent Timoshenko FG nanobeams in thermal environments. *Composite Structures*, *128*, 363-380. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.03.023

Ebrahimi, F., & Barati, M. R. (2015). A nonlocal Higher-Order shear Deformation beam Theory for vibration analysis of Size-Dependent functionally graded nanobeams. *Arabian Journal for Science and Engineering*, *41*(5), 1679–1690. https://doi.org/10.1007/s13369-015-1930-4

El-Borgi, S., Rajendran, P., Friswell, M., Trabelssi, M., & Reddy, J. (2018). Torsional vibration of size-dependent viscoelastic rods using nonlocal strain and velocity gradient theory. *Composite Structures*, *186*, 274-292. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.002

Eltaher, M. A., Emam, S. A., & Mahmoud, F. (2012). Free vibration analysis of functionally graded size-dependent nanobeams. *Applied Mathematics and Computation*, *218*(14), 7406–7420. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.12.090

Eltaher, M., Abdelrahman, A., Al-Nabawy, A., Khater, M., & Mansour, A. (2014). Vibration of nonlinear graduation of nano-Timoshenko beam considering the neutral axis position. *Applied Mathematics and Computation*, *235*, 512-529. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.03.028

Eltaher, M., Alshorbagy, A., & Mahmoud, F. (2013). Determination of neutral axis position and its effect on natural frequencies of functionally graded macro/nanobeams. *Composite Structures*, *99*, 193-201. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.039

Eringen, A. C. (1978). Line crack subject to shear. *International Journal of Fracture*, *14*(4), 367-379. https://doi.org/10.1007/bf00015990

Eringen, A. C. (1979). Line crack subject to antiplane shear. *Engineering Fracture Mechanics*, *12*(2), 211-219. https://doi.org/10.1016/0013-7944(79)90114-0

Eringen, A. C. (1983). On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, *54*(9), 4703-4710. https://doi.org/10.1063/1.332803

Eringen, A., & Edelen, D. (1972). On nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science*, *10*(3), 233-248. https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90039-0

Eringen, A. C., & Kim, B. S. (1974). Stress concentration at the tip of crack. *Mechanics Research Communications*, *1*(4), 233-237. https://doi.org/10.1016/0093-6413(74)90070-6

Eringen, A., Speziale, C., & Kim, B. (1977). Crack-tip problem in non-local elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, *25*(5), 339-355. https://doi.org/10.1016/0022-5096(77)90002-3

Ermiş, M., Kutlu, A., Eratlı, N., & Omurtag, M. H. (2022). Free vibration of axially FG curved beam on orthotropic Pasternak foundation via mixed FEM. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, *44*(12). https://doi.org/10.1007/s40430-022-03853-9

Ersoy, H., Civalek, Ö., Numanoğlu, H. M., & Akgöz, B. (2018). Small size and rotary inertia effects on the natural frequencies of carbon nanotubes. *Curved and Layered Structures*, *5*(1), 273-279. https://doi.org/10.1515/cls-2018-0020

Garg, A., Chalak, H. D., Zenkour, A. M., Belarbi, M.-O., & Houari, M.-S.-A. (2021). A Review of Available Theories and Methodologies for the Analysis of Nano Isotropic, Nano Functionally Graded, and CNT Reinforced Nanocomposite Structures. *Archives of Computational Methods in Engineering*, *29*(4), 2237-2270. https://doi.org/10.1007/s11831-021-09652-0

Gheshlaghi, B., Hasheminejad, S. M., & Abbasion, S. (2010). Size dependent torsional vibration of nanotubes. *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, *43*(1), 45-48. https://doi.org/10.1016/j.physe.2010.06.015

Gohardani, O., Elola, M. C., & Elizetxea, C. (2014). Potential and prospective implementation of carbon nanotubes on next generation aircraft and space vehicles: A review of current and expected applications in aerospace sciences. *Progress in Aerospace Sciences*, *70*, 42-68. https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2014.05.002

Gopalakrishnan, S., & Narendar, S. (2013). *Wave Propagation in Nanostructures*. Springer Science & Business Media.

