T.C.

BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

MATEMATİKSEL DÜŞÜNMEYİ GELİŞTİRMESİ BAKIMINDAN OKURYAZARLIK PROBLEMLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ

DOKTORA TEZİ

Muhammet KATİPOĞLU

0000-0002-0134-4425

BURSA-2024

T.C.

BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

MATEMATİKSEL DÜŞÜNMEYİ GELİŞTİRMESİ BAKIMINDAN OKURYAZARLIK PROBLEMLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ

DOKTORA TEZİ

Muhammet KATİPOĞLU

0000-0002-0134-4425

Danışman

Prof. Dr. Gül KALELİ YILMAZ

BURSA-2024

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim.

Muhammet KATİPOĞLU

Tarih 10/09/2024

TEZ YAZIM KILAVUZU'NA UYGUNLUK ONAYI

"Matematiksel Düşünmeyi Geliştirmesi Bakımından Okuryazarlık Problemlerinin Değerlendirilmesi" adlı Doktora Tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan
Muhammet KATİPOĞLU

Danışman
Prof. Dr. Gül KALELİ YILMAZ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı Başkanı

Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DOKTORA BENZERLİK YAZILIM RAPORU

BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 10/09/2024

Tez Başlığı / Konusu: Matematiksel Düşünmeyi Geliştirmesi Bakımından Okuryazarlık Problemlerinin Değerlendirilmesi

Yukarıda başlığı gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 227 sayfalık kısmına ilişkin, 02/08/2024 tarihinde şahsım tarafından Turnitin adlı intihal (benzerlik) tespit programından (Turnitin)* aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan özgünlük raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 13'tür.

Uygulanan filtrelemeler:
1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar hariç/dahil
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Bursa Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Özgünlük Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal (benzerlik) içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.
Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza

Adı Soyadı:	Muhammet KATİPOĞLU
Öğrenci No:	811637001
Anabilim Dalı:	Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi
Programı:	Matematik Eğitimi
Statüsü:	☐ Y.Lisans ☒ Doktora

Danışman: Prof. Dr. Gül KALELİ YILMAZ

T. C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE,

Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı'nda 811637001 numara ile kayıtlı Muhammet KATİPOĞLU'nun hazırladığı "Matematiksel Düşünmeyi Geliştirmesi Bakımından Okuryazarlık Problemlerinin Değerlendirilmesi" konulu Doktora çalışması ile ilgili tez savunma sınavı, 02/08/2024 günü 11- 15 saatleri arasında yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin (**BAŞARILI / başarısız**) olduğuna (**OY BİRLİĞİ/oy çokluğu**) ile karar verilmiştir.

Sınav Komisyonu Başkanı
Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ
Bursa Uludağ Üniversitesi
WOS: A-1802-2016
ORCID: 0000-0001-8619-8334
SCOPUS: 6506973222

Üye (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Gül KALELİ YILMAZ
Bursa Uludağ Üniversitesi
WOS: AAG-9995-2021
ORCID: 0000-0002-8567-3639
SCOPUS: 55128406300

Üye
Doç. Dr. Salih BİRİŞÇİ
Bursa Uludağ Üniversitesi
WOS: AAG-9239-2021
ORCID: 0000-0001-7131-5112
SCOPUS: 36660547500

Üye
Dr. Öğr. Üyesi Işıl BOZKURT
Harran Üniversitesi
WOS: ABF-7587-2020
ORCID: 0000-0002-0720-7413
SCOPUS:

Üye
Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Çağrı GÜRBÜZ
Harran Üniversitesi
WOS: A-7438-2018
ORCID: 0000-0003-1851-2672
SCOPUS: 57215932419

ÖNSÖZ

50-d kadrolu bir araştırma görevlisi olarak yüksek lisansı savunduğum dönemde, üniversitemde doktora kadrosu bulunmaması nedeniyle araştırma görevliliği kadrom bitmiş ve o dönemde benim için doktora defteri kapanmıştı. Yüksek lisanstan mezun olduktan sonra farklı sektörlere girip hayat mücadelesine devam etmiştim. Bu süreçte eşimin her zaman "doktora yapmalısın" tekliflerine rağmen bir nevi akademik camiaya küsmüş, doktora düşüncesini silmiştim. Ocak 2017 soğuk bir İzmir akşamında Uludağ Üniversitesi'nin açmış olduğu doktora programına başvurmam ile akademik serüvene tekrar başlamış oldum.

Doktora programına beni layık gören ilk danışmanım sayın Prof. Dr. Murat ALTUN'a ne kadar teşekkür etsem az kalır. Kendi odasında yapmış olduğumuz ilk dersleri büyük bir heyecanla ve şaşkınlıkla takip etmiştim. Çünkü hocamız matematiğin vücut bulmuş haliydi. Bilim insanı sıfatını her kelimesiyle hak eden ve matematiğin aslında bambaşka bir şey olduğunu bize öğreten hocamıza her satırda teşekkür etsem az kalır. Engin bilgi birikimi, yol göstericiliği ve tecrübesiyle sürekli yanımda olduğu ve emekli olduktan sonra da yine yardımlarını esirgemediği için kendisine minnettarım.

Tezin son 3 yılında danışmanlığımı üstlenen, farklı bir sektörde çalışmamdan ötürü beni titizlikle doğruya yönlendiren ve zamanımı verimli kullanmamı sağlayan, bana sonuna kadar güvenen tez danışmanım değerli hocam sayın Prof. Dr. Gül KALELİ YILMAZ'a şükranlarımı sunarım.

Fakültede yardımlarını esirgemeyen, o dönem için asistan olan ve doktora programını tamamlayan değerli arkadaşıım Dr. Öğr. Üyesi Ömer Faruk TAVŞANLI'ya, yine o dönem yardıma ihtiyacım olduğu anlarda beni kırmayıp sorularımı cevaplayan ve tez bitene kadar yardımlarını esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Işıl BOZKURT'a, Doç. Dr. Tuğçe KOZAKLI ÜLGER' e ve Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Çağrı Gürbüz'e şükranlarımı sunarım.

Bölüm başkanımız Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ'a ve Doç. Dr. Salih BİRİŞÇİ'ye bana güvendikleri ve yardımlarını esirgemedikleri için teşekkür ederim.

Doktora programından sınıf arkadaşım olan ve bu süreçte tüm bilgi birikimiyle yardımlarını esirgemeyen değerli dostum Dr. Ahmet Adil ADAL'a teşekkürlerimi sunarım.

Burada adını zikredemediğim, bu günlere gelmemde emeği olan herkese; hassaten İzmir Bornova Uzun Hasan İlköğretim Okulu'ndaki (1995-2003) tüm öğretmenlerime,

üzerinden yıllar geçse de asla unutamayacağım ve hayatımda önemli bir yere sahip olan İzmir Anadolu Öğretmen Lisesi (2003-2007) öğretmenlerime ve bilhassa müdüremiz Hülya ERTÜRK KOÇ'a, Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi'nin (2008-2012) değerli akademisyen hocalarına ve bilhassa Prof. Dr. Özden KORUOĞLU'na, Akdeniz Üniversitesi Eğitim Fakültesi'nin (2013-2016) değerli akademisyen hocalarına ve bilhassa Prof. Dr. Sinem SEZER, Doç. Dr. Zeynep EKEN ve Doç. Dr. Sevda SEZER'e en kalbi teşekkürlerimi sunarım.

Bu günlere gelmemi sağlayan, varlıklarını her daim yanımda hissettiğim sevgili ANNEM ve BABAM, maddi ve manevi desteğini her zaman hissettiğim ve ailedeki ilk doktor unvanını alan çocuk hekimi ablam Dr. Nagehan KATİPOĞLU'na sonsuz teşekkürü borç bilirim.

Son olarak fikirleri ve manevi desteğiyle her zaman yanımda olan, doktorayı bitirmem için beni sürekli teşvik eden, tezi benimle birlikte ilmek ilmek dokuyan, bir yandan çocuklarımız Yusuf Bera ve Dilruba'nın ihtiyaçlarını gideren, bir yandan matematik öğretmeni olarak okulda öğrencilerini aydınlatan hayat arkadaşım, sevgili eşim Sevde Nur KATİPOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Rabbime (c.c.) Hamdolsun…

ÖZET

Yazar Adı ve Soyadı	Muhammet KATİPOĞLU
Üniversite	Bursa Uludağ Üniversitesi
Enstitü	Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Ana Bilim Dalı	Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi
Bilim Dalı	Matematik Eğitimi
Tezin Niteliği	Doktora
Sayfa Sayısı	xxi+ 282
Mezuniyet Tarihi	../../2024
Tez Danışman(lar)ı	Prof. Dr. Gül KALELİ YILMAZ

MATEMATİKSEL DÜŞÜNMEYİ GELİŞTİRMESİ BAKIMINDAN OKURYAZARLIK PROBLEMLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ

Türkiye'de PISA sonuçları akademisyenler, eğitim programı düzenleyicileri, eğitim politikaları üzerine çalışanlar, öğretmenler ve kamuoyu tarafından titiz bir şekilde izlenmekte ve zaman zaman bu konuda paydaşlar arasında değerlendirmeler, görüş birliği ve görüş farklılıkları da olabilmektedir. Özellikle Türkiye'nin 2003'ten bu yana yeterliliklerin her 3 alanında da ortalamanın altında kalması, ülkemizdeki okuryazarlık eğitiminin yeterliliği hakkında ipucu vermektedir. PISA ve benzeri sınavlarda matematik okuryazarlığı alt başlığında başarı grafiğinin daha da yükseltilebilmesi; eğitim öğretim sürecinde öğrencilerin matematiksel okuryazarlık kavramını daha iyi kavraması, kazandıkları bilgi ve becerileri günlük hayata entegre edebilmesi ve karşılaştıkları problemlerde muhakeme becerisini kullanabilmelerine bağlıdır. Bu açıdan öğrencilerin özellikle problem kavramını ve problem çözme süreçlerini iyi öğrenmeleri gerekir.

Bu araştırmada sekizinci sınıf ortaokul öğrencilerinin matematik okuryazarlığı problemlerini çözerken matematiksel düşünme süreçlerinin ölçülmesi amaçlanmıştır. Öğrencilerin bu soruları çözerken matematiksel düşünmenin hangi boyutlarını kullandıkları tespit edilmiştir. Daha sonra matematik okuryazarlığı sorularının konu alanları bağlamında değerlendirilmesi ve hangi çeşit sorularda hangi düşünme boyutlarının kullanıldığı ortaya konulmuştur.

Araştırmada bu amaca ulaşmak için nitel araştırma desenlerinden bir tanesi olan durum çalışması tercih edilmiştir. Katılımcılarının belirlenmesinde ise amaçlı örnekleme yöntemlerinden bir tanesi olan ölçüt örneklemesi yöntemi kullanılmıştır. Araştırma İzmir ili Bornova ilçesinde öğrenimine devam eden 18 ilköğretim 8. sınıf öğrencisi ile yürütülmüştür. Veri toplama araçları olarak 10 adet matematik okuryazarlık sorusu ve yarı yapılandırılmış görüşme formları kullanılmıştır.

Araştırmanın sonucunda; matematik okuryazarlık sorularının öğrencileri matematiksel düşünmeye sevkettiği, yeterli özelleştirme yapabilen öğrencilerin büyük çoğunluğunun matematiksel düşünmenin diğer basamaklarına da geçip soruları doğru yanıtladığı ve değişim-ilişkiler konusundaki sorulara verilen yanıtlarda matematiksel düşünme boyutlarının kullanımının çok sınırlı kaldığı gibi temel sonuçlar elde edilmiştir. Bununla birlikte araştırmacı ve eğitimcilere matematiksel düşünmenin geliştirilmesi ve ölçülmesi ile ilgili farklı konularda önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Sözcükler: *durum çalışması, matematiksel düşünme, matematiksel düşünme kriterleri, matematik okuryazarlığı, matematik okuryazarlığı problemleri*

ABSTRACT

Name and Surname	Muhammet KATİPOĞLU
University	Bursa Uludag University
Institution	Institute of Educational Sciences
Field	Mathematics and Science Education
Branch	Mathematics Education
Degree Awarded	PhD
Page Number	xxi + 282
Degree Date	../../2024
Supervisor (s)	Prof. Dr. Gül KALELİ YILMAZ

EVALUATION OF LITERACY PROBLEMS IN TERMS OF IMPROVING MATHEMATICAL THINKING

In Turkey, PISA results are meticulously monitored by academics, curriculum organizers, education policy makers, teachers and the public, and from time to time, there may be evaluations, consensus and differences of opinion among stakeholders on this issue. In particular, the fact that Turkey has remained below the average in all three areas of qualifications since 2003 gives a clue about the adequacy of literacy education in our country, even if the graph rises from time to time. To further increase the success rate under the subheading of mathematical literacy in PISA and similar exams; It depends on students' ability to better comprehend the concept of mathematical literacy during the education process, to integrate the knowledge and skills they have gained into daily life, and to use their reasoning skills in the problems they encounter. In this respect, students should especially learn the concept of problem and problem-solving processes well.

This study aimed to measure the mathematical thinking levels of eighth grade secondary school students while solving mathematical literacy problems. It was determined whether the students used their mathematical thinking levels while solving these questions, and if so, which levels they used. Then, mathematical literacy questions were evaluated in the context

of subject areas and it was revealed which thinking levels were used in which types of questions.

To achieve this aim in the research, case study method, which is one of the qualitative research designs, was preferred. Criterion sampling method, one of the purposeful sampling methods, was used to determine the participants. The research was conducted with 18 8th grade primary school students studying in Bornova district of Izmir. 10 mathematical literacy questions and semi-structured interview forms were used as data collection tools.

As a result of the research; basic results have been obtained, such as mathematical literacy questions lead students to think mathematically, the majority of students who can make sufficient customizations go to other stages of mathematical thinking and answer the questions correctly, and the use of mathematical thinking levels in answers to questions about change-relationships is very limited. In addition, suggestions have been made to researchers and educators that mathematical thinking should be measured in different dimensions.

Keywords: *case study, mathematical thinking, mathematical thinking criteria, mathematical literacy, mathematical literacy problems*

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI ..... **iv**
ÖNSÖZ ..... **v**
ÖZET ..... **vii**
ABSTRACT. ..... **ix**
İÇİNDEKİLER. ..... **xi**
TABLOLAR LİSTESİ ..... **xv**
ŞEKİLLER LİSTESİ. ..... **xvii**
KISALTMALAR ..... **xxi**

BİRİNCİ BÖLÜM
GİRİŞ

1.1. Problem Durumu 1
1.2. Araştırmanın Soruları. 6
1.3. Araştırmanın Amacı. 7
1.4. Araştırmanın Gerekçesi ve Önemi. 7
1.5. Araştırmanın Varsayımları 9
1.6. Araştırmanın Sınırlılıkları 9
1.7. Tanımlar. 9

İKİNCİ BÖLÜM
KURAMSAL ÇERÇEVE

2.1. Düşünme. 11
2.2. Matematiksel Düşünme. 14
2.2.1. Özelleştirme. 23
2.2.2. Genelleme. 25
2.2.3. Varsayımda Bulunma (Tahmin) 31
2.2.4. Doğrulama ve İkna Etme (İspatlama). 32
2.3. Matematiksel Düşünmeyi Değerlendirme Kriterleri. 34
2.3.1. Özelleştirme Basamağı Değerlendirme Kriteri 34

2.3.1.1. Yeterli Özelleştirme. 35
2.3.1.2. Yetersiz Özelleştirme. 35
2.3.1.2.1 Kısmi (Eksik) Özelleştirme. 35
2.3.1.2.2 Hatalı Özelleştirme. 35
2.3.2. Tahmin Basamağı Değerlendirme Kriteri. 35
2.3.2.1. Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım 35
2.3.2.2. Dinamik Durumlardan Empirik Tümevarım 36
2.3.2.3. Analoji 36
2.3.2.4. Abdüksiyon 37
2.3.2.5. Algıya Dayalı Tahmin 38
2.3.3. İspat Basamağı Değerlendirme Kriteri 38
2.3.3.1. Saf Deneycilik. 39
2.3.3.2. Kritik Deney. 39
2.3.3.3. Genel Örnek. 40
2.3.3.4. Düşünce Deneyi. 40
2.3.3.5. Bilinen Matematiksel İspat Yöntemleri. 41
2.3.3.5.1. Doğrudan İspat. 41
2.3.3.5.2. Aksine Örnekle (Ters Durum) İspat 41
2.3.3.5.3. Çelişki Yoluyla (Olmayana Ergi) İspat. 41
2.3.3.5.4. Karşıt Ters Yöntemiyle İspat 41
2.3.3.5.5. Tümevarım Yöntemiyle İspat. 41
2.3.4. Genelleme Basamağı Değerlendirme Kriteri. 41
2.3.4.1. Aritmetik Genelleme. 42
2.3.4.2. Cebirsel Genelleme. 42
2.3.4.3. Olgunlaşmamış Tümevarım. 43
2.3.4.4. Saf Genelleme. 44
2.4. Matematik Okuryazarlığı 45
2.4.1. Matematik Okuryazarlığının Dayandığı Temel Kavramlar. 48
2.4.1.1. Matematiksel Modelleme (Matematikleştirme). 50
2.4.1.2. Problem Kurma ve Çözme. 50
2.4.1.3. Düşünme ve Muhakeme Etme. 52
2.4.1.4. Temsil Etme. 54
2.4.1.5. İletişim 55

2.4.1.6. Sembolik, Teknik Dil ve İşlemleri Kullanma 56
2.4.1.7. Matematiksel Araçları Kullanma 57
2.4.2. Matematik Okuryazarlık Sorularının Sınıflandırılması. 59
2.4.2.1. Nicelik Soruları. 61
2.4.2.2. Değişim ve İlişkiler Soruları. 61
2.4.2.3. Uzay ve Şekil Soruları. 61
2.4.2.4. Belirsizlik ve Veri Soruları 61
2.5. İlgili Araştırmalar. 62
2.5.1. Ulusal Kaynaklı Gerçekleştirilen Araştırmalar 62
2.5.1.1. Matematiksel Düşünme İle İlgili Araştırmalar 62
2.5.1.2. Matematik Okuryazarlığı ile İlgili Araştırmalar. 64
2.5.2. Uluslararası Araştırmalar 65
2.5.2.1. Matematiksel Düşünme İle İlgili Araştırmalar. 65
2.5.2.2. Matematik Okuryazarlığı ile İlgili Araştırmalar. 67

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
YÖNTEM

3.1. Araştırma Deseni. 72
3.2. Katılımcılar. 75
3.3. Veri Toplama Araçları. 78
3.4. Veri Toplama Süreci. 81
3.5. Verilerin Analizi. 84
3.6. Nitel Araştırmalarda Geçerlik ve Güvenirlik. 86

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
BULGULAR

4.1. Nicelik Sorularına İlişkin Bulgular. 88
4.1.1. Telefon Faturası İsimli Probleme Ait Bulgular. 88
4.1.2. Tavuk Yumurtası İsimli Probleme Ait Bulgular. 101
4.1.3. Nilüfer Çiçeğinin Yaprakları İsimli Probleme Ait Bulgular. 111
4.1.4. Badana-Boya İsimli Probleme Ait Bulgular. 121

4.2. Değişim ve İlişkiler Sorularına İlişkin Bulgular. 134
4.2.1. Yük Taşıma İsimli Probleme Ait Bulgular. 134
4.2.2. Mekik İsimli Probleme Ait Bulgular. 147
4.3. Belirsizlik ve Veri Sorularına İlişkin Bulgular. 161
4.3.1. Seçim İsimli Probleme Ait Bulgular. 231
4.3.2. Fasulye İsimli Probleme Ait Bulgular. 174
4.4. Uzay ve Şekil Sorularına İlişkin Bulgular. 186
4.4.1. Dosya Kağıdı İsimli Probleme Ait Bulgular. 186
4.4.2. Çam Ağacı Gövdesinin Çapı İsimli Probleme Ait Bulgular. 195

BEŞİNCİ BÖLÜM

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

5.1. Sonuç. 206
5.1.1. Nicelik (Sayılar) Problemleri ile İlgili Elde Edilen Sonuçlar. 206
5.1.2. Değişim ve İlişkiler (Cebir) Problemleri ile İlgili Elde Edilen Sonuçlar. 208
5.1.3. Belirsizlik ve Veri (İstatistik) Problemleri ile İlgili Elde Edilen Sonuçlar. 209
5.1.4. Uzay ve Şekil (Geometri) Problemleri ile İlgili Elde Edilen Sonuçlar. 211
5.2. Tartışma ve Öneriler. 213
KAYNAKÇA 227
EKLER 250
ÖZGEÇMİŞ 280

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo *Sayfa*

1 Matematiksel Düşünmenin Alt Boyutları. 22
2 Özelleştirme Çeşitleri. 35
3 Matematiksel Yeterlikler. 48
4 Katılımcıların Demografik Özellikleri. 77
5 Öğrencilerin 1. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları. 89
6 Öğrencilerin 1. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları. 89
7 1. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları 92
8 Öğrencilerin 2. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları. 102
9 Öğrencilerin 2. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları 102
10 2. Problemde Pullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları 104
11 Öğrencilerin 3. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları.. 112
12 Öğrencilerin 3. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları 113
13 3. Problemde Pullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları.. 115
14 Öğrencilerin 4. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları 123
15 Öğrencilerin 4. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları. 124
16 4. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları. 126
17 Öğrencilerin 5. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları. 135
18 Öğrencilerin 5. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları 135
19 5. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları.. 137
20 Öğrencilerin 6. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları 147
21 Öğrencilerin 6. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları 148
22 6 . Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları.. 150
23 Öğrencilerin 7. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları. 162
24 Öğrencilerin 7. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları 163
25 7 . Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları.. 165
26 Öğrencilerin 8. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları. 175
27 Öğrencilerin 8. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları 175
28 8 . Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları.. 177
29 Öğrencilerin 9. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları. 187
30 Öğrencilerin 9. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları 187

31 9 . Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları..... 189
32 Öğrencilerin 10. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları 196
33 Öğrencilerin 10. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları..... 196
34 10 . Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları..... 198

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil		*Sayfa*
1	Düşünme Türleri.	14
2	Matematiksel Düşünme Yapısı.	17
3	Matematiksel Düşünme Oluşum Süreci.	18
4	Matematiksel Düşünme Yapısı.	19
5	Matematiksel Düşünmenin Alt Boyutları	20
6	Matematiksel Düşünmenin Kavramsal Çerçevesi	21
7	Matematiksel Düşünmenin Boyutları.	23
8	Giriş, Atak ve Gözden Geçirme Aşamaları	26
9	Özelleştirme ve Genelleme Süreçleri	28
10	Özelleştirme ve Genelleme Süreçleri Arasındaki İlişki	29
11	Genelleme ve özelleştirme arasındaki ilişki.	30
12	Varsayımda Bulunma Süreci	32
13	İspatlama Süreci.	34
14	Genelleme Basamağı Değerlendirme Kriteri	42
15	Matematik Okuryazarlığı Modeli.	46
16	Matematik Okuryazarlığının Diğer Kavramlarla İlişkisi.	47
17	Problem Çözme Süreci	51
18	Okuryazarlık Soruları Değerlendirme Çerçeveleri	60
19	Veri Toplama Süreci	83
20	1. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları	91
21	Ö1'in Cevabı.	93
22	Ö3'ün Cevabı.	94
23	Ö8'in Cevabı.	95
24	Ö11'in Cevabı.	97
25	Ö9'ın Cevabı.	98
26	Ö12'nin Cevabı	99
27	Ö16'nın Cevabı	99
28	Ö15'in Cevabı	100
29	2. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları.	103
30	Ö1'in Cevabı.	105
31	Ö12'nin Cevabı	106

32 Ö2'nin Cevabı. 107
33 Ö4'ün Cevabı. 108
34 Ö15'in Cevabı 109
35 Ö16'nın Cevabı 110
36 Ö14'ün Cevabı 111
37 3. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları. 114
38 Ö1'in Cevabı. 116
39 Ö16'nın Cevabı. 117
40 Ö6'nın Cevabı. 118
41 Ö7'nin Cevabı 119
42 Ö13'ün Cevabı 120
43 Ö14'ün Cevabı 121
44 Ö15'in Cevabı 122
45 4. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları. 125
46 Ö1'in Cevabı 127
47 Ö16'in Cevabı 128
48 Ö2'nin Cevabı. 129
49 Ö11'in Cevabı. 130
50 Ö12'nin Cevabı 131
51 Ö4'ün Cevabı 132
52 Ö17'nin Cevabı. 133
53 5. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları 136
54 Ö14'ün Cevabı. 138
55 Ö5'in Cevabı. 139
56 Ö13'ün Cevabı. 140
57 Ö10'un Cevabı. 141
58 Ö16'nın Cevabı. 142
59 Ö8'in Cevabı 143
60 Ö9'un Cevabı. 144
61 Ö4'ün Cevabı. 146
62 6. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları 149
63 Ö6'nın Cevabı. 151
64 Ö8'in Cevabı. 152

65 Ö10'un Cevabı. 153
66 Ö7'nin Cevabı 154
67 Ö14'ün Cevabı 155
68 Ö1'in Cevabı 156
69 Ö9'un Cevabı. 157
70 Ö2'nin Cevabı. 158
71 Ö17'nin Cevabı. 159
72 Ö13'ün Cevabı. 160
73 7. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları 164
74 Ö17'nin Cevabı 166
75 Ö18'in Cevabı. 167
76 Ö7'nin Cevabı. 168
77 Ö10'un Cevabı. 169
78 Ö11'in Cevabı. 170
79 Ö3'ün Cevabı. 171
80 Ö5'in Cevabı. 172
81 Ö15'nin Cevabı 173
82 8. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları 176
83 Ö6'nın Cevabı 178
84 Ö17'nin Cevabı. 179
85 Ö18'in Cevabı. 180
86 Ö9'un Cevabı. 181
87 Ö5'in Cevabı. 182
88 Ö12'nin Cevabı 183
89 Ö15'in Cevabı 184
90 Ö14'ün Cevabı. 185
91 9. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları 188
92 Ö10'un Cevabı. 190
93 Ö7'ün Cevabı. 191
94 Ö11'in Cevabı. 192
95 Ö18'in Cevabı 193
96 Ö16'nın Cevabı 194
97 10. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları 197

98 Ö17’nin Cevabı 199
99 Ö3’ün Cevabı. 200
100 Ö4’ün Cevabı. 201
101 Ö5’in Cevabı. 202
102 Ö9’un Cevabı 203
103 Ö7’nin Cevabı 204

KISALTMALAR LİSTESİ

MO: Matematik okuryazarlığı

MD: Matematiksel düşünme

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi)

OECD: Organization for Economic Co-Operation and Development (Ekonomik Kalkınma ve İşbirliği Örgütü)

Ö: Öğrenci

PISA: Programme for International Student Assessment (Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı)

BİRİNCİ BÖLÜM

GİRİŞ

1.1. Problem Durumu

Düşünme, zihinsel süreçler sonucunda muhakeme ederek karar verme ve bu düşünsel eylemler etrafında hayatı şekillendirme işidir ve insanları diğer varlıklardan ayıran en temel özelliktir (Alkan ve Bukova, 2005). Bu eylem yalnızca insanlar tarafından gerçekleştirilebilir ve içerisinde bir dizi iş ve işlemi barındırır. Bu işlemlerden bazıları problem tanıma ve çözme, imgeleme, zihinsel neden sonuç rasyonalitesi içerisinde akıl yürütme, soyutlama ve yargılama-değerlendirme ile yeni bir bilişsel şema oluşturma olarak özetlenebilir (Solso, 2010). Farklı bir tanımlamada ise düşünmenin mevcut bilgilerin ötesine geçilerek daha önce bilinmeyene ulaşma süreci olarak tanımlandığı görülmektedir (Özden, 2002). Yapılan tanımlarda düşünmenin işlevleri ve süreç olma özelliğinin vurgulandığı görülmektedir. Bu süreçte özellikle öğrencilerin düşünme becerisi kazanması çok önemlidir. Çünkü bireyler bilginin kümülatif olduğu gerçeğinden hareketle bilgileri müstakil olarak kazanır ve sonrasında belli bilişsel süreçlerden geçirerek onları kullanma amacıyla bir araya getirir ve böylece yeni bilgilere ulaşır. Buradan hareketle, düşünme için anlamlı öğrenmenin merkezi denilebileceği anlaşılmaktadır. Bu sebeple bütün ülkelerin eğitim sistemlerinin en temel misyonlarından bir tanesi öğrencilerin düşünme becerilerini geliştirmek ve bu yolla onları hem akademik hem de sosyal süreçlerle hayata hazırlamaktır (Alkan ve Ceylan, 2008).

Bir soyutlama bilimi olarak tanımlanan matematik içerisinde barındırdığı kavramları da soyutlama yoluyla elde etmekte ve üretmektedir. Bir diğer tanımda ise matematiğin düşünsel bir faaliyet olduğu ve bireylerin doğru olanı bilme ve anlama merakından dolayı geliştiği belirtilmektedir (Altun, 2010). Bu düşünsel faaliyet matematiksel düşünmenin temelini oluşturur ve özellikle günlük yaşamda karşılaşılan problemlerin çözümünde kaçınılmaz olarak kullanılır. Bu sebeple, bu kavram öğrencilere matematik öğretme süreçlerinin de en temel ve nihai amaçları içerisinde bulunmaktadır (Stacey, 2006).

İnsan düşünerek çevrede olup bitenleri anlar, olayların nedenleri ve sonuçları arasındaki ilişkileri görür ve bunlardan yararlanacak bir sistem geliştirir (Altun, 2010). Bu süreçlerde bireyler farklı problemlerle de karşılaşır. Bireyler karşılaştıkları bu problemleri çözmede matematiksel düşünme ve bu düşünme sonucu eyleme geçme araçlarından yararlanır. Bu bilgiler matematiksel düşünmenin yalnızca matematikçiler tarafından değil, tüm bireyler tarafından kullanımını zorunlu ve gerekli kılmaktadır (Bilitzer, 2003).

Matematiksel düşünme, matematik eğitiminde öğrencilerin kazanması hedeflenen temel becerilerden biridir (NCTM, 2000). Henderson ve diğerleri (2001), matematiksel düşünmeyi tanımlamada bazı önemli kavramlardan bahsetmiştir. Bu kavramlar matematiksel teknik, matematiksel kavram ve günlük yaşam problemleridir. Farklı bir ifade ile bireylerin günlük yaşamda karşı karşıya kaldıkları problemlerin çözümünde matematiksel teknik ve kavramların kullanılması olarak ifade edilebilir. Schoenfeld ise (1992) matematiksel düşünmeyi, bireylerin matematiksel perspektiflerini genişleterek adeta bir matematikçi gibi dünyayı algılayabilme becerisine sahip olma olarak tanımlamıştır. Yıldırım (2014), matematiksel düşünmeyi bir sorunu ortadan kaldırma faaliyeti olarak belirtmiş ve bu sürecin aşamalı olduğunu belirtmiştir. Bu süreçteki katılımcıların yani düşünürlerin problemler ile ilgili veri toplama, bunları analiz etme ve yorumlama süreçlerine hâkim olması gerektiğini ifade etmiştir. Ayrıca sürecin tüm elemanlarının yeterlilik düzeyi matematiksel düşünmenin de o düzeyde nitelikli olduğunu ifade etmiştir.

Temelinde matematiksel düşünmenin olduğu bir diğer kavram matematiksel okuryazarlık kavramıdır. Okuryazarlık, öğrencilerin eğitim-öğretim sürecinde kazandıkları bilgi ve becerileri gerçek hayata aktararak, hayatında meydana gelen problemleri tanımlamadan bunları analiz etme, çözüm yolları geliştirme ve çözme, değerlendirme, bunlar üzerinden çıkarım yapma ve yeni bilgilere ulaşma yeterliliği olarak tanımlanmaktadır (OECD, 2013). Matematiksel okuryazarlık ise bireylerin sahip olduğu matematik bilgisini günlük yaşantılarında ve bu yaşantılar esnasında karşı karşıya kaldıkları problemlerin çözümünde ne düzeyde/nasıl kullandığı olarak tanımlanmaktadır (Altun, 2010). Her ne kadar günümüzde matematiksel okuryazarlık kavramının PISA sınavları ile doğmuş ve tanınmış olduğu düşüncesi yaygın olsa da bu kavram kayda değer bir şekilde 20. yüzyıla henüz başlarken matematik öğretiminin önemli hedefleri arasına girmiş ve bu durumun geleneksel toplum düzeyinden bilgi toplumuna evrilen yenidünya nizamından dolayı gerekli olduğu ifade edilmiştir (Yenilmez ve Ata, 2013).

MEB (2010) matematik okuryazarlığını, öğrencilerin matematiği değişik ortamlarda formüle etme, bu ortamlara uygun bir formda kullanma ve buradan elde ettiği çıktıları yorumlama kapasitesi olarak tanımlamıştır. OECD'e (2013) göre ise matematiksel okuryazarlık, matematiksel bilgi ve becerileri gündelik yaşam problemlerini çözmede etkili ve yetkin bir biçimde kullanmadır. Matematik okuryazarlığının literatürde farklı ve değişik tanımları vardır. Bununla birlikte bu tanımlamaların tamamı incelendiğinde matematiksel düşünme süreçlerinin günlük yaşam problemlerini çözmedeki öneminin vurgulandığı ve bu

kavramların matematik okuryazarlığını ortaya koyan çerçeve içerisinde ortak olduğu anlaşılmaktadır (Dev, 2020).

Matematik okuryazarlığının gün geçtikçe daha önemli bir hal alması birçok ülkenin eğitim programlayıcıları tarafından dikkatle izlenmiş ve temel olarak çeşitli alanlardaki okuryazarlığı çerçevesinin merkezine alan PISA uygulamaları ülkelerin eğitim sistemlerinin şekillenmesinde referans noktalarından biri olarak kabul görmeye başlamıştır (Breakspear, 2012). PISA, Ekonomik İş birliği ve Kalkınma Örgütü (OECD – Organization of Economic Cooperation Development) tarafından 15 yaş grubundaki öğrencilerin farklı alanlardaki okuryazarlık düzeylerini değerlendiren bir programıdır. Bu program kapsamında öğrencilerin kendi anadillerindeki okuryazarlıklarına ek olarak matematik ve fen okuryazarlıkları da ölçülmekte, bu ölçümler sonucunda karşılaştırmalar/değerlendirmeler yapılmaktadır. Bu değerlendirmelerde temel olarak, öğrencilerin okullarda edindikleri ve farklı alanları içeren mevcut bilgilerinin günlük yaşamdaki kullanımını ortaya çıkarmak hedeflenir. Bunun yanında katılımcı öğrencileri daha iyi tanımak ve bu tanıma doğrultusunda öğrencilerin öğrenme istek ve performanslarını, akademik düzeylerini ve öğrenme ortamları ile ilgili tercihlerini belirlemek de PISA'nın amaçları içerisinde yer almaktadır. Ayrıca öğrencinin bilgi düzeyini ve sahip olduğu potansiyelini arttırıp, yaşadığı topluma ve genel olarak dünya vatandaşı olarak içerisinde yaşadığı evrene karşı daha olumlu ve pozitif ilişkiler içerisinde olmak adına bilgi kaynaklarına ulaşma, bu kaynakları değerlendirme, analiz etme, kabul etme, kullanma ve çıkarımlarda bulunma olarak da tanımlanmaktadır (Dohn, 2007).

Türkiye'de PISA sonuçları akademisyenler, eğitim programı düzenleyicileri, eğitim politikaları üzerine çalışanlar, öğretmenler ve kamuoyu tarafından titiz bir şekilde izlenmekte ve zaman zaman bu konuda paydaşlar arasında değerlendirmeler, görüş birliği ve görüş farklılıkları da olabilmektedir. Özellikle Türkiye'nin 2003'ten bu yana yeterliliklerin her 3 alanında da ortalamanın altında kalması ülkemizdeki okuryazarlık eğitiminin yeterliliği hakkında ipucu vermektedir. Bununla birlikte 2018 PISA araştırma sonuçları Türkiye adına daha olumlu değerlendirmelerin elde edildiği bir yıl olarak dikkat çekmektedir. Bu değerlendirmede en temel sonuçlardan bir tanesi Türkiye'nin PISA'nın ölçtüğü alanların tamamında (fen okuryazarlığı, matematik okuryazarlığı ve okuma) puanlarının anlamlı düzeyde arttıran üç OECD ülkesinden biri olmasıdır. Aynı değerlendirmede Türkiye okuma becerileri alanında en iyi çıkış gösteren ikinci ülke olmuştur. Matematik ve fen okuryazarlığında ise puanını en çok arttıran ülke olmayı başarmıştır. Bu sonuçlar, Türkiye'deki eğitsel iyileşmenin ve reformların diğer ülkelere göre daha üst düzeyde gerçekleştiğini ortaya koymaktadır. COVID-19 salgınının gölgesinde yapılan PISA 2022'nin

en önemli özelliği de pandeminin öğrenci performansına ve refahına etkileri üzerine verilere sahip ilk büyük ölçekli çalışma olmasıdır. Genel olarak bu sonuçlar, OECD genelinde önemli bir gerileme olduğunu ortaya koyuyor. Özellikle matematikte OECD ortalamasında görülen 15 puanlık düşüş üç çeyrek okul yılı öğrenme kaybına eşit olarak değerlendirilmiştir. Türkiye ise bu listede 453 puan ile 39. sırada yer almıştır (MEB, 2023).

PISA ve benzeri sınavlarda matematik okuryazarlığı alt başlığında başarı grafiğinin daha da yükseltilebilmesi; eğitim öğretim sürecinde öğrencilerin matematiksel okuryazarlık kavramını daha iyi kavraması, kazandıkları bilgi ve becerileri günlük hayata entegre edebilmesi ve karşılaştıkları problemlerde muhakeme becerisini kullanabilmelerine bağlıdır. Bu açıdan öğrencilerin özellikle problem kavramını ve problem çözme süreçlerini iyi öğrenmeleri gerekir.

Genel olarak problem kelimesi öğrencilerde matematik ders kitaplarında bulunan ve temel olarak dört işlemin kullanıldığı bir yapı olarak algılanmaktadır (Heddens ve Speer, 1997). Fakat bu kavram aslında yukarıda tanımlanan cümlenin kapsamında oldukça geniş bir anlamı içerisinde barındırır. Dewey (1910) problemi, bireylerin zihinsel olarak karışıklık yaşadığı ve inancını belirsizleştiren ve değiştiren karmaşık bir süreç olarak değerlendirmektedir. Schoenfeld (1985) problemi araştırmaya, münazara etmeye ve aklı düşünmeye sevkeden güç sorular olarak tanımlamıştır. Türnüklü ve Yeşildere (2005) ise problemi, maruz kalındığında bireyin zihnini bulandıran ve üstesinden gelme arzusu uyandıran, henüz çözüm yolu anlaşılamamış ama kişinin bilgi ve tecrübelerini kullanarak çözmeye çalıştığı sorun olarak ifade etmişlerdir. Yazgan ve Arslan (2017) ise problemi, çözülmesi gereken lakin sahip olunan birikimle ilk bakışta çözümün belli olmadığı durum olarak tanımlamışlardır. Bu tanımlardan hareketle problem; tanımlanmış açık sorular içeren, ilgi çekici ve bireylerin mevcut durumlarında bu soruları cevaplayacak yeteri düzeyde algoritma ve metodolojik bilgiye sahip olmadığı durumlar olarak tanımlanabilir (Altun, 2010; Blum ve Niss, 1991). Kişi herhangi bir problemle karşılaştığında yapılması gerekeni biliyorsa problem çözme sürecine adım atmış demektir. Bu süreç ise kontrollü etkinliklerle araştırma yapmayı gerektirir. Problem çözmeyi dört basamağa ayıran Polya ise bu basamakları problemi anlama, plan yapma, planı uygulama ve değerlendirme olarak belirtmiştir (Polya, 1973).

Gerçek yaşam ile okul matematiğinin ilişkisinin kurulması matematik öğretiminde oldukça önemsenmektedir. Matematik okuryazarlığı problemleri bağlamsal olmaları dolayısıyla bu ilişkinin kurulmasında önemli bir role sahiptir (Bozkurt, 2019). Bu problemlerin en büyük özelliği bağlam temelli olmasıdır. Bağlam temelli olmak, bilimsel

olayların gerçek yaşam durumları ile birlikte verilmesi, hem öğrencilerin pedagojik süreçlere daha aktif katılarak öğrenmeye ilişkin olumlu tutuma sahip olmasına hem de günlük yaşam ile matematik arasındaki bağları keşfetmesine yardımcı olur (Kutu ve diğerleri, 2007). Bu deneyim ve farkındalık öğrencilerin öğrendikleri bilimsel bilgilerin günlük yaşamda kullanımına da kapı aralar (Boaler, 1993).

İçeriğe dayalı bir alan olan matematikte, oluşturulan bağlamlar içeriğin anlaşılmasını kolaylaştırmaktadır. Gerçek yaşam ile ilgili bağlamların matematik dersleri ile bütünleşmesi, öğrencilerin hem matematiği öğrenmesini hem de öğrendiği matematiği anlamlı kılarak hayatında kullanmanın yollarını bulmasını sağlar (Graven ve Venkat, 2007). Bu açıdan matematik derslerinin odak noktası bağlam olmalıdır. Çünkü öğrenciler gerçek yaşamda bağlamları içeren durumlarla karşılaştıklarında, bağlamın gerektirdiği kararı verebilmelidir. Dolayısıyla ders sürecinde matematik okuryazarlık problemlerine yer verme, öğrenme sonuçlarını etkilemesi bakımından son derece önemlidir (Bozkurt, 2019). Bunun aksi söz konusu olduğunda öğrenciler matematiğe karşı negatif yönde tutum geliştirebilir, bir basamak sonra diğer nedenlerden de etkilenerek bu tutumlar davranışlara dönüşmekte ve matematik öğretiminde başarının sağlanmasında engel oluşturabilmektedir (Moralı ve Uğurel, 2006).

Yenilmez (2009), öğrencilerin kültürel etkilerle matematik dersine karşı olumsuz tutumlara sahip olduğunu ifade etmiştir. Matematik denildiğinde çoğu öğrencinin zihninde genelde başarısız olunan bir ders ve sınav imgelerinin geldiğini dile getirmiştir. King (1997) The Art of Mathematics adlı kitabında şöyle der: "Hümanistler konser salonlarını, resim galerilerini ve güzel kitapları severler ama iş matematik olunca Frankenstein'ı görmüş insanlar gibi kaçarlar." Matematiğin değerlerinin bilim insanları için anlaşılmaz olduğunu ancak doğru bakış açısının onlardan gizlendiğini söylemiştir. Türkiye'de de diğer pek çok derste olduğu gibi matematik dersinde de geleneksel yöntemler benimsenmiş ve dersler daha çok kuralları ezberlemeye dayalı bir şekilde sürdürülmüştür. Bu durumda öğrenci matematik ile gerçek yaşam durumları arasında bağ kuramamış, matematik öğrenme süreçlerini anlamlı hale getirememiş ve böyle olunca da istenilen düzeyde bir başarı sağlayamamıştır. Bu öğrenilmiş çaresizlik sürecinde, geleneksel öğrenme yöntemlerine dayalı olarak hazırlanan müfredatların da etkili olduğu ifade edilmektedir (Boz, 2008).