Gorman, D. J. (1975). *Free vibration analysis of beams and shafts*. Wiley. https://ci.nii.ac.jp/ncid/BA18160011

Hassannejad, R., Ettefagh, M. M., & Alizadeh-Hamidi, B. (2022). Effects of warping function on scale-dependent torsional vibration of nano-bars. *European Physical Journal Plus*, *137*(7). https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-03012-y

Hutchinson, J. R. (2000). Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory. *Journal of Applied Mechanics*, *68*(1), 87-92. https://doi.org/10.1115/1.1349417

Iijima, S. (1991). Helical microtubules of graphitic carbon. *Nature*, *354*(6348), 56–58. https://doi.org/10.1038/354056a0

İpci, D., & Yıldırım, B. (2021). Free vibration analysis of a functionally graded micro-beam with tapered cross section. *Gazi University Journal of Science Part C: Design and Technology*, *9*(2), 272-282. https://doi.org/10.29109/gujsc.900950

Jacobs, C. B., Peairs, M. J., & Venton, B. J. (2010). Carbon nanotube based electrochemical sensors for biomolecules. *Analytica Chimica Acta*, *662*(2), 105-127. https://doi.org/10.1016/j.aca.2010.01.009

Jena, S. K., Chakraverty, S., Mahesh, V., Harursampath, D., & Sedighi, H. M. (2022a). Free vibration of functionally graded beam embedded in Winkler-Pasternak elastic foundation with geometrical uncertainties using symmetric Gaussian fuzzy number. *The European Physical Journal Plus*, 137(3), 399. https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-02607-9

Jena, S. K., Mahesh, V., & Harursampath, D. (2022b). Application of Haar wavelet discretization and differential quadrature methods for free vibration of functionally graded micro-beam with porosity using modified couple stress theory. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, *140*, 167–185. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.04.009

Juhasz, J. (2004). Mechanical properties of glass-ceramic A–W-polyethylene composites: Effect of filler content and particle size. *Biomaterials*, *25*(6), 949-955. https://doi.org/10.1016/j.biomaterials.2003.07.005

Jyoti, J., & Singh, B. P. (2021). A review on 3D graphene–carbon nanotube hybrid polymer nanocomposites. *Journal of Materials Science*, *56*(31), 17411-17456. https://doi.org/10.1007/s10853-021-06370-7

Kadıoğlu, H. G. (2018) *Timoshenko kirişlerinin genel elastik sınır koşullarında titreşim analizi* [Yüksek Lisans Tezi]. Bursa Uludağ Üniversitesi.

Kadıoğlu, H. G., & Yaylı, M. Ö. (2017). Timoshenko kirişlerinin genel elastik sınır koşullarında fourier serileri kullanılarak titreşim analizi. Uludağ Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Dergisi, 22(3), 291-306. https://doi.org/10.17482/uumfd.310529

Kafkas, U. (2022) *Dönel yaylar ile sabitlenmiş bir karbon nanotüpün boşluk oranına bağlı serbest titreşim analizi* [Doktora Tezi]. Bursa Uludağ Üniversitesi.

Kahya, V., & Turan, M. (2017). Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, *109*, 108–115. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.10.039

Karlicic, D., Murmu, T., Adhikari, S., & McCarthy, M. (2016). *Non-local Structural Mechanics*. John Wiley & Sons.

Kasuya, A., Sasaki, Y., Saito, Y., Tohji, K., & Nishina, Y. (1997). Evidence for Size-Dependent Discrete Dispersions in Single-Wall Nanotubes. *Physical Review Letters*, 78(23), 4434-4437. https://doi.org/10.1103/physrevlett.78.4434

Khosravi, F., Hosseini, S. A., Hamidi, B., Dimitri, R., & Tornabene, F. (2020). Nonlocal Torsional Vibration of Elliptical Nanorods with Different Boundary Conditions. *Vibration*, *3*(3), 189–203. https://doi.org/10.3390/vibration3030015

Kim, H., & Kim, M. (2001). Vibration of beams with generally restrained boundary conditions using fourier series. *Journal of Sound and Vibration*, *245*(5), 771-784. https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3615

Kırlangıç, O. (2020). *Fonksiyonel derecelendirilmiş ile tabakalı kompozit kirişlerin dinamik, stabilite ve statik analizleri* [Yüksek Lisans Tezi]. Bursa Teknik Üniversitesi.

Koiter, W. (1964) Couple Stresses in the Theory of Elasticity, I & II. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B*, *67*, 17-44.

Kong, S., Zhou, S., Nie, Z., & Wang, K. (2008). The size-dependent natural frequency of Bernoulli–Euler micro-beams. *International Journal of Engineering Science*, *46*(5), 427-437. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2007.10.002

Kröner, E. (1967). Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. *International Journal of Solids and Structures*, *3*(5), 731-742. https://doi.org/10.1016/0020-7683(67)90049-2

Lai, H.-Y., Hsu, J.-C., & Chen, C.-K. (2008). An innovative eigenvalue problem solver for free vibration of Euler–Bernoulli beam by using the Adomian decomposition method. *Computers & Mathematics With Applications*, *56*(12), 3204-3220. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.07.029

Lam, D., Yang, F., Chong, A., Wang, J., & Tong, P. (2003). Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, *51*(8), 1477-1508. https://doi.org/10.1016/s0022-5096(03)00053-x

Li, L. (2017). Torsional vibration of bi-directional functionally graded nanotubes based on nonlocal elasticity theory. *Composite Structures*, *172*, 242–250. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.03.097

Li, L., & Hu, Y. (2019). Torsional statics of two-dimensionally functionally graded microtubes. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, *26*(5), 430-442. https://doi.org/10.1080/15376494.2017.1400617

Li, L., Hu, Y. & Li, X. (2016). Longitudinal vibration of size-dependent rods via nonlocal strain gradient theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, *115–116*, 135–144. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.06.011

Lim, C., Zhang, G., & Reddy, J. N. (2015). A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, *78*, 298–313. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2015.02.001

Malik, S., Muhammad, K., & Waheed, Y. (2023). Nanotechnology: A Revolution in Modern Industry. *Molecules*, *28*(2), 661. https://doi.org/10.3390/molecules28020661

Mangalgiri, P. D. (1999). Composite materials for aerospace applications. *Bulletin of Materials Science*, *22*(3), 657-664. https://doi.org/10.1007/bf02749982

Mashkoor, F., Nasar, A., & Inamuddin,. (2020). Carbon nanotube-based adsorbents for the removal of dyes from waters: A review. *Environmental Chemistry Letters*, *18*(3), 605-629. https://doi.org/10.1007/s10311-020-00970-6

Mercan, K., Numanoglu, H. M., Akgöz, B., Demir, C., & Civalek, Ö. (2017). Higher-order continuum theories for buckling response of silicon carbide nanowires (SiCNWs) on elastic matrix. *Archive of Applied Mechanics*, *87*(11), 1797-1814. https://doi.org/10.1007/s00419-017-1288-z

Mindlin, R. D. (1963). Influence of couple-stresses on stress concentrations. *Experimental Mechanics*, *3*(1), 1-7. https://doi.org/10.1007/bf02327219

Mindlin, R. D., & Tiersten, H. F. (1962). Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, *11*(1), 415-448. https://doi.org/10.1007/bf00253946

Mohd Nurazzi, N., Asyraf, M. R. M., Abdan, K., Abdullah, N., Sabaruddin, F. A., Kamarudin, S. H., Ahmad, S., Mahat, A. M., Lee, C. L., Alias, A. H., Norrrahim, M. N. F., Ilyas, R. A., Harussani, M. M., Ishak, M. R., & Sapuan, S. M. (2021). Fabrication, Functionalization, and Application of Carbon Nanotube-Reinforced Polymer Composite: An Overview. *Polymers*, *13*(7), 1047. https://doi.org/10.3390/polym13071047

Murmu, T., & Pradhan, S. (2009). Buckling analysis of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity and Timoshenko beam theory and using DQM. *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, *41*(7), 1232-1239. https://doi.org/10.1016/j.physe.2009.02.004

Mutman, U. (2013). Free Vibration Analysis of an Euler Beam of Variable Width on the Winkler Foundation Using Homotopy Perturbation Method. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 1-9. https://doi.org/10.1155/2013/721294