Okul ortamında gerçekleşen matematik öğretiminin okul dışında var olan hayat ile senkron ve uyumlu olmaması, öğrencilerin derste öğrendikleri bilgilere salt teknik olarak sahip olmaları ve nerede/nasıl kullanacaklarını bilmemeleri, gerçek hayatta yüz yüze kaldıkları problemleri nasıl çözeceklerine ve bu süreçlerde matematiği nasıl kullanacaklarına yönelik bir fikirlerinin olmamaları ve problemi anlamak ve derinlemesine analiz ederek bir

çözüm yolu bulmak yerine hızlı bir şekilde sonuca varmak istemeleri, matematik öğretim süreçlerine daha eleştirel yaklaşılmasını ve bu kritikleri temellendirecek araştırmaların gerçekleşmesine ortam sağlamıştır (Verschaffel ve diğerleri, 1999).

Son yıllarda matematik okuryazarlığı ile ilgili birçok araştırma yapılmıştır. Ulusal tez merkezi incelendiğinde ülkemizde matematik okuryazarlığı ile ilgi 23 tanesi doktora 88 tanesi yüksek lisans olmak üzere toplamda 111 tane yayınlanmış tez bulunmaktadır. Aynı şekilde matematiksel düşünme ile ilgili 19 tanesi doktora 32 tanesi yüksek lisans olmak üzere toplamda 51 tane tez yazılmıştır (Ulusal Tez Merkezi, 2023). Bu çalışmalara literatür bölümünde detaylı olarak değinilecektir. Fakat tüm tezler incelendiğinde matematik okuryazarlık problemlerinin matematiksel düşünme üzerindeki etkisini inceleyen herhangi bir çalışma olmadığı görülmektedir. Bunun yanında böyle bir çalışmaya neden gerek olduğu sorusu literatürde matemamtiksel düşünmenin etkileri ile ilgili var olan açıklamalarda yön bulmaktadır. Bireyler matematiksel düşünme sayesinde, hangi aşamada olursa olsun karşılaştığı zorluklara karşı, bu problemleri çözecek yollar üretebilir ve geliştirdiği bu çözümleri başka zamanlarda karşılaştığı diğer sorunlarda da kullanabilir. Bu perspektife göre matematiksel düşünme yalnızca uzmanlık alanı matematik olan insanların kullanabildiği bir eylem değil, günümüz dünyasında tüm ülkelerin vatandaşlarının ve bireylerinin kullanması gerekli olan bir düşünme şeklidir (Alkan ve Bukova-Güzel, 2005). Dolayısıyla bu tezin araştırma konusu öğrencilerin okuryazarlık problemlerini çözerken kullandıkları matematiksel düşünme boyutlarını incelemek olarak belirlenmiştir.

1.2. Araştırma Soruları

Araştırmanın temel sorusu "8. sınıf ortaokul öğrencilerinin matematik okuryazarlığı sorularını çözerken kullandıkları matematiksel düşünme boyutları nelerdir?" olarak belirlenmiştir. Bu sorunun çözümü için cevap aranan alt araştırma soruları şunlardır:

1. 8. sınıf ortaokul öğrencilerinin nicelik (sayılar) ile ilgili matematik okuryazarlığı sorularını çözerken kullandıkları matematiksel düşünme boyutları nelerdir?
2. 8. sınıf ortaokul öğrencilerinin değişim ve ilişkiler (cebir) ile ilgili matematik okuryazarlığı sorularını çözerken kullandıkları matematiksel düşünme boyutları nelerdir?
3. 8. sınıf ortaokul öğrencilerinin belirsizlik ve veri (istatistik) ile ilgili matematik okuryazarlığı sorularını çözerken kullandıkları matematiksel düşünme boyutları nelerdir?

4. 8. sınıf ortaokul öğrencilerinin uzay/şekil (geometri) ile ilgili matematik okuryazarlığı sorularını çözerken kullandıkları matematiksel düşünme boyutları nelerdir?

1.3. Araştırmanın Amacı

Matematiksel düşünme, bireyin bir problemle karşılaştığı zaman problemi önce tarif etmeyi, daha sonra ögelerini çözümlemeyi ve var olan bütün repertuvarını kullanarak problemi ortadan kaldırıcı çözümler üretmeyi gerektirir. Bu yapısına baktığımız zaman matematiksel düşünmenin yalnızca matematikçilerin çalışma alanı içinde bırakılmaması gerektiği açıktır. Matematiksel duşünme de diğerleri gibi öğrenilebilen bir davranıştır. Matematiksel düşünmenin süreç aşamasında ölçülmesinin önemli bir yararı bireyin kendi özelliklerini bilmesine yardımcı olmak olarak ileri sürülebilir. Bireyler yaptığı hataların nedenlerini araştırarak eksik olduğu noktaları giderme olanağı bulabilecektir (Umay, 1992).

Bu çalışmanın amacı son yıllarda matematik öğretim programlarında üzerinde önemle durulan matematiksel düşünme becerilerini incelemek, bu süreçle ilgili bilgiyi artırmak ve bu becerilerin geliştirilmesine yardımcı olabilmektir. Ayrıca 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerini özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme boyutları bağlamında ortaya çıkararak bu yönde yapılacak faaliyetlere katkıda bulunmak da çalışmanın bir diğer amacıdır. Öğrencilerin bu soruları çözerken matematiksel düşünmenin hangi boyutlarında oldukları tespit edilecektir. Daha sonra matematik okuryazarlığı sorularının konu alanları ve matematiksel süreçler bağlamında değerlendirilmesi ve hangi çeşit sorularda hangi düşünme boyutlarının kullanıldığı ortaya konulacaktır.

Matematiksel düşünme boyutlarının incelenmesinin, okuryazarlık sorularının çözümünde ve çözüm stratejilerinin geliştirilmesinde önemli rol oynaması düşünülmektedir. Bunun yanı sıra bu araştırmanın, matematiksel düşünmenin ne olduğu, matematiksel düşünmenin boyutlarının neler olduğu hakkında bilgi vermesi amaçlanmaktadır. Akademisyen, öğretmen, öğretmen adaylarına ve öğrencilere matematiksel düşünme süreçlerine ilişkin bir farkındalık yaratması ve bu süreçlerin matematik öğretiminde neden önemli olduğunu ortaya koyması bir başka hedef olarak belirlenmiştir.

Elde edilecek veriler, matematik eğitimi alanında stratejiler geliştirmek ve öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini desteklemek için kritik öneme sahiptir. Bu çalışmanın bulguları, eğitimciler, politika yapıcılar ve araştırmacılar için matematik öğretiminde etkili yöntemler ve öğretim stratejileri geliştirmek için değerli bir kaynak sağlayabilir. Sonuç olarak, bu çalışma, matematiksel düşünme becerilerinin gelişimini anlamak ve bu becerilerin eğitimde nasıl iyileştirilebileceği konusunda önemli bir katkı sunmayı hedeflemektedir.

1.4. Araştırmanın Gerekçesi ve Önemi

Öğrencilerin matematiksel düşüncelerini ve okuryazarlıklarını geliştirmek için yaşamsal problemleri kullanmak, öğrerncileri bu tür problem ve etkinlikler ile yüzleştirmek önemlidir. Bu aynı zamanda öğrenciyi matematiksel muhakeme temelli kararlar almaya hazırlamaktır. Matematik okuryazarlığı ise matematik bilgi ve becerileri kullanmada yetkin olmayı ifade eder. Bu yetkinlik matematiğin rol oynayabileceği bir problem durumunu anlama, nihai karar vermede matematiğe olan ihtiyacı hissetme ve ilgili matematiği kullanabilme kapasitesini artırır. Dolayısıyla öğrencilere kazandırılması gereken çok önemli faktörlerden biridir.

Matematiksel düşünme, problem çözmeyi, soyutlamayı ve mantıksal akıl yürütmeyi kapsayan karmaşık bir bilişsel süreçtir. Bu düşünme becerisi, hayatın çeşitli bölümlerinde gerekli olan akademik başarı, iş ve günlük yaşam problemlerini çözmek için çok önemli bir beceridir (Jitendra ve diğerleri, 2014; NationalCouncil of Teachers of Mathematics, 2000). Ancak araştırmalar, birçok öğrencinin güçlü matematiksel düşünme becerilerini geliştirmekte zorluk çektiğini göstermiştir (Jitendra ve diğerleri, 2014; NationalCouncil of Teachers of Mathematics, 2000). Bu, öğrencilerde matematiksel düşünmeyi teşvik etmek için etkili öğretim stratejilerine olan ihtiyacı vurgulamaktadır. Mevcut araştırmayı gerçekleştirmenin ilk gerekçesini bu durum oluşturmaktadır.

Okuryazarlık becerileri ve bu beceriler içerinde olan okuduğunu anlama, akademik başarıda ve genel bilişsel gelişimde önemli rol oynayan bir diğer önemli beceridir (Shanahan, 2018). Yazılı metnin anlamını anlamayı, bilgi çıkarmayı ve fikirler arasında bağlantı kurmayı içerir (Soysal ve Tavşanlı, 2023). Okuduğunu anlama ve matematiksel düşünme farklı beceriler gibi görünse de problem çözme, eleştirel düşünme ve analiz gibi birçok ortak bilişsel süreci paylaşırlar (Tavşanlı ve diğerleri, 2018). Bu bilişsel süreçlerdeki paydaşlık, bu becerilerin gelişiminin bir diğer beceriyi de geliştirmede etkili olabileceğini düşündürmüştür.

Bu nedenle okuryazarlık problemlerinin matematiksel düşünme becerilerini geliştirmeye yönelik potansiyelinin araştırılması, etkili öğretim stratejilerinin geliştirilmesi açısından ümit vericidir. Öğretmenler okuryazarlık problemlerini matematik öğretimine dahil ederek öğrencileri her iki beceriyi de aynı anda geliştiren etkinliklere dahil edebilirler. Bu, matematiksel kavramların daha derin anlaşılmasına ve problem çözme yeteneklerinin geliştirilmesine yol açabilir.

Aşağıda bu araştırma için temel nitelikte olabilecek bazı gerekçeler sıralanmıştır:

Okuryazarlık ve matematiksel düşünme ilişkisi: Okuryazarlık genellikle dil becerileriyle ilişkilendirilirken, matematiksel düşünme de benzer şekilde kritik düşünme ve

problem çözme yetenekleri ile bağlantılıdır. Okuryazarlık problemleri, öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini geliştirmede etkili olabilir, çünkü bu problemler genellikle mantık yürütme, veri analizi ve eleştirel düşünme gerektirir (Altun, 2010).

Eğitimde kapsayıcılık: Matematiksel düşünmeyi geliştirmek, öğrencilere sadece matematiksel problem çözme becerileri kazandırmakla kalmaz, aynı zamanda genel akademik başarılarını da artırabilir. Okuryazarlık problemlerinin değerlendirilmesi, bu tür problemleri çözme yeteneğinin matematiksel düşünme becerilerine katkıda bulunup bulunmadığını anlamaya yardımcı olabilir (Altun, 2018).

Yenilikçi eğitim stratejileri: Eğitimde, matematiksel düşünmeyi teşvik eden yeni stratejiler ve araçlar geliştirmek önemlidir. Okuryazarlık problemlerinin matematiksel düşünme üzerindeki etkilerini araştırmak, öğretim yöntemlerine yenilikçi yaklaşımlar getirebilir. Bu, öğretmenler için yeni materyaller ve yöntemler oluşturma fırsatını sağlayabilir (Tanışlı, 2008).

Araştırma boşluklarını doldurmak: Matematiksel düşünme ve okuryazarlık arasındaki ilişki üzerine yapılan çalışmalar sınırlı kalmıştır. Bu tez, bu alandaki bilgi boşluklarını doldurarak hem akademik hem de uygulamalı literatüre katkıda bulunabilir.

Pratik uygulamalar ve politika önerileri: Okuryazarlık problemlerinin matematiksel düşünmeyi nasıl etkilediğini anlamak, eğitim politikalarının ve öğretim uygulamalarının iyileştirilmesine yönelik öneriler sunabilir. Bu, eğitim sistemlerinde daha etkili stratejiler geliştirilmesine yardımcı olabilir.

Öğrenci başarısını artırma: Matematiksel düşünme becerileri, öğrencilerin genel akademik başarılarını artırabilir. Okuryazarlık problemleri ile bu becerilerin geliştirilmesi, öğrencilerin sadece matematikte değil, diğer derslerde de daha başarılı olmalarını sağlayabilir. Bu gerekçeler, tezin önemini vurgulayarak, okuryazarlık problemlerinin matematiksel düşünmeyi nasıl etkilediğine dair derinlemesine bir anlayış geliştirmeye yönelik bir temel sağlar (Tavşanlı ve diğerleri, 2018).

Bu çalışma, okuryazarlık problemlerinin öğrencilerde matematiksel düşünme becerilerini geliştirme potansiyelini araştırmayı amaçlamaktadır ve bu araştırmanın sonuçları bu iki temel beceri arasındaki ilişkiyi anlamamıza katkıda bulunacak ve etkili öğretim stratejileri geliştirmek için değerli bilgiler sağlayacaktır. İlk olarak, mevcut çalışma okuduğunu anlama ile matematiksel düşünme arasındaki ilişkinin teorik olarak anlaşılmasına katkı sağlayacaktır. Okuryazarlık problemlerinin matematiksel düşünme becerilerinin gelişimini nasıl destekleyebileceğini keşfedecek ve ilgili temel bilişsel mekanizmaları tanımlayacaktır. İkinci olarak, bu çalışmanın bulgularının eğitimciler ve müfredat geliştiriciler

için pratik çıkarımları olacaktır. Öğrencilerin öğrenme çıktılarını geliştirmek için okuryazarlık problemlerinin matematik öğretimine etkili bir şekilde nasıl dahil edileceği konusunda rehberlik sağlayacaktır. Son olarak, bu çalışmanın sonuçları matematik ve okuma öğretimiyle ilgili politika kararlarına ışık tutabilir. Öğrencilerin bilişsel becerilerinin bütünsel gelişimini teşvik etmek için matematik sınıflarında okuryazarlık etkinliklerinin entegrasyonunu savunabilir. Araştırmanın sonuçları mevcut araştırmalarla ilişkilendirilerek tartışılacak ve gelecek araştırmalar için önerilerde bulunulacaktır. Bu çalışmanın, yukarıda bahsedilen gerekçeler ve öneminden dolayı alana katkı sağlayabileceği ve hem matematiksel düşünme hem de okuryazarlık becerilerini geliştirme alanında, öğrencilerin öğrenmesini geliştirmeye yönelik değerli bilgiler sağlayabileceği düşünülmektedir.

1.5. Araştırmanın Varsayımları

Öğrencilerin sorulara cevap verirken doğal ve samimi oldukları varsayılmıştır. Araştırmada kullanılan görüşme sorularının ve bu sorulara yönelik alınan uzman görüşlerinin yerinde ve yeterli olduğu kabul edilmektedir.

1.6. Araştırmanın Sınırlılıkları

Araştırmada elde edilen veriler ve kullanılan ölçme araçları belirlenen çalışma grubu ile ve 2022-2023 eğitim-öğretim yılı ile sınırlıdır. Ayrıca İzmir ili Bornova ilçesinde bulunan bir İmam-Hatip ortaokulunda 8. sınıfta öğrenim gören 18 öğrenci ile sınırlıdır.

1.7. Tanımlar

Bağlam: Matematiksel aktivite neticesinde açığa çıkan verileri ve insanoğlunun davranışlarının anlamını çevreleyen birbirine bağlı faktörlerin tümüdür (Hershkowitz ve diğerleri, 2001).

Matematiksel düşünme: Günlük hayatta karşılaşılan vakaları araştırma, onlarla ilgili çıkarımlarda ve tahminlerde bulunma, bu çıkarımlara uygun hipotezler kurma ve çeşitli araştırma yolları ile bu hipotezleri deneme, bu süreçte veri toplama ve verileri uygun yollarla analiz etme sürecidir (Polya, 1973).

Matematik okuryazarlığı: bireyin matematiği farklı boyutlar ve içerik için formüle etme, kullanma ve yorumlama yeteneğidir (OECD, 2016).

Sonlu sayıda ayrık durumlardan empirik tümevarım: Verilen bir problemdeki sınırlı sayıda birbirinden ayrı durumun gözlemlenerek belirli bir tahminde bulunulmasıdır.

Abdüksiyon: Açıklanması zor olan bir olayı genel bir kural çerçevesinde açıklama/izah etme türünde bir tahmindir.

2. BÖLÜM
KURAMSAL ÇERÇEVE

2.1. Düşünme

Düşünme, insanı diğer varlıklardan ayıran en temel özelliktir ve soyut olma özelliği ile zihinde gerçekleşen bir aktivitedir. Düşünme, belirli bir hedefe yönelik bilgileri incelemek, analiz edip değerlendirmek ve tüm bunlardan yararlanarak farkındalık oluşturmak olarak tanımlanabililr. Bunun yanında herhangi bir durum ile ilgili olarak o duruma odaklanma ve o durum üzerine bilişsel olarak eğilme, akıl ve rasyonalite yoluyla kafa yorma ve çıkarımlarda bulunma da tanımlar arasında yer almaktadır.

Geçmiş dönemlerde bilim dünyasını etkileyen tüm buluşlar, düşünme ürünü olarak ortaya çıkmıştır. Hemen hemen herkesin ezberinde olan suyun kaldırma kuvveti, yer çekimi kuvveti, zamana bağlı hız formülleri gibi bilimsel formüller ve kanunlar, bir düşünme eylemi sonucunda ortaya çıkmıştır. O halde gerçek manada düşünme, herhangi bir vakayı anımsama, onu zihinde canlandırma ya da betimlemeden ziyade, bir problemi tanıma, çözme, müşkül bir durumdan kurtulma ya da istemediğimiz bir durumu açıklama çabasında yer almaktadır. Bu tarz düşünmelere, hayal kurma ve hatırlamadan ayırmak için "nedenli düşünme" denmektedir. Bir sorun ya da problemin olmadığı yerde nedenli düşünme de yoktur (Yıldırım, 2012).

Hazlitt (1920)'e göre düşünme, belirli bir amacı sonuçlandırmak, oluşabilecek tüm neticeleri görebilmek ve ortada olan müşkül durumdan kurtulabilmektir. Bir diğer tanımda ise düşünme, kişiyi içten ya da dıştan huzursuz eden, kişinin bedensel ve ruhsal harmonisini bozan her türlü vakanın ortadan kaldırılması için çaba sarfedilen istendik zihinsel davranışların hepsi olarak tanımlanmıştır (Kazancı, 1989). Baron (2000) düşünmeyi, ihtimallerin, olası aksiyonların, öğretilerin ve şahsi hedeflerin gerçekleştirilmesi ve seçenekler arasında doğru tercihlerde bulunma olarak tanımlamıştır. Ruggerio (2004) ise kişilerin üzerinde belirli denetlemelere sahip oldukları bilişsel etkinlikler olarak ifade etmiştir. Özden (2011) düşünmeyi varolan bilgilerden değişik ve yeni bilgi ve deneyimlere varma ya da varolan bilgileri daha ileriye taşıma olarak tanımlamıştır. Cevizci (2000) ise düşünmeyi; bireyin formal olarak öğrendiği kavramlar, kullandığı imgeler, tavır ve düşünceler, kelime ve terimler gibi semboller vasıtasıyla meydana gelen bilinçsel faaliyet olarak tanımlamıştır. Düşünmenin "hatırlama", "normal düşünme", "tenkidi düşünme" ve "kreatif düşünme" gibi yalından komplekse türünde farklı tanımlamaları da yapılmıştır (Krulik ve Rudnick, 1999)

Dilekli (2015)'ye göre düşünme alelade bir etkinlik olarak değerlendirilmemelidir. Bu süreç yüksek seviye becerileri içerir. Yaratıcılık ve problem çözme başlıca faaliyetlerdir. Bireyler düşünsel faaliyetlerini yalnızca okul ortamında değil hayatın tüm kademelerinde aktif

bir şekilde kullanmaktadır. Örneğin; bir kişinin elektronik bir alet alma süreçlerindeki işlevselliği, maddi olarak değeri gibi birden fazla etkene önem vermesi düşünme eylemini gerçekleştirdiğini işaret etmektedir.

Birey herhangi bir problem ile karşı karşıya kaldığında o problemin çözüm yollarını bulmak için zihinsel bir süreç yaşaması ve o problem üzerine düşünmesi gerekir. Yani müşkül durumdan kurtulmak adına düşünsel süreçlere girmek hayatidir. Bununla birlikte ortaya çıkacak düşünme biçimlerinden bazıları diğerlerine nazaran daha önemlidir. Kreatif düşünme, yorumlamacı düşünme, analitik düşünme, akıl yürütme ve rasyonel düşünme gibi daha fazla bilişsel talep gerektiren düşünme süreçleri ön plandayken, daha düşük bilişsel talep gerektiren süreçler daha geride kalmakta ve az önemsenmektedir (Goldman, 2002). Davis ve diğerleri (1981) ise bu yüksek bilişsel talep gerektiren süreçlerin; analiz, sentez ve değerlendirme evrelerinde olgunlaşacağını söylemişlerdir. Üst düzey düşünme için birincil olarak problemin tanımlanması gerekmektedir. Kişinin problemin çözümü için mevcut bağlamsal ilişkiyi çözmeye çalışması, yani matematiksel düşünmesi oldukça önemlidir (Başer ve Ersoy, 2013).

Düşünce orijinal olursa, yerinde ve zamanında ortaya çıkarsa kişinin yaşamını manidar bir duruma getirerek olumlu ilerleme göstermesine katkı sağlar. Bunun sebebi, bu gerçekleştirildiğinde bireyin toplumla daha senkron ve ahenkli bir birliktelik yaşayacağı gerçeğidir (Köksal, 2019).

Cüceloğlu (1997), zihnin kendi içinde farkında olarak düşünme sürecini en çok kullandığı alanları şu şekilde sıralamıştır:

- Başına gelen ya da şahit olduğu herhangi bir problemi tanımlamak, analiz etmek ve çözmek,
- Önceden belirlenmiş hedeflere ulaşmak,
- Edinilen ya da hali hazırda sahip olunan bilgi ve vakaları anlamlı kılmak,
- Kişileri daha iyi tanıyarak kişilerarası ilişkileri daha iyi yönetmek.

Burada en dikkat çekici olan nokta düşünmenin bir sonuç olarak değil süreç olarak görülme gerçekliğidir. Düşünmenin açıklanması adına yapılan bütün tanımlarda süreçte nasıl çözümlemeler yapıldığı, bireyin süreçte ne kazandığı ve nasıl eylemlerde bulunulduğu üzerinde durulduğu görülmektedir (Kükey, 2018).

Mayer (1992), düşünmeyi açıklarken 3 ana başlığa önem vermiştir. Bunlar;

1. Düşünme kognitiftir ve davranışlar sonucunda açığa çıkar. Bu eylem her ne kadar bilişsel gerçekleşse bile yani soyut olmasına rağmen anlaşılır.

2. Düşünme, bilişsel düzende sahip olunan bilgilerin çeşitli işlemlerden geçmesi ile değişmesi sürecine dayanır.
3. Düşünme yönlendirilebilir, sorunun çözümü olabilecek düşünsel eylemler süreçlerle nihaileşir veya çözüme yöneliktir.

Düşünme kavramını derinden incelemek için günümüze kadar çokça yeni fikir öne sürülmüş ve çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda kişilerin yaşamı anlamlandırma ve yaşamdan maksimum verimi almaları için düşünmenin çok önemli bir konuma sahip olduğu kanısına varılmıştır. Düşünmenin aynı zamanda bir beceri olarak değerlendirildiği ve düşünme becerileri için bazı izahların yapıldığı gözlemlenmiştir. Düşünme becerilerinin birçok dalı olduğunu ve her bireye göre farklılaştığını söyleyen Lipman (2003), insanların zekâlarının ve kapasitelerinin birbirinden farklı olduğunu, dolayısıyla düşünme becerilerinin değişik şekillerde oluşabileceğini açıklamıştır. Sternberg ve Grigorenko (2000) ise düşünme becerilerini kategorilere ayırmış; yaratıcı düşünme, analitik düşünme ve uygulamalı düşünme olmak üzere üç farklı şekilde düşünme düzeyinden bahsetmiştir. Analitik düşünme bilgiye dayanır ve içerisinde problem çözme ve karar verme süreci vardır. Yaratıcı düşünme becerisinde ise problemleri çözerken farklı çözüm yolları üretmek ve karar oluşturmak etkilidir. Uygulamalı düşünmede ise sayılan bu becerilerin günlük yaşamda karşılaşılan problemlere aktif bir şekilde uygulanması mevzu bahistir (Köksal, 2019).

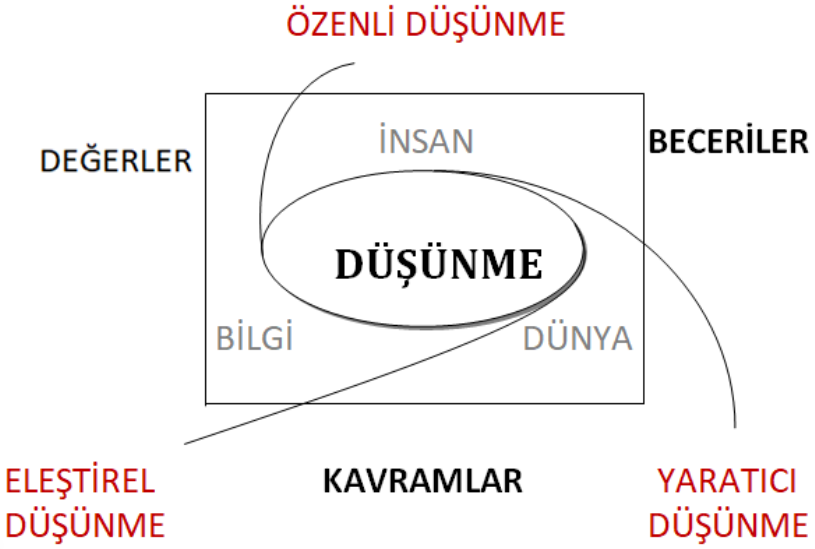
Düşünme yeteneğinin günlük hayattta kullanılabilme kapasitesine önem veren farklı bir görüşte ise, öğrencilerin sadece düşünmelerinin değil, düşünme yeteneklerinin günlük yaşamla entegre olmasının gerekliliğinden bahsedilmiş ve öğrencilerdeki düşünme yeteneği geliştirilmediği ve kullanılmadığı takdirde bilgilerin bellekte depolanacağı belirtilmiştir. Bunun sonucunda da öğrencilerin bu bilgileri nerede ve nasıl kullanacaklarını anlayamadıkları ortaya çıkacaktır (Sabancı, 2014).

Doğan (2019) düşünmenin ürün ve süreç olarak iki ana dayanağının olduğunu belirtmiştir. Düşünmeyi ürün yani sonuç odaklı tanımlayanlar düşünme sürecini objektif bir şekilde tetkik edebileceklerini savunurlar. Düşünmeyi süreç olarak algılayanlar ise düşünme süreciyle ilgilenerek bu süreci bir araca benzetmişlerdir.

MEB'in (2007) ilköğretim programında yer verdiği düşünme türleri şekildeki gibi ifade edilmiştir.

Şekil 1

Düşünme Türleri (MEB, (2007), Alıntılanmıştır.)



Düşünme; yargıya varma, tenkit etme, problem çözme gibi zihinsel prosesleri içine alan, zihinde var olan genel tasarımlar ile gündelik yaşam arasında bağlantı kurarak sonuç çıkarmaya dayanmaktadır. Birçok değişik görüşe göre düşünme, karşılaşılan müşkül bir durum ile başlamakta ve süreç boyunca bu durumdan kurtulma, kişi için temel bir hedef olup onu düşünmeye sevk etmektedir. Böylece bir problem ile birlikte düşünme süreci de doğmakta ve ortaya çıkmaktadır (Kalaycı, 2001).

2.2. Matematiksel Düşünme

Matematik, düşünme becerisinin gelişimine önemli katkılar veren disiplinlerin başında gelir. Sevgen (2002), matematiksel düşünmenin bireylerin gündelik hayatlarında karşı karşıya kaldıkları olaylara sistemli, pratik ve akılcı bir şekilde yaklaşabilmek olduğunu ifade etmektedir. Bu açıklama aslında matematiksel düşünmenin sadece okul derslerinde matematik kavramları üzerinde kullanılan bir düşünce biçimi değil, aksine matematiğin günlük yaşamda kullanılabilme kapasitesi ile alakalı olduğunu göstermektedir. Bundan dolayı bu kavram, Milli Eğitimin temel müfredatında öğrencilere kazandırılması gereken başlıca kazanımlar arasına girmiştir.

Matematiksel düşünme ile ilgili tek bir tanım yapmak elbette çok güçtür. Çünkü matematiksel düşünmenin birçok alt boyutu vardır. Bugüne kadar literatürde birçok farklı araştırmacı farklı tanımlar ve terimler kullanmışlardır. Yıldırım (2018) matematiksel düşünmeyi bireyin güç bir durumla karşılaştığında doğru sonuca ulaşma çabası olarak tanımlamaktadır. Matematiksel düşünme sadece matematik bilimi ile ilgilenenlere ait bir düşünsel eylem ve pratik süreci değil, günlük yaşama dahil olmuş ve bir şekilde yaşamını

sürdüren herkes için günlük hayatta karşılaştığı problemlerde kullanabileceği bir yöntemdir (Alkan ve Bukova Güzel, 2005).

Henderson ve diğerleri (2002) matematiksel süreçlerin matematiksel düşünme için hayati derecede önemli olduğunu ifade etmiştir. Herhangi bir problem ile karşılaşıldığında bu süreçlerin bizzat ya da dolaylı olarak uygulanması, matematiksel düşünmenin ortaya çıkması demektir. Burton'a (1984) göre ise matematiksel düşünme salt matematik konuları ile ilgili değil; matematiksel eylemlerin ve süreçlerin üzerine düşünme olduğunu ifade etmiştir. Polya'nın (1973) tanımına göre ise matematiksel düşünme; günlük hayatta karşılaşılan vakaları araştırma, onlarla ilgili çıkarımlarda ve tahminlerde bulunma, bu çıkarımlara uygun hipotezler kurma ve çeşitli araştırma yolları ile bu hipotezleri deneme, bu süreçte veri toplama ve verileri uygun yollarla analiz etme sürecidir.

Bireyler matematiksel düşünme sayesinde, hangi aşamada olursa olsun karşılaştığı zorluklara karşı bu problemleri çözecek yollar üretebilir ve geliştirdiği bu çözümleri başka zamanlarda karşılaştığı diğer sorunlarda da kullanabilir (Yavuz, 2006). Bu perspektife göre matematiksel düşünme yalnızca uzmanlık alanı matematik olan insanların kullanabildiği bir eylem değil, günümüz dünyasında tüm ülkelerin vatandaşlarının ve bireylerinin kullanması gerekli olan bir düşünme şeklidir (Alkan ve Bukova-Güzel, 2005). Farklı bir ifadeyle matematiksel düşünme salt bilim dalı olarak matematiğin kendisine ait değildir, her alanda kullanılabildiği için kullanım alanı geneldir (Burton, 1984).

Matematiksel düşünme; günlük hayatta matematik ile düşünmek ve matematikle ilgili kavramları anlamlandırmak için, beş duyumuz ile idrak edeceğimizin daha ötesinde, genelden özele çıkarım yapabilme ve derinlemesine bir mantık gerektiren düşünme biçimidir (Ersoy, 2012). Bir başka tanıma göre matematiksel düşünme, kişinin fikir dünyasını büyüten, kompleks düşünceler arasındaki bağlantıları kavrama becerilerini çoğaltan etkin bir süreçtir. Bu süreçle birlikte, karşılaşılan problemlerin dikkatli ve sorgulayıcı bir şekilde çözülmesi, elde edilen verilerin tecrübelere aktarılması, fikirler ve tatbikler arasında ilişki kurulması ve gerçek yaşam durumları ile matematik arasında olan ilişki ve ağların fark edilmesi ve tam olarak anlaşılması, bağlantılarının kurulabilmesiyle matematiksel düşünme geliştirilebilir (Keith, 2000).

Karşılıklı beslenmeye dayanan matematik ve düşünmenin mevcut bu ilişkisinden ve ağından hareketle matematiğe has bir düşünme biçiminden bahsedilebilmektedir. Matematiksel düşünmenin başlama noktası "bireyin günlük yaşamda karşılaştığı olay ve nesneleri anlayabilme ve bunlar arasındaki ilişkileri anlamlandırabilme çabası ile oluşmaya başladığı" şeklindedir (Tall, 1995). Kuşkusuz bu tarz düşünmelerin hepsi matematiksel

olmayabilir, fakat bireylerin karşılaştıkları bir güçlüğü tanımlayabilmesi, bu güçlüğü aşacak yol ve yöntemler düşünmesi, optimum çözüm yolunu bulması yani topyekûn bu sorunla baş edebilme süreci için matematik ve matematiksel düşünme süreçlerini kullanabilmenin de olumlu etkileri yadsınamaz (Umay, 1996).

Matematiksel düşünme ve matematiksel düşünmede olması gereken süreçler ve eylemler temel bir şekilde; matematikte mantıksal çıkarımlar yapmayı, matematikte problem çözmek için gerekli olan düşünme biçimlerini kullanmayı, günlük hayatta karşılaşılan güçlüklere ilişkin çalışmalar için düşünme yollarını birleştirmeyi ve matematiksel düşünceleri muhafaza ederek algılamak için matematiksel yaratma gücünü işetebilmeyi içerisinde barındırmaktadır (Duran, 2005). Herkes usta bir matematikçi olmayabilir fakat matematik hayatımızın vazgeçilmez bir unsuru olduğu için, hepimiz matematiksel kapasitemizi yükseltmeye çalışmalı ve bunun da ötesinde öğrencilerin küçük yaştan itibaren matematikten haz almalarını ve matematiksel düşünmeyi kazanmalarına yardımcı olmalıyız (Umay, 1997).

Stacey'e (2006) göre matematiksel düşünmeye sahip olmak, öğrencilerin matematiği aktif bir şekilde kullanabilme kapasitesini artırmaktadır ve buna öncülük eden etmen ise okullaşma oranının yüksek olmasıdır. Bununla birlikte matematiksel düşünme sadece okullarda değil toplumun büyük bir kesiminde ve pek çok alanda oldukça kritik görülmektedir. Ayrıca matematiksel düşünmenin en belirgin üç kıstasını aşağıda ifade edilen maddeler ile açıklamıştır:

- Matematiksel düşünme akademik başarı ve okul başarısı için kritiktir.
- Matematiksel düşünme, matematiği öğrenmek için kritiktir.
- Matematiksel düşünme, matematiği öğretmek için kritiktir.

Öğrencilerin daha iyi öğrenmelerini sağlamak için düşünme ve mantık yürütmelerini anlamamız gerekmektedir. Öğretenler öğrenenlerin aklından geçenleri nasıl/ne düzeyde tahmin edebilirse problemlerin üstesinden gelmeleri için o kadar farklı alternatif seçenekler sunabilirler (Darling-Hammond, 1994). Aynı şekilde Hughes (2006) etkili bir matematik öğretimi için, öğretenlerin mutlak bir şekilde öğrenenlerinin düşünme yapılarını ve öğrenme tarzlarını bilmesi gerektiğini vurgulamıştır. Bu yöntem çocuklarda matematiksel düşünmenin gelişeceği ve derinleşeceği gerçeğini beraberinde getirir.

Mason ve diğerleri (1985) tüm bireylerin matematiksel düşünebileceğini ifade etmiştir. Matematiksel düşünme, sadece matematiksel değil değişik problemlerle de pratik yapılarak süreç içinde geliştirilebilir. Matematiksel düşünme, hayret verici, beklenilmeyen olaylarla ve karşıtlıklarla da açığa çıkarılabilir. Bireyin yaşadığı çevreyi, olayları ve kendi

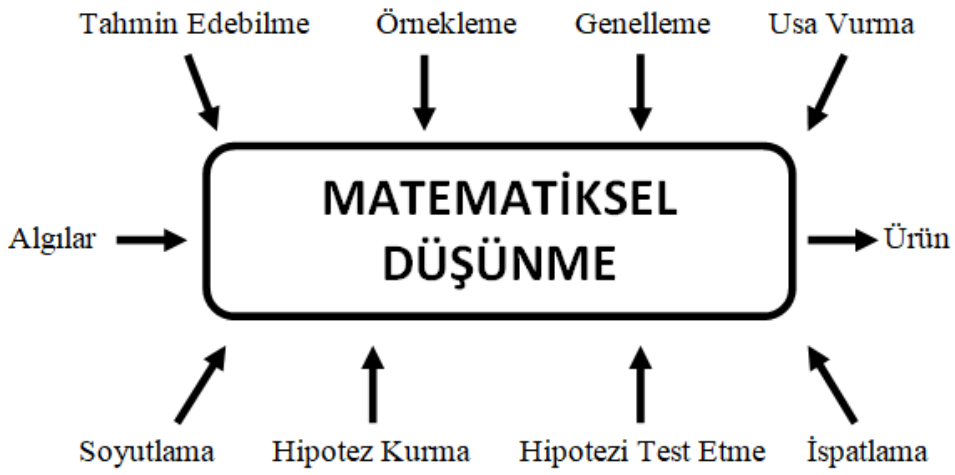
özünü anlamasına destek olur. Bununla birlikte irdeleme ve daha çok boyutlu ve kapsamlı düşünme ile matematiksel düşünme geliştirilebilir.

Matematiksel düşünme aslında bir problem çözme aktivitesidir ve günlük düşünme ya da bilimsel düşünme ile örtüşmektedir. Matematiksel düşünme süreçlerinde, öncelikle karşılaşılan bir problem hakkında o problemi aşabilecek hipotezler kurulmalıdır. Sonrasında ise bu hipotezler sınanır ve doğruluğu/yanlışlığı teyit edilir. Eğer hipotez doğrulanır ise problemin çözüldüğüne karar verilir. Fakat aksi bir durum gerçekleşir yani hipotez yanlışlanır ise bu sefer diğer hipotezlerin sınanma süreci başlar. Nihai olarak hipotezlerden birisi doğrulanana kadar bu süreç sürdürülür (Yıldırım, 2014).

Alkan ve Güzel (2005) matematiksel düşünme sürecinde kişilerin düşünce dünyasını baz alarak bir ürün ortaya koymayı amaçladıklarını ve bu süreçte başvurulan yöntemlerin kişisel anlamda farklılaşabileceğini vurgulamışlardır. Matematiksel düşünmeyi diğer mevcut düşünme yöntemlerinden ayıran temel özelliğin, bireylerin var olan matematiksel bilgi ve kavramlarını soyutlayarak, değerlendirerek, genelleyerek, hipotezler oluşturarak ve test ederek, sonuçlara vararak, kanıtlayarak ve açıklayarak yeni bilgi veya kavramlara ulaşması olduğunu savunmuşlardır. Çalışma yapısını Şekil 2'deki gibi açıklamışlardır.

Şekil 2

Matematiksel Düşünme Yapısı. (Alkan ve Güzel (2005), sayfa 223, Alıntılanmıştır)

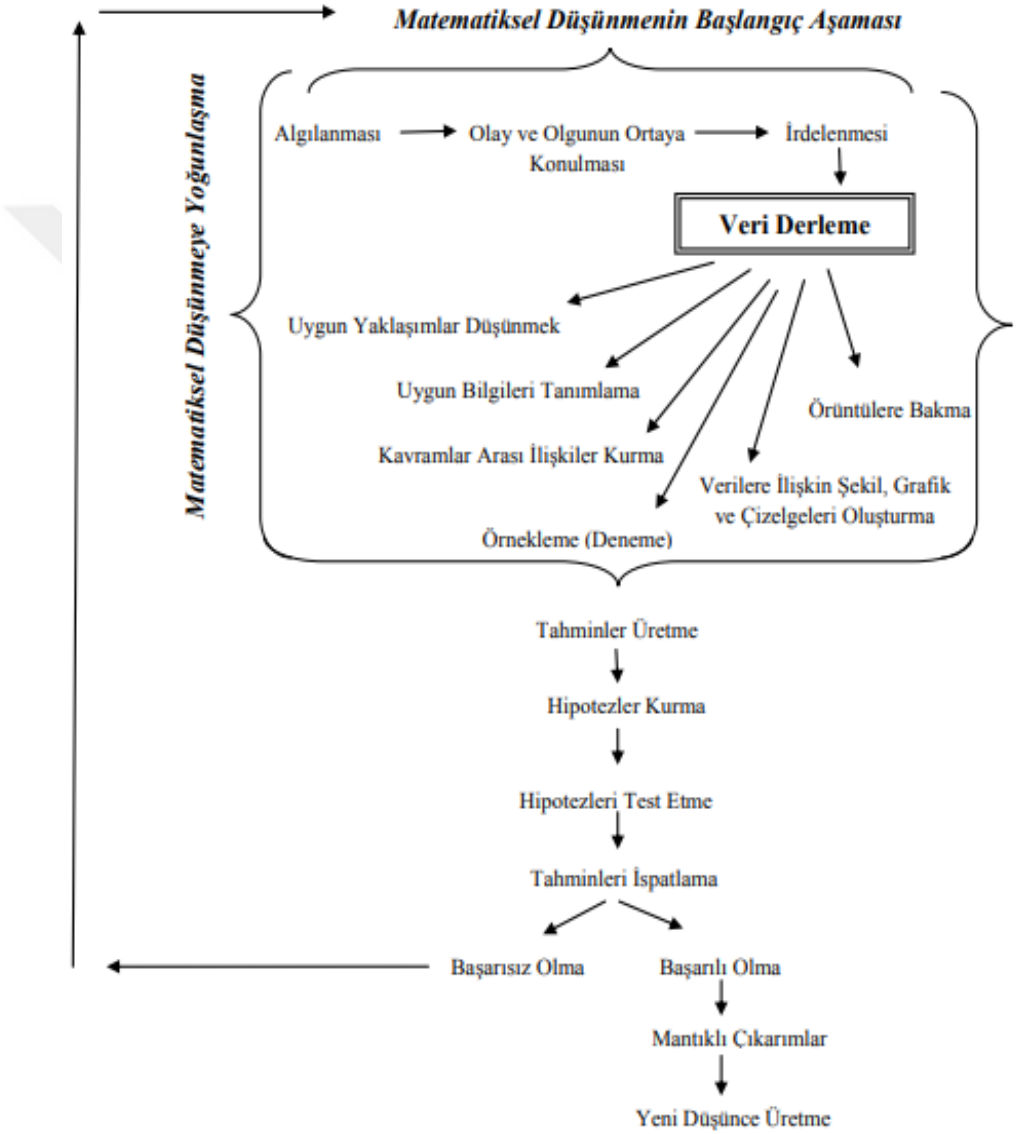


Matematiksel düşünme sürecinde özel olarak matematikçi olmaya gerek yoktur. Düşünen bütün bireylerde bu süreç gerçekleşmektedir. Bu süreçte var olan belirli bir düşünceden yeni ve farklı bir düşünceye ulaşma hedefi benimsenir. Oluşturulan yeni düşünceler, farklı düşüncelere zemin hazırlar ve süreç bir dönüşüm halinde devam eder ve döngü başa sarar. Sistemin istenilen sonucu elde etmesi ya da başarısız olması sürekli bir gelişimi sağlamaktadır. Çünkü süreç sonunda başarı elde edilirse yeni farklı düşünceler

üretilmekte, başarısız olunması durumunda ise süreci baştan ele alıp başarısızlığın nedenleri araştırılarak sonuçlarla ilgili çıkarımlar yapılmaktadır. Bunun sonucunda süreç başa alınarak yeniden başlamakta ve özgün bir sonuca varılana kadar sürdürülmektedir. Aşağıda süreç içinde matematiksel düşünmeyi oluşturan basamaklar şekildeki gibi belirlenmiştir.

Şekil 3

Matematiksel Düşünme Oluşum Süreci. (Alkan ve Güzel (2005), sayfa 225, Alıntılanmıştır)



Schoenfeld (1992) matematiksel düşünebilmek adına matematiğe uygun bir düşünce sistemi geliştirmek gerektiğini söylemektedir. Farklı bir ifadeyle matematiksel düşünmeye sahip olmak; soyutlama sürecine önem göstermek ve soyutlama sürecinde alınan kararları davranışa vurmaya ilişkin bir temayüle sahip olmak demektir. Bu bakış açısıyla matematiksel düşünmenin asıl paydaşları;

- akılda bulunan ve sahip olunan bilgi birikimi,

- bir problemin çözümü için strateji geliştirme,

- mevcut zihinsel yapıları süreçte işletme,

- matematiğe has bir kavrayış ve zihinsel bakış,

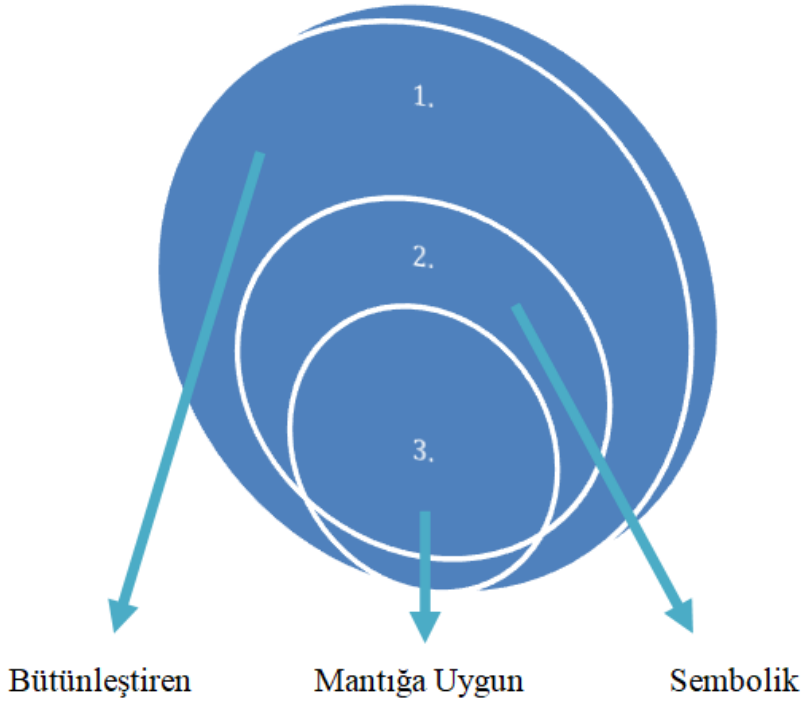
- matematik ile ilgili aktivitelerde bulunma,

şeklinde ifade etmiştir (Aktaran. Tüzün, 2019).

Tall (2004) matematiksel düşünmenin içerisinde farklı gelişimde olan fakat yine birbirleriyle ilişkili üç düşünce yapısını vurgulamaktadır.

Şekil 4

Matematiksel Düşünme Yapısı (Tall, (2004), Alıntılanmıştır).



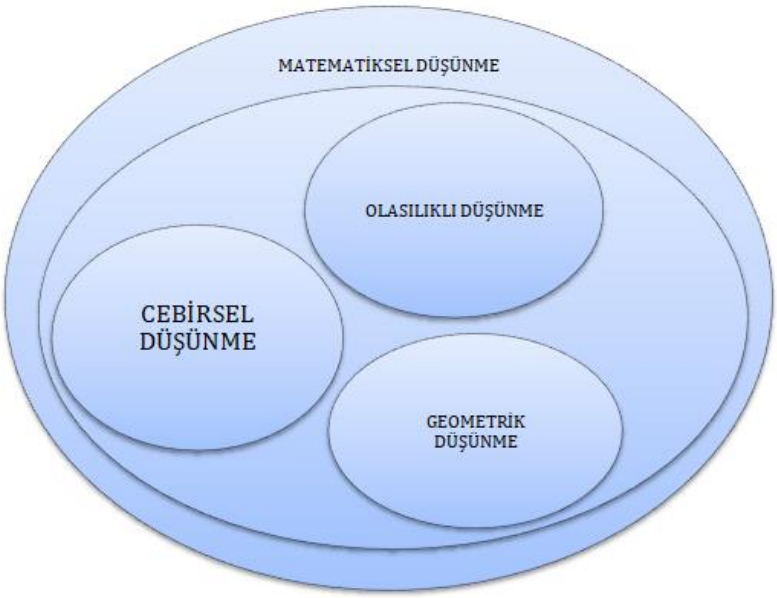
Bu düşünme biçimlerinden bütünleştirme; duyu algılarının yansımaları ve yansımaları ile sezgisel ilişkiler şeklinde gelişen kavramsal bütünleşmeyi ifade eder. Zihinde oluşturulan tasarı ile objenin özelliklerini belirtme, tanımlama ve tahminlerde bulunma becerileri vardır. Sembolleştirme; matematiksel sembolleri ve bu semboller aracılığı ile ortaya çıkan matematiksel gelişimi içermektedir. Nesneler üzerine gerçekleştirilen eylemler temelli bir düşünme biçimidir. Rasyonelleştirme, matematiksel kavramları, özellikleri mantıksal

kanıtlarla ortaya çıkarılan aksiyomatik yapılar olarak ele alan mantık teorilerini ifade eder. Odak, kavramın tanımlarının özelliklerine odaklanır (Aktaran. Tüzün, 2019).

Matematiksel düşünme, karşı karşıya kalınan matematiksel olgunun tabiatına göre farklı biçimlerde görülebilir (Carroll, 1996). Cebirsel düşünme ve geometrik düşünme gibi düşünme türlerini de içerir (Dindyal, 2003). Çelik (2007) ve Dindyal (2003) düşünme kavramı üzerine geliştirdiği modelde, matematiksel düşünme ve alt boyutları arasındaki ilişkiyi ifade etmiştir.

Şekil 5

Matematiksel Düşünmenin Alt Boyutları (Dindyal, (2003), Alıntılanmıştır).



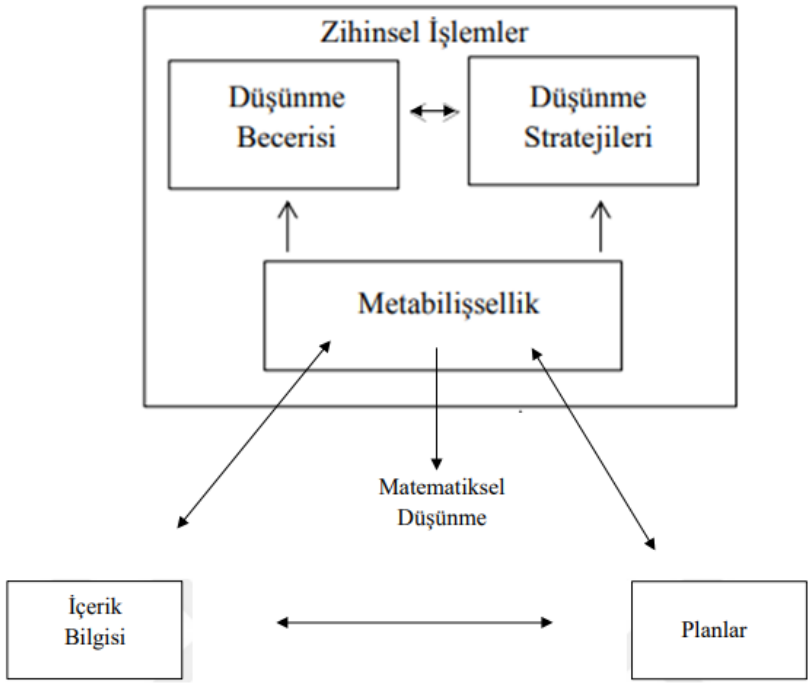
Mubark (2005) matematiksel düşünmeyi altı bileşende incelemiştir: genelleme, tümevarım, muhakeme, sembollerin kullanımı, mantıksal düşünme ve matematiksel ispat. Stacey'e (2006) göre matematiksel düşünmenin bileşenlerine bakıldığında iki ana ikili seviyeden bahsedebiliriz. Bu iki aşamadaki süreçler:

a) Uyarlama ve genelleme, b) Varsayım ve ikna'dır.

Hwa ve Lim (2006) matematiksel düşünmenin içeriğini tanımlamada üç ana kavram belirlemiştir. Bunlar; matematiksel içerik/bilgi (konunun anlaşılması), zihinsel işlevler ve tutum. Buradaki tutum, akla, bilime ve mantığa uygun olduğu anlamına gelir. Matematiksel olarak düşünmek için insanların içerik bilgisine, bilişsel becerilere ve stratejilere ve duygusal bir zihniyete ihtiyacı vardır. Bu üç bileşen birbiriyle ilişkilidir. Ayrıca birbirlerini tamamlarlar. Şekil 6'daki resim, matematiksel düşünmenin bu üç bileşeninin kavramsal çerçevesini göstermektedir.

Şekil 6

Matematiksel Düşünmenin Kavramsal Çerçevesi. (Lim ve Hwa, (2008), Alıntılanmıştır.)



Burton'a (1984) göre, matematiksel düşünmede dört faktör vardır: uzmanlaşma, spekülasyon, genelleme ve ikna. Matematiksel düşünmeyi bir süreç olarak gören Yıldırım'a (2014) göre bu süreç problem çözmeye dayalıdır; Bir soruna çözüm bulma ve varılan çözümün doğruluğunu kontrol etme olmak üzere iki aşamadan oluşur. Tümevarımsal olan ilk adım, buluş veya icatla ilgilidir ve tümdengelimli olan ikinci adım, kanıtlama veya doğrulama ile ilgilidir. Schoenfeld'e (1992) göre matematiksel düşünmenin temelleri; zihinde bulunan bilgi ve veriler, problem çözme aşamasında kullanılan taktikler, bilişsel yapıların uygulanması, matematiksel bakış açısı ve matematiksel etkinliklere katılımdır. Sternberg (1996), matematiksel düşünme; Psikometrik, bilişsel, pedagojik, antropolojik ve matematiksel yaklaşımlar dahil olmak üzere çoklu yaklaşımlardan bakılması gerektiğini savunmuştur.

Matematiksel düşünme ile ilgili literatürde yapılan çalışmalara ve tasniflere dikkat edildiğinde birbirine benzer kavramların farklı şekillerde açıklandığı dikkat çekmektedir. Tuncay (2015), birbirinden farklı bilimsel araştırmalarda değinilen matematiksel düşünme kavramlarını tasnif etmiş ve Tablo 1'i oluşturmuştur.

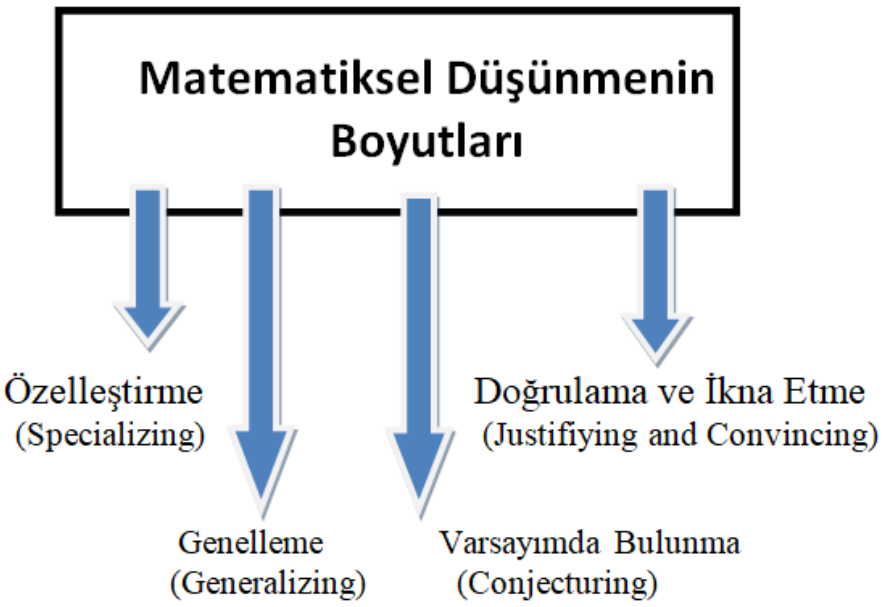
Tablo 1
Matematiksel Düşünmenin Alt Boyutları (Tuncay, 2015).

YAZARLAR / BOYUTLAR	**Akan ve Bukova Güzel (2005)**	**Tall (2002)**	**Mason, Burton ve Stacey (2002)**	**Hacısalihoğlu, Mirasyedioğlu ve Akpınar (2003)**	**Liu (2003)**	**Arslan Ve Yıldız (2010)**
Tahmin Etme	X					
Genelleme	X	X	X	X	X	
Varsayımda Bulunup Test Etme	X					
Varsayımda Bulunma			X			
Soyutlama	X		X			
Muhakeme Etme	X					
İspatlama ile Yeni Bir Bilgi ya da Kavrama Ulaşma	X					
İspat		X				X
Sentezleme		X				
Modelleme		X				
Problem Çözme		X				
Özelleştirme			X			X
Doğrulama ve İkna Etme			X			
Tahmin Etme				X	X	
Ayrıntılama				X		
Tümevarım					X	
Tümdengelim					X	
Örnekleme					X	
Analoji					X	
Formal ve İnformal Olmayan Usa Vurma					X	

Tablo incelendiğinde aslında aynı manaya gelen farklı ifadelerin kullanılmış olduğu görülmektedir. Örnek verecek olursak ayrıntılama kelimesi özelleştirme yerine, tümevarım kelimesi genelleme yerine; varsayımda bulunma için test etme, tahmin etme; ikna etmek için doğrulama ve ispatlama gibi anlamları aynı fakat ifadeleri farklı sözcüklerin kullanıldığı görülmektedir. Literatürde adı geçen tüm ifadeler ortak küme içerisinde toplandığında dört kavram altında birleşebildiği görülmektedir. Bunlar Özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispat olarak belirlenmiştir.

Şekil 7

Matematiksel Düşünmenin Boyutları



2.2.1. Özelleştirme: Polya (1957) özelleştirmeyi; Büyük bir kavramlar kümesinin genel düşüncesinden somut düşünceye, daha küçük bir kümeye geçişini tanımlar ve uyarlamanın ortaya çıkan sorunları ortadan kaldırmak için yararlı bir yol olduğunu savunur. Mason ve diğerleri (1985) ise genel bir yargıya varmayı kolaylaştıracak şartları bir araya toplama işlemine özelleştirme demiştir. Kişiler zor bir durumla karşılaştığında, bunun üstesinden gelebilecek şartları araştırır ve daha spesifik örnekler üzerinde çalışarak çözüme ulaşabilir. Böylece çözüm stratejisi ile ilgili yeni bir model kurup, büyük resme bakarak resmin çok küçük bir bölümü üzerinde çalışarak sonuca daha kolay yoldan varmaya çalışabilir (Sezer, 2019).

Özelleştirme, bir problem durumunu anlamak için örnekleri sistematik olarak seçmek ve seçilen problem örneklerini incelemek anlamına gelir (Burton, 1984). Problem üzerinde çalışırken rastgele değer vererek spesifik durumlara ulaşmak, problemin vermek istediği mesajı anlama adına kolaylık sağlarken, sistematik değer ataması, veriler arasındaki ilişkileri görmede etkilidir (Mason ve diğerleri, 1985). Özelleştirmede birden fazla örnek seçme, örnek getirme, örnek açıklama, gösterme, ispatlama, çizme gibi durumlar vardır. Bununla birlikte verilen durumla alakalı zıt bir örnek verme ve ulaşılmak istenen sonucu doğru bulup farklı şekillerde yazmak da kullanılan yöntemlerdendir. Özetle özelleştirme, kişinin bir problemle

karşı karşıya kaldığında optimum çözüm yolunu ve özgün örnekleri incelemesidir (Arslan ve Yıldız, 2010).

Özelleştirme, sorunu anlamayı, soruna aşina olmayı, sorunun asıl amacını anlamayı ve daha mantıklı kararlar alıp sorunu çözmeyi kolaylaştıran bir süreçtir. "Ne?" ve "Neden?" sorularına dikkat çeken özelleştirme, insanları sorunda neyin gerekli olduğuna dair kendi yorumlarını açıklamaya zorlar, bu da sorunu daha iyi anlamaya, gerçekte ne olduğuna dair bir anlayış oluşturmaya ve modelin neden olduğunu anlamaya başlamaya yardımcı olur (Mason ve diğerleri, 1985). Özelleştirme basamağında problem ile ilgili özel bir kavrayışa sahip olmak hedeflenmektedir. Bunun için özelleştirmeye random örneklerle başlanabilir. Soruyla ilgili bir kavrayış elde edildiğinde ise özelleştirme sistematik bir şekilde devam ettirilirse genelleme ve tahmine götüren bağlantılar ve örüntüler saptanabilir (Lane, 2011).

Isoda ve Katagiri'ye (2012) göre özelleştirme sürecinde aşağıdakiler meydana gelebilir:

a) Herhangi bir parametreyi belirli bir niceliğe çevirerek sorunun iletmeye çalıştığı genel fikri kaybetmeden sorunu anlayabilir ve çözümü kolaylaştırabilir,

b) Bazen aşırı bir duruma odaklanarak, soruna ortak bir çözüm bulmayı destekleyen kanıtlar bulunabilir.

c) Çözüm stratejisinin doğruluğunu test edebilmek için bazen özel değerler kullanılabilir.

Özel değerler üzerinde çalışma, hipotez kurma ve genellemeye uygun ortam oluşturması açısından oldukça önemlidir (Çelik, 2016).

Keskin ve diğerlerine (2013) göre özelleştirme, bir problem ile karşı karşıya kalındığı zaman problemi detaylı bir şekilde anlayabilmek için düzenli ve sistemli bir şekilde örnekleri toplamak ve çözüm aşamasında seçilen örnekleri uygulamak anlamına gelmektedir.

Özelleştirme yalnızca mevcut problemle alakalı bir süreç değil, problem üzerinde düşünen kişiyi de içine alan bir süreçtir (Göl, 2017). Bu süreçte yalnızca bir tek örnek üzerinde çalışma yapmak bazı bireyler için yeterli iken bazı kişiler için birden çok örneği incelemek gerekebilir (Lane, 2011). Burton (1984) ise bu süreci bireyin matematiksel düşünmeye başlama adımı olarak görmüş ve her örneği incelemenin tümevarıma ulaşacak bir işlem olduğunu belirtmiştir.

Aşağıda özelleştirmenin anlaşılmasına dair incelenen iki tane örnek verilmiştir:

Örnek 1: %15 vergi ödemeniz gereken bir ürüne, %20 iskonto yapılmıştır. Öncelikle hangisini hesaplamayı düşünürsünüz? Vergiyi mi, indirimi mi?

Bu tarz problemlerin çözümünde birincil olarak 100 ya da 120 gibi sayılar için denemeler yapılır, daha sonra ise hesap makinesi yardımıyla değişik değerler için hesaplamalar yapılabilir. Bu tarz bir başlangıcın hedefi doğru sonucun ne olduğu ile ilgili bir düşünceye sahip olmak ve sonucun neden doğru olabileceği hakkında bir fikir geliştirmektir. Böylelikle çözüm yolu anlamlı hale gelmiş olur ve problemin yanıtını bulmaya yardımcı olacak olan bütün özel durumlar incelenerek bunları oluşturan örüntüyü ortaya çıkarmak hedeflenir. Yani kişinin adım adım genellemeye geçmesini sağlayacak olan süreç başlamış olur. (Mason ve diğerleri, 1985).

Örnek 2: Ali'nin hayvan resimlerinden oluşan bir koleksiyonu bulunmaktadır. Koleksiyonu uğur böcekleri, solucanlar ve arıların resimlerini içerir. Koleksiyondaki solucan sayısı; arı ve uğur böceği sayılarının toplamından fazladır. Koleksiyonda toplam 10 kafa ve 18 bacak olduğuna göre Ali'nin kaç tane uğur böceği vardır? Cevabınızı ayrıntılı olarak gerekçelendirin. (Uğur böceğinin 6 bacağı ve arının 4 bacağı olduğunu varsayalım.)

Bu görevde, ilkokul öğrencilerinden önce bir resim koleksiyonundaki bacak sayısı ile kafa sayısı arasındaki ilişkiyi görmeleri istenir. Daha sonra bu orana göre toplam kafa ve bacak sayısından görüntü sayısını belirlemeleri gerekir. Buradaki amaç, yalnızca bir türdeki toplam görüntü sayısının ne olabileceğini bulmaktır. Ayrıca görevde gerçekleştirilen etkinliklerin matematiksel olarak nasıl ifade edilebileceğini ayrıntılı olarak açıklamaları istenmiştir (Kükey, 2018).

2.2.2. Genelleme: Matematik öğretiminde en önemli hedeflerden biri de genelleme yapmayı öğrenmektir (Olkun ve diğerleri, 2009). Tall (2002) genellemeyi, bazı örneklerden yola çıkarak daha kapsamlı olaylar kümesi hakkında tahminlerde bulunma şeklinde tanımlamıştır. Genelleme, girift bir yapıyı ortaya çıkarma veya belli bir problemdeki örüntüyü bulup bir düşüncede bir araya getirme işidir ve bunun yanında bir soyutlamadır (Baki, 2008). Kişilerin matematik problemleri çözerken matematiksel düşünmeye başvurması sonucu ortaya koydukları verileri ve bu veriler arasındaki ilişkileri birkaç örnekten yola çıkarak daha kapsamlı uygulanması amacıyla genel olarak ifade etmesidir. Başka bir deyişle genelleme, yapılan gözlemleri belirli durumlara genişletir ve genel bir kural getirir (Burton ve diğerleri, 1985).

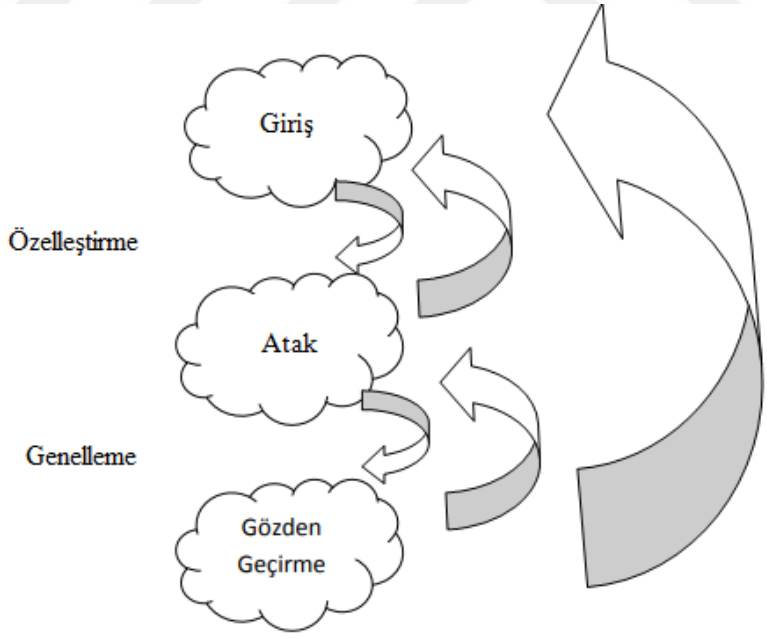
Yıldırım'a (2018) göre genelleme, gözleme dayalı olarak nesne veya nesneler arasındaki ilişki gözlendiğinde, ilişkinin içinde bulunduğu nesne veya varlık hakkında doğru olduğunu iddia eden bir değerlendirmedir. Öte yandan Carraher ve diğerleri (2008)

matematiksel genellemeyi bazı özelliklerin veya tekniklerin genişletilmiş bir dizi matematiksel kavram veya duruma uygulanması olarak ifade etmektedir.

Genelleme matematiğin gerekli kısımlarından biridir ve matematiksel düşünmenin merkezi olarak kabul edilebilir. Çünkü genelleme sırasında örüntü oluşturma, sınıflandırma, eşleştirme, sıralama ve karşılaştırma, benzerlik ve farklılıkları belirleme, iki değişken arasındaki ilişkiyi matematiksel veya sözel olarak ifade etme, olası tüm olasılıkları tanımlama gibi etkinlikler gerçekleştirilir (Köksal, 2019). Matematiksel genellemelerde elde edilen adımlara dayalı olarak ifadeden bir sonuç çıkarmaya çalışılır. Bu durum özelleştirmenin de genelleme sürecinde gerçekleştiğini göstermektedir (Arslan ve Yıldız, 2010). Başka bir deyişle, genelleme ve uyarlama her zaman karşılıklı süreçlerdir. Özel durumlarda genel durumları görmek ve genel durumlarda özel durumlar bulmak yinelemeli süreçlerdir. Diğer bir deyişle, özelleştirme sürecinde genellemenin zemini hazırlanır ve genelleme yapılırken özel durumlar dikkatle değerlendirilir. Mason ve diğerleri (2010) bu süreçleri ve aşamaları şu şekilde açıklamıştır:

Şekil 8

Giriş, atak ve gözden geçirme aşamaları



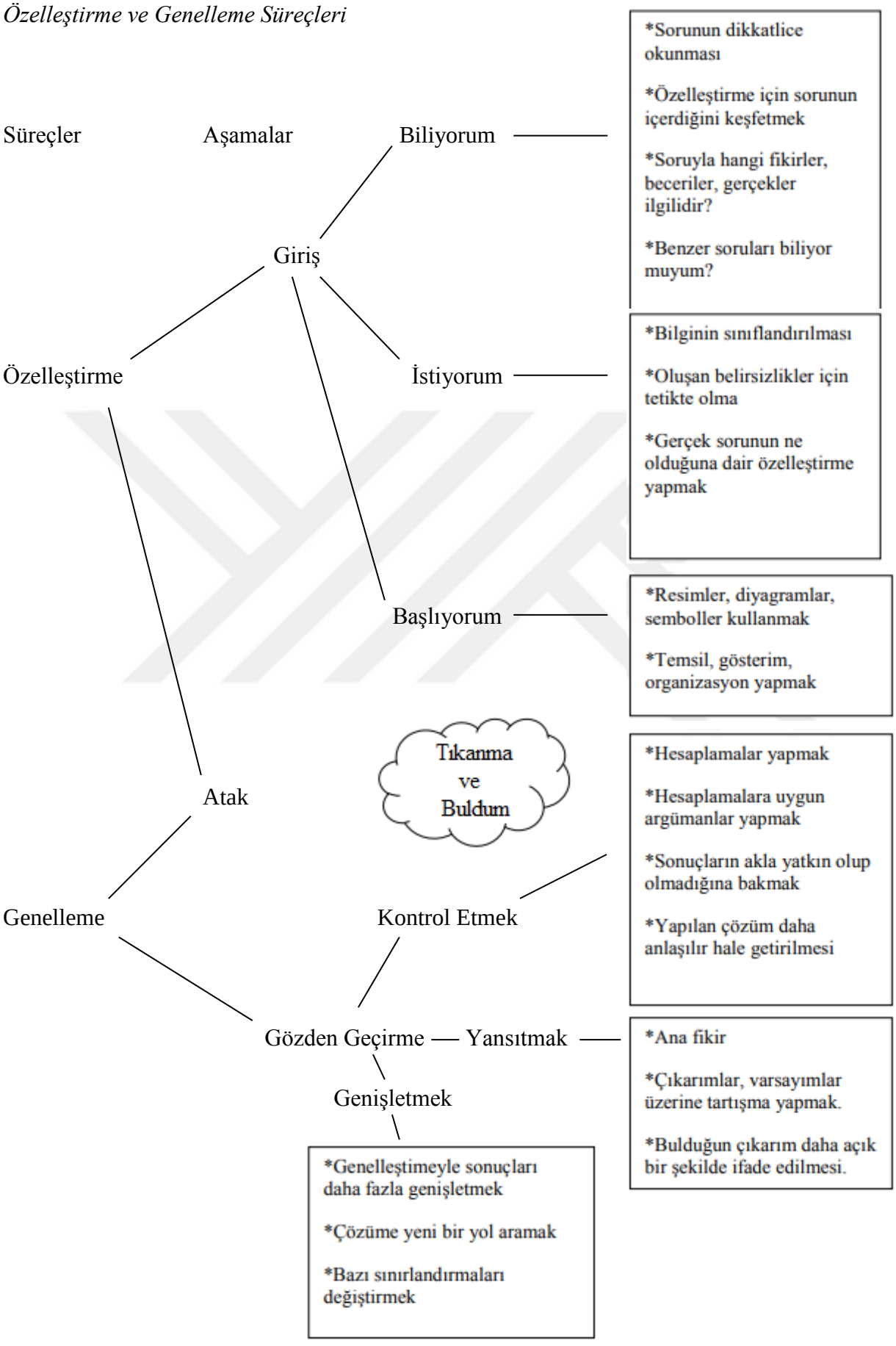
Özelleştirme ve genelleme gibi süreçlerin beraber gerçekleştiği üç aşamalı süreç giriş, atak (saldırı) ve gözden geçirme şeklinde verilmiştir. Giriş aşamasında özelleştirme süreciyle soru anlaşılır bir hal alır. Atak aşamasında soru çözme aşaması gerçekleşir. Engelleme (stuck) ve buldum (aha) gibi eylemler atak aşamasında gerçekleşebilir. Problem çözme süreci bazen atak evresinde takılıp kalır ya da başlangıç evresine dönebilir. Bu noktada, sorun giderme

sürecinden vazgeçmek yerine süreci tekrar gözden geçirmeniz önerilir. Çünkü problem çözülürken bir hata yapılmış olabilir. Daha sonra giriş ve saldırı aşamasına geri dönüldüğünde yeni bir durum görülebilir. Sonuç olarak, bulgularımız genelleştirilebilir. Böylece tüm süreç sıfırdan başlar.

Yukarıda verilen aşamalarda gerçekleşen tıkanma (stuck) kavramı kişilerde düşünmeyi geliştirir. Tıkanma olayı gerçekleştiğinde kişi kendine zaman verip problemin çözümü için gereken tüm alternatif yolları denemelidir. Ardından soruyu tekrar okumaya devam eder. Tıkanma sürecinde alternatif yolları denemek için harcanan zaman, harcanan iyi veya kaliteli zaman olarak sınıflandırılabilir. Ayrıca farklı yöntemler denemek sorunun hemen ortadan kalkacağı anlamına gelmemelidir. Bazen hatalar ve çözümler hakkında deneyimlerden çok şey öğrenirsiniz (Mason ve diğerleri, 2010).

Şekil 9

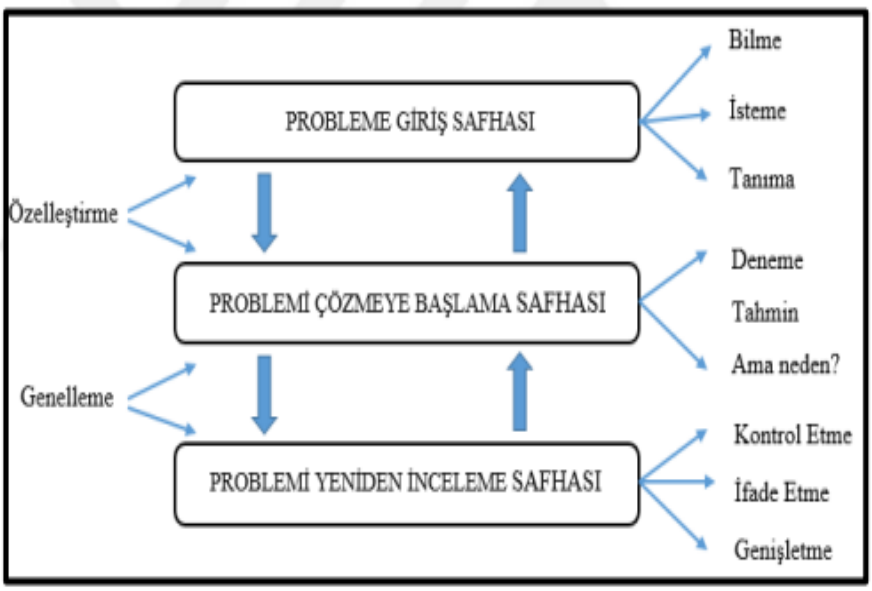
Özelleştirme ve Genelleme Süreçleri



Hacısalihoğlu ve diğerleri (2003) ise özelleştirme ve genelleme arasında yakın bir ilişki olduğunu söylemiş ve bu ilişkiye dair Şekil 10'da verilen kümeyi oluşturmuşlardır.

Şekil 10

Özelleştirme ve genelleme süreçleri arasındaki ilişki (Hacısalihoğlu ve diğerleri, 2003), Alıntılanmıştır.)



Lane'e (2011) göre genelleme süreci, bir önceki basamak olan özelleştirme esnasında incelenmiş olan örneklerdeki ilişkiyi ve örüntüleri algılamayı barındırır. Ayrıca genelleme yapabilmenin en etkili yollarından biri de genişleyen örüntülerle çalışmaktır (Bay-Williams ve diğerleri, 2010). Bunun sonucunda öğrencilerin sayı veya şekiller arasındaki örüntüleri fark etmesi ve bu örüntüler arasında ilişki kurmaları, onların matematiksel düşünmelerinin gelişimine katkı sağlayacaktır (NCTM, 1989).

Tanışlı'ya (2013) göre ise genelleme, matematiksel düşünce sürecinin temeli olmasına rağmen, örüntüler genellemenin temelidir. Bu nedenle genelleme kavramının geliştirilmesinde üzerinde durulması gereken en önemli kavram örüntüdür (Bağdat, 2013). Genelleme sırasında örüntü oluşturma, sınıflandırma, sıralama, eşleştirme, karşılaştırma, benzerlik ve farklılıkları ortaya koyma, iki değişken arasındaki ilişkiyi sözel veya matematiksel olarak ifade etme, ortaya çıkabilecek tüm olasılıkları açıklama gibi etkinlikler gerçekleştirilir (Arslan ve Yıldız, 2010).

Tall (1991) genelleme süreçlerini derinlemesine incelemiş ve genellemeye ait olan bileşenleri şu şekilde belirlemiştir:

1. Genişleyen (expansive),
2. Yeniden yapılandırıcı (reconstruction),

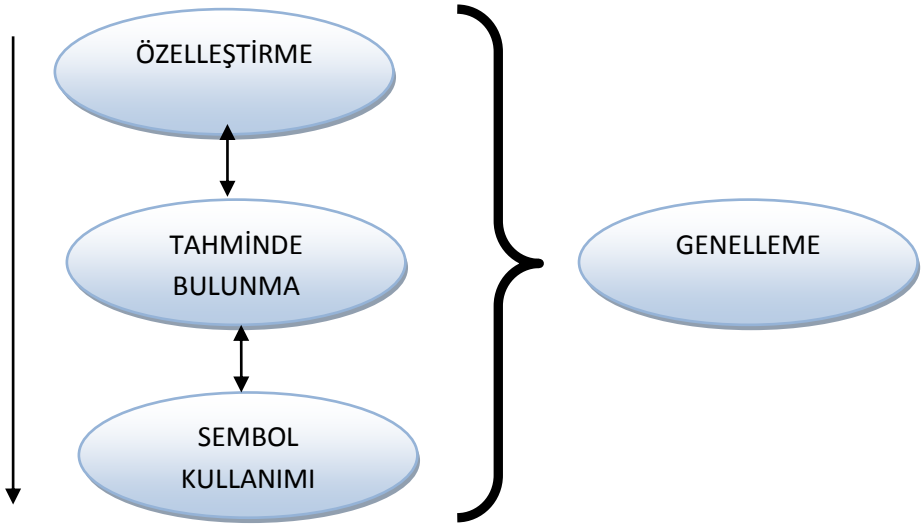
3. Ayrıştırıcı (disjunctive).

Genişleyen genelleme, bireylerin var olan zihinsel yapılarının, var olan düşünceleri değiştirmeye gerek kalmadan genişletilmesi anlamına gelir. Burada yeni bilgiler aynı alanda ve birbirine yakın olmalıdır. Yeniden yapılandırmacı genellemede var olan zihinsel yapıların yeniden düzenlenmesi gerekir. Bu genellemede kişi, var olan fikir ve bilgilerinde küçük değişiklikler yaparak ilgili kavramı genişletir. Önceki bilgileri mevcut bilgilerle bütünleştirmeye gerek kalmadan öğrenilen yeni bilgileri hatırlamayı içeren genelleme türüne analiz genellemesi denir.

Yerushalmy'ye (1993) göre genelleme aslında bir tür yargıdır ve tikelden bütüne doğru akıl yürütmeyle oluşur. Sözlü ya da sembolik bir değerlendirme yapmak genellemenin göstergesidir (Chua, 2013). Ancak, genelleme sürecinin doğruluğu kanıtlanmadıkça varsayım olarak kalır (Watson, 1980). Dolayısıyla genelleme, ulaşılan sonucun doğrulanmasıyla anlamını kazanır (Lannin, 2005). Burton ve diğerleri (2010) genellemeden sonra yargının doğrulanması ile sürecin sona erdiğini ve bu sürecin matematiksel düşünmenin temelini oluşturduğunu belirtmişlerdir. Hashemi ve diğerleri (2013) ise genelleme ve özelleştirme arasındaki ilişkiyi şu değerlendirmeyi de içerecek Şekil 11'deki gibi göstermiştir:

Şekil 11

Genelleme ve özelleştirme arasındaki ilişki (Hashemia ve diğerleri (2013), Alıntılanmıştır.)



Aşağıda genellemenin anlaşılmasına dair bir örnek verilmiştir:

Örnek: 10 kişinin bulunduğu bir yemek sonrası herkes birbirine kartvizitini veriyor. Buna göre bu yemek sonrasında kaç adet kartvizit el değiştirmiştir?

Bu sorunun çözümünde öğrenci öncelikle özelleştirme yaparak iki kişi olsa, üç kişi olsa… gibi durumları ele alır ve öğrenciden hangi kuralın verildiğini görmesi beklenir. Daha sonra matematiksel ifadeleri doğru kullanmaya ve daha genel ifadeler bulmaya çalışırız.

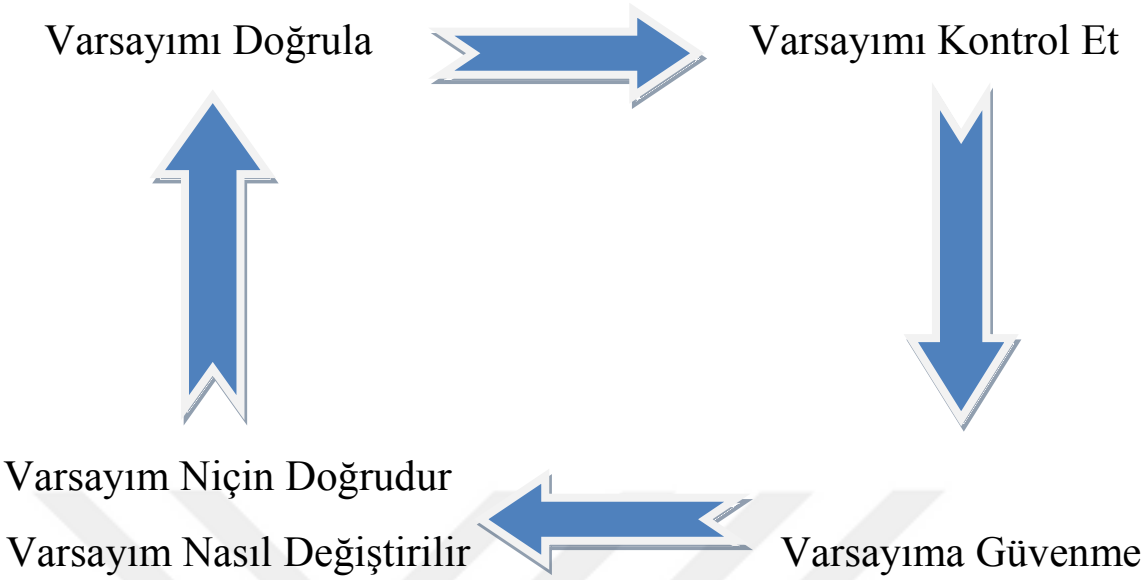
2.2.3. Varsayımda Bulunma (Tahmin): Varsayım kavramını, ispat edilememiş ancak sonunda ispatlanacağına inanılan teori olarak tanımlayabiliriz. Yani varsayım, çözüm yolu itibari ile mantıklı görünen ancak çözümü tamamlanmamış bir problemin ispatlanabileceğini öngören yargıdır (Karasar, 2016). Varsayımda bulunma kavramı, özelleştirme ve genelleme basamakları ile birlikte doğal olarak ortaya çıkar ve bir hipotezin doğru sonuçlanabileceğini varsayarak bu yönde araştırmalar yapmayı beraberinde getirir. Matematiksel düşünmenin bu basamağında; sözel olarak ya da cebirsel olarak tahminde bulunma, matematiksel hipotezleri formülle açıklama, tahminlerden belirli bir sonucu görebilme, hipotez oluşturma ve doğrulanmış bir hipotezi test etme gibi faaliyetler yer alır (Arslan ve Yıldız, 2010).

Varsayımlarda bulunma ve tahminde bulunma, hesaplama işlemini tamamlamadan yaklaşık bir sonuç isteme sürecidir. Dolayısıyla rastgele gelişen bir süreç değildir (Pesen, 2003). Burton'a (1984) göre, çok sayıda örneğe bakıldığında, örnekleri birbirine bağlayan bağlantılara ilişkin varsayımlar kendiliğinden ortaya çıkar. Varsayımda bulunma süreci ile işin temelinde yatan bir örüntü ortaya çıkarılır, açıklanır ve sonrasında doğru olduğu kanıtlanır. Mason ve diğerleri (2010) varsayımda bulunmayı karşılaşılan problemde zihni meşgul eden ve karmaşaya sokan şeyin ne olduğunu anlayabilecek bir sistem ya da düzen geliştirecek bir süreç şeklinde tanımlamıştır. Ancak düzenli örnekleme ve bir modelin ortaya çıkmasını beklemek, varsayımlarda bulunmak için yeterli değildir. Varsayımlara ulaşmada problemle yaşamak ve onu içselleştirmek gerekir.

Değerlendirme Şekil 12'de görüldüğü gibi devam eden dinamik bir süreçtir (Mason ve diğerleri, 1985).