Naebe, M., & Shirvanimoghaddam, K. (2016). Functionally graded materials: A review of fabrication and properties. *Applied Materials Today*, *5*, 223-245. https://doi.org/10.1016/j.apmt.2016.10.001

Naidu, N., & Rao, G. V. (1995). Vibrations of initially stressed uniform beams on a two-parameter elastic foundation. *Computers & Structures*, *57*(5), 941–943. https://doi.org/10.1016/0045-7949(95)00090-4

Nanoteknoloji Strateji Grubu (2004). Nanobilim ve nanoteknoloji stratejileri, *Vizyon 2023 Projesi*, Ankara, 4-7.

Numanoğlu, H. M., & Civalek, Ö. (2019). On the torsional vibration of nanorods surrounded by elastic matrix via nonlocal FEM. *International Journal of Mechanical Sciences*, *161*, 105076. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105076

Numanoğlu, H. M., Ersoy, H., Cívalek, Ö., & Ferreira, A. (2021). Derivation of nonlocal FEM formulation for thermo-elastic Timoshenko beams on elastic matrix. *Composite Structures*, *273*, 114292. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114292

Numanoğlu, H. M., Ersoy, H., Akgöz, B., & Civalek, Ö. (2022). A new eigenvalue problem solver for thermo-mechanical vibration of Timoshenko nanobeams by an innovative nonlocal finite element method. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *45*(5), 2592-2614. https://doi.org/10.1002/mma.7942

Obitayo, W., & Liu, T. (2012). A review: Carbon nanotube-based piezoresistive strain sensors. *Journal of Sensors*, 2012. https://doi.org/10.1155/2012/652438

Omanović-Mikličanin, E., Badnjević, A., Kazlagić, A., & Hajlovac, M. (2019). Nanocomposites: A brief review. *Health and Technology*, *10*(1), 51-59. https://doi.org/10.1007/s12553-019-00380-x

Park, S. K., & Gao, X.-L. (2006). Bernoulli–Euler beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, *16*(11), 2355-2359. https://doi.org/10.1088/0960-1317/16/11/015

Polyzos, D., Huber, G., Mylonakis, G., Triantafyllidis, T., Papargyri-Beskou, S., & Beskos, D. (2015). Torsional vibrations of a column of fine-grained material: A gradient elastic approach. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, *76*, 338-358. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2014.11.012

Pradhan, K. K., & Chakraverty, S. (2013). Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh–Ritz method. *Composites Part B: Engineering*, *51*, 175–184. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.02.027

Professor Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830). August 31, 2023. https://shellbuckling.com/cv/fourier.pdf

Protecting Aircraft Composites from Lightning Strike Damage . August 31, 2023. https://www.comsol.com/blogs/protecting-aircraft-composites-from-lightning-strike-damage/

Rahmani, O., & Pedram, O. (2014). Analysis and modeling the size effect on vibration of functionally graded nanobeams based on nonlocal Timoshenko beam theory. *International Journal of Engineering Science*, *77*, 55-70. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2013.12.003

Rahmani, O., & Jandaghian, A. A. (2015). Buckling analysis of functionally graded nanobeams based on a nonlocal third-order shear deformation theory. *Applied Physics A*, *119*(3), 1019–1032. https://doi.org/10.1007/s00339-015-9061-z

Rahmani, O., Refaeinejad, V., & Hosseini, S. A. (2017). Assessment of various nonlocal higher order theories for the bending and buckling behavior of functionally graded nanobeams. *Steel and Composite Structures*, *23*(3), 339–350. https://doi.org/10.12989/scs.2017.23.3.339

Ramteke, M. P., Mehar, K., Sharma, N., & Panda, S. (2021). Numerical Prediction of Deflection and Stress Responses of Functionally Graded Structure for Grading Patterns

(Power-Law, Sigmoid and Exponential) and Variable Porosity (Even/Uneven). *Scientia Iranica*, *28*(2), 821-829. https://doi.org/10.24200/sci.2020.55581.4290

Ravishankar, B., Nayak, S. K., & Kader, M. A. (2019). Hybrid composites for automotive applications – A review. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, *38*(18), 835-845. https://doi.org/10.1177/0731684419849708

Reddy, J. (2007). Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science*, *45*(2), 288-307. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2007.04.004

Reddy, J. N. (2002). *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics (2nd ed.)*. New York: John Wiley & Sons.