Şekil 12

Varsayımda Bulunma Süreci



Şekil 12'de verilen süreç sürekli devam eden ve bir döngü içinde ilerleyen bir yapı olarak resmedilebilir. Bu süreçte bir tahmin ifade etmek ve ona inanmak gerekir. Sonrasında tahminin bilinen tüm durum ve örnekler için geçerli olup olmadığı kontrol edilir. Daha sonra ortaya konan tahminden şüphe duyulur. Hoşa gitmeyen bir durum ve örnekle tahmin çürütülmeye çalışılır. En sonunda yeni örnekler üzerinde tahminin neden doğru olduğu veya onun nasıl değiştirilebileceği ile ilgili yeni bir anlayış elde edilir. Bu döngü varsayım doğrulanıncaya kadar devam eder (Mason ve diğerleri, 2010). Aşağıda matematiksel düşünmenin varsayımda bulunma basamağı ile ilgili bir örnek verilmiştir.

Örnek: Bir bakkalda yeşil elma 2 liradan, kırmızı elma 3 liradan satılıyor. Bu bakkaldan elma alan Hüseyin Bey 23 lira ödedi. Hüseyin Bey'in kaç tane yeşil ve kırmızı elma aldığını tespit edin. Elma sayılarını nasıl bulduğunuzu açıklayın.

Bu görevde, öğrencilerden önce elma fiyatlarını ilişkilendirmeleri beklenir. Bu nedenle ürünlerin fiyatlarını kullanarak toplam fiyata nasıl ulaşabileceklerini belirlemeleri istenir. Bunu yapmak için amaç, hangi varsayımları tanımladıklarını ve bu varsayımları nasıl kullandıklarını incelemektir. Ancak görev sonucunda bu koşulları sağlayan tüm olasılıkları bulmaları ve bunları matematiksel olarak nasıl ifade ettiklerini ve açıklamalarını ayrıntılı olarak ifade etmeleri istenmiştir (Kükey, 2018).

2.2.4. Doğrulama ve İkna Etme (İspatlama): İspat, çoğu öğrenci için ilk duyulduğunda bile korkulan ve zorlanılan bir kavramdır (Dikici ve Güler, 2012). Öğrencilerin

bu kadar korktuğu ve zorlandığı bir kavram olmasına karşın ispat, matematik için son derece önemli bir yere sahiptir. İspat sayesinde öğrencilerin matematiksel kavramları daha iyi anlamaları ve sonuçlara inanmaları matematiksel düşünmeyi yükselttiği ve geliştirdiği için matematik eğitimi için mutlak bir ön koşuldur (Gökkurt ve Soylu, 2012).

Doğrulama ve ikna etme, varsayımın doğruluğunun nedenlerini araştırmayı ve bu nedenleri anlamayı hedefler (Mason ve diğerleri, 1985). Kanıtlama varsayımları, bir yargının veya sonucun doğruluğunun yeterli kanıt sunularak kabul edilmesi olarak ifade edilebilir (Yıldırım, 2014). Aslında bir ispat, bir matematik problemini çözmenin yanı sıra matematiğin doğasını anlamaya, matematiği kullanmaya ve problemde verilen nedeni öğrenmeye yardımcı olur (Hersh, 1993).

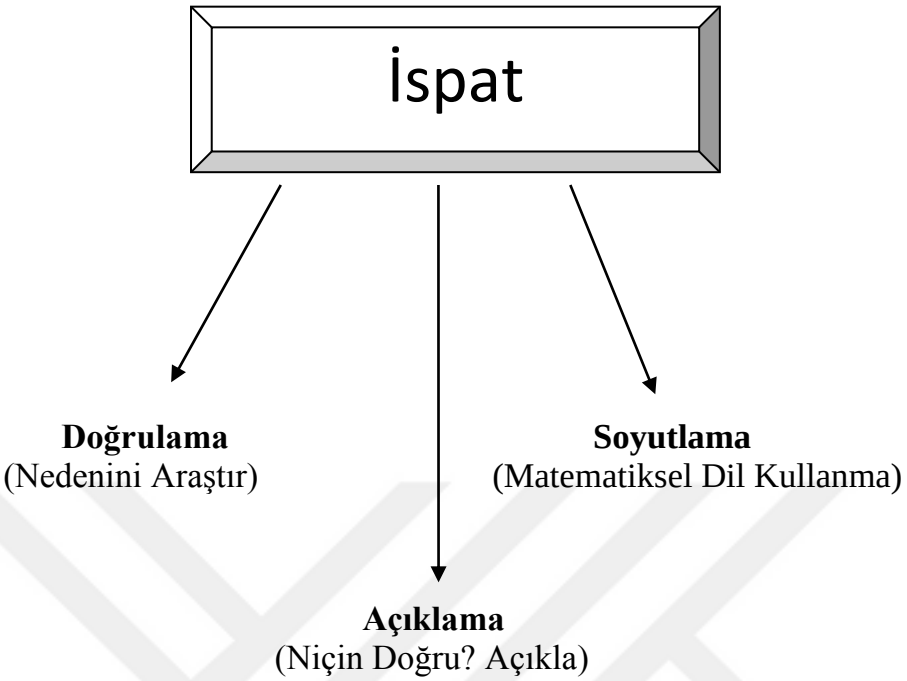
Aslında ispatı sadece matematikte değil günümüzde de sıkça kullanırız. Bizi sevdiğine inandığımız kişiye "beni seviyor musun?" dediğimizde, bilinen ispat metotlarını duyarız: Evet seviyorum, çünkü seni üzmeyecek davranışlar sergiliyorum (doğrudan) veya sevmiyor olsam seninle görüşür müydüm (dolaylı), varsayalım ki sevmiyorum o zaman sana şöyle davranmazdım (olmayana ergi). Adli vakalarda ise suçlunun suçsuzluğunu kanıtlamaya yönelik tartışmalar da birebir ispatlama girişimlerine örnektir (Yıldırım, 2018).

Matematiksel kavramların daha iyi anlaşılmasında ve sonuçların rasyonel zemine oturmasında ispatların rolü çok büyüktür. Bu rol matematiği diğer bilimlerden anlamlı derecede farklılaştırmaktadır. Aynı zamanda bireyde var olan matematiksel düşünce yapısını geliştirip olaylara matematiksel bakış açısıyla bakabilmeyi sağlar (Gökkurt ve Soylu, 2012; Hanna ve Jahnke, 1996).

Baki'ye (2014) göre ispat sürecini bitirebilmek için ortaya atılan iddianın tüm şartlarda genellenebilir olduğunu göstermek gerekir. İddia doğru mu? Bu süreç, sorunun cevabını bularak ve doğruysa sebebini söyleyebilerek devam eder; Üç aşamada sona erer: doğrulama, açıklama ve soyutlama. İlk aşamada önermenin doğruluğu araştırılır, ardından önermenin neden doğru olduğu açıklanır ve son olarak genelleme koşulları kontrol edilerek soyutlama yapılır; yani delil olarak sunulanlar matematiksel dil kullanılarak soyutlanır.

Şekil 13

İspatlama Süreci (Baki, (2014), Alıntılanmıştır.)



Matematiksel ispat çok önemlidir, çünkü matematikte sunulan teoriler doğrudan bir yöntemle ispatlanırsa sonsuza kadar doğru kalırlar (Artzt ve Sultan, 2011). Diğer bir deyişle kanıtlanmış matematik teoremleri hiçbir zaman hiçbir yerde değişmez. Matematik ile diğer dersler arasındaki temel farklardan biri de budur (Dikici ve Güler, 2012).

Tüm bu açıklamaların sonucunda matematiksel düşünmenin bileşenlerinin ardışık adımlardan oluşan bir süreç olduğu söylenebilir. Aslında kişi bir problemle karşılaştığında önce belirli durumları inceler, sonra genelleme yapar ve sonra bu iddialarını varsayım yoluyla kanıtlamaya çalışır. Bir sorunla karşılaşıldığında, bir kişi tüm adımları atlarken, başka bir kişi birkaç adımı atlayıp bir sonraki adıma geçebilir. Yani süreci yaşayan bireye ve problem durumuna göre süreç değişebilmektedir (Köksal, 2019).

2.3. Matematiksel Düşünmeyi Değerlendirme Kriterleri

Bu çalışmada matematiksel düşünmenin bileşenleri inceleneceğinden ötürü ilgili literatürün araştırılmasının ardından bu bileşenlerin değerlendirilmesi ve çözümlenmesi ile ilgili kriterler sırasıyla şu şekilde bulunmuştur (Göl, 2017):

2.3.1. Özelleştirme Basamağı Değerlendirme Kriteri: Konu ile alakalı alanyazına bakıldığında özelleştirme basamağı ile alakalı, Tablo 2'de sunulan farklı özelleştirme çeşitleri belirlenmiştir

Tablo 2
Özelleştirme Çeşitleri

Özelleştirme		
Yeterli Özelleştirme	Yetersiz Özelleştirme	
	Kısmi (Eksik) Özelleştirme	Hatalı Özelleştirme

2.3.1.1. Yeterli Özelleştirme: Soruda anlatılanı ve sorulanı öğrencinin anlayıp doğru olarak açıkladığı özelleştirme sınıflamasıdır. Burada kişi problemi, çizdikleri ya da ifadeleri ile araştırır, örnek vermeye çalışır ve problemde anlatılanlara yönelik bilinçli hareketler yapar.

2.3.1.2. Yetersiz Özelleştirme: Bu, öğrencinin problemde anlatılan ya da istenen durumları tam olarak anlamadığı ve/veya çözemediği bir uyarlama türüdür. Öğrencinin cevabına ilişkin çizimlerde, ifadelerde ve örneklerde eksiklikler veya hatalar tespit edilir. Kısmi ve yanlış özelleştirme olmak üzere iki farklı kategoriye ayrılır.

2.3.1.2.1. Kısmi (Eksik) Özelleştirme: Bu, öğrencinin soruyu tam olarak özelleştiremediği bir sınıflama türüdür. Öğrenci, soruda söylenenlerin bir kısmını dikkate alır, ancak hepsini değil. Soruda verilen talimatların tam bir çözüm olmadığı, unutulduğu veya ihmal edildiği, sadece küçük ama sonucu etkilediği durumlar vardır. Sorulan soru çoğunlukla anlaşılır olsa da, bir cevaba doğru ilerlerken eksik kalan kısımlar var.

2.3.1.2.2. Hatalı Özelleştirme: Bu, soruda sorulanın tam olarak anlaşılmadığı, soru ile ilgili ifadelerin özellikle vurgulanmadığı ve detaya girmeden akla ilk gelen şeymiş gibi özelleştirildiği bir durumdur. Bu tür özelleştirme sürecinde soruda söylenenler tam olarak çözülmemiş olup, devredilen kısımlarda soruda söylenenlere göre büyük sapmalar bulunmaktadır.

2.3.2. Tahmin Basamağı Değerlendirme Kriteri: Alanyazın incelendiğinde tahmin basamağı değerlendirme kriterine uygun olabilecek bir araştırmaya rastlanılmıştır. Bu araştırmaya göre beş adet tahmin çeşidi tanımlanmış ve bu tahmin türleri ile ilgili aşağıdaki açıklamalar yapılmıştır (Cañadas ve diğerleri, 2007).

2.3.2.1. ***Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım:*** Bu tahmin türlerinden ilki "sonlu sayıda ayrık durumlardan empirik tümevarım"dır. Bu tür bir tahmin, düzenli bir modelin meydana geldiği sınırlı sayıda ayrık durumun gözlemlenmesini ve eleştirel incelenmesini içerir. Genellikle sayısal problemler için kullanılır. Örneğin 1'den n'ye

kadar olan sayıların toplamını elde eden bir öğrencinin formülü (n.(n+1))/2 olarak ifade etmesi bu türden bir tahmine örnek olarak verilebilir. Bu tür bir tahmin gerçekleştirilirken şu aşamalardan geçilir:

- Kişi öncülleri gözlemler,
- Öncülleri bulur,
- Örüntüleri arar ve bunlara dayalı tahminler yapar,
- Tahmin formüle edilir,
- Tahmin onaylanır,
- Tahmin genelleştirilir,
- Sonunda tahmin doğrulanır.

2.3.2.2. ***Dinamik Durumlardan Empirik Tümevarım***: İkinci tahmin türü ise "dinamik durumlardan empirik tümevarım" dır. İlgili olayları açıklayan genel bir kuraldan oluşan bir tahmin türüdür. Bu tür tahminler, önceden tahmin edilen bir genel kuralla karakterize edilen birbiriyle ilişkili olayların görünüşte sonsuz bir alt kümesine dayanır. Örneğin bir üçgenin açıortaylarının birleşim noktasını bulmak isteyen bir öğrencinin üçgeni manipule ederek bu noktayı gözlemlemesi sonucu, bu noktanın hiçbir zaman üçgenin dışında olamayacağı gerçeğini tahmin etmesi bu türden bir tahmine örnektir.

Bu tahmin türündeki işlem sıralaması şöyledir:

- Durumların sürekliliği yoluyla bir durumun dinamik manipülasyonu,
- Bir durumun değişmeyen bir özelliğinin algılanması,
- Diğer durumlarda fonksiyonun mevcut olduğu bir tahmin tasarlama,
- Bir tahmini doğrulama,
- Bir tahmini genelleştirme,
- Bir tahmini doğrulama.

2.3.2.3. ***Analoji***: Üçüncü tahmin türü ise "Anoloji"dir. Anoloji, karşılık gelen bir durumu simüle ederek yani benzeterek yapılan bir tahmin türüdür. Bu tür bir tahmin, bilinen başka bir pratik kurala dayanan tahmin yapısını içermektedir. Örneğin, bir üçgenin köşelerinden çizilen ve üçgenin içinde belirlenen bir noktadan geçen üç farklı doğrunun herhangi ikisinin kenarları orta noktada kestiği bilindiğinde üçüncü doğrunun da karşısındaki kenarı orta noktada keseceği tahmin edilirse analoji türünden tahmin olur. Anoloji yaparken de izlenmesi gereken belli aşamalar bulunmaktadır. Bu aşamalar:

- İki durumu izleme ve bu esnada dikkatini yoğunlaştırma,
- İzlenen durumların benzer ve farklı yönlerine odaklanma,

- Benzerliği temele alarak tahmini bir formül oluşturma,
- Tahmini onaylama,
- Tahmini genelleme
- Tahmini doğrulamadır.

Analoji, genellikle farklı alanlardan ya da bağlamlardan gelen bilgilerin matematiksel bir problemi çözme sürecinde nasıl kullanılabileceğini gösterir. Özellikleri şu şekildedir:

Benzerlikler Kurma: Analoji, bir matematiksel problem veya kavram ile daha önce karşılaşılan veya bilinen bir durum arasında benzerlikler bulma sürecidir. Bu benzerlikler, problemin nasıl ele alınacağı veya çözüm yolunun nasıl oluşturulacağı konusunda ipuçları sağlar.

Bilgi Transferi: Farklı bağlamlardan veya disiplinlerden gelen bilgilerin matematiksel problemleri çözme sürecinde nasıl kullanılabileceğini gösterir. Örneğin, bir fizik probleminden elde edilen bir denklemin, matematiksel bir problemde nasıl uygulanabileceği gibi.

Yaratıcı Çözüm Yolları: Analoji, matematiksel düşünme sürecinde yaratıcı ve alternatif çözüm yolları bulma sürecini destekler. Bilinen bir problem veya durumdan yola çıkarak yeni bir bakış açısı getirilmesine yardımcı olabilir.

Derinlikli Anlama: Analoji kullanımı, matematiksel kavramların derinlemesine anlaşılmasına katkıda bulunabilir. Benzerlikler kurarak, kavramsal anlayışı güçlendirebilir ve soyut matematiksel kavramların somut örneklerle ilişkilendirilmesine yardımcı olabilir.

2.3.2.4. ***Abdüksiyon:*** Dördüncü tahmin türü "Abdüksiyon"dur. Abdüksiyon açıklanması zor olan bir olayı genel bir kural çerçevesinde açıklama/izah etme türünde bir tahmin olarak tanımlanmaktadır. Bu tahmin türü belirli bir durumu veya fenomeni açıklamak için doğru veya yanlış olabilecek bir dizi hipotez veya açıklama üretir. Bu hipotezler mevcut kanıtlarla desteklenmez, ancak kanıtları açıklamak için bir temel sağlar. Örneğin, daha önce aritmetik dizilerle ilgili kuralları öğrenen bir öğrenciye 3,7,13,21… şeklinde bir dizi gösterilip öğrenciden kural istendiğinde, her ne kadar yanlış da olsa dizinin kuralını $a_n=a_1+(n-1).d$ şeklinde tahmin etmesi abdüksiyona örnektir (Göl, 2017). Bu tahmin türü de diğer tahmin türleri gibi belli aşamalar izlenerek gerçekleştirilmektedir. Bu aşamalar:

- Bir durumun gözlenmesi
- Gözlemde ilgi çekici bir noktaya odaklanılması
- İlgi çekici bulunan özelliğin diğer durumlarda da geçerli olup olmadığının sınanması

- Tahmini bir formül oluşturulması
- Formülün onaylanması,
- Formülün genelleştirilmesi,
- Formülün doğrulanması.

Matematiksel düşünme bağlamında abduksiyon, bir matematiksel problemi çözerken mevcut verilerden yola çıkarak yeni bir hipotez veya çözüm stratejisi üretme sürecini ifade eder. Özellikle karmaşık veya daha önce çözülmemiş problemleri ele alırken, abduktif düşünme, çözüm yolunu bulma sürecinde önemli bir rol oynayabilir.

2.3.2.5. ***Algıya Dayalı Tahmin:*** Bu tahmin türü, problemin anlaşılmasındaki veya görsel sunumundaki değişikliğe dayalı bir yapıdadır. Bu tür tahminlerin temeli, sorunun içeriğinin somut veya zihinsel bir görüntü olarak dikkatli bir şekilde temsil edilmesidir. Örneğin, öğrenci sözel olarak verilen bir geometri problemini çizimler yoluyla görselleştirerek kuralla ilgili tahminde bulunduğunda, Algıya Dayalı Tahmin yapması beklenir (Canadas ve diğerleri, 2007). Bu tahmin gerçekleştirilirken:

- Sorunu algısal bir gösterime çevirme,
- Matematiksel bileşenlere ilişkin zihni temsiller yaratma,
- Bu temsillerin belli özelliklerini gözlemleme,
- Bu temsillerin özelliğine dayalı olarak tahmini bir formulasyon geliştirme,
- Formülasyonu onaylama,
- Formülasyonu genelleştirme ve
- Formülasyonu doğrulama işlemleri gerçekleştirilmektedir.

Verilen tahmin türlerinden bağımsız olarak öğrencilerin kullanmış oldukları farklı tahmin yöntemleri de bulunmaktadır. Bunlar:

- Sayısal ve sözel olarak ya da cebirsel olarak tahminde bulunma,
- Matematiksel hipotezleri formülle açıklama,
- Tahminlerden belirli bir sonucu görebilme,
- Hipotez oluşturma ve doğrulanmış bir hipotezi test etme gibi yöntemlerdir.

2.3.3. İspat Basamağı Değerlendirme Kriteri: Öğrenciler, ilk ve orta düzeyde kapsamlı ampirik bilgiler sunarak genellemeler yapmaya çalışırlar. Bu öğrenci açıklamalarının ispat olarak kabul edilip edilemeyeceği tartışmalı olsa da (Aylar, 2014), literatürde öğrenci açıklamalarını ispat olarak genellemeye yol açan sorgulanabilir çözümler olarak tanımlayan araştırmalar da bulunmaktadır. Balacheff (1988, 1991), Harel ve Sowder (1998) ve Miyazaki'nin (2000) çalışmaları en bilinen ve saygı duyulanlar arasındadır. Hem

Harel ve Sowder'ın (1998) çalışmalarının son yıllarda literatürde tartışılır hale gelmesi (Aylar, 2014) hem de Miyazaki'nin çalışmasında Balacheff (1988) ve Balacheff'in (1988) ispat çalışmasına da gönderme yapması sebebiyle mevcut araştırmada Balacheff'in (1988) kanıt kriterlerinden yararlanılmıştır.

Balacheff'in ispat taksonomisi (1988) öğrenciler tarafından kullanılan çoğu ispat yöntemini kapsayan ve ispatı hiyerarşik adımlarla açıklayan (Knapp ve Zandieh, 2004) en popüler ispat yöntemlerinden biridir (Maher ve Martino, 1996, aktaran Varghese, 2011). Bu taksonomi, cevaplarının doğruluğunu kanıtlamaları istenen öğrencilerden beklenebilecek farklı ispat türlerinin ayrıntılı bir şekilde anlaşılmasını sağlar (Varghese, 2011). Ancak Balacheff'in "ispat" ile kastettiği matematiksel bir kanıt değil, bir tahminin doğruluğunu ortaya koymayı amaçlayan bir ifadedir (Balacheff, 1991).

Balacheff (1988) ispat çeşitlerini temel olarak iki ana kategoriye ayırmıştır: gerçekçi (pragmatik) ve kavramsal. Örnek kullanımına dayalı gerçekçi ispatlar (Taştepe, 2012; Ören, 2007) işlem ve gösterimleri içerirken kavramsal ispatlar işlem içermez ve sorunun özellikleri ve aralarındaki ilişkilerin formülasyonuna göre yapılır (Balacheff, 1988).

Gerçekçi ve kavramsal kanıtlar arasında Balacheff (1988), hiyerarşik bir yapıya ve kanıtın bilişsel gelişiminde önceliğe sahip olan dört ana kanıt türü tanımlamıştır: saf deneycilik, kritik deney, genel örnek ve düşünce deneyi. Balacheff (1988), ilk iki ispat türünün aslında tam ispatları olmamasına rağmen, problem çözücülerin bunları ispat olarak sınıflandırdığı için bu iki ispat türünü adlandırdığını belirtmektedir. Bu tür kanıtlar aşağıda açıklanmıştır:

2.3.3.1. Saf Deneycilik (Naive Empiricism): Saf deneycilik, Balacheff'in taksonomisinin ilk adımıdır ve öğrencinin bir problemi çözerken bir durumu gözlemlemesi sonucunda bir yargıya varması anlamına gelir (Balacheff, 1991). Burada öğrenci sadece birkaç örneğe bakarak ifadenin doğru olduğu sonucuna varmakta (Varghese, 2011) ve birkaç örnekten hareketle genelleme yapmaktadır (Aylar, 2014).

2.3.3.2. Kritik Deney (The Crucial Experiment): Bir öğrenci belirli bir örneğe bakar ve o (istisnai) örnek için doğruysa ortaya çıkan ifadenin doğru olduğuna karar verir (Cabassut ve diğerleri, 2012). Diğer bir ifadeyle bu tür ispat sürecinde öğrenci bilinçli olarak seçtiği istisnai bir örnekten genelleme yapabilmektedir (Aylar, 2014; Simon ve Blume, 1996). Burada öğrencinin özenle seçilmiş istisnai bir örneği kullanması, eleştirel bir deneyin kanıtını saf ampirizmin kanıtından ayıran ana faktördür. Bu seçilen örnekte bir tahmin doğrulanırsa, diğer tüm durumlarda doğru kabul edilir (Varghese, 2011). Aradaki fark, öğrencinin genel bir

sorunu açıkça ifade etmesi ve çözümünü belirli bir durumun sonucuyla ilişkilendirmesidir (Balacheff, 1988).

2.3.3.3. Genel Örnek (The Generic Example): Sınıfın özelliklerini ve yapısını temsil eden bir örneklemin incelenmesiyle bir iddianın doğruluğunun gerekçelerinin elde edildiği bir kanıt türüdür (Balacheff, 1988). Balacheff'in taksonomisinin üçüncü aşamasını oluşturan bu tür kanıtlar, özelliklere dayalıdır. Odak o özel durum üzerinde olsa da kullanılan durum özel bir durum değil, sınıfın bir durumu gibi ele alınır. Genel bir örnek türünü ispatlama sürecinde öğrenci, bir sınıfın temsilcisi olarak bir örneği alır, o örnek üzerinde işlemler/dönüştürmeler yaparak bir ispata ulaşır ve ardından bu işlem veya dönüşümleri tüm sınıfa uygular (Varghese, 2011).

2.3.3.4. Düşünce Deneyi (The Thought Experiment): Bu tür ispat sürecinde, prosedürler dikkate alınır ve seçilen herhangi bir özel örnekten izole edilir (Balacheff, 1988). Öğrenci, etkinliklerden uzaklaşabilir ve yalnızca özelliklere ve bağlantılara dayalı olarak mantıksal sonuçlar çıkarabilir (Varghese, 2011). Kanıt, nesnelerle gerçekleştirilen eylemlerin sonuçlarıyla değil, görev bileşenlerinin özelliklerinin incelenmesiyle ifade edilir (Ören, 2007).

Genel örnek ve düşünce deneyi türündeki ispatlar, ulaşılan sonucun doğruluğuna odaklanır (Balacheff, 1988). Bununla birlikte, genel örnek türüne bağlı olarak, ispat süreci özelden genele doğru hareket etme eğilimindedir. Genel örnek ispatını, düşünce deneyi türü ispattan ayıran en temel ve önemli ayrım budur (Varghese, 2011).

İlk üç tür ispat, Balacheff'in taksonomisindeki gerçekçi kanıtın alt düzeylerini ifade etmekteyken, düşünce deneyi ise kavramsal kanıtın bir alt düzeyini işaret etmektedir. Bu durum öğrencilerin ancak bu aşamada gerçekçi kanıtlardan kavramsal kanıtlara geçebileceği şeklinde yorumlanabilir (Varghese, 2011).

Örneğin öğrenciye kaç köşeli olduğu bilinen bir çokgen verilip "bu çokgenin köşegen sayısını veren bir formül yazınız" şeklinde bir soru sorulduğunda kare ve dikdörtgen gibi rastgele birkaç çokgen üzerinden bir kural geliştirirse "Saf Deneycilik" türünden ispat yapmış olur (Varghese, 2011). Aynı mantıkla daha derinlemesine bir örnek bulur (örn. 20-gen) ve üzerinde test eder ve bu doğru ise diğerlerinde de doğrudur şeklinde düşünürse bu yöntem "Kritik Deney" türünden ispat ifade eder (Balacheff, 1987, aktaran Miyazaki, 2000, s. 30). Eğer kural beşgen gibi çokgenlerin tipik özelliklerini taşıyan özel bir örneğin incelenişiyle bulunur ve bu örnekten köşe sayısı ile köşegen sayısı arasında bir ilişki kurulup kuralın doğruluğu ispat edilmeye çalışılırsa bu defa "Genel Örnek" türünden ispat yapmış olur (Varghese, 2011).

***2.3.3.5. Bilinen Matematiksel İspat Yöntemleri*:** İspat metodlarının tasnifinde değişik yorumlar bulunmaktadır. Literatür incelendiğinde çoğunluğun kabul ettiği ispat yöntemleri; doğrudan ispat, aksine örnek vererek ispat, olmayana ergi (çelişki yoluyla) ispat, karşıt tersi ile ispat, tümevarım yoluyla ispat, şeklindedir (Gossett, 2003; Irmak, 2008; MEB, 2011; Rossi, 2006).

2.3.3.5.1. Doğrudan İspat: En çok bilinen ve en kolay ispat tekniklerinden biridir. Verilen önerme veya teoremin şartları aynen alınıp istenen sonuca ulaşılmaya çalışılır. Genel olarak; $p \Rightarrow q$ şeklinde ifade edilir. p hipotezinin doğruluğu kabul edilip, q hükmünün de doğruluğu gösterilir (MEB, 2017).

2.3.3.5.2. Aksine Örnekle (Ters Durum) İspat: Bu yöntemde verilen teorem veya önermenin doğruluğunu çürüten tek bir durum ortaya konulmasıyla ispat yapılmış olur. Bir önermenin veya teoremin hükmünü sağlamayan en az bir karşı örnek vererek hükmün yanlış olduğu gösterildiğinde mantık ve cebirsel işleme ihtiyaç duyulmadan ispat tamamlanmış olur (MEB, 2017).

2.3.3.5.3. Çelişki Yoluyla (Olmayana Ergi) İspat: Hükmün olumsuzundan hareket ederek varsayımın olumsuzuna ulaşılır ve bu durumda başlangıçta verilen teoremin doğruluğu ispatlanmış olur. $p \Rightarrow q$ önermesinin doğru olduğunu ispatlamak yerine $p \Rightarrow q$ önermesinin değili olan $(p \Rightarrow q)'$ önermesinin yanlış olduğu gösterilir (MEB, 2017).

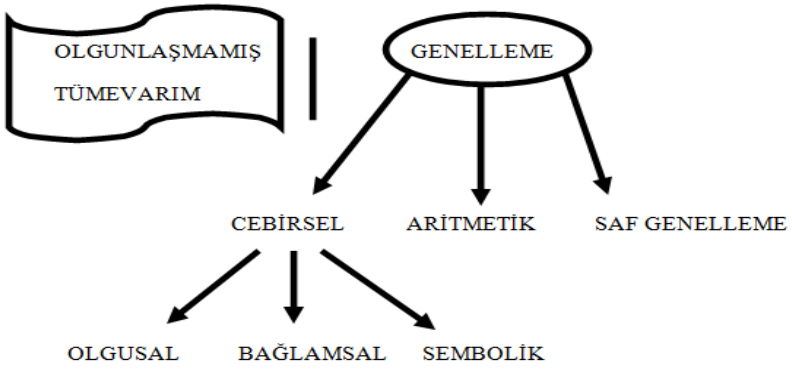
2.3.3.5.4. Karşıt Ters Yöntemiyle İspat: Bu yöntemde verilen önermenin karşıt tersi alınıp, oluşan yeni önermenin ispatı yapılarak başlangıçtaki önermenin ispatı yapılmış olur. Bu yöntemde $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ olduğundan $p \Rightarrow q$ ifadesinin yerine $q' \Rightarrow p'$ ifadesinin ispatı yapılır.

2.3.3.5.5. Tümevarım Yöntemiyle İspat: En sık kullanılan ispat yöntemlerinden biri olan bu yöntemde $n = 1$ için verilen önermenin doğruluğu gösterilir; $n = k$ için ifadenin doğru olduğu kabul edilir. Buradan hareketle de $n = k+1$ için doğruluğu gösterilerek ispatın süreci tamamlanmış olur (Yıldız, 2019).

2.3.4. Genelleme Basamağı Değerlendirme Kriteri: Radford ve Peirce (2006) Şekil 14'te öğrencilerin örüntü aktiviteleri gerçekleştirirken kullandıkları stratejileri sunmuş ve burada bulunan cebirsel genelleme türlerini genelleme boyutuna göre alt gruplara ayırmıştır.

Şekil 14

Genelleme Basamağı Değerlendirme Kriteri



Şekil 14'e dayanarak genelleme basamağının cebirsel ve aritmetik olarak ikiye ayrıldığı söylenebilir. Cebirsel genelleme ise kendi arasında üç alt bölüme ayrılmaktadır. Bu bölümler; olgusal, bağlamsal ve semboliktir.

2.3.4.1. Aritmetik Genelleme: Aritmetik genelleme sonucu elde edilen kural, doğru olan bir hipotezden çıkmaz ve süreç, belirsiz sayıları içeren hesaplamaları içermez (Radford, 2008). Bu tür genellemelerde, kavramların ortak bir ilişkisi genelleştirilir. Ancak bu işlev, formüldeki herhangi bir terimi değerlendiren bir ifade oluşturmak için kullanılamaz (Peirce ve Radford, 2006). Diğer bir deyişle cebirsel genelleme yoluyla herhangi bir terim elde etmek için kuralına ulaşılabilirken, aritmetik genelleme ile böyle bir kurala ulaşılamaz (Radford, 2008).

2.3.4.2. Cebirsel Genelleme: Cebirsel genelleme yukarıda bahsedildiği gibi üç başlıkta ele alınmaktadır. Bunlardan ilki olgusal genellemedir. Bu tür genelleme, genellemenin erken aşamalarda olduğunu belirtmek için olgusal genelleme olarak adlandırılır (Radford, 2010). Sayısal alanla sınırlı olan bu genelleme türü, bağlamsal ve sembolik genellemeden bu yönüyle ayrılır (Bardini ve diğerleri, 2005). Başka bir deyişle, bir olguyu genelleme süreci, sayılardan çok ifadeler arasındaki sayısal ilişkilere odaklanan bir genellemedir (Radford, 2002). Bu genellemeler sayısal eylemlerle ifade edilir (Radford, 2010) ve genellikle "sonraki" veya "her zaman" gibi ifadeleri içerir (Rivera, 2013).

İkinci olarak bağlamsal genellemeden söz edilebilir. Olgusal genellemeden farklı olarak, bağlamsal genelleme yalnızca sayısal işlemleri değil, aynı zamanda işlem nesnelerini de genelleştirir ve belirli biçimlerden ziyade formun kendisinden veya "sonraki" biçiminden bahseder. Bu yeni genelleme, işlemlerin ve somut biçimlerin soyutlanmasını içerir (Radford, 2003). Olgu genelleme sürecinde, somut işlemlerin yerini daha belirsiz işlemler alır (Radford, 2010). Diğer bir ifadeyle bağlam genellemesinde "biçim", "örnek izle", "daha fazla" gibi

ifadeler, bağlama büyük ölçüde bağımlı olan gerçek eylemlerin yerini almaktadır (Rivera, 2013).

Cebirsel genelleme türlerinin en sonunucusu sembolik genellemedir. Sembolik genelleme, öğrencilerin harflerin anlamı hakkında karar vermelerini gerektiren karmaşık bir süreci içerir (Radford ve Peirce, 2006). Bağlamsal genellemede, nesneler şekil ve konum tanımlarıyla adlandırılır (örneğin, "sonraki şekil", "üst sıra" vb.), Sembolik genellemede ise nesneler ve üzerlerinde gerçekleştirilen işlemler harf ve sayı (alfanümerik) cebirsel sisteminde ifade edilir. (Radford, 2010).

Genelleme türlerine örnek verecek olursak, kibrit çöpleri ie düzenlenip verilen örüntüde n. şekilde kullanılan kibrit çöpü sayısını veren formül soruluyor.



1.Şekil 2.Şekil 3.Şekil …… ……. n. Şekil

Eğer öğrenci;

- Şekil numarası ile şekil numarasının bir fazlasının toplamı olarak tahmin ettiğinde Olgusal Genelleme (örn. 2. şekil için 2+3),
- Şekil ve kendisinden sonra gelen şeklin numarasının toplamı şeklinde tahminde bulunduğunda Bağlamsal Genelleme (burada sayılardan çok şekil ve sonraki şekil türünden kavramlar kullanılmaya başlar, örn. 3. şekil için; 3. şeklin numarası olan 3 + bir sonraki şeklin numarası olan 4),
- n + (n+1) olarak tahminde bulunduğunda Sembolik Genelleme (ifade artık tamamen sembolik yapıya dönüşür),
- "Her defasında kibrit çöpü sayısı iki artar" şeklinde ifade ettiğinde ise Aritmetik Genelleme (örn. 2. şekil için 1. şeklin kibrit sayısı + 2, 3. şekil için 2. şeklin kibrit sayısı+2 vb.) yapmış olur (Radford, 2001, aktaran Göl, 2017).

***2.3.4.3. Olgunlaşmamış Tümevarım (Naive Induction)*:** Radford ve Pierce'a (2006) göre öğrenciler örüntü işlemede aritmetik genelleme ve cebirsel genellemeye ek olarak bir genelleme türü olmayan olgunlaşmamış tümevarım adı verilen üçüncü bir stratejiyi de işe koşarlar. Olgunlaşmamış bir tümevarım sürecinde, örüntü bileşenlerinin ortak bir özelliğini bulma ve örüntüyü genelleme gibi adımlar gerçekleşmez. Bunun yerine, örüntünün

bileşenlerine dayalı olarak düzenli tahminler yapılır, yapısı oldukça sadedir ve kolay uygulanabilir bir niteliktedir (Radford, 2008).

Matematiksel düşünme süreçlerinde olgunlaşmamış tümevarım, matematiksel problemleri çözerken veya genelleme yaparken yapılan mantıksal hatalarını da ifade eder. Bu tür tümevarım, sınırlı veya eksik verilere dayanarak yapılan genellemeler veya çıkarımlardır ve genellikle doğru sonuca ulaşmada yanıltıcı olabilir. Matematikte olgunlaşmamış tümevarım genellikle şu şekillerde karşımıza çıkabilir:

- Sınırlı Örneklerden Genelleme: Birkaç örneğe dayanarak genel bir kural veya formül çıkarma eğilimi. Örneğin, birkaç tam sayı üzerinde yapılan işlemler sonucunda bir genel kural oluşturulmaya çalışılması.
- Tek Bir Durumdan Genelleme: Bir örneğe dayanarak tüm benzer durumlar için geçerli olduğunu varsayma. Örneğin, bir matematiksel teoremin sadece bir örneği doğrulandı diye tüm durumlar için geçerli olduğunu düşünmek.
- Yanıltıcı Örüntülerden Çıkarımlar: Matematiksel bir problemde görülen bir örüntüye dayanarak genel bir kural veya sonuç çıkarma. Örneğin, ardışık sayılarda gözlenen bir örüntüyü genelleme olarak kabul etme.

Matematiksel düşünme sürecinde olgunlaşmamış tümevarım, genellikle daha derinlemesine analiz ve mantıksal düşünme gerektiren durumlarda ortaya çıkar. Bu tür hatalar, genellikle daha fazla örnek incelenmeden veya genel bir perspektiften bakılmadan yapılan çabuk çıkarımlar sonucunda ortaya çıkar.

2.3.4.4. Saf Genellemeler: Yukarıda verilen genelleme çeşitleri örüntü içeren problemler için tasnif edilmiştir. Bu araştırmada kullanılan soruların bazıları örüntü içermediği için yapılan genellemeler literatürde verilen tanımlar üzerinden ölçülmüştür. Arslan ve Yıldız'a (2010) göre genelleme sırasında;

- sınıflandırma,
- sıralama,
- eşleştirme,
- karşılaştırma,
- benzerlik ve farklılıkları ortaya koyma,
- iki değişken arasındaki ilişkiyi sözel veya matematiksel olarak ifade etme,
- ortaya çıkabilecek tüm olasılıkları açıklama

gibi etkinlikler de gerçekleştirilir.

2.4. Matematik Okuryazarlığı

Kendi kültürümüzde okuryazar olmak daha çok yazılı olan bir metnin okunması ve konuşulanı yazıya dökme olarak anlaşılmaktadır ve kapsam olarak bakıldığında sığ kalmaktadır. Bu kavramı (mathematical literacy) İngilizce olarak ele alırsak, içinde yorumlama, uygulama yani muhakeme etme basamaklarının varlığını görürüz. Buradan hareketle matematik okuryazarlığı; duyduğunu idrak etme ve yorumlama, yazılı metinleri anlayıp yorumlama, tüm bunları muhakeme edip sözlü ve yazılı olarak anlatabilme olarak ifade edilebilir (Niss, 2003).

Matematik okuryazarlığı; matematiksel bilgi ve becerileri kullanma becerisini ifade eder. Bu ifade, gündelik hayatta karşılaşılan ve matematiği de ilgilendiren bir zorluğu anlayabilme, bu zorluğun üstesinden gelebilmek için matematiğin mutlaka kullanılması gerektiğini sezme ve bu matematik bilgisini kullanabilme anlamında kullanılmıştır (Altun ve diğerleri, 2022).

OECD, matematik okuryazarlığını PISA (Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı) bağlamında şu şekilde tanımlamaktadır: *Matematik okuryazarlığı, bireyin matematiği farklı boyutlar ve içerik için formüle etme, kullanma ve yorumlama yeteneğidir. Matematik okuryazarlığı, matematiksel akıl yürütmeyi ve matematiksel kavramların, süreç adımlarının, doğrulanmış bilgilerin ve olayları tanımlamak, açıklamak ve tahmin etmek için kullanılan araçları içerir. Matematik okuryazarlığı, insanların matematiğin dünyadaki rolünü anlamalarına ve yapıcı, duyarlı ve düşünceli vatandaşlar olmaları için gereken bilgiye dayalı yargılarda bulunmalarına ve kararlar almalarına yardımcı olur* (OECD, 2016).

Günümüzde matematik okuryazarlığının OECD PISA testlerinden doğduğuna inanılmaktadır. Ancak OECD'den önce 19. yüzyılın ikinci yarısında matematik eğitiminin amacı olarak tanımlanan bu terim, küresel ölçekte bilgi toplumuna geçişten kaynaklanmaktadır (Yılmaz ve Ata, 2013). Matematik okuryazarlığı OECD'de popüler hale gelmeden önce, Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (NCTM) (1989) bunu matematik eğitiminin hedeflerinden biri olarak onaylamıştır (Sari ve Wijaya, 2017). Böylece matematik okuryazarlığı için; yani bu problemleri çözmek için dört anlam verilmiştir: araştırma, tahmin etme, akıl yürütme ve farklı matematiksel yöntemleri etkin bir şekilde kullanma becerisi.

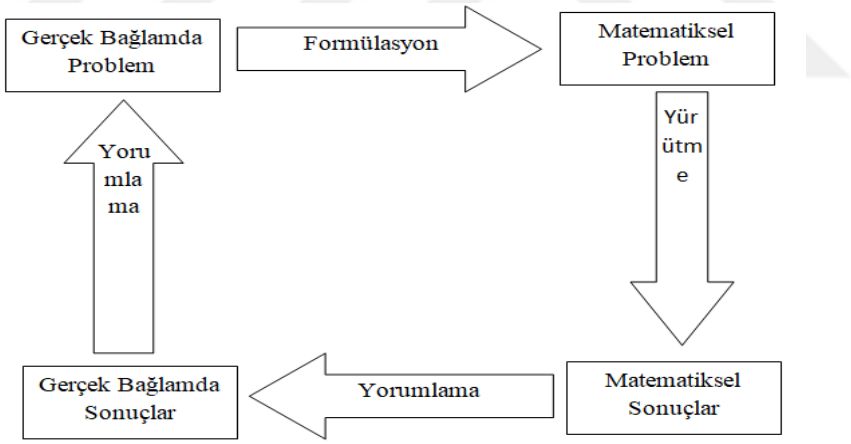
NCTM'den bu yana farklı araştırmacılar farklı matematik okuryazarlığı tanımları önermişlerdir. Bazıları günlük yaşamdaki sorunların ve zorlukların üstesinden gelmek için matematiğin aktif kullanımını teşvik ederken (Sari ve Wijaya, 2017; Wijayanti ve Waluya, 2018), diğerleri ise matematiksel yeterlilik ve yeteneğe odaklanır (Colwell ve Enderson, 2016; Venkat ve diğerleri, 2009). Colwell ve Enderson (2016) matematik okuryazarlığının

mevcut bilgiden yeni bilgi üretme ve akıl yürütme gibi ileri düzeyde bilişsel beceriler gerektirdiğini ileri sürmüştür. Venkat ve diğerleri (2009) soru sorma, olaylar arasında ilişki kurma, yeni bir argüman oluşturma ve sonuç çıkarma gibi bilişsel becerileri gerektirdiğini savunmuştur (Şahin, 2021).

Matematik okuryazarlığı, bireylerin yaşamına etki eden ve gündelik hayatta duyulan gereksinimlerden ötürü, çoğu devletin eğitim sistemine girmiş ve bu eğitim sistemlerinin ana amaçlarından biri haline gelmiştir (Bekdemir ve Duran, 2012). Aynı zamanda bu kavram, bireyin rutin yaşamında olması gereken ve matematiğin hayatla ilgili pratikleriyle bireyin yaşamına yön verilmesi olarak da tanımlanmıştır. (Bansilal ve diğerleri, 2012; Korkmaz, 2016). Matematik okuryazarlığı çerçevesinde amaçlanan hedef, matematik yapabilme seviyesini artırmak değil, var olan matematik bilgisiyle daha fazla pratik yapabilmesi, matematiği günlük yaşam rutinlerine dâhil edebilmesi ve matematiği muhakeme becerilerini geliştirmek için kullanabilmesidir (Bansilal ve diğerleri, 2012). Şekil 15'te bahsedilen bu sürecinin modeli verilmiştir.

Şekil 15

Matematik Okuryazarlığı Modeli (MEB, (2019), Alıntılannmıştır.)



Matematiksel olarak okuryazarlık, matematiksel sembollerin, sayıların, grafiklerin vb. öğrenilmesidir. Yazma yoluyla okuma, analiz etme ve bilgi oluşturmayı gerektirir (Colwell ve Enderson, 2016; Draper ve Siebert, 2012). Aynı zamanda klasik matematiksel metinleri analiz edebilme ve matematiksel dili kullanabilme, bu metinleri günlük yaşamda uygulayabilme becerisi de önemli göstergelerdir (Johnson ve diğerleri, 2011). Ancak bu beceriler tek başına bir kişiye matematik okuryazarı demek için yeterli değildir. Basit matematiksel bilgi ile bilmemiz gereken matematiğin farklı kavramlar olduğunu not etmek önemlidir. Neden böyle

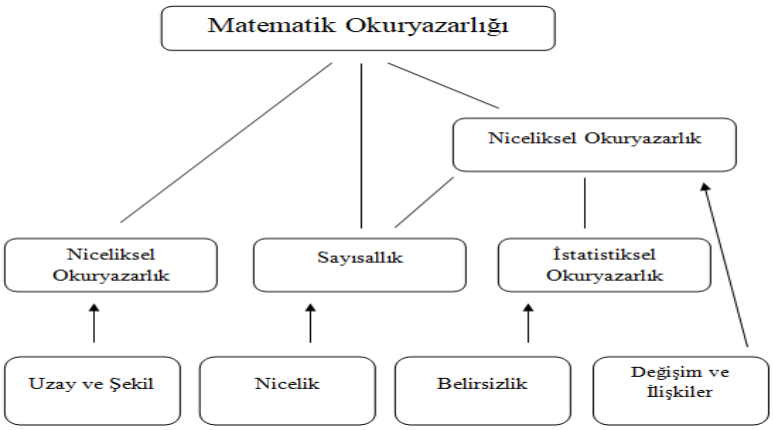
bir ayrım yapılıyor? Öğrencilerin okulda gördükleri matematikte ve yetişkinlerin bu matematiği günlük hayatta yeterince uygulayamamalarında gizlidir (Ojose, 2011).

Literatür incelendiğinde matematik okuryazarlığı kavramının farklı kavramlarla birlikte anıldığı görülmektedir. Bunlar aritmetik, nicel okuryazarlık, istatistiksel okuryazarlık ve uzamsal okuryazarlık gibi kavramları içerir (Jablonka ve Niss 2014; Niss ve diğerleri, 2017). Birleşik Krallıktaki birçok ülke sayısallık terimini kullanırken, ABD nicel okuryazarlık ve matematik okuryazarlığı terimlerini kullanır.

Yukarıda bahsedilen kavramlardan biri olan istatistik okuryazarlığı, hayatta karşılaştığımız istatistiksel durumlar hakkında akıl yürütmeyi içeren bir alandır (Geiger ve diğerleri, 2015). Bazı araştırmacılar hesaplama, nicel okuryazarlık ve matematik okuryazarlığı terimlerini aynı anlama gelirken, bazıları ise bu kavramların kapsam ve hedeflerinin farklı olduğunu belirterek bu terimleri birbirinden ayırmaktadır (Jablonka ve Niss 2014). Yorumlamalarda farklılıklar olsa da bu kavramların ortak noktası matematiksel süreçleri vurgulamalarıdır (Niss ve Jablonka, 2014; Niss ve diğerleri, 2017). Bu kavramlar arasındaki ilişki Şekil 16'da gösterilmiştir. İlk kaynağı De Lange (2003) olan görsel, Kozaklı Ülger (2021) ve Şahin (2021) tarafından revize edilmiştir.

Şekil 16

Matematik Okuryazarlığının Diğer Kavramlarla İlişkisi (K. Ülger (2021), Alıtılanmıştır.)



Şekilde matematik okuryazarlığı ve beraber kullanılan kavramlar arasındaki ilişkiler gösterilmiştir. İngiltere, Kanada, Güney Afrika, Avustralya ve Yeni Zelanda gibi ülkelerde sayısallık teriminin kullanımı yaygın iken, niceliksel okuryazarlık veya matematik okuryazarlığı gibi diğer adlandırmalar ABD'de ve başka ülkelerde kullanılmaktadır. Ek olarak, istatistiksel okuryazarlık gibi alana özgü diğer ifadeler matematiğin, yaşamın matematiksel açıdan zorlayıcı/emek isteyen yönlerini ele almak için spesifik bir alan içindeki

kullanımlarını göstermektedir (Aktaran Kozaklı Ülger, 2021, Geiger ve diğerleri, 2015). Literatürde değişik adlandırmalar olsa da PISA, matematik okuryazarlığı kavramının kullanımını öne çıkarmıştır. Aynı zamanda bu kavramın popülerliği arttıkça matematiksel bilginin günlük hayatta kullanımını ölçen PISA da küresel ölçekte göz önüne çıkmıştır.

2.4.1. Matematik Okuryazarlığının Dayandığı Temel Kavramlar: Matematik okuryazarlığının ne olduğunu anlamak için matematik yeterliklerini, problem çözmede süreç analizini ve okuryazarlık alanlarını bilmek gerekir (Altun ve diğerleri, 2022). Yakın geçmişte matematikle ilgili bazı kavram ve kuralların ezberlenmesi ve gerektiğinde kullanılması anlayışı oluşmuştur. Bu fikir, matematiksel bilgilerin yorumlanması ve problemlerin çözülmesiyle (Altun, 2018) doğan yeni bilgi ve becerilerle birlikte, bilginin yanı sıra matematik eğitiminde bilinen işlev ve fiilleri de öne çıkarmıştır.

Matematikçi olmak matematiksel kavramları ezberlemekten çok matematiksel düşünmeyi öğrenmeyi ve öğretmeyi gerektirir. Bu gereklilik karşılandığında, bilgi aramak kolaydır (Papert, 1972). Bu düşünme biçimi, bilgiden çok yetkinliği yükseltir. Araştırmalar ayrıca temel matematiksel yeterliklerin ne olduğunu ve bu becerilerin öğrencilerin öğretim sürecinde geliştirilmesi gerektiğini vurgulamaktadır.

Yeterliklerin değişik kaynaklarda farklı tasnifleri vardır. Yürütülen bazı çalışmaların ele aldığı yeterlikler Tablo 3'te sunulmuştur.

Tablo 3

Matematiksel Yeterlikler

Çalışmaların Ele Aldığı Yeterlik Türleri						
NCTM (2000)	**MCRF ÇERÇEVESİ (2010)**	**KOM PROJESİ (2011)**	**Albaladejo, García ve Codina (2015)**	**PISA Çerçevesi (2016)**	**Bothma, Engelbrech ve Harding, (2016)**	**Liakos, Rogovchenk, Rogovchenko (2018)**
		Matematiksel düşünme	Düşünme ve Muhakeme Etme		Matematiksel düşünme	Matematiksel düşünme
		Modelleme	Modelleme	Matematikleştirme	Matematiksel modelleme	Matematiksel modelleme
Problem çözme olarak matematik	Problem çözme	Problem çözme stratejisi tasarlama	Problem kurma ve çözme	Problem çözme stratejisi tasarlama	Problem kurma ve çözme	

Temsil etme	Temsil etme	Temsil etme	Temsil etme	Temsil etme	Matematiksel varlıkları temsil etme	Temsil etme
İletişim olarak matematik	İletişim	İletişim	İletişim	İletişim	Matematikte, matematikle ve matematik hakkında iletişim	
		Sembolik, teknik dil ve işlemleri kullanma	Sembolik, teknik dil ve işlemleri kullanma	Sembolik, teknik dil ve işlemleri kullanma	Matematiksel sembolleri ve işlemleri kullanma	
Matematiksel bağlantılar	Bağlantı yeterliği	Yardım ve araçlar	Yardım ve araçların kullanımı	Matematiksel araçları kullanma	Yardım ve araçları kullanma	Yardım ve araçlar
	Prosedürel yeterlik				Prosedürel akıcılık Üretken eğilim	

Tablo 3'te verilen yeterliklerden her birinin kendine özgü bir kimliği mevcuttur ve birbirlerinden farklı tanımlara sahiptir (Niss, 2015). Bununla birlikte bu yeterliklerin birbirleri ile ilişkili olduklarını, zaman zaman aynı noktaya geldiklerini ve aslında birbirlerinden bağımsız olarak konumlandırılamayacaklarını düşünmek gerekir (Jankvist ve Kjeldsen, 2011). Daha detaylı söyleyecek olursak, yeterliklerden biri fonksiyonel olduğu zaman, diğer yeterliklerin bazıları ya da hepsi konuma ve duruma göre ikincil rollerde devreye girebilir (Hojgaard ve Niss, 2019).

Literatürde bahsedilen yeterlikler ortak başlık altına alınırsa aşağıdaki gibi tasnif edilebilir (Kozaklı Ülger, 2021).

- Matematiksel düşünme
- Modelleme (Matematikleştirme)
- Problem kurma ve çözme
- Düşünme ve muhakeme etme
- Temsil etme
- İletişim
- Sembolik, teknik dil ve işlemleri kullanma

- ❖ Matematiksel araçları kullanma NCTM (2000), Albaladejo ve diğerleri, (2015), Bothma ve diğerleri, (2016), Liakos ve diğerleri, (2018), Altun ve diğerleri, (2022).

Verilen tasnifte yer alan matematiksel düşünme basamağı ayrıntılı olarak incelendiği için bu kısımda yer verilmeyecektir.

2.4.1.1. Matematiksel Modelleme (Matematikleştirme): "Matematiksel modelleme" ifadesi literatürde matematikleştirme, formülleştirme kavramları ile karşımıza çıkar ve matematiğin çok önemli kavramlarından biridir. Model, bir durumun fiziksel ya da sembolik temsili demektir. Ev ya da otomobil modeli fiziksel modele örnek gösterilebilir. Matematiksel model ise bu fiziksel modellerden ayrışır ve zihinsel bir kavram olarak karşımıza çıkar (Altun, 2018). Literatürde matematiksel modelleme tanımları içinde olmazsa olmaz kavramın "soyutlama" olduğunu görürüz. Bu kavramı da içine katarak en yalın haliyle matematiksel modelleme, günlük yaşamdaki yapıların görülmesi ve matematik diline transfer edilme süreci olarak tanımlanabilir (Erbaş ve diğerleri, 2014).

OECD (2003) modellemeyi "insanların matematiksel bilgi ve meziyetlerini kullanabilecekleri koşulları belirledikten sonra içerikte matematiksel bir yapı oluşturma yeteneği" olarak tanımlamaktadır. Modelleme yeterliliği, mevcut matematiksel modelleri ve bu modelleri gerçek yaşam durumlarına entegre etme ve yorumlama becerisini içerir (Højgaard ve Niss, 2019).

Matematiksel modelleme döngüsü, var olan bir sorunu temel bir durumdan matematiksel bir kümeye aktarma, o sorunu matematiksel yöntemlerle çözme ve ardından sonucu gerçek duruma göre değerlendirme süreçlerini içerir (Baumert, 2002; Lesh ve Doerr, 2003). Matematiksel modelleme döngüsünde öğrenciler mevcut yapıları tartışır ve değerlendirir, yapılar arasındaki bağlantıları ve benzerlikleri arar, durumları yorumlar, gerekçelendirir ve açıklar (Doerr ve Lesh, 2003). Aksi takdirde, matematiksel bir model yazmak nitelemek için yeterli değildir. Modellenen yapıyı bilmek, modelde değişiklik yapmak ve modeli tartışmak da yetkinliğin geliştirilmesinde etkilidir (Altun, 2020).

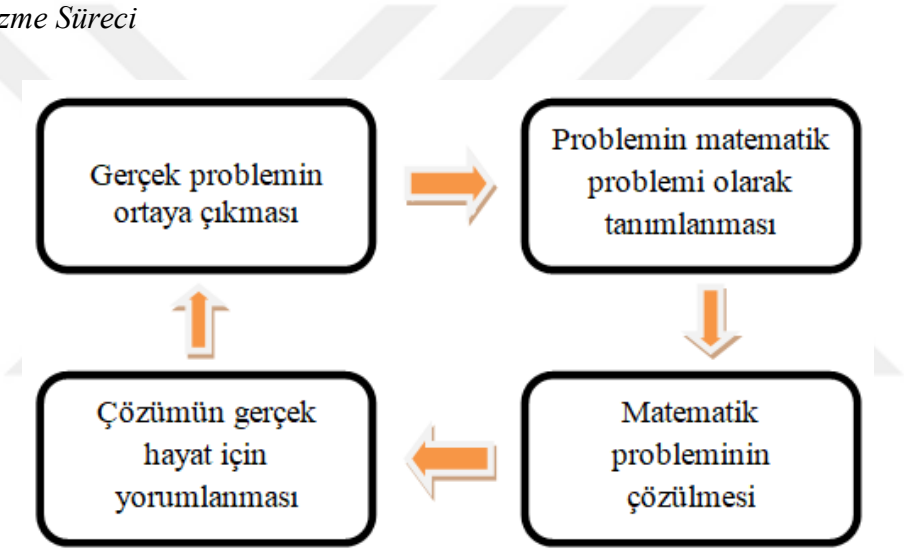
Modelleme yeterliğinin gelişmesi, bizzat modelin yazılması ile bitmeyip modellenecek yapıyı fark etme, modelde değişiklik yapma ve modeli tartışma gibi değişikliklere bağlıdır.

2.4.1.2. Problem Kurma ve Çözme: Literatürdeki çalışmalar incelendiğinde genel olarak problem, bireye açık, belirgin sorular ileten, bireylerin ilgisini çeken ve sahip oldukları donanım ve mantıksal akıl yürütme becerileri ile çözebilecekleri durumlar olarak tanımlanır (Bloom ve Niss, 1991). Alanyazında ifade edilen pek çok tanımlamanın da benzer

yapıları barındırdığı söylenebilir. Bu tanımlar problemin kişiye özgü olabileceğini yani problem olan durumların gerçekte problem olma realitesinin ve zorluğunun kişiden kişiye değişebileceğini göstermektedir. Problem çözme ise yukarıda bahsedilen tanımda ifade edilen süreçlerin tamamını kapsayan bir anlam içermektedir. Daha farklı bir ifadeyle problemin çözümü adına gerçekleştirilen tüm iş ve eylemler problem çözüm sürecini ifade eder. Genel olarak bu süreç, problemin doğması yani bireyler için görünür, hissedilir bir hal alması, ortaya çıkan problemin matematiksel ifadesi ve bir matematik problemine dönüşmesi, bu problemin çözüm süreci ve son olarak çözümün gerçek yaşama yansımalarının olduğu bir dizi sıralı işlem olarak görülebilir. Şekil dikkatli bir şekilde incelendiğinde problemin matematik dünyası ve gerçek dünya olmak üzere iki alt boyutunun olduğu görülecektir.

Şekil 17

Problem Çözme Süreci



Problemler genelde bireylerin yaşantılarını sürdürdüğü olağan durumlar içerisinde ortaya çıkar ve bu problem matematiksel dile çevrilerek matematik problemi haline gelir. Sonrasında ise çözüm yolları değerlendirilir ve bir sonuca varılır. Ancak bu süreç, izlenen yol ve yapılan eylemler çözüme kesin bir şekilde ulaşılacağını garanti etmez. Problem çözmek, içerisinde kural ya da kuralları içermez. Bununla birlikte problem çözme sürecinin bir sistematik yapı içerisinde değerlendirilmesi gerekir. Öğretmenin bu süreç ile ilgili nihai sorumluluğu da öğrenciye problemin ve onun çözüm yolunun sistematiğini ve problemi çözme adına sahip olması gereken becerileri kazandırmaktır (Altun ve diğerleri, 2022).

Alanyazındaki problem çözme sürecine ilişkin aşamalar ve süreçler incelendiğinde George Polya (1887-1985) tarafından ifade edilen yaklaşımın genel olarak kabul gördüğü söylenebilir. Bu yaklaşıma göre problemi anlayarak analiz etme ve çözme süreci dört boyuttan oluşan bir yapı göstermektedir. Bu aşamalar:

(1) Problemin analizi yoluyla daha iyi anlaşılması,

(2) Çözüme yönelik yolun ve stratejilerin netleştirilmesi,

(3) Belirlenen stratejinin uygulanması,

(4) Çzümün çok boyutlu ve doğru bir şekilde değerlendirilmesi

olarak sıralanabilir.

Yukarıda bahsedilen Polya'nın problem çözme aşamaları ve bu aşamaları uygun bir çalışma sistematiği problem çözmenin daha kolay olmasını sağlar. Bu noktada problem çözme aşamalarında birey özgür davranabilmektedir. Örneğin ilk aşamada problemin anlaşılması ve ne istendiğinin doğru bir şekilde fark edilmesi, ikinci aşamada hangi yolun ve stratejinin izleneceğinin belirlenmesi problemle maruz kalan kişinin tercihi olmaktadır (Polya, 1957).

Her ne kadar problem çözmenin farklı stratejileri olsa bile temel olarak belli stratejiler daha çok kabul görmekte ve problem çözülürken tercih edilmektedir. Bu stratejiler:

- sistemli bir şekilde liste yapma ve bunu farklı aşamalarda kullanma,
- çıkarım ve çıkarımın sonucunu kontrol etme,
- çeşitli oklar ve göstergeler ile problemi görselleştirmek yani diyagramlardan yararlanma,
- veriler arasındaki ilişkileri tespit etmek ve bunları kaydetme,
- eşitlik yazma,
- tahminde bulunma,
- benzer problemlerin çözüm yollarını izleme,
- geriye doğru çalışma,
- tablo ve infografikler ile problemi anlamaya çalışma olarak sıralanabilir.

Bu stratejilerin uygun yerde ve doğru bir biçimde kullanılabilmesi öğrencinin bilişsel gelişimi ile oldukça yakın ilişkilidir (Lindquist, Reys, Suydam ve Smith, 1995). Yani bilişsel gelişimi daha üst noktada olan öğrenciler bu stratejileri yerinde ve daha doğru kullanırken, bilişsel düzeyleri daha zayıf olan öğrenciler bu konuda sıkıntılar yaşamaktadır.

2.4.1.3. Düşünme ve Muhakeme Etme: Herhangi bir konu ile ilgili olarak, o konuyu farklı yönleri ve boyutları ile ele alma, yeni fikirler üzerine akıl yorma ve açıklama sürecine akıl yürütme yani muhakeme denir. Gerçekleştirilen muhakeme süreci sonunda üzerinde düşünülen konunun doğru mu yoksa yanlış mı olduğunun belirlenmesi ve bu konuda objektif kanıtlar ortaya koymak ise ikna etmek olarak adlandırılır. Bu aşamada günlük yaşamda ve daha çok da günlük yaşamın matematik üzerine yansımalarında ve matematiksel

düşünme süreçlerinde gerçekleştirilen muhakeme işlemlerini/eylemlerini gerekçelendirmek de oldukça önemlidir. Bu doğrultuda karşılaşılan bir problemi öncelikle anlamak, sonrasında açıklamak ve nihai olarak da çözme ile ilgili süreçleri işletmek ve bunu mantıki rasyonel gerekçelerle desteklemek akıl yürütme yani muhakeme yeterliğinin en somut göstergesi olarak kabul edilir (Niss, 2015).

Muhakemenin en temel noktası matematiği ilgilendiren iddiaların ve bu iddiaların çözümü/ispatı sürecinin rasyonel düşünme süreçleri ile açıklanması, ispatlanması ve bu sürecin gerekçelendirilerek ifade edilmesidir (Højgaard ve Niss, 2019). Bu süreç, içerisinde farklı becerileri kullanmayı gerekli kılar. Bu becerilerin en önemlilerinden bir tanesi de argüman üretmedir (Erkek ve Işıksal Bostan, 2019). Argüman üretme sürecinde öğrencilerden belli davranışları sergilemesi beklenir. Bunlardan ilki öğrencilerin tartışılan konu hakkında fikirlerini sunma ve ikna edici açıklamalar yapmalarıdır. Devamında ise öğrencilerin arkadaşlarının argümanlarını çürütmesi ve kendi görüşlerini doğrulayan/savunan düşünce sistematiklerini ortaya koymaları beklenir (Stein ve diğerleri, 2008). Bu bilgilerden hareketle argümantasyon sürecine ilişkin dört temel bileşen olduğu görülmektedir. Bu bileşenlerden ilki iddiadır. İddia olmaksızın bir argümantasyon sürecinin başlamasından söz edilemez. İddia temelde bir düşünceyi savunan savlar olarak tanımlanabilir (Krummheuer, 1995). İkinci ise verilerdir. Veriler kendi fikrini savunma adına doğru bir şekilde kullanılmalıdır. Bu noktada önemli olan verileri, üzerine konuşulan konuda savunulan şeyler üzerine şekillendirmektir ve kullanmaktır. Üçüncü bileşen gerekçelerdir. Sunduğumuz iddianın boş olmadığı, belli bir rasyonel gerekçesinin olması gerekliliği argümantasyon sürecinde oldukça önemlidir. Gerekçe özünde verilerle birlikte açıklanan ve ortaya konan bilgiler olarak düşünülebilir. Son bileşen ise desteklerdir. Bu ise savunulan düşüncenin çeşitli yollarla desteklenmesi anlamına gelmektedir. Bu noktada gerekçelere bağlam oluşturmak desteğin amaçladığı durumdur (Krummheuer, 1995).

Alanyazın, gerekçelendirme ile birlikte probleme çözmeye yönelik girişimlerin sürece eklenmesi ve muhakeme yeterliğinin, problem çözme süreçlerinin pek çok aşamasıyla ilişkili olduğunu ortaya koymaktadır (Højgaard ve Niss, 2011). Anlaşılacağı üzere muhakeme yeteneği matematik problemlerinin çözümünde oldukça önemlidir ve bir dizi işaretçiyi içerisinde barındırmaktadır. Bu işaretçiler:

- Problemin çözülmesine yönelik yapılan sözlü ve yazılı girişimlerin mantıklı bir sıra içerisinde izlenmesi,
- İspat üretebilme ve bunu açıklayabilme,
- Düşünceleri matematiksel bir dil ile açıklayabilme,

- Üzerine konuşulan konudaki farklılıkları görme, analiz etme ve bunları değerlendirebilme (Altun, 2020).

2.4.1.4. Temsil etme: Temsil etme, matematiği ilgilendiren durum, problem, olgu ya da nesnelerin farklı biçimlerdeki (sembolik, cebirsel, görsel, geometrik, çizelgeler, diyagramlar, grafikler, tablolar veya sözlü temsiller) versiyonlarını anlama, açıklama, analiz etme, yorumlama, farklılıkları belirleyebilme ve kullanabilme anlamına gelmektedir (Højgaard ve Niss, 2011; Højgaard ve Niss 2019; Niss, 2015). Bu konuda yetkin olan bireylerin aynı varlığın farklı türevlerdeki varlıkları arasındaki ilişkileri ve farklılıkları belirleme ve aynı zamanda bu farklı türevlerin güçlü ve zayıf yönlerini ortaya koyabilme düzeyinin yüksek olduğu bilinmektedir (Højgaard ve Niss, 2011, 2019; Niss, 2015). Bu noktada kritik olan ve bireyin bu konuda yetkinliğini belirleyen en önemli göstergelerden bir tanesi de aynı matematiksel durumun farklı versiyonlar içerisinden belli bir amaca uygun olacak şekilde seçilmesidir (Albaladejo ve diğerleri, 2015; Højgaard ve Niss, 2011). Aynı zamanda temsil süreçleri içerisinde farklı temsiller arasında değişiklik yapmayı da gerektirebilir ve bu süreç bilgi kazancı ve bilgi kaybı gibi durumlara gerekçe oluşturabilir (Højgaard ve Niss, 2019).

Temsillerin öğrencilerin matematiği ayrı kavramların bir koleksiyonu olarak değil, bir bütün olarak öğrenmelerine olanak sağladığına yönelik inancın matematik eğitimi camiasında yaygın olduğu bilinmektedir (Chappell ve Thompson, 2007). Temsil, fiziksel modeller ve animasyonlar kullanılarak grafik veya şekil çizmek gibi birçok farklı yolla yapılabilir. Üçgenleme yapan kişinin bir üçgen taslağı resmetmesi ve sahip olduğu dataları o eskiz üzerine doğru bir şekilde yerleştirmesi temsili ifade eder ve bu süreç çizimin yapılmasındaki mantığı önemli ölçüde basitleştirir (Altun, 2020). Bu yetkinliğin önemli bir örneği, sözlü gösterimlerin (örneğin sekiz milyon üçyüz otuz altı bin dokuzyüz yirmi yedi) yanı sıra gösterimleri, sembolleri, Romen rakamlarını, el yazısını vb. kullanma becerisidir. Bu, bir doğal sayının temsili olabilir veya işaretler, sayma çubukları, boncuklar vb. kullanılarak sayının aynı şekil veya boyuttaki noktalarla yeniden yazılması olabilir. Örneğin dijital saatlerin ve analog saatlerin aslında aynı şey olduğu fakat zamanın tamamen farklı temsilleri olduğu bilinmelidir (Højgaard ve Niss, 2011). Bu uzmanlığın düzeyi, çıkarılacak bilgi miktarı ve birden fazla gösterimden gelen bilgilerin entegre edilmesi ihtiyacı ve önceden ayarlanmış gösterimleri kullanmak yerine yeni gösterimler tasarlama ihtiyacıyla birlikte artar. Ayrıca, minimum analiz gerektiren basit ve standart gösterimlerden (çubuk grafik veya koordinat düzlemi gibi) karmaşık ve daha az standart çok bileşenli gösterimlere (nüfus piramidi veya

sayfa gibi) kadar temsili yapılandırmanın karmaşıklığı arttıkça da artar (Turner ve diğerleri, 2015).

Matematikte sembolik gösterimlerin önemi oldukça büyüktür. Dolayısıyla sembolik, teknik dildeki mevcut beceri ve yetenekler ile matematiksel sembolleri kullanmanın "kurallarına" odaklanan etkinlikler arasında yakın olan bir ilişki ile birlikte matematik dilinin sembolik yazım dilini içermeyen kısımlarını da ifade eder (Højgaard ve Niss, 2011). Yalnızca sembolik görsellerle çalışmak; sembolik ve teknik dilin kullanımını ve operasyonel becerilerin kullanımını içerir, ancak farklı sunumlar arasındaki çeviri her zaman sunumsal yeterlilik kapsamında değerlendirilir (Turner ve diğerleri, 2015). Yine benzer olarak, sözlü veya yazılı bilgileri, fotoğrafları ve grafikleri kavramak yaygın bir biçimde sunum becerilerinin değil, iletişim becerilerinin bir parçasıdır. Matematiksel varlıkların ve gerçeklerin temsili, matematikle, matematikle ilgili ve matematik içindeki iletişimle yakından ilişkili olduğundan iletişim becerileriyle açık bir ilişkiye sahiptir (Højgaard ve Niss, 2011; Turner ve diğerleri, 2015). Özetle, başlığın matematiksel dilinin, araçlarının işlenmesi ve kullanılmasıyla ilgili farklı olan üç yeterlilik, sembolik dil, sözel veya somut öğelerden oluşan belirli temsil formlarıyla ilgilidir. Bu yeterliliklerin ana odağı yalnızca bir temsil kategorisiyle ilgilenmek olsa da temsil yeterliliği, temsil yelpazesinin tamamına ve bunlar arasındaki dönüşüme odaklanır (Højgaard ve Niss, 2019).

2.4.1.5. İletişim: Matematiğin öğrenilmesi sürecinde matematiksel konularla ilgili iletişim kurmak, diğer yazılı, sözlü, görsel, metaforik veya animasyonlu matematiğe özgü sembolleri ve yazıları yorumlamak, diğer matematiksel konularla ilgili ifadelerde bulunmak matematik dilini önceleyen becerilerinin temelini oluşturur (Højgaard ve Niss, 2011; Højgaard ve Niss, 2019; Niss, 2015). Bu noktada bahsedilen alıcı bileşen, etkinliğin neyi temsil ettiğini, hangi matematiksel dilin kullanıldığını, hangi bilginin ilişkili olduğunu ve istenen yanıtın özünün ne olduğunu anlamayı barındırır. Yazılı ve teknoloji destekli öğelerde alıcı iletişim, metinleri ve görselleri anlamakla yakın ilişkilidir. İletişim, bir sorunun nasıl çözüleceğini veya bir yanıtın nasıl yorumlanacağını bilmekten ziyade, ilişkili bilgiyi anlamak veya sunmakla ilgilidir. Bu yeterliliğin düzeyi, yorumlanan materyalin karmaşıklığıyla birlikte çoğalır; Birden çok veri kaynağını bağlamaya veya veri bileşenleri arasında geçiş yapmaya ihtiyaç duyulduğunda bu daha da kuvvetli bir hal alır (Turner ve diğerleri, 2015). Matematiğe özgü bir fikri ifade edebilme yeteneği (buna bir alıştırmanın veya ödevin çözülmesi de dahildir) bu duruma örnek olarak gösterilebilir. Benzer şekilde, ders kitabı sunumlarının analiz edilmesi ve yorumlanması, alıcı taraf için bir rol modeldir (Højgaard ve Niss, 2011). Yapıcı kısım, cevabın kısa adımlarla sunumundan, yürütülen rasyonelitenin

tanımlanmasından ve cevaplara ait gerekçelerden oluşur. Ayrıntılı bir yazılı çözüm veya açıklamaya ihtiyaç duyulduğunda yapıcı yanı artar (Turner ve diğerleri, 2015). Matematiksel iletişim üç ana bileşene ayrılabilir: (1) matematikte iletişim, (2) matematikle iletişim ve (3) matematikle ilgili iletişim (Niss, 2003). Bunlar temel olarak:

- Matematikte İletişim; Bu, başkaları tarafından yazılan ve konuşulan matematik metinlerini anlamayı, anladığını farklı şekillerde ifade edebilmeyi, matematiksel metin fonksiyonlarını, uygulamalarını ve örnek soruları anlamayı, bunları yorumlama ve problem çözme sürecinde kullanabilmeyi içerir. Semboller ve işaretler de dahil olmak üzere resmi dil bilgisine sahip olmak gereklidir.
- Matematik ile iletişim; Matematik, matematik dışı konuları da içererek tüm konularda bilgi paylaşımını destekler. Hikâyeyi güçlendirmek için kullanılan etkinlikleri içerir.
- Matematikle İlgili İletişim; Bir başkasıyla matematik hakkında konuşmak ve yazılı/sözlü bilgi paylaşmakla ilgilidir. Bu bağlamda matematikte konuşma, matematiksel iletişimde belirtilen eylemleri gerçekleştirir.

Matematik içindeki ve matematik hakkındaki tüm iletişim, genel iletişimin ötesine geçerek matematiğin özünü özellikle de hayati bileşenlerini barındırır. Bu nedenle matematiksel iletişimde sıklıkla matematiksel fikir ve kavramlar, terimler, sonuçlar ve teoriler ya da bir alan ve konu olarak matematiğin farklı yönleri kullanılır ve çoğu zaman tek ya da daha fazla olmak üzere matematiksel temsilin kullanımı yer alır (Højgaard ve Niss, 2019). Matematik sınıfları öğrencilerin matematikle dört temel dil becerisini sürece katarak kullanma olanağına sahip oldukları ve dolayısıyla matematikle etkileşimde bulunma fırsatına ve beklentisine sahip oldukları nadir yerlerden biridir (Chappell ve Thompson, 2007). Öğrencilerin sağlam bir matematik anlayışı geliştirebilmeleri ve akıcı bir şekilde ustalaşabilmeleri için iletişimin bütün bileşenleri ile sınıf içi öğretim süreçlerine adaptasyonu sağlanarak sürdürülmesi gerekmektedir.

Yazılı, sözlü veya görsel iletişim, çeşitli temsil biçimlerini kullandığı için temsil yeterliliğiyle oldukça yakın ilişkilidir. Böyle bir iletişim şekli sıklıkla matematiksel sembol ve terimlerin kullanımını gerekli kıldığından sembolik, teknik dil ve operasyonel becerilerle güçlü bir bağa sahiptir. Ancak iletişim yeterliliği diğer iletişimle ilgili yeterliliklerden daha üst düzeyde bir boyuta sahiptir çünkü iletişim, gönderenin ve alıcının mevcut durumunu, geçmişini ve koşullarını dikkate almak zorundadır (Højgaard ve Niss, 2011).

2.4.1.6. Sembolik, teknik dil ve işlemleri kullanma: Kendine özgü teknik bir dile sahip olan matematik aynı zamanda belli kuralları da içerisinde barındırmaktadır. Bu

dilin ve kuralların kullanılması bireylerin matematiksel metinleri daha kolay anlamasını sağlar. Bireylerin bu alanda yeterli olmaları, onların matematiğe ait semboller ile bunların altında yatan kuralların ilişkisini kurmayı gerektirir. Ayrıca tanımlama yapma, sonuçlara ulaşma, formülasyona ait dataları aktif ederek kullanmak da bu kapsamda değerlendirilebilir (Turner ve diğerleri, 2015). Bu kurallara verilecek bir örnek üçgenin köşelerinin ve kenarlarının isimlendirilmesi olabilir. Üçgen örneğine bakacak olursak köşelerinin büyük harfler kenarlarının küçük harflerle gösterildiğini görürüz. Bunun gibi benzer bir literatür meydana getirmek matematik için son derece önemlidir (Højgaard ve Niss, 2011).

Bu yetenek, sembollerin anlamı ile ilgili olduğundan temsil yeteneği ile yakından ilgilidir. Ancak önemli farklılıklar var. Temsil yeterliliği, matematiğe ait kendine özgü durumların sembolik görünümlerini de içermek üzere çoklu temsillerin ve bunlar arasındaki dönüşümlerin anlamına odaklanırken, bu yeterlilik sembollere ve teknik dile odaklanır (Højgaard ve Niss, 2019). Sembolik, teknik ve işlemsel dil kullanımına hâkim olmaya yönelik göstergeler şu şekilde tanımlanmıştır (Altun, 2020):

- Matematik dilini ve sembollerini tanımak ve doğru şekilde kullanmak
- Verilen bir problemi semboller ve karakterler kullanarak ifade etmek
- Başkaları tarafından yazılan bir metni anlamak ve ifade etmek
- Bir durumu tanımlamak için geleneksel dili kullanarak kolayca anlaşılabilecek sembolik ifadeler oluşturma becerisi.
- Matematiksel kavramları yazma ve çizim yoluyla temsil etme becerisi
- Matematiğin terminolojisini ve sembollerini öğrenmek ve doğru bir şekilde uygulamak
- Semboller ve karakterler kullanarak verilen bir problemin ifadesini yapmak
- Başka bir kişi tarafından yazılan bir metni anlamak ve ifade etmek
- Anlaşılır sembolik ifadeler oluşturmak için geleneksel dil kullanarak bir durumu tanımlama becerisi
- Matematiksel kavramları yazmak ve çizmek suretiyle temsil etme becerisi

2.4.1.7. Matematiksel Araçları Kullanma: Matematik çalışmalarında, matematiksel yapıları göstermek ve işlemleri gerçekleştirmede kolaylık sağlamak için çeşitli araçlar kullanılır. Matematiksel araç-gereçleri kullanma yeterliği, matematikte kullanılan çeşitli araçların özelliklerini ve farklı bağlamlardaki kullanım olanaklarını ve sınırlılıklarını bilmeyi ve bu araçları doğru bir şekilde kullanmayı ifade eder (Højgaard ve Niss, 2019).

Matematikte araç-gereç kullanımı, öğrencilerin matematiksel kavramları daha iyi anlamalarına ve bu kavramları problem çözme süreçlerinde kullanmalarına yardımcı olan bir stratejidir. Matematikte araç-gereç kullanımını gösteren örnekler şöyle sıralanabilir (Niss, 2015; Højgaard ve Niss, 2019):

(1) Pergel ve cetvel: Geometri problemlerini çözerken pergel ve cetvel kullanmak, doğru çizgiler çekmek ve geometrik şekiller oluşturmak için yaygın olarak kullanılan araçlardır.

(2) Dinamik geometri yazılımları: Bu yazılımlar, öğrencilere interaktif bir ortamda geometrik şekillerin oluşturulmasını ve manipüle edilmesini sağlar. Örneğin, CabriGeometry, Geometer's Sketchpad ve Geogebra gibi yazılımlar, öğrencilere geometri kavramlarını keşfetmeleri için farklı araçlar sunar.

(3) Matematiksel kavramlar: Matematiksel kavramlar, öğrencilere matematik problemlerini anlamaları ve çözmeleri için araçlar sağlar. Örneğin, birim daire trigonometri kavramlarında kullanılırken, sayı çizgisi sayıların sıralaması ve ilişkilerinin anlaşılmasına yardımcı olur.

(4) Sembolik dil ve işlemler: Matematiksel semboller ve işlemler, matematiksel ifadeleri ve denklemleri anlamlandırmak için kullanılan araçlardır. Örneğin, cebirsel ifadeleri çözerken semboller ve matematiksel işlemler kullanılır. Bu örnekler göstermektedir ki, matematikte araç-gereç kullanımı, öğrencilerin matematiksel kavramları anlamalarına ve matematik problemlerini çözmelerine yardımcı olur. Ayrıca, matematiksel temsil becerisi ve sembolik dil kullanma becerisiyle de ilişkilidir (Højgaard ve Niss, 2011).

Matematiksel araç-gereçleri kullanma yeterliğinin belirtileri şunlardır (Altun, 2020):

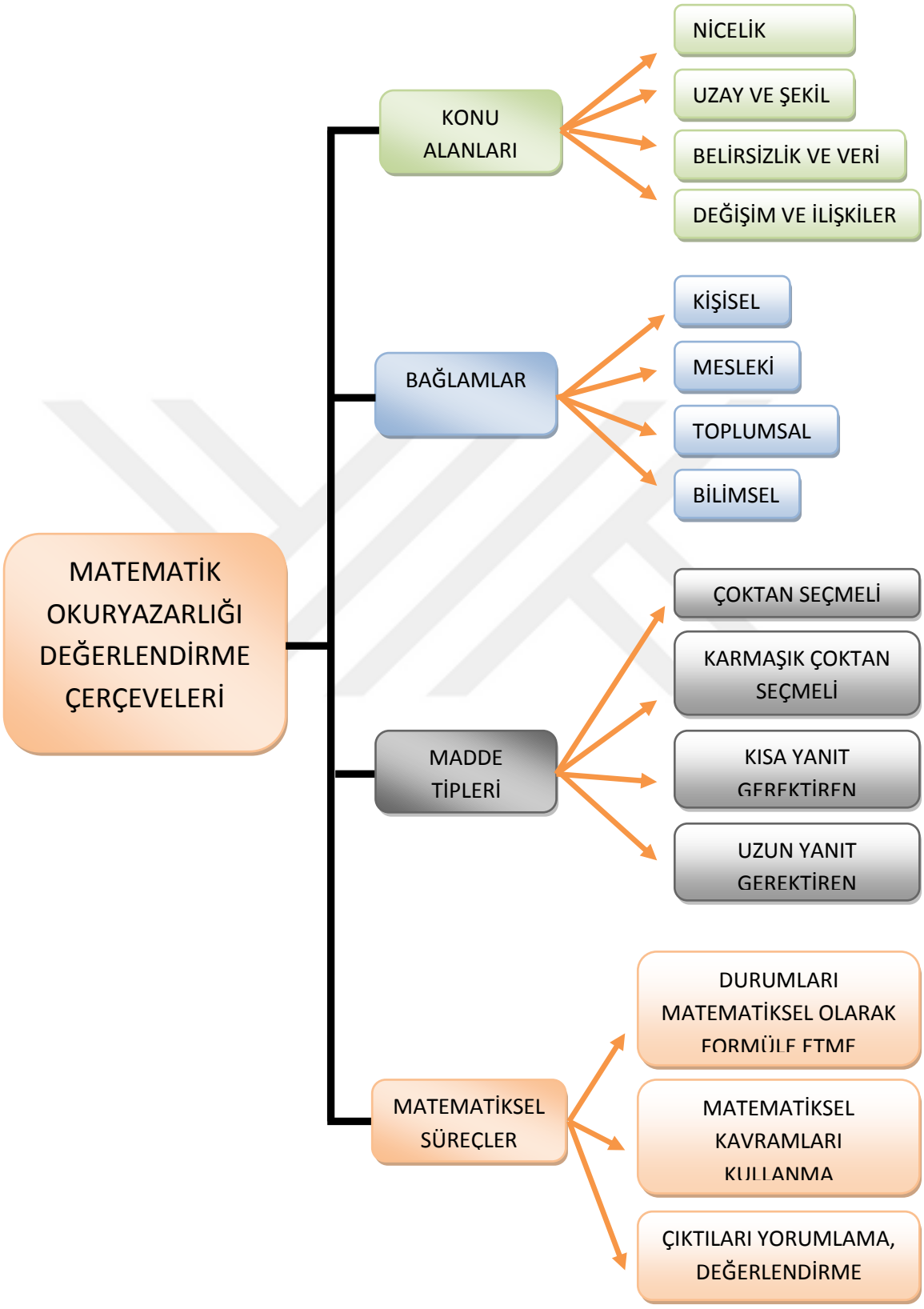
- Matematiksel işlemlerde yardım arayışı
- En ideal yöntemi seçme
- Araçları doğru bir biçimde kullanma
- Araçların matematik işlemlerine olan etkisini açıklama
- İnternetten araçlar hakkında destek alma
- Gereksinime göre araç üretme
- Konuyla ilgili bilgisayar yazılımlarından yararlanma.

Altun (2020) tarafından ifade edildiği üzere, temel yetenekler olarak modelleme, problem tanımlama ve çözme ile akıl yürütme ve kanıtlayabilme önemlidir. Bu yetenekler, matematik uygulamalarında önemli roller üstlenir. Diğer dört yetenek ise matematik uygulamalarında destekleyici rolleri olan yeteneklerdir.

2.4.2. Matematik Okuryazarlık Sorularının Sınıflandırılması: Aşağıda matematik okuryazarlığı ile ilgili olarak konu alanları, soruların ilgili bulunduğu bağlamlar (yaşam kesitleri), soru türleri ve süreç becerileri başlıklı sınıflamalar verilmiştir. Bu sınıflamalar özellikle sınav hazırlamada ve öğretimi düzenlemede yararlanılabilecek bir içeriğe sahiptir. Bu araştırmada hazırlanan sorular matematik okuryazarlığı konu alanlarına göre belirlenmiştir. Bunun yanında her bir sorunun matematiksel süreçler açısından değerlendirmesi yapılmıştır. Dolayısıyla konu alanları ve matematiksel süreçlerle ilgili detaylar aşağıda verilmiştir:

Şekil 18

Okuryazarlık Soruları Değerlendirme Çerçeveleri (Altun ve diğerleri, 2022)



Matematik programındaki konular dört öğrenme alanında toplanabilir. Bunlar; sayılar, cebir, geometri ve istatistiktir. Literatür incelendiğinde bu konu alanlarının nicelik, değişim ve ilişkiler, uzay ve şekil ve belirsizlik başlıkları altında incelendiğini görürüz.