Refaeinejad, V., Rahmani, O., & Hosseini, S. A. (2017). An analytical solution for bending, buckling, and free vibration of FG nanobeam lying on Winkler-Pasternak elastic foundation using different nonlocal higher order shear deformation beam theories. *Scientia Iranica*, *24*(3), 1635–1653. https://doi.org/10.24200/sci.2017.4141

Robinson, M. T. A., & Adali, S. (2018). Buckling of nonuniform and axially functionally graded nonlocal Timoshenko nanobeams on Winkler-Pasternak foundation. *Composite Structures*, *206*, 95-103. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.07.046

Rubino, F., Nisticò, A., Tucci, F., & Carlone, P. (2020). Marine Application of Fiber Reinforced Composites: A Review. *Journal of Marine Science and Engineering*, *8*(1), 26. https://doi.org/10.3390/jmse8010026

Saliev, T. (2019). The Advances in Biomedical Applications of Carbon Nanotubes. *C*, *5*(2), 29. https://doi.org/10.3390/c5020029

Shahidi, S., & Moazzenchi, B. (2018). Carbon nanotube and its applications in textile industry – A review. *The Journal of The Textile Institute*, *109*(12), 1653-1666. https://doi.org/10.1080/00405000.2018.1437114

She, G.-L., Yuan, F.-G., Ren, Y.-R., & Xiao, W.-S. (2017). On buckling and postbuckling behavior of nanotubes. *International Journal of Engineering Science*, *121*, 130-142. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.09.005

Shen, M., & Bever, M. B. (1972). Gradients in polymeric materials. *Journal of Materials Science*, 7(7), 741-746. https://doi.org/10.1007/bf00549902

Shen, Y., Chen, Y., & Li, L. (2016). Torsion of a functionally graded material. *International Journal of Engineering Science*, *109*, 14-28. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.09.003

Sinha, N., Ma, J., & Yeow, J. T. (2006). Carbon nanotube-based sensors. *Journal of Nanoscience and Nanotechnology*, *6*(3), 573-590. https://doi.org/10.1166/jnn.2006.121

Sorop, T. G., & De Jongh, L. J. (2007). Size-dependent anisotropic diamagnetic screening in superconducting Sn nanowires. *Physical Review B*, *75*(1). https://doi.org/10.1103/physrevb.75.014510

Taati, E., Borjalilou, V., Fallah, and, F., & Ahmadian, M. T. (2022). On size-dependent nonlinear free vibration of carbon nanotube-reinforced beams based on the nonlocal elasticity theory: Perturbation technique. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, *50*(6), 2124-2146. https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1772087

Tabassian, R. (2013). Torsional vibration analysis of shafts based on Adomian decomposition method. *Applied and Computational Mechanics*, *7*(2), 205–222.

Taşkin, V., & Demirhan, P. A. (2020). Fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli kirişlerin serbest titreşim analizi. *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, *8*(1), 49-60. https://doi.org/10.20290/estubtdb.538586

Timoshenko, S. (1921). LXVI. *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, *41*(245), 744-746. https://doi.org/10.1080/14786442108636264

Toğun, N., & Bağdatlı, S. (2016a). Nonlinear Vibration of a Nanobeam on a Pasternak Elastic Foundation Based on Non-Local Euler-Bernoulli Beam Theory. *Mathematical and Computational Applications*, *21*(1), 3. https://doi.org/10.3390/mca21010003

Toğun, N., & Bağdatlı, S. M. (2016b). Size dependent nonlinear vibration of the tensioned nanobeam based on the modified couple stress theory. *Composites Part B: Engineering*, *97*, 255–262. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.04.074

Toupin, R. A. (1962). Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11(1), 385-414. https://doi.org/10.1007/bf00253945