2.4.2.1. Nicelik Soruları: Sayıları, sayı sistemlerini, sayısal işlemler ve işlemlerin özelliklerini, yazılı ve zihinden işlem yapmayı, tahminde bulunmayı içinde tutar. Oran, orantı, yüzde hesapları, sayılarla düşünme, ölçme sonucu elde edilen sayısal sonuçların anlamlandırılması da nicelik konusunun kapsamındadır.

***2.4.2.2. Değişim ve İlişkiler*:** Bu başlık altında doğrusal denklemler, doğrusal denklem sistemleri ve bunların çözümleri, koordinat sistemi ve verilerin koordinat sisteminde gösterilmesi, eşitsizlikler, fonksiyonlar, cebirsel ifadelerle ilgili bilgi ve beceriler sorgulanır. Fonksiyonların gösterim şekilleri, analitik düzlemdeki grafikleri, bunların problem çözmede kullanımı da bilinmeyen kullanarak problem kurma ve çözme, cebirsel ifadeleri değişik amaçlarla kullanabilme vs. gibi konularda bu kapsamdadır.

2.4.2.3. Uzay ve Şekil: Düzlemde şekiller, birbirleriyle benzerlikleri, farklılıkları, eşlik ve benzerlik, öteleme ve dönme, uzayda cisimler ve özellikleri, onların değişik alanlardan görünümler, ölçüsel geometri, geometrinin bu kavram ve genellemeleri ile ilgili problemler de şekil ve uzay başlığı kapsamı içindedir. Dinamik geometri yazılımlarının geometrik şekiller için kullanımı, bunların çizimleri, düzlemde iki nokta arasındaki uzaklık, alan, çevrelerinin hesapları öğrencilerin "Uzay ve Şekil" birikimi içinde düşünülür.

2.4.2.4. Belirsizlik ve Veri: Dördüncü konu başlığı olan Belirsizlik ve Veri kapsamında öğrenciler, veri toplama, verileri özetleme ve çeşitli şekillerde gösterme, grafiklerini anlatma, örneklem seçme, örneklem üzerinden bilgi üretme, olasılıkla ilgili olarak basit ve hilesiz olaylar, random kavramı, olasılık, olasılık sonucunu anlamlandırma ve yazma, olasılık kavramını temel alarak düşünme ve yorum yapma gibi konular ele alınır (Altun ve diğerleri, 2022; MEB, 2018).

Matematik okuryazarlık düzeyini tanımaya yönelik bakış açılarından biri de problem çözme süreci üzerinden yapılan incelemedir. Bir problemin çözüm sürecinde sıralı olarak problemin tanımlanması yani durumun içinden matematiksel problem bulup çıkarma, çözüm için uygun strateji seçme ve onu çözüp çözümün doğruluğunu test etme ve cevabı değerlendirme, bu süreçte yapılan incelemelere örnektir. Matematik okuryazarlığı problemleri süreç itibariyle üç kategoriye ayrılabilir. Bunlar:

- **Durumlari matematiksel olarak formüle etme:** Bu süreç modelleme yeterliliği kapsamındaki becerilerle alakalıdır (Altun ve diğerleri, 2022). Karşılaşılan bir problemin matematiksel bir ifadeye dönüştürülmesini içerir. Bu adım genellikle

problemi anlama, gerekli bilgileri tanımlama ve matematiksel terimler ve sembollerle ifade etme sürecini kapsar. Problemin koşullarını ve ilişkileri matematiksel ifadelere çevirerek, problem çözme sürecini başlatırız. Bu aşamada kararlı bir duruma ilişkin model üretilir veya var olan bir modelin özellikleri açıklanır.

- **Matematiksel kavramları kullanma ve akıl yürütme:** Bu süreç akıl yürütme suretiyle gerekli işlemleri yapma ve sonuca ulaşmayı kapsar (Altun ve diğerleri, 2022). Matematiksel kavramları (örneğin, sayılar, geometrik şekiller, ilişkiler), çeşitli matematiksel yöntemleri uygulamayı ve problemi çözme stratejilerini geliştirmeyi içerir. Burada, problem çözme için uygun matematiksel araçları seçme ve bu araçları etkili bir şekilde kullanma becerisi önemlidir.
- **Matematiksel çıktıları yorumlama ve değerlendirme:** Bu süreç çözümün doğruluğunun kontrol edildiği, problem durumunun öncülleri altında sonucun geçerliğini tartışmayı içerir (Altun ve diğerleri, 2022). Bu süreç, elde edilen matematiksel sonuçları yorumlama, gerçek dünya bağlamlarında uygulama ve sonuçların doğruluğunu, tutarlılığını ve mantıklılığını değerlendirme sürecidir. Problem çözme sürecinin son aşaması olarak, elde edilen matematiksel çıktıların anlamını çıkarma, sonuçları doğrulama ve varsa hataları tespit etme becerisi gerektirir.

Bu süreçler genellikle birbiriyle bağlantılıdır ve matematiksel düşünme becerilerini geliştirmeye yöneliktir.

2.5. İlgili Araştırmalar

Çalışmanın bu bölümünde matematiksel düşünme ve matematik okuryazarlığına ilişkin gerçekleştirilen çalışmaların derlemesi bulunmaktadır. Bu noktada ilgili araştırmalar iki başlık altında ele alınmıştır. Bu başlıklar; ulusal kaynaklı gerçekleştirilen çalışmalar ve uluslararası çalışmalardır. Ayrıca her bir başlık kendi içerisinde de ikiye ayrılmış ve matematiksel düşünme ve matematik okuryazarlığı olarak iki bölüm halinde sunulmuştur. Bu bölüm aracılığıyla alanyazında bulunan çalışmaların bir bütün halinde görülmesi ve mevcut araştırmaya niçin ihtiyaç duyulduğunun sentezi yapılacaktır.

2.5.1. Ulusal Kaynaklı Gerçekleştirilen Araştırmalar

2.5.1.1. Matematiksel Düşünme ile İlgili Araştırmalar: Matematiksel yeterliliğin temel taşı olan matematiksel düşünme, problem çözme, akıl yürütme, soyutlama ve iletişim de dahil olmak üzere bilişsel süreçlerin çok yönlü etkileşimini kapsar. Bu karmaşık beceriyi doğru bir şekilde değerlendirmek, eğitimciler ve araştırmacılar için önemli bir zorluk teşkil etmektedir. Bu doğrultuda aşağıdaki bölümde ulusal alanda gerçekleştirilmiş 15 çalışmanın bulguları ele alınmaktadır (Aygün, 2019; Gök, 2022; Göl, 2017; Katipoğlu, 2016,

2019; Köksal, 2019; Kükey, 2018; Özkaya, 2022; Sezer, 2019; Tosun, 2019; Tuncay, 2015; Tüzün, 2019; Umay, 1992; Yıldırım, 2015; Yiğit, 2019) ve bu bulgular, matematiksel düşünme süreçlerine ilişkin nüanslara dair değerli bilgiler sunmaktadır.

Çalışmalar, problem aşamaları ve bağlamlara göre değişen bir dizi bilişsel süreci kapsayan matematiksel düşünmenin dinamik ve çok yönlü doğasını vurgulamaktadır. Umay'ın (1992) araştırması, problem çözme sürecinde ve sonucunda matematiksel düşünme davranışlarında dikkate değer farklılıklar ortaya çıkarmış ve bu beceriyi değerlendirirken her iki boyutun da dikkate alınmasının önemini vurgulamıştır. Benzer şekilde Yıldırım'ın (2015) çalışması da öğrencilerin geometri problemlerindeki genelleme yeteneklerinin farklı problem bağlamlarına göre farklılık gösterdiğini ortaya koymuştur. Bu bulgular, farklı aşamalar ve problem durumları boyunca matematiksel düşünmenin dinamik doğasını yakalayan değerlendirme araçlarına olan ihtiyacın altını çizmektedir.

Etkili öğretim müdahaleleri öğrencilerde matematiksel düşünmenin gelişimini teşvik edebilir. Katipoğlu (2016) yaptığı araştırmada matematik öğretiminde karikatür kullanımının öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini geliştirdiğini ve matematik kaygısını azalttığını tespit etmiştir. Benzer şekilde Bahadır'ın (2020) araştırması da matematik temelli zenginleştirilmiş sınıf etkinliklerinin öğretmen-öğrenci ve öğrenci-öğrenci etkileşimini artırdığını, öğrenci katılımını teşvik ettiğini ve matematiksel düşünme süreçlerini geliştirdiğini belirtmiştir. Bu bulgular, çeşitli öğretim stratejilerini birleştirmenin, öğrenciler arasında matematiksel düşünme becerilerini etkili bir şekilde geliştirebileceğini göstermektedir.

Bireysel deneyimler, uzmanlık ve öz yeterlilik matematiksel düşünme süreçlerini etkiler. Tuncay'ın (2015) örnek olay çalışması öğretmen adaylarının, öğretmenlerin ve bir akademisyenin matematiksel düşünme stratejileri konusunda farklı tercihler sergilediğini ortaya çıkarmış, bu da bireysel deneyimlerin kişinin matematiksel düşünmeye yaklaşımını şekillendirdiğini öne sürmektedir. Tüzün'ün (2019) çalışması ayrıca öğrencilerin matematiksel düşünme aşamaları ile matematik özyeterlikleri arasında pozitif bir ilişki olduğunu ortaya koymuş ve kişinin matematiksel yeteneklerine olan güçlü inancının matematiksel düşünme süreçlerini geliştirebileceğini göstermiştir. Bu bulgular, matematiksel düşünmeye yönelik öğretim ve değerlendirme araçları tasarlanırken bireysel farklılıkların dikkate alınmasının önemini vurgulamaktadır.

Matematiksel düşüncenin doğru bir şekilde ölçülmesi, karmaşıklığı ve dinamik doğası nedeniyle zorluklar doğurur. Çalışmalar, farklı aşamalarda ve problem bağlamlarında matematiksel düşünmenin farklı yönlerini yakalayan kapsamlı ve incelikli değerlendirme

araçlarına olan ihtiyacı vurgulamaktadır. Umay'ın (1992) araştırması ve Gök'ün (2022) incelemesi, geleneksel değerlendirme yöntemlerinin sınırlamalarını vurgulamakta ve matematiksel düşünmenin dinamik doğasını etkili bir şekilde yakalayabilen daha karmaşık araçların geliştirilmesini savunmaktadır.

Matematiksel düşünme üzerine yapılan araştırmalar, bu bilişsel sürecin karmaşıklığına dair değerli bilgiler sağlar ve hem eğitimciler hem de araştırmacılar için pratik çıkarımlar sunar. Problem çözme açısından zengin bir ortam geliştirerek, çeşitli düşünme stratejilerini benimseyerek ve kapsamlı değerlendirme yöntemleri kullanarak, matematiksel düşünmeyi etkili bir şekilde teşvik edebilir ve öğrencilerin yetkin matematikçiler olmalarını sağlayabilir.

2.5.1.2. Matematik Okuryazarlığı ile İlgili Araştırmalar: Giderek nicelikselleşen bir dünyada ve çevremizde gerçekleşen olayları daha iyi anlamak için vazgeçilmez bir beceri olan matematik okuryazarlığı, matematiksel bilgiyi etkili bir şekilde yorumlama, analiz etme ve iletme yeteneğini kapsar. Bu bölümde, matematik okuryazarlığının çeşitli yönlerini inceleyen yedi ulusal çalışma (Baştürk Şahin, 2021; Bilgeç, 2022; Bozkurt, 2019; Kozaklı Ülger, 2021; Öngel, 2023; Sönmez, 2022; Şenol, 2022; Yıldız, 2023) ele alınmış ve bu çalışmalar özellikle benzerlik ve farklılıklarına göre değerlendirilmiştir.

Araştırmalar, öğrenciler ve öğretmenler arasında matematik okuryazarlığını geliştirmede iyi tasarlanmış eğitimsel müdahalelerin dönüştürücü gücünü vurgulamaktadır. Bozkurt'un (2019) araştırması, 30 saatlik matematik okuryazarlığı programının ortaokul öğrencilerinin matematik okuryazarlığı becerilerini ve sınıf içi etkinliklere katılma motivasyonlarını artırdığını ortaya çıkarmıştır. Benzer şekilde Kozaklı Ülger'in (2021) çalışması da modüler bir matematik okuryazarlığı programının öğrencilerin matematik yeterliliğini, sorgulama, akıl yürütme ve bilinçli karar verme becerilerini geliştirdiğini ortaya koymuştur.

Matematik okuryazarlığı programları aynı zamanda matematik öğretmenleri arasında mesleki gelişim için katalizör görevi de görebilir. Baştürk Şahin'in (2021) boylamsal çalışması, dört matematik öğretmeninin öğretmen adayından uygulamalı profesyonelliğe geçiş sürecindeki mesleki gelişimini izlemiştir. Bulgular, matematik okuryazarlığı programlarının öğretmenlerin mesleki gelişim yörüngelerinde hem büyümeyi hem de istikrarı teşvik edebileceğini göstermektedir.

Matematik okuryazarlığının değerlendirilmesi, farklı boyutlarını kapsayan çok yönlü bir yaklaşımı gerektirir. Şenol'un (2022) araştırması matematik okuryazarlığı sorularının öğrencilerin matematik okuryazarlığı performansı üzerindeki etkisini incelemiştir. Sonuçlar,

matematik okuryazarlığı sorularına maruz kalmanın öğrencilerin özellikle temsil, iletişim, akıl yürütme ve problem çözme alanlarındaki performansını olumlu yönde etkilediğini göstermiştir.

Sönmez'in (2022) çalışması PISA matematik okuryazarlığı sorularını derinlemesine inceleyerek bunları çeşitli açılardan analiz etmiştir. Bulgular, öğrencilerin dördüncü ve beşinci yeterlilik seviyelerinde kümelenme eğiliminde olduklarını, matematik okuryazarlığında erkeklerin kızlardan daha iyi performans gösterdiğini ve en yüksek genel performansı gösteren fen liselerinin olduğunu ortaya çıkarmıştır.

Bilgeç'in (2022) araştırması matematik eğitimi uzmanlarının ve öğretmenlerinin matematik okuryazarlığına ilişkin bakış açılarını araştırmıştır. Katılımcılar gerçek dünya bağlamlarını matematik okuryazarlığı öğretimine entegre etmenin ve geleneksel sınıf ortamlarının ötesine geçen problem çözme becerilerini geliştirmenin önemini vurgulamışlardır.

Öngel'in (2023) doküman analizi ortaokul matematik ders kitaplarını PISA matematik okuryazarlığı çerçevesi ışığında incelemiştir. Bulgular, ders kitaplarındaki soruların çerçevenin beklentilerini karşılamadığını, bağlamsal uygunluk ve içerik ve süreç çeşitliliğinden yoksun olduğunu ortaya çıkarmıştır.

Yıldız'ın (2023) çalışmasında Liselere Geçiş Sistemi (LGS) matematik soruları analiz edilmiş, matematik okuryazarlığı çerçevesiyle uyumlu hale getirilmiş ve öğretmen bakış açıları dahil edilmiştir. Sonuçlar, yorumlama ve değerlendirme gerektiren soruların azlığını ortaya çıkarmıştır ve matematik okuryazarlığı çerçevesiyle uyumlu bağlama dayalı soruların artması yönünde çağrıya yol açmıştır.

Bu çalışmalar toplu olarak günümüz dünyasında matematik okuryazarlığının öneminin altını çizmektedir ve eğitimciler, politika yapıcılar ve araştırmacılar için değerli bilgiler sağlamaktadır. Etkili eğitim müdahaleleri uygulayarak, kapsamlı değerlendirme araçlarını kullanarak ve ders kitaplarını ve değerlendirmeleri yerleşik çerçevelerle uyumlu hale getirerek, öğrencileri matematik açısından zengin bir dünyanın zorluklarıyla baş etmeye hazır, kendinden emin ve yetkin matematiksel iletişimciler haline gelmeleri için güçlendirebiliriz.

2.5.2.Uluslararası Araştırmalar

2.5.2.1. Matematiksel Düşünme ile İlgili Araştırmalar: Bu bölüm problem çözme, akıl yürütme, soyutlama ve iletişim gibi çeşitli bilişsel süreçleri inceleyerek matematik yeterliliğinin karmaşıklığını vurgulamaktadır. Bu becerilerin doğru bir şekilde değerlendirilmesi hem eğitimciler hem de araştırmacılar için önemli bir zorluk teşkil etmektedir. Makalede matematiksel düşünmenin farklı yönlerini inceleyen beş çalışma

(Chukwuyenum, 2018; Jeannotte ve Kieran, 2017; Rasmussen ve diğerleri, 2005; Widyatiningtyas ve diğerleri, 2015; Xu ve diğerleri, 2019) gözden geçirilmektedir. Bu çalışmalar matematiksel düşünmenin nasıl geliştiğine, nasıl değerlendirilebileceğine ve eğitim uygulamalarına etkili bir şekilde nasıl entegre edilebileceğine dair değerli bilgiler sunmaktadır.

Rasmussen ve diğerleri (2005), odağı "düşünme"den "etkinliğe" kaydırarak ileri matematiksel düşünmenin yeni bir kavramsallaştırmasını önermektedir. Bu yeniden çerçeveleme, matematiksel düşünmenin dinamik ve yerleşik doğasını vurgulayarak, çeşitli sosyal ve kültürel olarak gömülü matematiksel uygulamalara katılım yoluyla tezahürünü vurgulamaktadır. Bu perspektif, öğrencilerin matematiksel etkinliklerinin gelişen doğasını ve matematiksel ilerlemeyi destekleyen çoklu yatay ve dikey matematikleştirme katmanlarını dikkate almanın önemini vurgulamaktadır.

Widyatiningtyas ve diğerleri (2015), probleme dayalı öğrenmenin lise öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçleri üzerindeki etkisini araştırmaktadır. Bulgular, probleme dayalı öğrenme yaklaşımlarının, okul seviyelerine veya önceki matematik becerilerine bakılmaksızın öğrencilerin matematiksel eleştirel düşünme yeteneklerini önemli ölçüde geliştirdiğini göstermektedir. Bu çalışma, probleme dayalı öğrenmenin farklı öğrenciler arasında daha derin matematiksel anlayış ve muhakeme becerilerini geliştirme potansiyelini vurgulamaktadır.

Chukwuyenum (2018), Nijerya'daki lise son sınıf öğrencilerinin eleştirel matematiksel düşünme becerilerinin matematik başarısı üzerindeki etkisini incelemiştir. Sonuçlar, eleştirel matematiksel düşünme ile matematik performansı arasında pozitif bir ilişki olduğunu ortaya koymakta ve bu becerileri geliştirmenin öğrencileri matematikte başarılı olma konusunda güçlendirebileceğini öne sürmektedir. Ayrıca çalışma, öğrencilerin matematiksel kavramlara ilişkin kavramsal anlayışlarını geliştirmede eleştirel matematiksel düşünmenin rolünü vurgulamaktadır. Bu bulgular, eleştirel matematiksel düşünme süreçlerinin müfredata entegre edilmesi ve öğretmenlere bu alanda mesleki gelişim fırsatları sağlanması gerektiğini savunmaktadır.

Jeannotte ve Kieran (2017), okul matematiği bağlamında tanımını ve bileşenlerini çevreleyen belirsizliği ele alan kavramsal bir matematiksel akıl yürütme modeli sunmaktadır. Legendre'nin (2005) sentezinden ve Sfard'ın (2008) bilişsel perspektifinden yararlanarak, birbiriyle ilişkili üç unsuru kapsayan kapsamlı bir model öneriyorlar: mantıksal akıl yürütme, matematiksel bilgi ve gerekçelendirme. Bu model, eğitim ortamlarında matematiksel akıl yürütmeyi anlamak, değerlendirmek ve geliştirmek için analitik bir çerçeve sağlamaktadır.

Xu ve diğerleri. (2019), öğretmenlerin problem kurmayla ilgili olarak öğrencilerinin matematiksel düşünmelerine ilişkin algılarını araştırmaktadır. Bulgular, öğrencilerin gerçekte ortaya çıkardığı problem türleri ile öğretmenlerin bekledikleri problem türleri arasında bir tutarsızlık olduğunu göstermektedir. Bu uyumsuzluk, öğrencilerin problem kurma becerilerini daha iyi anlamak ve desteklemek için öğretmenler ve öğrenciler arasında gelişmiş iletişim ve işbirliğine ihtiyaç duyulduğunu göstermektedir. Ayrıca çalışma, öğretmenlerin öğrenci problem kurma konusundaki anlayışlarını ve bunun matematiksel düşünmedeki rolünü geliştirmeleri için mesleki gelişim fırsatlarının önemini vurgulamaktadır.

Bu çalışmalar toplu olarak modern eğitimde matematiksel düşünmenin önemini vurgulamakta ve eğitimciler, politika yapıcılar ve araştırmacılar için değerli bilgiler sunmaktadır. Matematiksel düşünme konusunda dinamik ve bağlam temelli bir bakış açısı benimseyerek, etkili öğretim yöntemleri kullanarak ve değerlendirme tekniklerini geliştirerek, yetenekli ve matematiksel yeteneklerine güvenen öğrencileri yetiştirme ve onları matematik açısından zengin bir dünyanın taleplerine hazırlama potansiyeline sahip olabileceğini ortaya koymuştur.

2.5.2.2. Matematik Okuryazarlığı ile İlgili Araştırmalar: Hayati ve Kamid (2019) yaptıkları araştırmada, fen bilgisi ve sosyal bilgiler bölümü öğrencilerinin bulunduğu lise son sınıf öğrencilerinin matematik okuryazarlığı sürecini betimlemeyi amaçlamışlardır. Tanımlayıcı nitel araştırma deseninde yürütülen bu çalışmanın örneklemini fen bilimleri ve sosyal bilgiler bölümünde okuyan onuncu sınıf öğrencileri oluşturmuştur. Bu çalışmada kullanılan veri toplama araçları, matematik okuryazarlığı soru formları ve görüşme kılavuzlarıdır. Sonuçlar, lise öğrencilerinin elde ettiği matematik okuryazarlığı sürecinin hem Doğa Bilimleri bölümünde okuyan öğrenciler hem de Sosyal Bilimler bölümünde okuyan öğrenciler için geçerli olduğunu göstermiştir. Özetle mevcut araştırmanın sonuçları; 1) Sosyal bilimler öğrencileri, problemi çözmek için iyi bir şekilde akıl yürütme ve planlama yapabilmekle birlikte hala küçük hatalar da yapmaktadırlar. Doğa bilimleri öğrencileri hesaplama ve formül kullanma konusunda başarılıdır. Ancak bu öğrenciler matematiksel olarak tartışma ve fikir beyan etmek konusunda yetersizlerdir. 2) sosyal bilimler öğrencileri problemi çözmek için akıl yürütme ve planlama yapmada iyi değiller, ancak öğrencilerin düşüncelerini sözlü olarak ifade etmede iyiler. Diyagramların matematik diline çevrilmesi ve çözülmesi sosyal bilimler öğrencileri için hala zordur. Doğa bilimleri öğrencilerinde formül kullanımı hala doğru değildir.

Suryadi ve Umbara (2019), öğretmen yaklaşımlarına dayalı olarak matematik okuryazarlığını yeniden yorumlamayı hedeflemişlerdir. Daha açık bir ifade ile araştırmada, öğretmenlerin özellikle PISA sorularına ilişkin bilgi ve matematik okuryazarlığı anlayışını, PISA anketinde matematik okuryazarlığını değerlendirmenin yönlerini ve süreçlerini ve katılımcıların kendi sınıflarında gerçekleştirdiği öğrenme sürecini keşfetmeyi amaçlamıştır. Araştırmada durum çalışması desenli nitel bir yöntem kullanılmıştır. Bu araştırmaya katılımcılarını 20 öğretmen oluşturmaktadır. Araştırmada veri toplama aracı olarak, anketler ve görüşme yönergeleri tercih edilmiştir. Verilerin analizinde ise betimsel analiz yöntemi tercih edilmiştir. Araştırmanın sonuçlarına göre, katılımcıların %60'ının matematik okuryazarlığı konusunda bilgi eksikliğine sahip olduğu tespit edilmiştir. Araştırmada elde edilen veriler, katılımcı öğretmenlerin, PISA anketinde öğrenme sürecini matematik okuryazarlığını değerlendirme sürecinden daha iyi anladıklarını göstermiştir. Bu durumu PISA başarısı yönünden olumsuz gören araştırmacılar, çeşitli öğretmen topluluklarında matematik okuryazarlığı için kampanyalar yürütülmesi gerektiğini ifade ederek, bu kampanyalarda özel bir program aracılığıyla eş zamanlı, yapılandırılmış ve sistematik olarak programlar gerçekleştirilmesi önerisinde bulunmuşlardır.

Hwang ve Ham (2021) gerçekleştirdikleri araştırmada, matematik okuryazarlığı ve farklı tarzdaki matematik görevlerini öğrenme arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Araştırmanın verilerini PISA 2012 veri tabanındaki 1649 Koreli öğrenci oluşturmuştur. Araştırmada yapısal eşitlik modellemesi uygulanmıştır. Araştırmada farklı tarzlardaki matematik görevleri için dört farklı görev türü (cebirsel kelime problemleri, prosedürel görevler, saf matematik akıl yürütme ve uygulamalı matematik akıl yürütme) dikkate alınmıştır. Ayrıca öğrencilerin matematik derslerinde ve testlerinde her bir görev türüyle ne sıklıkta karşılaştıklarına ilişkin öğrenci anketi de uygulanmıştır. Sonuçlar, prosedürel görevlerle birlikte öğrencilerin farklı tarzdaki matematik görevlerini yerine getirirken matematik okuryazarlığını doğrudan ve dolaylı olarak artırmasının muhtemel olduğunu göstermiştir. Bununla birlikte uygulamalı matematiksel akıl yürütmenin matematik okuryazarlığı ile olumsuz ilişkili olduğu tespit edilmiştir.

Barthakur ve diğerleri, (2020) çalışmalarında, matematik kaygısının öz düzenlemeli öğrenme ve matematik okuryazarlığı üzerinde etkisini araştırmıştır. Daha açık bir ifade ile araştırmacılar, Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (PISA) 2012'nin Avustralya alt kümesini kullanarak matematik kaygısının ve öz-düzenlemeli öğrenmenin matematik okuryazarlığı üzerindeki etkisini analiz etmişlerdir. Araştırmada yapısal eşitlik modellemesi kullanılmıştır. Araştırma sonucuna göre, araçsal motivasyon ve benlik kavramının matematik

kaygısını etkilediğini, bunun da azim ve öz yeterliliği etkileyerek matematik okuryazarlığını olumsuz etkilediği sonucuna ulaşılmıştır. Bu sebeple araştırmacılar, matematik okuryazarlığının geliştirilmesi için öğrencilerin matematik kaygılarının azaltılmasının önemi üzerinde durmuşlardır.

Hiller ve diğerleri (2021) matematik kaygısının ve matematik öz yeterliğinin, matematik okuryazarlığının yordayıcısı olup olmadığını belirlemeyi hedefledikleri araştırmalarında, 2003 ve 2012 yıllarında Yunan öğrencilerden oluşan ulusal temsili iki örnek kullanarak araştırmayı yürütmüşlerdir. Araştırma sonucunda elde edilen bulgular hem matematik kaygısının hem de matematik öz yeterliliğinin matematik performansıyla anlamlı bir ilişki gösterdiğini ve bu değişkenlerin çalışmaya dahil edildiğinde göstermiştir. Bu iki bileşen yani matematik kaygısının ve matematik öz yeterliğinin, tahmin modellerinde matematik performansındaki toplam varyasyonun %34'ünü açıkladığı tespit edilmiştir. Bununla birlikte matematik okuryazarlığının en güçlü belirleyicisinin ise sosyoekonomik durum olduğu belirlenmiştir. Bulgular matematik kaygısı ile matematik öz-yeterliği arasında güçlü bir etkileşim etkisinin varlığını ve bu etkileşimin matematik okuryazarlığını belli bir düzeyde etkilediğini ortaya koymaktadır.

Sutama ve diğerleri (2020) liselerde öğrencilerin matematik okuryazarlığı düzeylerini PISA soruları aracılığıyla incelemeyi amaçlamışlardır. Makalede sanayi devrimi 4.0 teşvik etmek için matematik okuryazarlığının oldukça hayati bir önem sahip olduğu ifade edilmiştir. Bu bağlamda araştırmada iki amaç bulunmaktadır. Bunlar: 1) Belirsizlik içeriğinde ve geçerli ve uygulanabilir verilerde PISA modeli sorularının nasıl geliştirileceğinin anlatılması. 2) PISA modelinin sorularını tamamlamanın öğrencilerin potansiyel etkisini incelemek. Araştırma 2018/2019 eğitim öğretim yılında uygulanmıştır. Araştırma kapsamında hem PISA benzeri sorulardan oluşan bir soru havuzu üretilmiş hem de öğrencilerin bu soruları çözerken izlediği yollar gözlemlenerek matematik okuryazarlığı düzeylerine ilişkin tespitlerde bulunulmuştur. Araştırma sonucuna göre, PISA modelinin belirsizlik ve veri içeriği açısından geçerli ve uygulanabilir sorularını üretmiştir. Doğrulayıcıların, geliştirilen soruların içerik, yapı ve dil açısından iyi olduğunu belirten yargısından çıkan sonuç geçerlidir. 32 öğrenciden 26'sının PISA modeli sorularını detaylı bir şekilde çözebildiğini göstermiştir; 26 öğrenci seviye 1'e (%81,25), 20 öğrenci seviye 2'ye (%62,50), 16 öğrenci seviye 3'e (%50.00), 12 öğrenci 4. seviyeye (%37,50), 8 öğrenci 5. seviyeye (%25.00) ve 4 öğrenci 6. seviyeye (%12.50) ulaşmıştır.

Yukarıda özetlenen araştırmalar dikkatli bir şekilde incelendiğinde matematiksel düşünme ve matematik okuryazarlığının genelde ayrı ayrı ele alındığı görülmüştür. Çalışmalarda farklı sınıf düzeylerinde matematiksel düşünmeyi etkileyeceği düşünülen değişkenler sınanmış ve matematiksel düşünmenin boyutları farklı katılımcıların gözünden incelenmiştir. Benzer şekilde matematik okuryazarlığı da matematiksel düşünme sürecine yakın yollarla araştırılmış ve matematik okuryazarlığını etkileyeceği düşünülen parametrelerin etkililiği araştırılmıştır. Her iki bölümde de ortak olarak en dikkat çeken nokta ise matematiksel düşünme ve matematik okuryazarlığının matematik başarısı, matematik kaygısı ve matematiğe ilişkin tutum üzerindeki etkileridir.

Araştırmalara göre hem matematiksel düşünme hem de matematik okuryazarlığının geliştirilmeye çalışıldığı araştırmalarda öğrencilerin matematik başarısı ve matematiğe ilişkin tutumları artmış, matematik kaygıları ise azalmıştır. Bu durum matematiksel düşünme ve matematik okuryazarlığının öğrencilerin matematik akademik başarısı üzerindeki etkisini göstermesi bakımından oldukça önemlidir. Bununla birlikte bu çalışmalarda matematiksel düşünme ve matematik okuryazarlığının birlikte ele alınmaması alandaki ciddi bir eksikliği işaret etmektedir. Çünkü matematiksel düşünme ve matematik okuryazarlığı bir anlamda birbirine benzer görevleri yapmayı gerektirir ve bu becerilerin birlikte desteklenerek geliştirilmesi oldukça önemlidir. Her ne kadar bu iki becerinin ayrı ayrı sınandığı çalışmalar öğrencilerin matematik başarısı, matematiğe ilişkin tutum ve matematik kaygısı üzerinde etkili olsa dahi bu iki becerinin birleştirilerek ve doğru şekillerde entegre edilmesi ile öğrenciler üzerinde ne şekilde etkilerinin olacağı merak konusudur. Mevcut araştırma bu bakımdan önemli görülmektedir. Çünkü matematiksel düşünme ve matematik okuryazarlığı gelişen öğrencilerin, nasıl bir mental değişim yaşayacağının anlaşılmasının, bunun açıklanmasının ve matematik başarısı üzerindeki etkilerinin belirlenmesinin matematik eğitimi için oldukça değerli olacağı düşünülmektedir.

Bu çalışmalar toplu olarak matematik okuryazarlığının çok yönlü doğasını vurgulayarak, onun çeşitli bilişsel süreçler ve bağlamsal faktörlerle olan karmaşık etkileşimini aydınlatmaktadır. Eğitimciler, politika yapıcılar ve araştırmacılar için zengin bir kaynak olarak hizmet ederler ve matematik yeterliliğinin doğasında olan karmaşıklıkların daha derinlemesine anlaşılmasını sağlarlar. Sosyo-kültürel etkiler, pedagojik yaklaşımlar ve bilişsel gelişim de dahil olmak üzere matematik okuryazarlığını şekillendiren çeşitli faktörleri titizlikle inceleyerek, gelişimini etkili bir şekilde nasıl teşvik edebileceğimize dair değerli içgörüler kazanıyoruz. Bu kapsamlı anlayış sayesinde eğitimciler, öğrencilerin matematiksel iletişim becerilerini geliştirmede karşılaştıkları özel ihtiyaçlara ve zorluklara hitap edecek

öğretim stratejilerini uyarlayabilirler. Politika yapıcılar bu içgörüleri müfredat tasarımına ve kaynak tahsisine bilgi sağlamak için kullanabilir, böylece eğitim sistemlerinin tüm öğrencilerde matematik yeterliliğini geliştirecek donanıma sahip olmasını sağlayabilirler. Ek olarak, araştırmacıların matematik okuryazarlığının incelikli dinamiklerini, ilerleyen teorik çerçeveleri ve değerlendirme metodolojilerini daha fazla keşfetmeleri teşvik edilmektedir.

Sonuçta amaç, öğrencileri yalnızca yetkin matematiksel iletişimciler değil, aynı zamanda matematiksel açıdan zengin bir dünyanın karmaşıklıklarında yol alabilecek eleştirel düşünürler haline getirmek için güçlendirmektir. Bu, matematiksel akıl yürütmeye, yaratıcılığa ve işbirliğine değer veren bir öğrenme ortamını teşvik ederek kanıta dayalı müdahaleleri uygulamak ve değerlendirme uygulamalarını geliştirmek için ortak bir çaba gerektirir. Bu bütünsel yaklaşımı benimseyerek, çağdaş eğitimin temel taşı olan matematik okuryazarlığının tüm potansiyelini ortaya çıkarmak için kolektif olarak çalışabiliriz.

3. BÖLÜM

YÖNTEM

3.1. Araştırma Deseni

Bu araştırma, matematiksel düşünmenin gelişiminde okuryazarlık problemlerinin rolünü araştırmayı amaçlamaktadır. Bu doğrultuda araştırmada durum çalışması araştırma deseni tercih edilmiştir. Durum çalışması, tek bir bireyin, grubun veya olayın derinlemesine ve ayrıntılı bir şekilde incelenmesini içeren nitel bir araştırma yöntemidir (Creswell, 2018). Durum çalışmaları sıklıkla karmaşık olguları araştırmak ve bireysel deneyimlere ilişkin daha derin bir anlayış kazanmak için kullanılır. Bu yöntem özellikle belirli bir durumun "nasıl" ve "neden"ini anlamaya çalışan araştırma soruları için uygundur (Yin, 2014).

Durum çalışmaları çok çeşitli araştırma sorularını ele almak için kullanılabilir, ancak bunlar özellikle aşağıdakileri amaçlayan sorular için çok uygundur (Merriam, 2016):

a) Karmaşık olayları anlamak: Durum çalışmaları, diğer yöntemlerle kolayca yakalanamayan karmaşık olayların zengin ve ayrıntılı bir şekilde anlaşılmasını sağlayabilir.
b) Bireysel deneyimleri keşfetmek: Durum çalışmaları, katılımcıların bireysel deneyimlerine dair içgörüler sağlayabilir; bu, insanların hayatlarını ve etraflarındaki dünyayı nasıl anlamlandırdıklarını anlamada yardımcı olabilir.
c) Hipotezler oluşturma: Durum çalışmaları gelecekteki araştırmalar için hipotezler oluşturmak için kullanılabilir. Araştırmacılar, katılımcıların deneyimlerini gözlemleyerek ve analiz ederek, niceliksel veya deneysel çalışmalarda daha fazla araştırılabilecek kalıpları ve ilişkileri belirleyebilirler.

Durum çalışmaları karmaşık konuları anlamak için güçlü bir araç olmakla birlikte bu desende tasarlanmış çalışmaların etkili bir şekilde yürütülebilmesi için dikkat edilmesi gereken noktalar bulunmaktadır. Durum çalışmalarını titiz ve metodolojik olarak sağlam bir şekilde yürütmek önemlidir. Bu sebeple, durum çalışması araştırmasının etkililiğini arttırmaya yönelik bazı öneriler bulunmaktadır (Robson, 1993).

Bunlardan ilki araştırma sorusunu açıkça tanımlamaktır (Merriam, 2016). Herhangi bir durum çalışmasında yapılması gereken ilk eylem, araştırma sorusunun belirlenmesi ve bu soruyu detaylı bir şekilde tanımlamadır. Araştırma sorusu spesifik, odaklanmış ve cevaplanabilir olmalıdır. Aynı zamanda çalışmanın genel araştırma hedefleriyle de uyumlu olmalıdır (Yin, 2014). Mevcut araştırmada bu kriteri sağlamak adına araştırma sorusu

verilmiş ve araştırma sorusunun anlaşılırlığının arttırılması için detaylı açıklamalarla desteklenmiştir.

Durum çalışmalarının etkililiğini arttıracak ikinci öneri uygun durumları seçmektir. Durum seçimi, durum çalışmalarında kritik bir adımdır. Durumlar amacına uygun ve araştırma sorusunu temsil edecek şekilde seçilmelidir. Araştırmacı, durumların yer aldığı bağlamın yanı sıra katılımcıların yaşı, cinsiyeti ve deneyimleri gibi faktörleri de dikkate almalıdır. Bazı durumlarda, özellikle bilgilendirici veya araştırma sorusuyla ilgili az sayıda durumun seçilmesi gerekli olabilir. Diğer durumlarda, incelenen olgunun daha kapsamlı anlaşılmasını sağlamak için daha fazla sayıda durumun seçilmesi daha uygun olabilir (Creswell, 2018). Mevcut araştırmada seçilen iki durumun birbiri ile ilişkili ve birbirlerini etkileyecek durumlar olmasına dikkat edilmiştir. Ayrıca katılımcılar ve bu katılımcıların özellikleri de hem araştırma sorusuna hem de araştırmada incelenecek durumlara uygun olarak belirlenmiştir.

Durum çalışmalarının daha etkili uygulanması noktasında bir diğer öneri ise birden fazla kaynaktan veri toplamaktır (Patton, 2015). Durum çalışmaları genellikle birden fazla kaynaktan veri toplanmasını içerir. Bu, röportajları, gözlemleri, belgeleri ve eserleri içerebilir. Birden fazla veri kaynağının kullanılması, bulguların güvenilirliğinin ve kabul edilebilirliğinin sağlanmasına yardımcı olur. Veri toplarken önyargı potansiyeline karşı dikkatli olmak önemlidir. Araştırmacı objektif olmaya ve çeşitli bakış açılarından veri toplamaya çalışmalıdır. Bulguların başkaları tarafından denetlenebilmesi için veri toplama sürecinin ayrıntılı olarak açıklanması da önemlidir (Merriam, 2016). Mevcut araştırmada bu ölçütün gerekliliklerini yerine getirmek adına birden fazla türde veri toplanmıştır. Bu veriler öğrencilerin okuryazarlık problemlerine ilişkin düşünme süreçlerinin belirlenebileceği problem çözme adımlarını ve matematiksel düşünmeye ilişkin aşamalarını tespit etmemize yardımcı olacak aşamalara ilişkindir.

Durum çalışmalarının daha etkili bir şekilde uygulanması için dikkat edilmesi gereken bir diğer nokta da verileri titizlikle analiz etmektir (Robson, 1993). Durum çalışmalarında verilerin analizi karmaşık ve yinelenen bir süreçtir. Araştırmacı, verilerdeki kalıpları, temaları ve ilişkileri belirlemek için çeşitli veri analizi tekniklerini kullanmalıdır. Analiz verilere dayanmalı ve araştırma sorusu tarafından yönlendirilmelidir. Bulguların şeffaf ve tekrarlanabilir olabilmesi için veri analizi sürecini detaylı olarak tanımlamak önemlidir. Araştırmacı aynı zamanda analizle ilgili olarak başkalarından gelen geri bildirimlere de açık olmalıdır (Yin, 2014). Bu ölçüt kapsamında veriler titiz bir şekilde analiz edilmiş ve analizler nitel araştırma konusunda uzman öğretim üyelerince kontrol edilmiştir.

Etkili bir durum çalışmasında olması gereken bir diğer özellik ise güvenilir sonuçlar çıkarmadır. Bir durum çalışmasının sonuçları, toplanan ve analiz edilen kanıtlara dayanmalıdır (Creswell, 2018). Sonuçlar spesifik olmalı, verilerle desteklenmeli ve araştırma sorusuyla alakalı olmalıdır. Araştırmacı ayrıca çalışmanın sınırlamalarını ve bulguların gelecekteki araştırma ve uygulamalara etkilerini de dikkate almalıdır (Patton, 2015). Bu ölçüt kapsamında da bir önceki maddede olduğu gibi nitel araştırma konusunda uzman öğretim üyelerinin görüşleri alınmış ve sonuçların toplanan ve analiz edilen verilere dayandırılmasına özen gösterilmiştir.

Durum çalışmaları yürütürken dikkat edilmesi gereken son ölçüt etik kurallara uygun davranmaktır. Bu etik ölçütler araştırmacının tüm katılımcılardan bilgilendirilmiş onam alması ve verilerinin gizliliğini korumayı içermektedir. Araştırmacı ayrıca katılımcılara ve onların deneyimlerine saygılı olmalıdır (Robson, 1993). Mevcut araştırmada tüm katılımcılardan onam formu alınmış ve veriler yalnızca verilerin analizini gerçekleştiren ve analiz sonuçlarını kontrol eden kişilerle paylaşılmıştır.

Bu araştırmada durum çalışması tasarımının kullanılması birkaç gerekçeden dolayı gerekli görülmüştür:

Bu gerekçelerden ilki araştırma sorusunun karmaşıklığıdır. Mevcut araştırmada araştırma sorusu karmaşık ve çok yönlüdür ve iki karmaşık olgu arasındaki ilişkiyi anlamaya odaklanmıştır. Bu olgular okuryazarlık problemleri ve matematiksel düşünmedir. Araştırmada uygulanacak durum çalışması tasarımının, bu ilişkinin incelikli ve derinlemesine araştırılmasına olanak tanıyacağı düşünülmüştür.