Turan, M. (2022). Static analysis of functionally graded porous beams with finite element method. *Mühendislik Bilimleri Ve Tasarım Dergisi*, *10*(4), 1362-1374. https://doi.org/10.21923/jesd.1134356

Turan, M., & Kahya, V. (2018). Fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin serbest titreşim analizi. *Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi*, *8*(2), 119-130. https://doi.org/10.31466/kfbd.453833

Uzun, B., Civalek, Ö., & Yaylı, M. Ö. (2023). A hardening nonlocal approach for vibration of axially loaded nanobeam with deformable boundaries. *Acta Mechanica*, *234*(5), 2205-2222. https://doi.org/10.1007/s00707-023-03490-w

Uzun, B., & Yaylı, M. Ö. (2022). Porosity dependent torsional vibrations of restrained FG nanotubes using modified couple stress theory. *Materials Today Communications*, 32, 103969. https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2022.103969

Van Long, N., Nguyen, V.-L., Tran, M.-T., & Thai, D.-K. (2021). Exact solution for nonlinear static behaviors of functionally graded beams with porosities resting on elastic foundation using neutral surface concept. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, *236*(1), 481-495. https://doi.org/10.1177/09544062211021112

Wang, T., Farajollahi, M., Choi, Y. S., Lin, I., Marshall, J. E., Thompson, N. M., Kar-Narayan, S., Madden, J. D. W., & Smoukov, S. K. (2016). Electroactive polymers for sensing. *Interface Focus*, *6*(4), 20160026. https://doi.org/10.1098/rsfs.2016.0026

Wang, C., Zhang, Y., Ramesh, S. S., & Kitipornchai, S. (2006). Buckling analysis of micro- and nano-rods/tubes based on nonlocal Timoshenko beam theory. *Journal of Physics D*, *39*(17), 3904–3909. https://doi.org/10.1088/0022-3727/39/17/029

Wang, Y. Q., & Zu, J. W. (2017). Vibration characteristics of moving sigmoid functionally graded plates containing porosities. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, *14*(4), 473-489. https://doi.org/10.1007/s10999-017-9385-2

Wattanasakulpong, N., & Chaikittiratana, A. (2015). Flexural vibration of imperfect functionally graded beams based on Timoshenko beam theory: Chebyshev collocation method. *Meccanica*, *50*(5), 1331-1342. https://doi.org/10.1007/s11012-014-0094-8

Wattanasakulpong, N., & Ungbhakorn, V. (2013). Analytical solutions for bending, buckling and vibration responses of carbon nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundation. *Computational Materials Science*, *71*, 201-208. https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2013.01.028

Wattanasakulpong, N., & Ungbhakorn, V. (2014). Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities. *Aerospace Science and Technology*, *32*(1), 111-120. https://doi.org/10.1016/j.ast.2013.12.002

Wattanasakulpong, N., & Mao, Q. (2016). Stability and vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite beams with elastic boundary conditions: Chebyshev collocation method. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, *24*(3), 260–270. https://doi.org/10.1080/15376494.2016.1142020

Yang, F., Chong, A. C., Lam, D. C. C., & Tong, P. (2002). Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, *39*(10), 2731–2743. https://doi.org/10.1016/s0020-7683(02)00152-x

Yaylı, M. Ö. (2019). Stability analysis of a rotationally restrained microbar embedded in an elastic matrix using strain gradient elasticity. *Curved and Layered Structures*, *6*(1), 1–10. https://doi.org/10.1515/cls-2019-0001

Yaylı, M. Ö., Uzun, B., & Deliktaş, B. (2022). Buckling analysis of restrained nanobeams using strain gradient elasticity. *Waves in Random and Complex Media*, *32*(6), 2960–2979. https://doi.org/10.1080/17455030.2020.1871112

Yoon, H. S., & Ehmann, K. F. (2016). Dynamics and stability of micro-cutting operations. *International Journal of Mechanical Sciences*, *115*, 81-92. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.06.009

Zeighampour, H., & Tadi Beni, Y. (2015). Free vibration analysis of axially functionally graded nanobeam with radius varies along the length based on strain gradient theory. *Applied Mathematical Modelling*, *39*(18), 5354-5369. https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.01.015