Araştırmada durum çalışmasının tercih edilmesinin bir diğer gerekçesi ise derinlemesine bir anlayış ihtiyacıdır. Çünkü araştırma aynı zamanda öğrencilerin okuryazarlık problemlerini çözerken bireysel deneyimlerinin ayrıntılı bir şekilde anlaşılmasını da gerektirir. Durum çalışması tasarımı, bu anlayışı sağlayabilecek zengin ve ayrıntılı verilerin toplanmasına olanak tanır (Patton, 2015).

Mevcut araştırmada bu desenin tercih edilmesinin başka bir gerekçesi ise yeni anlayışlar üretme potansiyelidir. Durum çalışmaları gelecekteki araştırmalar için yeni anlayışlar ve hipotezler oluşturmak için kullanılabilir (Creswell, 2018). Bu çalışmanın bulgularının da matematik eğitiminde okuryazarlığın rolü hakkında gelecekteki araştırmalara bilgi sağlamak için kullanılabileceği düşünülmektedir.

Alanyazın dikkatli bir şekilde incelendiğinde matematiksel düşünme boyutlarının dört aşamada gerçekleştiği görülmektedir. Bu aşamalar özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispattır. Özelleştirme, genelden özele düşünme, kavramların oluşturduğu büyük

bir kümeden daha küçük bir kümeye transfer olarak tanımlanmaktadır (Polya, 1957). Genelleme ise bazı örneklerden yola çıkarak daha kapsamlı olaylar kümesi hakkında tahminlerde bulunma şeklinde tanımlamıştır (Tall, 2002). Varsayımda bulunma, sözel olarak ya da cebirsel olarak tahminde bulunma, matematiksel hipotezleri formülle açıklama, tahminlerden belirli bir sonucu görebilme, hipotez kurma ve kurulan hipotezi test etme gibi eylemleri ifade eder (Arslan ve Yıldız, 2010). Son olarak ispat ise matematiksel problemi çözmenin ötesinde matematiğin doğasını anlamayı, matematiği kullanmayı ve problemde verilenlerin nedenini öğrenmeyi sağlamaktadır (Hersh, 1993).

Bu bağlamda, mevcut araştırmada öğrencilerin matematik okuryazarlık sorularını çözerken yukarıda kısaca açıklanan matematiksel düşünme boyutlarından hangilerini kullandıkları ve bunun söylemsel olarak nedenleri irdelenecektir. Daha açık bir ifade ile mevcut araştırma literatürde ifade edilen matematiksel düşünme boyutlarını farklı bir bağlamda ele almakta ve matematik okuryazarlık sorularının çözümünde kullanılıp kullanılmadığını incelemektedir.

3.2. Katılımcılar

Bu araştırmanın katılımcılarının belirlenmesinde amaçlı örnekleme yöntemlerinden bir tanesi olan ölçüt örneklemesi yöntemi kullanılmıştır. Araştırmalarda katılımcı grubu belirlenirken araştırma yöntemlerinin genel felsefesi ve yapısal özellikleri dikkate alınarak tercihler yapılmaktadır. Nicel araştırmalarda, pozitivist felsefeye uygun olarak genelde random örnekleme tercih edilirken, nitel araştırmalarda mevcut fenomen hakkında derinlemesine bilgi almayı sağlayacak şekilde katılımcılar bilinçli ve bir amaç doğrultusunda seçilerek araştırmaya dahil edilmektedir. Yine benzer şekilde nicel araştırmalarda evrene genelleme kaygısı varken bu durum nitel araştırmalar için geçerli değildir. Nitel araştırmalarda zengin bilgi kaynağı olan katılımcıların araştırmaya dahil edilmesi, incelenecek olan fenomenin daha iyi anlaşılmasını sağlayacaktır. Bu sebeple, bir olgu, olay ya da fenomenin derinlemesine ele alınarak incelenmesi, ortaya konması ve değerlendirilmesi gerektiğinde genelde amaçlı örnekleme yönteminin kabul gördüğü bilinmektedir (Patton, 1990; Yıldırım ve Şimsek, 2011).

Mevcut araştırmada da yukarıda açıklanan amaçlı örnekleme yöntemlerinden bir tanesi olan ölçüt örneklemesi yöntemi işe koşulmuştur. Bu yöntem, genel olarak, önceden belirlenmiş bir dizi ölçüte göre araştırma katılımcılarını belirleme esasına dayanmaktadır (Marshall ve Rossman, 1999). Bu bağlamda, mevcut araştırmada da katılımcılar

belirlenmeden önce bir dizi ölçüt belirlenmiş ve katılımcılar bu ölçütleri sağladığı takdirde araştırmaya dâhil edilmiştir.

Katılımcıların seçimi, bulguların kalitesini ve genellenebilirliğini önemli ölçüde etkileyebileceğinden, herhangi bir araştırma çalışmasının çok önemli bir yönüdür. Bu çalışmada katılımcı seçiminde iki temel ölçüt kullanılmıştır. Bu ölçütlerden ilki araştırmaya katılacak öğrencilerin matematik ders başarısı bakımından ne çok yüksek ne de çok düşük düzeyde olmaması gerekliliğidir. Yani katılımcılar orta matematik başarı düzeylerine göre seçilmiştir. Bu kriter, çalışmanın odağının ortalama matematik becerisine sahip öğrencilerde matematiksel düşünmenin gelişimini anlamaya devam etmesini sağlamak için oluşturulmuştur. İstisnai veya zayıf matematik performansına sahip öğrencileri hariç tutmak, genel öğrenci popülasyonu arasında matematiksel düşünmenin gelişiminde okuryazarlık problemlerinin rolünün daha odaklı bir şekilde incelenmesine olanak sağlar.

Araştırmada belirlenen ikinci ölçüt ise öğrencilerin Türkçe biliyor olmasıdır. Çünkü Türkiye'deki okullarda yabancı uyruklu (Suriye, Afganistan, Pakistan, Irak ve çeşitli Afrika ülkeleri) öğrenciler de öğrenim görmekte ve bazı öğrenciler kaynaştırma sınıflarında Türkçeyi henüz öğrenmekte olabilirler. Bu bakımdan kendini Türkçe ifade edemeyen öğrencilerin listesi alınmış ve araştırmaya dahil edilmemiştir. Bu kriter, çalışmanın ana eğitim dilinin Türkçe olduğu Türk okullarındaki bağlamı nedeniyle gerekliydi. Henüz Türkçe konusunda yeterli olmayan katılımcıların dahil edilmesi, potansiyel olarak analizi karıştırabilecek ve okuryazarlık sorunları ile matematiksel düşünme arasındaki ilişki hakkında anlamlı sonuçlar çıkarma yeteneğini engelleyebilecek ek dilsel karmaşıklıklar ortaya çıkaracaktır.

Katılımcıların belirlenmesinde son ölçüt ise kendini etkili ve doğru ifade edebilme gücü olarak belirlenmiştir. Çünkü araştırmaya dahil edilecek öğrenciler ile birebir görüşmeler gerçekleştirileceği için öğrencinin kendini ifade etme ve açıklama düzeyi nitel olarak derinlemesine sonuçlar elde etmek açısından gerekli görülmüştür. Bu doğrultuda araştırmanın uygulanacağı okulda öğretmenlik yapan Türkçe öğretmenleri ile de toplantı gerçekleştirilmiş ve iletişim becerileri daha yüksek olan öğrencilerin listesi alınmıştır.

Araştırmada katılımcıların belirlenmesi için tercih edilen ölçütlerin araştırmaya bazı katkılarının olacağı düşünülmüştür. Öncelikle bu ölçütler sayesinde incelenmek istenen durumlara odaklanmanın daha etkili olması sağlanmıştır. Orta düzeyde matematik başarısına sahip katılımcıları seçerek, çalışma genel öğrenci nüfusu arasında matematiksel düşünmenin gelişiminde okuryazarlık problemlerinin rolünü daha kesin bir şekilde inceleyebilir. Bu odaklanma, bu alandaki tipik öğrencilerin karşılaştığı zorlukların ve fırsatların daha derinlemesine anlaşılmasına olanak tanır.

İkinci olarak belirlenen ölçütler kültürel açıdan daha uygun bir bağlam sağlamaktadır. Katılımın Türkçe bilen öğrencilerle sınırlandırılması, çalışma bulgularının Türk eğitim bağlamıyla alakalı olmasını sağlar. Bu değerlendirme, Türk okullarının kendine özgü kültürel ve dilsel ortamı içindeki okuryazarlık sorunlarının ve matematiksel düşünmenin nüanslarını anlamak için gereklidir. Bu aynı zamanda araştırmalardaki dilsel karmaşıklığın azaltılması için de gereklidir. Türkçe yeterliliği sınırlı olan katılımcıların hariç tutulması, dil engellerinin çalışmanın bulguları üzerindeki potansiyel etkisini en aza indirir. Bu, dil edinimi ve kullanımına ilişkin ek kafa karıştırıcı faktörleri ortaya koymak yerine, okuryazarlık sorunları ile matematiksel düşünme arasındaki ilişkiye daha net bir şekilde odaklanılmasını sağlar.

Sonuç olarak, bu çalışmada kullanılan katılımcıları belirleme ölçütleri, bulguların geçerliliğini, güvenilirliğini ve genellenebilirliğini sağlamak için dikkatle değerlendirilmiştir. Orta düzeyde matematik başarısına ve Türkçe dil yeterliliğine sahip öğrencilerle çalışmayı yürütmenin, matematiksel düşünmenin geliştirilmesinde okuryazarlık problemlerinin rolüne daha fazla odaklanmayı sağlayacağı düşünülmüştür. Ayrıca bu ölçütlerin, araştırmanın kültürel bir bağlam içinde kalmasını ve kültüre uygun bir şekilde anlaşılmasını sağlayabileceği değerlendirilmiştir.

Bu kapsamda tüm ölçütlere göre çıkarmalar yapıldığında okulda araştırmaya dâhil edilebilecek 8. sınıfa devam eden 3 şube içinden 27 öğrenci olduğu tespit edilmiştir. Bununla birlikte nitel araştırmaların doğası gereği görüşmelerden elde edilen verilerin sistematik bir şekilde tekrara düştüğü yani veri doyumuna ulaşıldığı durumlarda yeni katılımcı eklenmesine gerek duyulmadığı ifade edilmektedir (Akmehmet Şekerler, 2015). Tüm bu süreçler titizlikle incelendikten sonra araştırma 18 katılımcı ile sürdürülmüştür. Araştırmaya katılım gösteren öğrencilerin demografik özellikleri Tablo'da sunulmuştur.

Tablo 4
Katılımcıların Demografik Özellikleri

Öğrenci	Cinsiyeti	Yaşı	Matematik Dersi Başarı Ortalaması	Türkçe Dersi Başarı Ortalaması
1	K	12	70	85
2	K	12	75	85
3	K	12	70	80

4	E	13	75	80
5	K	12	65	75
6	K	13	70	70
7	K	12	70	75
8	K	12	65	70
9	E	12	75	75
10	K	12	85	95
11	K	12	70	80
12	K	12	75	80
13	E	13	65	75
14	E	12	60	70
15	K	12	70	80
16	E	12	90	90
17	K	12	75	80
18	E	12	65	75

Araştırmaya katılan öğrencilerin demografik özellikleri incelendiğinde öğrencilerin 6 tanesinin erkek, 12 tanesinin kız öğrenci olduğu görülmektedir. Öğrencilerinin yaşı ortalama 12'dir. Öğrencilerin matematik dersi başarı düzeyleri orta-iyi düzey olan 60 ile 80 arasında değişmektedir. Öğrencilerin Türkçe dersi başarıları ise ortalama olarak 70 ile 85 arasındadır. Bu durum öğrencilerin Türkçe dersi başarılarının yüksek olduğunu yani öğretmenlerle gerçekleştirilen görüşmelere de dayanarak iletişim ve ifade becerilerinin yüksek olduğu şeklinde yorumlanmıştır.

3.3. Veri Toplama Araçları

Nitel araştırmalarda yanlış anlaşılmayı ve sonuçların geçersizliğini minimize etmek için veri çeşitlemesine başvurulur (Stake, 1995). Veri çeşitlemesinde amaç veri toplama araçları arasında tam olarak örtüşme olduğunu göstermek değil, farklı bakış açıları ile elde edilen sonuçları karşılaştırmaktır (Mayring, 2011). Çeşitleme genellikle anlamı açıklamak, bir gözlem ya da yorumun tekrar edilebilirliğini doğrulamak için çoklu algı kullanma sürecidir (Stake, 1998). Bir başka tanıma göre, doğruluğu arttırmak için bir şeye çoklu bakış açısı ile bakmak anlamına gelir (Neuman, 2014). Aynı olguya farklı ölçme yaklaşımları ile bakma, eğitim ve sosyal bilimlerde yaygın olarak kullanılmaktadır (Işık ve Semerci, 2019). Mevcut araştırmada da veri kaynakları, veri çeşitlemesi kapsamında elde edilmiştir.

Bunlardan ilki öğrencilere çözmesi için verilecek olan matematik okuryazarlık sorulardır (Ek-1'de verilmiştir). Bu sorular matematik okuryazarlık sorusu yazma eğitimi almış olan bu çalışmanın araştırmacısı tarafından derlenmiştir. Sorular Prof. Dr. Murat Altun tarafından kaleme alınan "Efemat 7-8 Matematik Okuryazarlığı Soruları" kitabından matematik okuryazarlığı konu alanları dikkate alınarak seçilmiştir. Soruların Efemat kitabından seçilme gerekçelerini sıralayacak olursak;

1. **Akademik geçerlilik ve güvenirlik:** Bu sorular akademik geçerlik ve güvenirlik testlerinden geçmiş, bu nedenle bilimsel araştırmalarda kullanılmaya uygun sorulardır.
2. **Kapsamlı içerik:** Altun'un soruları, matematik okuryazarlığının çeşitli bileşenlerini kapsar. Bu, araştırmanın daha geniş bir yelpazede veri toplamasına olanak tanır.
3. **Eğitim müfredatına uygunluk:** Bu sorular, Türkiye'nin eğitim müfredatına uygun olarak hazırlanmıştır. Bu durum, araştırmanın yerel bağlamda geçerli ve güvenilir olmasını sağlar.
4. **Pedagojik tasarım:** Matematik okuryazarlığı soruları pedagojik açıdan iyi yapılandırılmıştır. Öğrencilerin matematiksel düşünme ve problem çözme becerilerini ölçmek için uygundur.
5. **Uygulama kolaylığı:** Bu sorular, uygulama kolaylığı sağlar. Öğretmenler ve araştırmacılar tarafından kolayca kullanılabilir ve değerlendirme süreçlerini basitleştirir.
6. **Önceki araştırmalarla tutarlılık:** Daha önceki araştırmalar, Altun'un sorularının etkinliğini ve geçerliliğini desteklemektedir. Bu, araştırmacının yeni bulgularını önceki literatürle ilişkilendirmesini kolaylaştırır.
7. **Araştırma ve geliştirme:** Matematik okuryazarlığı soruları yazma üzerine yapılan araştırmalar ve bu alanda geliştirilen kaynaklar sınırlı sayıda kalmıştır. Pisa sorularına

benzer yeni ve etkili matematik okuryazarlığı sorularının bu kitapla birlikte literatüre sağladığı katkı soru seçiminde etkili olmuştur (Altun, 2020).

Araştırma kapsamında 10 soru düzenlenmiş ve her öğrenciye bu 10 soru cevaplanmak üzere iletilmiştir. Bu sorular düzenlenirken, araştırmacı matematik okuryazarlık sorusu hazırlama eğitiminde kendisine sağlanan kaynaklara da başvurmuş ve matematik okuryazarlık sorularının yapısal özelliklerini dikkate alarak bu soruları düzenlemiştir. Sonrasında ise matematik eğitimi alanında uzman iki öğretim üyesi ve yine matematik okuryazarlık sorusu yazma eğitimi almış iki öğretmen hazırlanan soruları incelemiş ve tezin amacı ile uyumlu olduğuna ilişkin görüş bildirmiştir. Böylece araştırmanın ilk veri toplama aracı olan matematik okuryazarlık soruları çalışmaya hazır hale gelmiştir. Bu sorulara yönelik ayrıntılı çözümler, yazılı doküman olarak elde edilmiştir. Sorular Ek-1'de verilmiştir.

Araştırmadaki ikinci veri toplama aracı ise görüşmedir. Nitel araştırmalarda kişilerin bir fenomen hakkında kendi deneyimlerinden hareketle deneyim, duygu, düşünce ve davranışlarının yapısını ve fenomen ile bu mevcut özellikleri arasındaki ilişkiyi anlamak oldukça önemlidir. Bu amaca ulaşmak için çeşitli veri toplama araçları kullanılabilir. Bunlardan bir tanesi de görüşmelerdir. Görüşmeler katılımcıların bir fenomen hakkındaki deneyimlerini, görüşlerini ve fenomene yönelik bakış açılarını anlamada oldukça önemlidir (Akmehmet Şekerler, 2015; Seidman, 2006). Bu bakımdan nitel araştırmalarda gerçekleştirilen görüşmeler sadece katılımcılardan belli soruların cevaplarını almayı değil aynı zamanda araştırılan fenomene yönelik kişisel bakış açılarını ve o fenomeni anlamlandırma sistematiklerini de kavramayı sağlar (Akmehmet Şekerler, 2015).

Görüşmeler genel olarak yapılandırılmış, yarı yapılandırılmış ve yapılandırılmamış olmak üzere üçe ayrılır (Merriam, 2009). Bu araştırmada yarı yapılandırılmış görüşme tercih edilmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşmeler katılımcılara önceden belirlenmiş soruların sorulduğu bununla birlikte ek sorular sorma gerekliliği doğduğunda buna da imkân tanıyan bir yöntemdir (Ayres, 2008). Yani görüşme sırasında, katılımcılardan gelen yanıtlara göre ek sorular sorulabilir. Bu da araştırmacıya gelen cevaplara göre derinlemesine bilgi almak için takip soruları (follow-upquestion) sorma özgürlüğünü sağlar (Berg, 2000; Patton, 2001; Yıldırım ve Şimşek, 2011). Böylece araştırmacı, inceleyeceği fenomen hakkında yeterli ve doygun veriye ulaşır (Akmehmet Şekerler, 2015). Araştırmada bu sebeple yarı yapılandırılmış görüşme tercih edilmiştir.

Yarı yapılandırılmış görüşmeler klinik mülakat şeklinde uygulanmıştır. Klinik mülakat, düşünce sürecini, düşüncelerin altında yatan sebepleri, yapılan bir etkinliğin ana basamaklarını belirlemek için katı olmayan soruların kullanıldığı bir veri toplama yöntemdir

(Clement, 2000). Klinik mülakat, araştırmacı ihtiyaç duyduğu donelere ulaşana kadar devam edebilir; verilen cevapta anlaşılmayan bir nokta olursa araştırmacı tekrar tekrar başka sorular sorabilir. Bu yöntem belirlenen soruların büyük bir bölümüne cevap bulmada, öğrencilerin problem çözme sürecindeki eksikleri ortaya çıkarmada etkilidir (Gökkurt ve Soylu, 2013, Karataş ve Güven, 2003, Karataş ve Güven, 2004, Naser, 2008, aktaran Eryılmaz ve Akdeniz, 2015).

Yarı yapılandırılmış görüşme soruları (Ek-2'de verilmiştir), hazırlanırken alanyazın dikkatli bir şekilde incelenmiş, ayrıca yazma eğitimi alanında doktorasını tamamlamış iki alan uzmanı akademisyen ile görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin çözdükleri matematik okuryazarlık sorularının çözümünün daha detaylı anlaşılması ve bu çözümler esnasında matematiksel düşünme süreçlerinin nasıl/ne kadar kullanıldığının anlaşılması için ilk olarak 11 adet sorudan oluşan yarı yapılandırılmış görüşme formu hazırlanmıştır. Soruların kolay anlaşılması, odağının olması yani tek bir amaca uygun olması, açık uçlu ve yorumlanabilir olması, yönlendirici ve çok boyutlu olmaması gibi özellikler dikkate alınmıştır (Bogdan ve Riklen, 1992; Brookfield, 1992; Patton, 1987; Yıldırım ve Şimşek, 2011). Bu aşamadan sonra hazırlanan ilk form Eğitim Programları ve Öğretimi bölümünde ve Sınıf Eğitimi bölümünde çalışan ve akademisyen olarak görev yapan nitel araştırmalarda uzmanlaşmış iki alan uzmanına sunulmuştur. Uzmanlardan gelen görüş ve önerilerle iki soru formdan çıkarılmış ve farklı iki soru ise tek soru olacak şekilde birleştirilerek forma eklenmiştir. Bu çıkarma ve düzenlemeler ile sekiz soruluk görüşme formu elde edilmiştir. Sonrasında ise asıl görüşmelere başlamadan önce üç öğrenci ile pilot görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmelerde soruların amaca hizmet etme, öğrenciler tarafından doğru anlaşılma ve herkes tarafından aynı şekilde algılanma durumlarına dikkat edilmiştir. Yapılan pilot görüşmelerde soruların araştırma açısından uygulanabilir olduğuna karar verilmiştir. Böylece sekiz soruluk yarı yapılandırılmış görüşme formunun araştırma için uygun olduğuna karar verilmiştir. Görüşme soruları Ek-2'de verilmiştir.

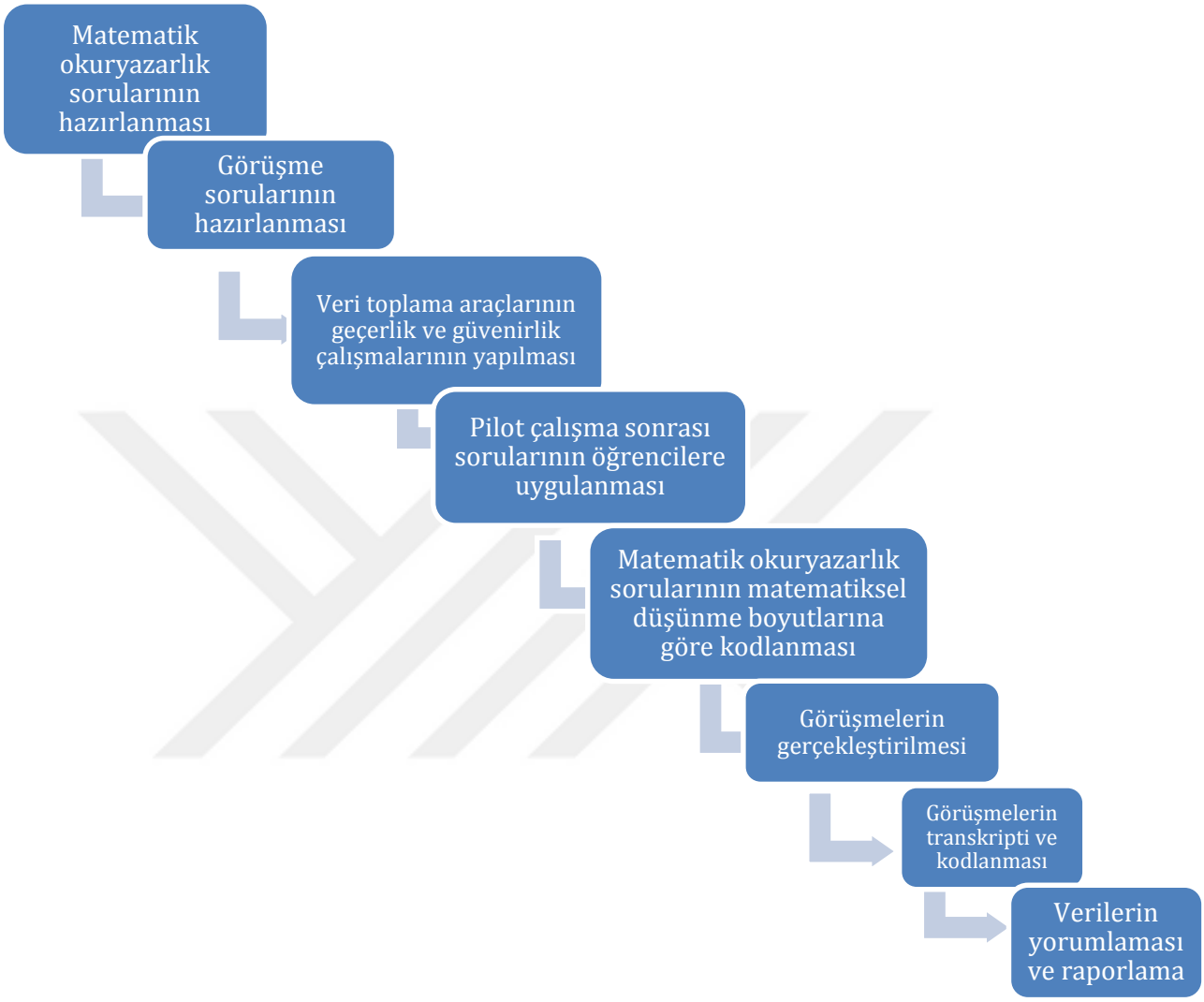
3.4. Veri Toplama Süreci

Araştırmanın veri toplama sürecinde ilk olarak pilot çalışması yapılmıştır. Mevcut çalışmanın yapıldığı okuldan uygulamaya dâhil olmayan 10 tane 8. Sınıf öğrencisi ile yapılan pilot çalışması sonuçları itibariyle incelenmiştir. Esas uygulamayı planlayabilmek için pilot uygulama sırasında öğrencilerin soruları ortalama kaç dakikada çözdüğü ve sorularda anlaşılamayan detaylar olup olmadığı tespit edilmiştir. Yapılan inceleme sonucuna göre araştırmada kullanılan 2 adet okuryazarlık sorusunda harf hatası ve eksik yazılan sayılar tespit edilmiştir. Uygulamadan alınan geri dönütler doğrultusunda gerekli düzeltmeler yapılmış ve

esas uygulamaya geçilmiştir. Araştırmacı tarafından son şekli verilen matematik okuryazarlık soruları öğrencilere verilmiş ve öğrencilerden soruları çözmeleri istenmiştir. Sonrasında ilgili soruların çözümleri araştırmacılar tarafından kodlanmıştır. Kodlama işlemi sonrasında öğrencilerle yarı yapılandırılmış görüşme formları klinik mülakat şeklinde uygulanmış ve öğrencilerin soruların çözümlerine yönelik söylemleri elde edilmiştir. Devamında bu söylemler transkipt edilmiş ve yeniden araştırmacılar tarafından kodlama işlemi yapılmıştır. Katılımcı öğrencilerin tamamı ile görüşme yapılmıştır. Tüm kodlama işlemleri sonucunda verilerin analizi raporlanmış ve genel değerlendirmelerde bulunulmuştur. Araştırmanın veri toplama ve raporlama sürecine ilişkin akışını gösterir diyagram aşağıda sunulmuştur.

Şekil 19

Veri Toplama Süreci



Yukarıda verilen özet diyagramın planlaması tezden önce yapılmış ve kronografi şeklinde oluşturulmuştur. Bir tezde kronografi (zaman çizelgesi), çalışmanın sistematik bir şekilde ilerlemesini sağlar ve araştırma sürecinin her aşamasının ne zaman tamamlanacağını netleştirir. Aşağıda bu tezin kronografisi verilmiştir:

Giriş ve Hazırlık (1-2 Ay)

- Hafta 1-2**:** Tez konusu belirleme ve danışmanla görüşme.
- Hafta 3-4: Literatür taraması ve araştırma sorularının netleştirilmesi.
- Hafta 5-6**:** Tez planının hazırlanması ve onaylanması.
- Hafta 7-8**:** Veri toplama yöntemlerinin belirlenmesi ve gerekli izinlerin alınması.

Literatür Taraması (2-3 Ay)

- Hafta 9-12: Konu ile ilgili akademik kaynakların detaylı incelenmesi.
- Hafta 13-16: Literatürün analizi ve özetlenmesi.
- Hafta 17-20**:** Literatür taraması bölümünün yazılması ve danışmanla değerlendirme.

Araştırma Tasarımı ve Veri Toplama (3-4 Ay)

- Hafta 21-24: Araştırma yönteminin geliştirilmesi.
- Hafta 25-28: Pilot çalışmanın yapılması ve yöntemlerin test edilmesi.
- Hafta 29-32**:** Veri toplama araçlarının nihai hale getirilmesi.
- Hafta 33-36: Veri toplama sürecinin başlatılması.

Veri Analizi (2-3 Ay)

- Hafta 37-40: Toplanan verilerin düzenlenmesi.
- Hafta 41-44: Analizlerin yapılması.
- Hafta 45-48: Analiz sonuçlarının yorumlanması ve tartışılması.

Sonuçlar ve Tartışma (1-2 Ay)

- Hafta 49-52: Sonuçların yazılması.
- Hafta 53-56: Tartışma bölümünün yazılması ve önerilerin sunulması.
- Hafta 57-60: Çalışmanın geneliyle ilgili genel değerlendirme.

Tez Yazımı ve Düzenleme (2-3 Ay)

- Hafta 61-64: Tez taslağının tamamlanması.
- Hafta 65-68: Danışmanla düzenli geri bildirim görüşmeleri.
- Hafta 69-72: Düzenlemeler ve son düzeltmeler.

Savunma ve Son Teslim (1-2 Ay)

- Hafta 73-76: Tez savunma sunumunun hazırlanması.
- Hafta 77-80: Savunma öncesi provalar ve danışmanla son değerlendirme.
- Hafta 81-84: Tez savunması ve gerekli düzenlemelerin yapılması.
- Hafta 85-88: Son teslim ve tezin nihai olarak sunulması.

Bu kronografi ile toplamda 1,5 ila 2 yıl sürebilecek kapsamlı bir araştırma süreci planlanmıştır. Tez konusuna, araştırma yöntemlerine ve diğer değişkenlere bağlı olarak sürelerde bazı değişiklikler yaşanmış olabilir**.** Ancak, bu plan genel bir rehber olarak işlev görmüştür.

3.5. Verilerin Analizi

Bu çalışmada verilerin analizinde betimsel analiz kullanılmıştır. Betimsel analiz genel olarak, araştırılacak fenomen ile ilgili kavramsal yapının ve araştırmada temaları oluştururken

kullanılacak alan bilgisinin açık biçimde var olduğu durumlarda kullanılır (Çepni, 2012). Betimsel analizin içerik analizinden farkı, içerik analizinde temalar ve bunların alt boyutları belirgin değildir. Yani araştırmada bu boyutlar elde edilen veriler ile şekillenir. Ancak betimsel analizde alanyazında mevcut olan boyutlarda değerlendirmeler yapılır. Yani araştırma sonucu elde edilen verilerin araştırma konusunun dayandığı teorik çerçevede ifade edilen boyutlarda olması gerekmektedir. Eğer önceden belirlenmiş bir teorik çerçeve var değil ise betimsel analizi kullanmak doğru bulunmamaktadır (Tavşanlı ve diğerleri, 2021). Bu doğrultuda elde edilen veriler teorik çerçeveye göre düzenlenir ve mevcut veriler bu düzenlemeye göre sınıflandırılır. Bu aşamada ilgili verinin teorik çerçeve içerisinde hangi temaya girdiğinin tespit edilmesi sürecinde sunulacak olan bire bir alıntıların da seçilmesi önemlidir (Yıldırım ve Şimşek, 2011).

Betimsel analizde elde edilen bulguların düzenli ve sistematik bir biçimde, ilgili fenomenin anlaşılmasını sağlayacak bir formda sunulması önemlidir (Berg, 2000). Bu bakımdan, betimsel analiz, görüşme, gözlem ya da herhangi bir nitel veri toplama süreci sonucunda elde edilmiş verilerin daha önceden mevcut olan temalar çerçevesinde açıklanması, yorumlanması ve neden sonuç ilişkilerinin kurulması esasına dayanır (Stenberg ve Maaranen, 2022). Bu işlemler yapılırken elde edilen sonuçların bire bir alıntılarla desteklenmesi de önemsenmektedir (Tavşanlı, 2021). Ayrıca araştırmacı, yapacağı tüm bu işlemlerde yorumlama eylemini de kullanmalı ve ilişkilendirdiği, anlamlandırdığı fenomenle ilgili çıkarımlarda bulunacak şekilde veriyi tanımalıdır (Yıldırım, 2010).

Mevcut araştırmada da yukarıda açıklanan bilgilerden hareketle, araştırılacak olan fenomen yani matematiksel düşünmenin boyutları literatürde tanımlandığı için betimsel analiz kullanılmıştır. Yapılan analiz iki bölümden oluşmaktadır. İlk olarak öğrencilere çözmeleri için verilen matematik okuryazarlık sorularının çözümlerinin matematiksel düşünmenin hangi boyutuna dâhil olacağı ile ilgili analizdir. Bu bölümde araştırmacı, öğrenciler tarafından çözülen soruları dikkatli bir şekilde incelemiş ve analiz için zihinsel bir hazırlık süreci sağlanmıştır. Sonrasında elde edilen çözümlerin tamamı hem araştırmacı hem de MEB'de matematik öğretmeni olarak görev yapan ve matematik eğitiminde yüksek lisansını tamamlamış uzman bir araştırmacı tarafından matematiksel düşünmenin boyutlarına göre sınıflandırılmıştır.

Araştırmacıların matematiksel düşünme boyutlarını belirleyebilmeleri için Ek-3'te verilen Matematiksel Düşünmeyi Değerlendirme Rubriği kullanılmıştır. Bu rubrikte matematiksel düşünme boyutları ve bu boyutların alt kategorilerinin yeterlilikleri verilmiştir.

Rubrikteki yeterlilikler, akademik literatürün incelenmesi sonucu her bir düşünme boyutunu temsil edecek şekilde belirlenmiştir.

Araştırmacılar çalışmalarını ayrı ayrı olarak yapmıştır. Sonrasında ise kodlayıcılar arasındaki uyum düzeyi tespit edilmiştir. Bunun için Miles ve Huberman'ın (1994), "Güvenirlik = Görüş birliği / (Görüş birliği + Görüş Ayrılığı) x 100" formülü kullanılmıştır. Yapılan işlem sonucu kodlayıcılar arasındaki uyum %89 olarak bulunmuştur. Bu oran kodlamanın doğru yapıldığına ve geçerli olduğuna işaret etmektedir (Miles ve Huberman, 1994).

İkinci olarak ise öğrencilerle gerçekleştirilen görüşmelerin analiz işlemleri yapılmıştır. Bu bağlamda öncelikle öğrencilerden alınan tüm ses kayıtları yazılı metne dönüştürülmüştür. Toplam 3 saatlik kayıttan 17 sayfalık döküm elde edilmiştir. Sonrasında ise ilgili dökümler araştırmacı tarafından dikkatli bir şekilde incelenmiştir. Bu inceleme sonrasında dökümlerde çalışma ile ilgisi olmayan bölümler dökümlerden silinmiştir. Dökümler son hale getirildikten sonra kodlama işlemi için mevcut çalışmanın yazarı ve yukarıda belirtilen araştırmacıya iletilmiştir. Kodlama işlemi ilk boyutta olduğu gibi ayrı ayrı gerçekleştirilmiştir. Bu noktada yapılan işlemin amacı öğrencilerin çözümleriyle ilgili olarak söylemlerini elde etmek ve yine bu söylemlerin matematiksel düşünmenin hangi boyutuna dahil olacağını belirlemektir. Kodlama işlemi tamamlandıktan sonra Miles ve Huberman'ın (1994) kodlayıcılar arası uyum yüzdesi yeniden işe koşulmuş ve bu sefer kodlayıcılar arası uyum %85 olarak tespit edilmiştir. Bu noktada iki araştırmacı farklı kodladıkları maddeleri tartışmak üzere bir araya gelmiş ve birlikte analiz süreçlerini tartışmışlardır. Bu değerlendirmeler sonucu kodlama sürecindeki bazı farklılıklarda uzlaşı sağlanmış ve kodlayıcılar arası uyum %92 olarak belirlenmiştir. Bu oran da öğrencilerle gerçekleştirilen, matematik okuryazarlık sorularına yönelik çözümlerinin matematiksel düşünme süreçleri ile ilişkisinin kurulduğu görüşme kayıtlarının kodlanma işleminin yüksek bir uyum ile tamamlandığını ortaya koymaktadır.

3.6. Nitel Araştırmalarda Geçerlik ve Güvenirlik

Bu çalışmada, gerçekleştirilen nitel çalışmanın geçerli ve güvenilir olması için bazı önlemler alınmıştır. İlk olarak nitel araştırmalardaki inandırıcılık boyutunun sağlanması için tek bir veri kaynağı kullanılmamış ve veri çeşitlemesine gidilmiştir. Böylece verilerin birbirini desteklemesi, ilişkilerinin kurulması ve anlaşılmak istenen fenomenin daha iyi kavranmasına hizmet edilmiştir (Patton, 1980). İkinci olarak araştırmacı, araştırmanın kuramsal çerçevesinden verilerin analizi ve araştırmanın raporlanması süreçleri dahil olmak üzere tüm boyutlarda meslektaş görüşmeleri gerçekleştirmiş ve araştırmanın yanlış yapılandırılmasının önüne geçmiştir. Meslektaşlarla gerçekleştirilen bu etkileşimler özellikle veri toplama

araçlarının hazırlanması, mevcut temaların tartışılması ve analizi sürecinde kritik rol oynamıştır. Bu da araştırmanın geçerliğini arttırmıştır (Lincoln ve Guba, 1985). Üçüncü olarak araştırmacı özellikle elde edilen verilerin dökümü ve oluşturulan temaların verilerle ne kadar uyumlu olduğunu anlamak için süreç içerisinde devamlı katılımcı teyidi işlemlerini gerçekleştirmiştir (Erlandson ve diğerleri, 1993). Bu doğrultuda ses kayıtlarından elde edilen dökümler hem bizzat araştırmacı tarafından ses kayıtları ve dokümler olarak karşılaştırılmış hem de katılımcılara dökümler iletilerek herhangi bir hata olup olmadığının teyidi alınmıştır (Tavşanlı ve Kaldırım, 2020).

Araştırmada aktarılabilirlik boyutunun sağlanması amacıyla da belli aksiyonlar alınmıştır. Bunlardan ilki ayrıntılı betimlemedir. Bu noktada hem temalar tema katoloğu oluşturularak açıklanmış ve betimlenmiş hem de verilerin çözümlemesi tüm detayları ile açıklanmıştır. Bu bakımdan çalışmada ayrıntılı betimleme ölçütünün sağlandığı kabul edilebilir (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Ayrıca araştırmada amaçlı örnekleme yönteminin kullanılması da oldukça önemlidir. Çünkü nitel araştırmalarda hem aktarılabilirliği arttırmak hem de karşımıza çıkan farklı ve özel durumları ortaya koymak amacıyla amaçlı örnekleme tercih edilmektedir.

Araştırmanın geçerli ve güvenilir olmasını sağlamak adına üçüncü olarak kodlayıcılar arası güvenirlik katsayıları hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar kodlamaların güvenirlik katsayılarının kabul edilebilir düzeyde olduğunu ortaya koymuştur (okuryazarlık sorularının çözümlerinin matematiksel düşünme aşamalarına ilişkin kodlama sonucu: %90, görüşmelerin kodlama sonucu %82 ve %90'dır). Kodlayıcılar arası uyumu tespit etmek için verilerin tamamı farklı kodlayıcılar tarafından kodlanmıştır. Bu durum da araştırmanın güvenirliğini desteklemektedir. Çünkü verilerin %20'sinin ortak kodlanması yeterli görülmektedir (Miles ve Huberman, 1994). Buna rağmen mevcut araştırmada verilerin tamamı ortak kodlanmıştır. Ayrıca kodlayıcıların süreç içerisinde bir araya gelmesi ve uzlaşılmayan noktalar hakkında müzakereler yürütülmesi de önemli görülmektedir (O'Connor, ve Joffe, 2020). Çünkü bu işlem kodlayıcıların anlaşmazlık yaratan durumları çözmelerine yardımcı olmuştur (MacPhail ve diğerleri, 2016).

4. BÖLÜM
BULGULAR

Bu bölümde, araştırma problemi bağlamında veri toplama araçlarıyla toplanmış verilerin çözümlenmesi sonucu elde edilen bulgu ve yorumlara yer verilmiştir. Bulgular; ortaokul öğrencilerinin problemleri çözerken kullanmış oldukları stratejilerinden elde edilerek, her problem bağlamında analiz edilmiş ve belirli temalar altında sunulmuştur.

4.1. Nicelik Sorularına İlişkin Bulgular

4.1.1. Telefon Faturası İsimli Probleme Ait Bulgular: Öğrencilere verilen okuryazarlık sorularından ilki nicelik sorularından olan Telefon Faturası isimli sorudur. Bu soruda Murat öğretmenin yurtdışı seyahati için satın almış olduğu gsm paketi bilgisi ve yapmış olduğu telefon görüşmelerinin dakikaları verilmiştir. Murat öğretmenin yurtdışında yaptığı telefon görüşmeleri toplam 41.11 dakika sürmüştür. Fakat 45 dakikalık paket sınırına ulaşıldığı mesajını almıştır. Bu sınıra nasıl ulaşılabileceği ile ilgili öğrencilerden yanıt beklenmektedir. Öğrencilerin çözüme ulaşmak için gerekli bütün olasılıkları görmeleri ve bu olasılıkları uygun matematiksel ifadelerle göstermeleri hedeflenmiştir.

Bu sorunun tek bir cevabı olmadığı gibi tek bir çözüm yolu da yoktur. Sorunun amacı öğrencilerin "paket sınırına nasıl ulaşılabileceği" ile ilgili farklı ve değişik stratejiler üretmesi, bu esnada matematiksel düşünmenin hangi boyutu ya da boyutlarını kullandıklarını ortaya çıkarmaktır. Bizim için geçerli ve mantıklı bir çözüm yolu, "GSM şirketinin ondalıklı değerleri bir üst tam sayıya tamamlayarak (yuvarlayarak) süre kullandırmış ve pakat ücretini bu stratejiye göre hesaplamış olma ihtimalidir.

Soru matematiksel süreçler açısından incelendiğinde, bu süreçler şu adımları içerir:

Problemi matematiksel olarak formüle etme: Murat Öğretmen'in telefonunda yaptığı toplam görüşme süresini hesaplama. Yurt dışı paketi sınırının aşılmasının nasıl gerçekleştiğini planlayabilme. Çözüm için modellerden yararlanma.

Matematiksel kavramları ve yöntemleri kullanma ve akıl yürütme: Paket sınırının aşılması ile ilgili strateji önerebilme. Dakikalarla ilgili gerekli hesaplamaları yapabilme. Matematiksel dili kullanıp sonuca gidebilme.

Matematiksel çıktıları yorumlama: Tahmin edilen sonuçların verilen dakika bilgileriyle tutarlı olup olmadığını kotrol edebilme. Ulaşılan çözümün gerçek hayatla uyumunu dikkate alarak geçerli olan değere dönüştürebilme (Dakikaların saniye kısımlarını yuvarlayıp tam sayıya dönüştürebilme gibi).

Bu problemde öğrencilerin verdiği cevaplar ve kullandığı stratejiler dikkatle incelenmiş, Tablo 5'teki veriler elde edilmiştir:

Tablo 5

Öğrencilerin 1. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları

Sonuca Ulaşma	Frekans
Mantıklı bir Sonuca Ulaşma	10
Mantıksız Bir Sonuca Ulaşma	3
Sonuca Ulaşamama	5
Toplam	18

Tablo 5 incelendiğinde öğrencilerin çoğunluğunun (%70'den fazla) sonuca ulaştığı, bunlardan mantıklı bir sonuca ulaşanların sayısının 10 olduğu görülmektedir. 3 öğrenci mantıksız bir sonuca ulaşırken 5 öğrenci de sorunun çözümüne dair herhangi bir strateji geliştirememiştir. Bu sonuçların yorumlanmasında problemin tek bir çözümünün olmaması, çözüm için farklı stratejilerin geliştirilmesi gerekliliği ve birden çok cevap olasılığının olması dikkate alınmalıdır. Bu soruda öğrencilerin matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispat basamaklarında işlem yapması beklenmektedir.

Tablo 6'da öğrencilerin 1. Sorunun çözümü ile ilgili kullandıkları matematiksel düşünme boyutları verilmiştir.

Tablo 6

Öğrencilerin 1. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Var	Yok
Özelleştirme	11	7
Varsayımda Bulunma	16	2
Genelleme	4	14
İspat	6	12

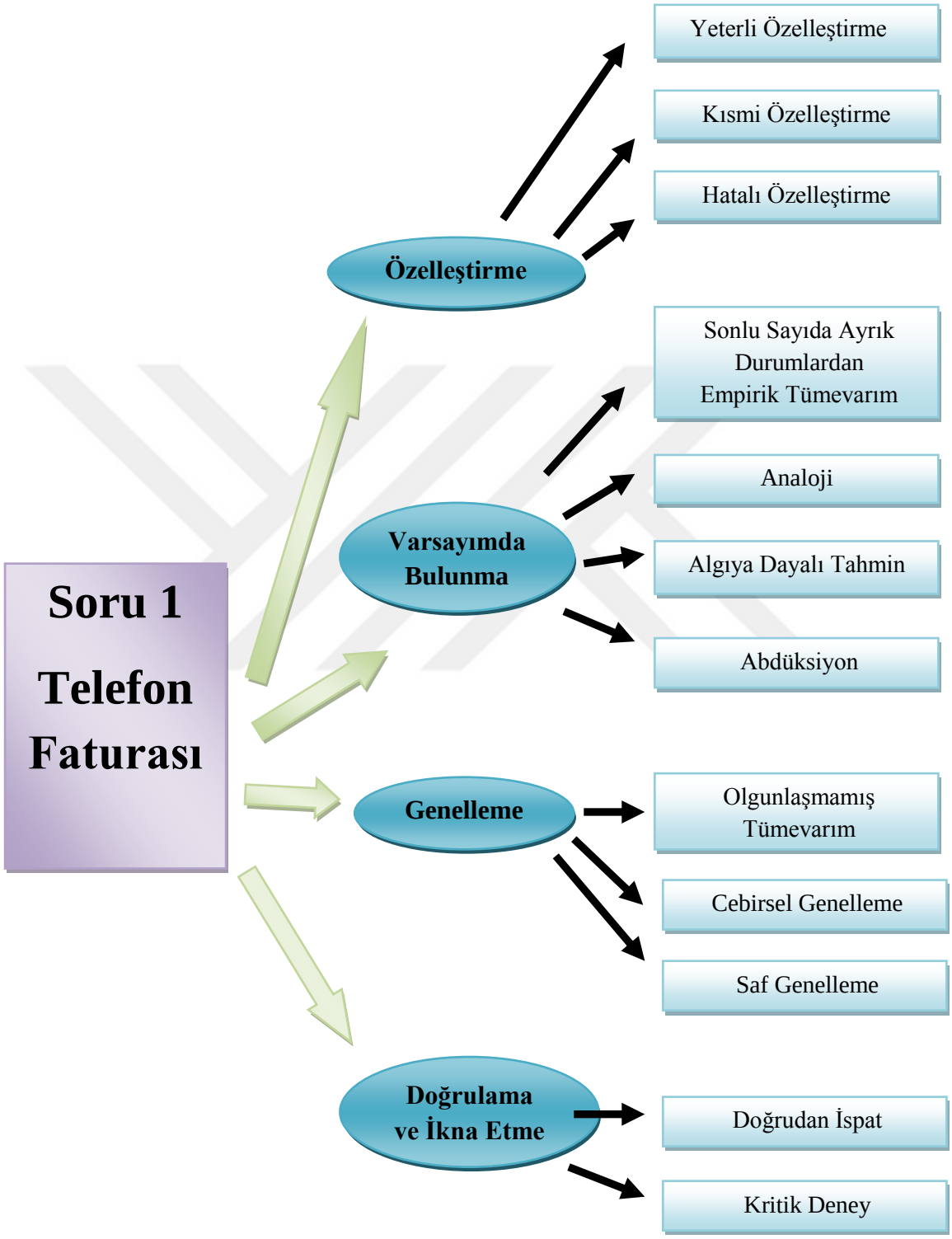
Tablo 6 incelendiğinde öğrencilerin 1. Soruyu çözerken matematiksel düşünme boyutlarından özelleştirme ve varsayımda bulunma düzeylerini büyük çoğunlukla kulandıkları gözlemlenmiştir. 16 öğrenci matematiksel düşünmenin özelleştirme basamağını kullanırken 2 öğrenci bu basamağı kullanmamıştır. Varsayımda bulunma basamağına geldiğimizde 16 öğrenci bu düşünme biçimini kullanırken sadece 2 öğrenci bu basamağı kullanmamıştır. Genelleme ve ispat düzeylerini ise az sayıda öğrencinin kullandığı görülmektedir. Genelleme

basamağını incelediğimizde sadece 4 öğrenci bu basamağı düşünme biçimi olarak kullanırken 14 öğrenci bu basanağı kullanmamıştır. Son olarak 6 öğrenci ispat basamağını kullanırken 12 öğrenci de bu düşünme biçimini kullanmamıştır.

Öğrencilerin kullanmış oldukları düşünme boyutlarının hangi alt kategorilerde yoğunlaştığı Şekil 20 ve Tablo 7'de verilmiştir.

Şekil 20

1. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları



Tablo 7

1. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları

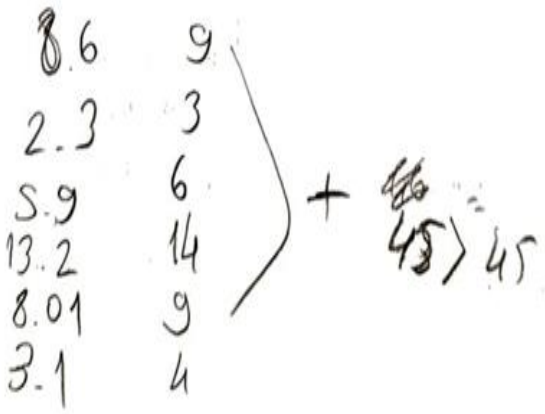
Boyutlar	Kullanılan Alt Kategoriler	Açıklama
Özelleştirme Boyutu	Yeterli Özelleştirme	Örneklerin temsil ettiği genel durumun doğru ve kapsamlı bir şekilde anlaşılıp ele alınması.
	Kısmi Özelleştirme	Örneklerin genel durumu tam olarak yansıtmadığı, eksik veya sınırlı bir perspektif sunması.
	Hatalı Özelleştirme	Yanlış veya yanıltıcı örneklerle genel bir durumu temsil etmeye çalışılması.
Varsayımda Bulunma Boyutu	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Gözlemlenen ayrık durumların genel bir ilke veya hipoteze ulaşmak için kullanılması.
	Analoji	Benzer durumlar veya olaylar arasındaki paralelliklerden yararlanarak sonuç çıkarma.
	Algıya Dayalı Tahmin	Bireysel algı ve sezgilere dayalı öngörülerde bulunma.
	Abdüksiyon	En iyi açıklamayı bulmak amacıyla mevcut kanıt ve bilgilerin yorumlanması.
Genelleme Boyutu	Olgunlaşmamış Tümevarım	Yeterli kanıt ve gözlem olmaksızın yapılan genellemeler.
	Cebirsel Genelleme	Matematiksel veya cebirsel yöntemler kullanarak genelleme yapma.
	Saf Genelleme	Doğrudan gözlemlerden elde edilen basit ve temel genellemeler.
Doğrulama ve İkna Etme Boyutu	Doğrudan İspat	Belirli bir hipotezin veya teorinin doğruluğunu kesin ve açık bir şekilde kanıtlama.
	Kritik Deney	Belirli bir hipotez veya teoriyi test etmek için yapılan kilit deneyler.

Birinci problemde öğrencilerin kullanmış oldukları alt kategoriler Şekil 20 ve Tablo 7'de verilmiştir. Bu soruda bazı öğrencilerin anlatılanı ve sorulanı anlayıp doğru olarak açıkladığı; problemi, çizdikleri ya da ifadeleri ile araştırıp örnek vermeye çalıştığı ve problemde anlatılanlara yönelik bilinçli hareketler yaptığı gözlemlenmiştir. Bunun sonucunda matematiksel düşünmenin özelleştirme basamağını kullanıp yeterli özelleştirme yaptıkları söylenebilir. Bununla beraber bazı öğrencilerin soruyu tam olarak özelleştiremediği görülmüştür. Bu öğrencilerin soruyu tam olarak anlayamadıkları ve çözüme aktaramadıkları, soruda söylenenlerin bir kısmını dikkate alıp kalan kısımlarına odaklanamadıkları, verdikleri örneklerde eksikliklerin olduğu ve sorunun detaylarına inmeden akla ilk gelen haliyle soruyu açıklamaya çalıştıkları görülmüştür. Bunun sonucunda kısmi ve hatalı özeleştirmeler yaptıkları söylenebilir. Yeterli özelleştirme yapan öğrencilerin diğer düşünme basamaklarını da kullandıkları, yeterli özelleştirme yapamayan öğrencilerin de diğer düşünme basamaklarına ya hiç geçemediği ya da sınırlı sayıda farklı düşünme basamağı kullandıkları görülmüştür.

Birinci problemde kullanılan düşünme boyutları, alt kategorilere yönelik açıklamalar ve bazı ortaokul öğrencilerinin çözüm yolu örnekleri aşağıda verilmiştir:

Şekil 21

Ö1'in Cevabı



Ö1 soruyu matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_1$: Şimdi soruda verilen dakikaları toplayınca 45 yapmıyor. Demek ki farklı bir şey düşünmemiz gerekiyor.

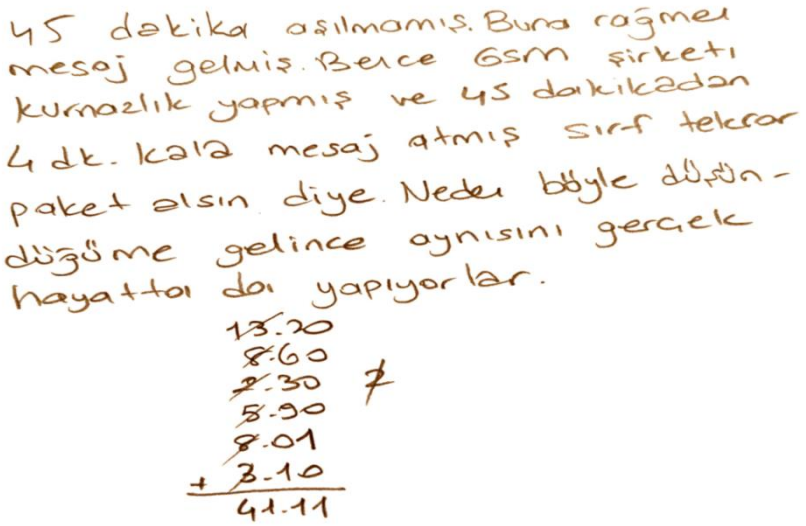
A: Ne düşündün?

$Ö_1$: Hemen dakikaları inceledim. Tam sayı değil. Virgüllü yani ondalıklı. Arada eklenen dakikalar var. Hemen aklıma yuvarlama geldi. Ondalık kısımları bir fazlaya yuvarlayınca mesela 8,6 dakika 9 oluyor, 2,3 dakika 3 oluyor. Yani sayıları bu şekilde teker teker yuvarlamaya başlayınca sayılar büyüyeceğinden dolayı 45'e ulaşabileceğimi düşündüm. Sonra zaten yuvarladığımız sayıları toplayınca 45 yapıyor. Böylece paket sınırına ulaşılma mesajı geliyor olabilir. Şirket başka dakika ekleyemeyeceğine göre bu şekilde dakika artırmıştır bence.

Birinci problem için Ö1'in cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, verilenleri kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Bunun yanında bu parçalardan genel bir fikre ulaşabildiği yani birbiriyle ilişkili olayları tahmin ile genelleyip genel bir kurala bağlayabildiği için **olgunlaşmamış tümevarım (genelleme)** yapmıştır. Öğrenci konuşulan dakikaları tek tek inceledikten sonra genel bir kuralı tahmin etmiş ve **sonlu sayıda ayrık durumdan empirik tümevarım (varsayımda bulunma)** yapmıştır. Son olarak öğrencinin herhangi özel bir örneği referans göstermeden az sayıda birkaç durumu gözlemlesi sonucu tahmine ulaşması ve sonucu bulması nedeniyle **saf deneycilik** türünden bir **ispat** yaptığını söyleyebiliriz.

Şekil 22

Ö3'ün Cevabı



Ö3, soruyu hem matematiksel hem de sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

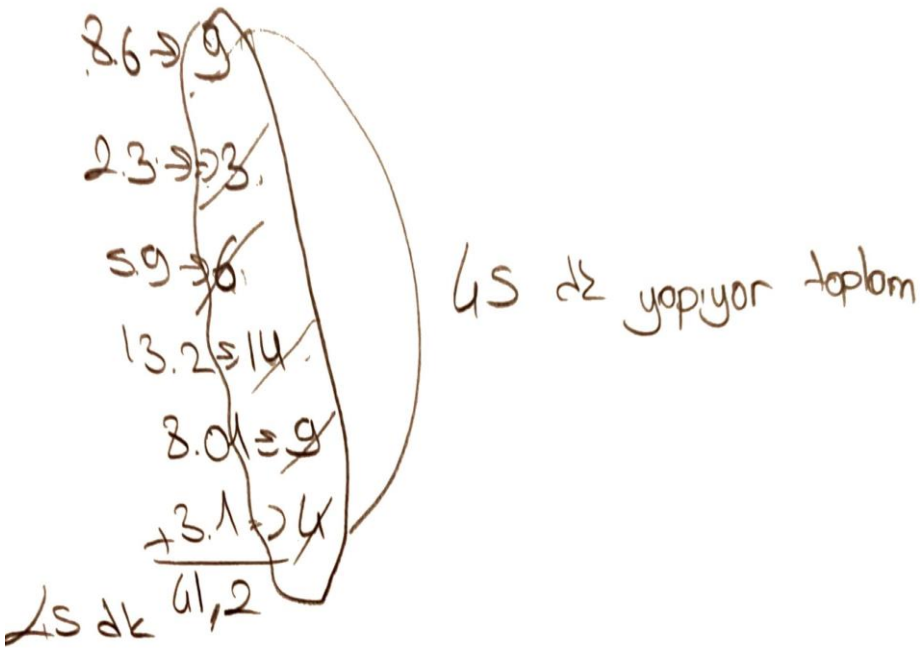
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö3: Burada öğretmenin konuşma sürelerini topladım. Ama 45 yapmıyor. 41.11 yapıyor. Mesajın gelmemesi lazım mantıken. Ama mesaj geliyorsa bunun sorumlusu gsm şirketidir. Normal hayatta da böyle yapıyorlar zaten. Sırf yeniden paket almak için konuşmuş gibi gösteriyorlar.

Birinci problem için Ö3'ün cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, verilenleri kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı görülmektedir. Dolayısıyla **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Bunun yanında faklı türlü açıklanamayan bir olayı genel bir kurala dayandırarak tahmin ettiği için (Gsm şirketleri gerçek hayatta da böyle yapıyor) **abdüksiyon** türünden tahminde bulunmuştur. Öğrenci çözüme yönelik günlük hayattan aklına gelen durumları genellemiş ve **olgunlaşmamış tümevarım** yapmıştır. Öğrenci GSM şirketinin "sırf tekrar paket alsınlar diye mesaj atıyorlar. " düşüncesi ile bir iddiayı savunmuş ve rastgele olmayan bir örnekle doğrulamaya çalışmıştır. Dolayısıyla **kritik deney** basamağında ispat yapmaya çalışmıştır.

Şekil 23

Ö8'in Cevabı



Ö8, 1. soruyu matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö8: Murat öğretmenin konuşma dakikaları 41,2 yapıyor. 45 yapması için şirketin bir şeyler yapması lazım. Birkaç tahminde bulundum. En mantıklısı yuvarlama geldi. Hem de bilimsel bir şey. Yani şirket virgüllü dakika istemiyor. Konuşma dakikalarının net olmasını istiyor. Virgülden sonraki kısımları üst sayıya yuvarlıyor. Böylece 45 sınırına ulaşmış oluyor.

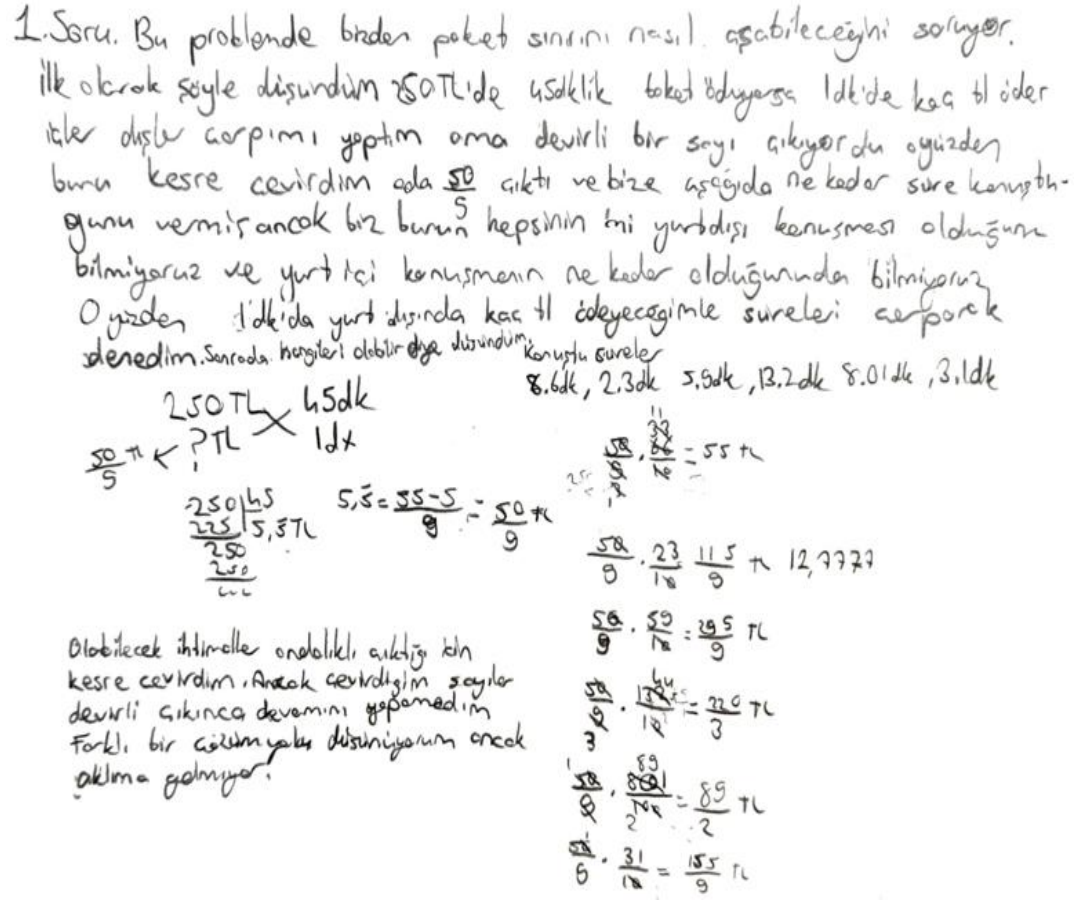
A: Diğer tahminlerin neydi?

Ö8: Yani başta internet kullanmış olabilir diye düşündüm. Ya da konum bilgisi için harita indirmiş olabilir. Yani internet kullandığı için şirket aldığı paketten direkt düşmüş olabilirdi. Ama sonra yuvarlama aklıma gelince daha mantıklı olduğunu düşündüm.

Birinci problem için Ö8'in cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, verilenleri kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Bunun yanında bu parçalardan genel bir fikre ulaşabildiği yani birbiriyle ilişkili olayları tahmin ile genelleyip genel bir kurala bağlayabildiği için **olgunlaşmamış tümevarım (genelleme)** yapmıştır. Öğrenci konuşulan dakikaları tek tek inceledikten sonra genel bir kuralı tahmin etmiş ve **sonlu sayıda ayrık durumdan empirik tümevarım (varsayımda bulunma)** yapmıştır. Bunun yanında görüşmede doğru cevabı vermeden farklı tahminlerde de bulunduğunu söylemiş ve fazla dakikaların internet kaynaklı olabileceğini de düşünmüş yani **abdüksiyon türünden tahminde** bulunmuştur. Son olarak öğrencinin herhangi özel bir örneği referans göstermeden az sayıda birkaç durumu gözlemlesi sonucu tahmine ulaşması ve sonucu bulması nedeniyle **saf deneycilik** türünden bir ispat yaptığını söyleyebiliriz.

Şekil 24

Ö11'in Cevabı



Ö11, soruyu hem matematiksel hem de sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

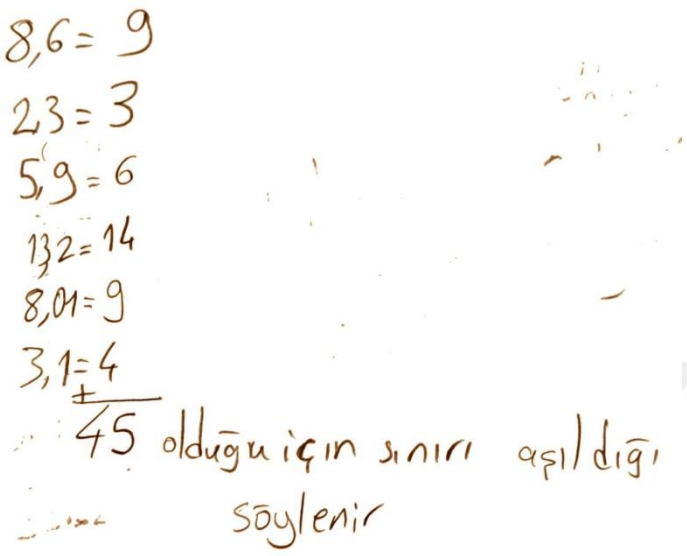
Ö11: Çözüm yoluna başlarken oran orantıdan yararlandım. 45 dk.'lık paket 250 TL oluyorsa 1 dk. ne kadardır onu bulmaya çalıştım. Daha sonra bu ücreti soruda verilen dakikalar ile çarptım. Sonuçlar devirli ondalık sayı çıkınca devam edemedim. Açıkçası ondan sonra tıkandım.

Birinci problem için Ö11'in cevabı incelendiğinde, soruda istenilenin öğrenci tarafından tam anlaşılamadığı, ilk aklına gelen içler dışlar çarpımı yöntemiyle çözüme ulaşmaya çalıştığı, fakat burada da işlem karmaşasına düşüp durumun içinden çıkamadığı görülmektedir. Dolayısıyla yaptığı işlemlerde cevaptan büyük sapmalar olduğu söylenebilir. Bu açıdan **hatalı özelleştirme** yaptığı söylenebilir. Bunun yanında faklı türlü açıklanamayan bir olayı genel bir kurala dayandırmış ve içler dışlar çarpımı yöntemi ile çözüme gitmeye çalışmıştır. Dolayısıyla **abdüksiyon türünden tahminde** bulunmuştur. Öğrenci önceden

bildiği formüllere dayandırarak soruda verilen sayılarla doğrudan işlemler yapmış, dolayısıyla **doğrudan ispat** yöntemine başvurmuştur.

Şekil 25

Ö9'un Cevabı



Ö9, 1. soruyu matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

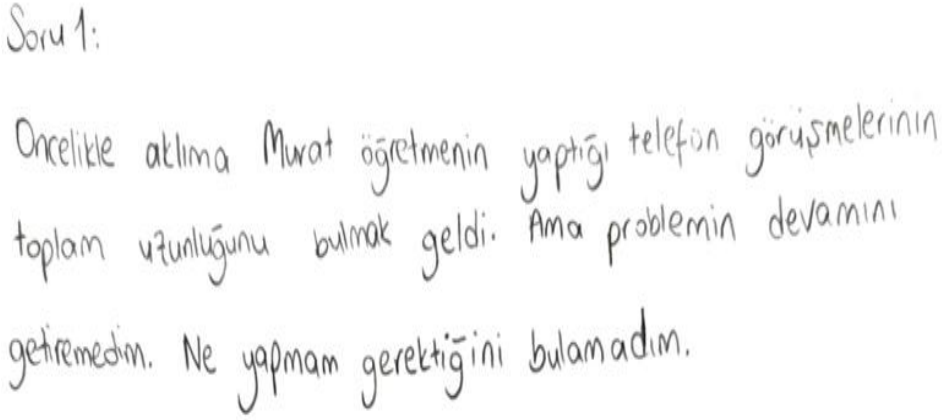
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö$_9$: Tek tek dakikaları incelediğimde bir üste yuvarladım. Şirket de konuşmaları yuvarlayarak faturalandırıyor bence. Böylece öğretmen sınıra ulaşıyor.

Birinci problem için Ö9'un cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, verilenleri kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Bunun yanında bu parçalardan genel bir fikre ulaşabildiği yani birbiriyle ilişkili olayları tahmin ile genelleyip genel bir kurala bağlayabildiği için **olgunlaşmamış tümevarım (genelleme)** yapmıştır. Öğrenci konuşulan dakikaları tek tek inceledikten sonra genel bir kuralı tahmin etmiş ve **sonlu sayıda ayrık durumdan empirik tümevarım (varsayımda bulunma)** yapmıştır. Son olarak öğrencinin herhangi özel bir örneği referans göstermeden az sayıda birkaç durumu gözlemlesi sonucu tahmine ulaşması ve sonucu bulması nedeniyle **saf deneycilik** türünden bir **ispat** yaptığını söyleyebiliriz.

Şekil 26

Ö12'nin Cevabı


Soru 1:

Öncelikle aklıma Murat öğretmenin yaptığı telefon görüşmelerinin toplam uzunluğunu bulmak geldi. Ama problemin devamını getiremedim. Ne yapmam gerektiğini bulamadım.

Ö12, sorunun çözümünü sadece sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

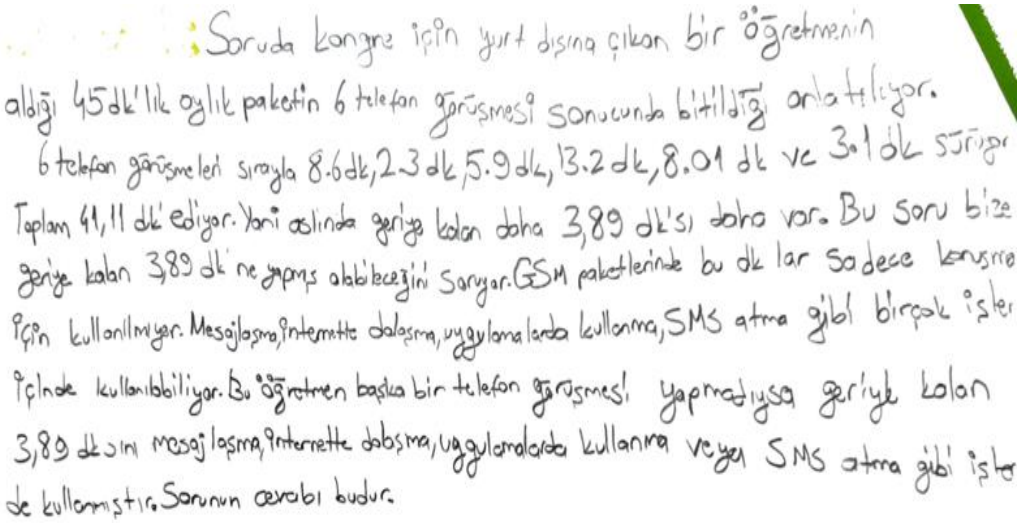
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_{12}$: Açıkçası bu problemi çok fazla anlayamadım. Murat öğrtmenin telefon görüşmelerinden herhangi bir şey çıkmıyor. Paket sınırına ulaşıldığı mesajı neden geliyor çok ilginç.

Birinci problem için Ö12'nin cevabı incelendiğinde, problemi doğru anlayamadığı, soruda verilenlerle ilgili yorum yapamadığı ve çözüme dair herhangi bir işlemsel çaba sarfetmediği görülmüştür. Soruyu özelleştiremediği gibi farklı herhangi bir matematiksel düşünme basamağı kullanmamıştır.

Şekil 27

Ö16'nın Cevabı


Soruda kongre için yurt dışına çıkan bir öğretmenin aldığı 45 dk'lık aylık paketin 6 telefon görüşmesi sonucunda bitildiği anlatılıyor. 6 telefon görüşmeleri sırayla 8.6 dk, 2.3 dk, 5.9 dk, 13.2 dk, 8.01 dk ve 3.1 dk sürüyor. Toplam 41,11 dk ediyor. Yani aslında geriye kalan daha 3,89 dk'sı daha var. Bu soru bize geriye kalan 3,89 dk ne yapmış olabileceğini soruyor. GSM paketlerinde bu dk lar sadece konuşma için kullanılmıyor. Mesajlaşma, İnternette dolaşma, uygulamalarda kullanma, SMS atma gibi birçok işler için kullanılabiliyor. Bu öğretmen başka bir telefon görüşmesi yapmadıysa geriye kalan 3,89 dk'sını mesajlaşma, İnternette dolaşma, uygulamalarda kullanma veya SMS atma gibi işler de kullanmıştır. Sorunun cevabı budur.

Ö16, sorunun çözümünü sadece sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_{16}$: Şimdi kongredeki yapılan telefon görüşmelerini topladım. 41.11 dakika yapıyor. 45 dakikayı geçmediğini anlıyoruz. Geriye 3.89 dakika kalıyor. Murat öğretmen başka herhangi bir görüşme yaptıysa zaten soruda verilmesi gerekirdi. O zaman bu dakikalar başka bir şeyden gitmiştir diye düşündüm.

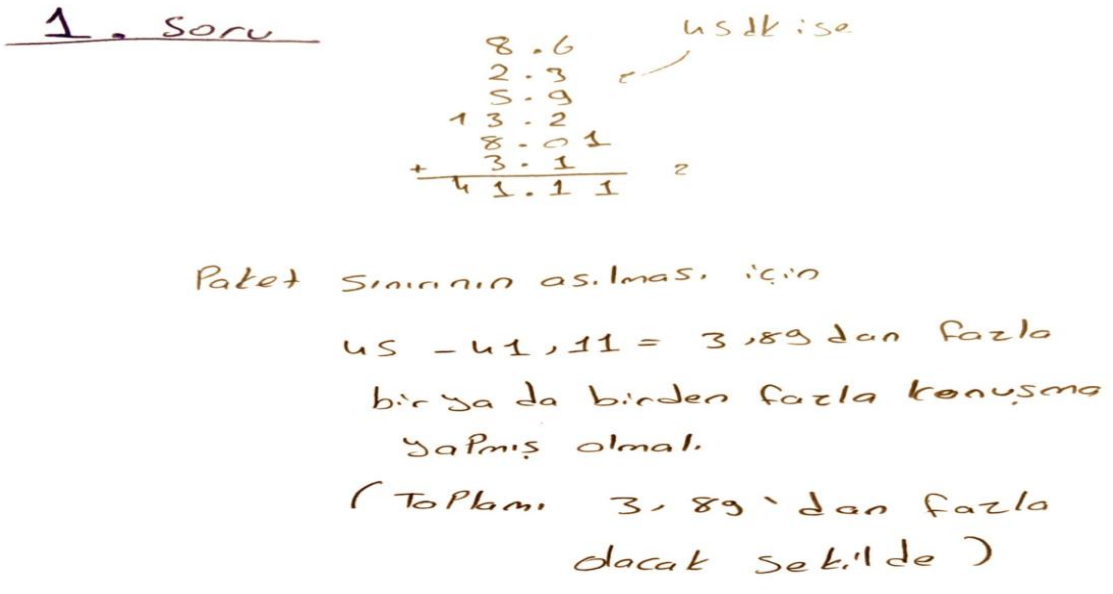
A: O dakikalara ne olmuştur peki?

$Ö_{16}$: Günümüzde telefonla sadece arama yapılmıyor. Sms atılıyor, internette dolaşılıyor, para transferi yapılıyor. Bu gibi şeyler hep paketten düşülüyor. Dolayısıyla öğrtmene gelen paket uyarısı da bununla alakalı olabilir diye düşünüyorum.

Birinci problem için Ö16'nin cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, verilenleri kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı görülmektedir. Dolayısıyla **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Bunun yanında bu parçalardan genel bir fikre ulaşabildiği yani birbiriyle ilişkili olayları genelleyip genel bir kurala bağlayabildiği için **olgunlaşmamış tümevarım (genelleme)** yapmıştır. Devamında faklı türlü açıklanamayan bir olayı genel bir kurala dayandırmış ve fazla dakikaların sms ve internet kaynaklı olduğunu savunarak **abdüksiyon türünden tahminde** bulunmuştur. Öğrenci sms ve internet kullanımlarının ücretlendirilmesi gerektiğini savunmuş yani birkaç örneğe bakarak ifadenin doğru olduğu sonucuna vardığı için **saf deneycilik türnde bir ispat** yapmıştır.

Şekil 28

Ö15'in Cevabı



Ö15, sorunun çözümünü hem sözel hem de matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_{15}$: Şimdi öğretmenin konuşmalarının 45 dk. yapmadığını anladım. Orası tamam. Zaten toplayınca 45 yapmıyor. 41 küsür yapıyor. Ama 45'e nasıl ulaşıyor. İşte onu bulamıyorum. Öğretmenin belki de dalgınlığına gelmiş ve unutmuş olabilir yani. Arada konuşmuştur belki. Hee ya da şöyle olabilir. Başka biri onu aramıştır. Yurtdışında oluyoır ya. Başkası arasa da senden gidiyor. O da şimdi aklıma geldi. Kesin öyledir.

Birinci problem için Ö15'in cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, verilenleri kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı görülmektedir. Dolayısıyla **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Bunun yanında faklı türlü açıklanamayan bir olayı genel bir kurala dayandırarak tahmin ettiği için (başkası tarafından aranmanın faturaya yansıması) **abdüksiyon** türünden tahminde bulunmuştur. Öğrenci çözüme yönelik günlük hayattan aklına gelen durumları genellemiş ve **olgunlaşmamış tümevarım** yapmıştır. Öğrenci, yurtdışında aranınca bile aranan kişiye de fatura yansıması düşüncesi ile bir iddiayı savunmuş ve rastgele olmayan bir örnekle doğrulamaya çalışmıştır. Dolayısıyla **kritik deney** basamağında ispat yapmaya çalışmıştır.

4.1.2. Tavuk Yumurtası İsimli Probleme Ait Bulgular: Öğrencilere verilen okuryazarlık sorularından ikincisi nicelik sorularından olan Tavuk Yumurtası isimli sorudur. Bu soruda beklenen çözüm yolu şu şekildedir: Ortalama 60 gr olan standart bir yumurtanın yaklaşık %70'i yani 42 gr'ı yumurta akıdır. %30'u yumurta akı olan 500 gr'lık bir tatlıda da 150 gr yumurta akı bulunmaktadır. bu tatlı için 3 adet yumurtanın yeterli gelmediği (3x42=126 gr) ve 4 adet yumurtanın kullanılması gerektiği (4x42=168) bilinmektedir.

Soru matematiksel süreçler açısından incelendiğinde, bu süreçler şu adımları içerir:

Problemi matematiksel olarak formüle etme: Yumurta akının yumurta ağırlığının %70'ine denk geldiği ve bunu kullanarak her bir yumurta için akın ağırlığının hesaplanması.

Matematiksel kavramları ve yöntemleri kullanma ve akıl yürütme: Yumurta akı miktarını hesaplamak için oranlama ve çarpma işlemlerini kullanma. Tatlı için gerekli olan yumurta akı miktarını hesaplamak için verilen bilgileri ve oranları kullanarak doğru sonuca ulaşma.

Matematiksel çıktıları yorumlama: Sonuç, 4 adet tavuk yumurtasının tatlı yapımı için gereken yumurta akı miktarını karşılayabileceğini göstermektedir. Bu süreçlerle,

matematiksel olarak problemi anlamak, doğru hesaplamaları yapmak ve sonuçları yorumlamak mümkün olmuştur.

Bu problemde öğrencilerin verdiği cevaplar ve kullandığı stratejiler dikkatle incelenmiş, Tablo 8'deki veriler elde edilmiştir:

Tablo 8

Öğrencilerin 2. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları

Çözüm	Frekans
Doğru Sonuca Ulaşma	12
Yanlış Sonuca Ulaşma	6
Sonuca Ulaşamama	0
Toplam	18

Tablo 8 incelendiğinde öğrencilerin çoğunluğunun (% 65'den fazla) doğru sonuca ulaştığı görülmektedir. 12 öğrenci doğru sonuca ulaşırken 6 öğrenci de soruyu çözmesine rağmen yanlış sonuca ulaşmıştır. Bu soruda öğrencilerin matematiksel düşünmenin basamaklarını kullanıp kullanmadıkları belirlenecektir.

Tablo 9'da öğrencilerin 2. Sorunun çözümü ile ilgili kullandıkları matematiksel düşünme boyutları verilmiştir.

Tablo 9

Öğrencilerin 2. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları

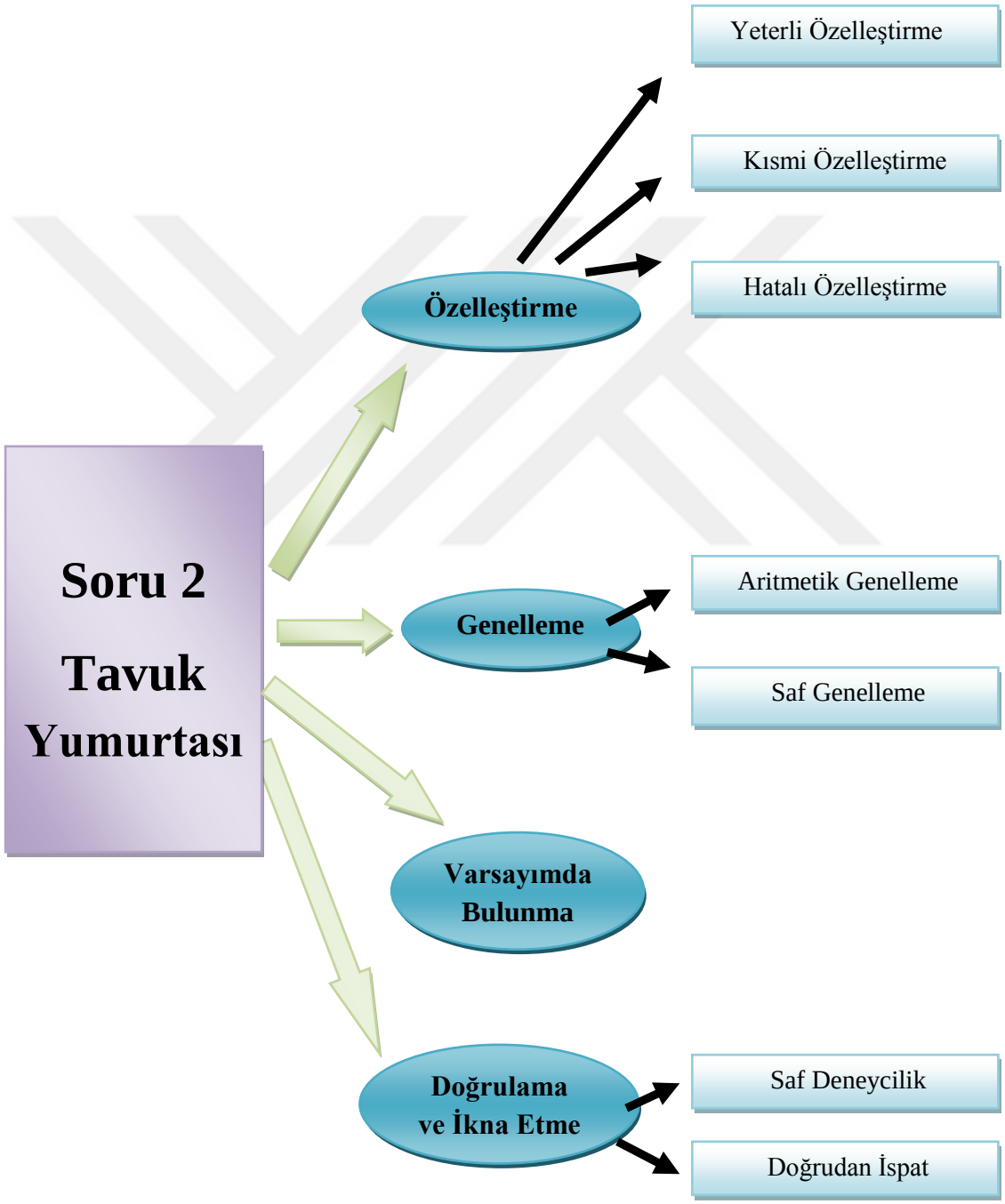
Matematiksel Düşünme Boyutları	Var	Yok
Özelleştirme	10	8
Varsayımda Bulunma	0	18
Genelleme	18	0
İspat	18	0

Tablo 9 incelendiğinde 18 öğrencinin tamamının 2. soruyu çözerken matematiksel düşünme boyutlarından, genelleme ve ispat basamaklarını kulandıkları gözlemlenmiştir. Sorunun yapısı gereği öğrencilerin tahmin basamağını kullanmalarına gerek kalmamıştır. Bazı öğrencilerin ise özelleştirme basamağında hatalar yaptıkları söylenebilir.

Öğrencilerin kullanmış oldukları düşünme boyutlarının hangi alt kategorilerde yoğunlaştığı Şekil 29 ve Tablo 10'da verilmiştir.

Şekil 29

2. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları



Tablo 10

2. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları

Boyutlar	Kullanılan Alt Kategoriler	Açıklama
Özelleştirme Boyutu	Yeterli Özelleştirme	Örneklerin temsil ettiği genel durumun doğru ve kapsamlı bir şekilde anlaşılıp ele alınması.
	Kısmi Özelleştirme	Örneklerin genel durumu tam olarak yansıtmadığı, eksik veya sınırlı bir perspektif sunması.
	Hatalı Özelleştirme	Yanlış veya yanıltıcı örneklerle genel bir durumu temsil etmeye çalışılması.
Varsayımda Bulunma Boyutu		
Genelleme Boyutu	Aritmetik Genelleme	Kavramların ortak bir ilişkisinin genelleştirilmesi.
	Saf Genelleme	Doğrudan gözlemlerden elde edilen basit ve temel genellemeler.
Doğrulama ve İkna Etme Boyutu	Doğrudan İspat	Belirli bir hipotezin veya teorinin doğruluğunu kesin ve açık bir şekilde kanıtlama.
	Saf Deneycilik	Sadece birkaç örneğe bakarak ifadenin doğru olduğu sonucuna varmak

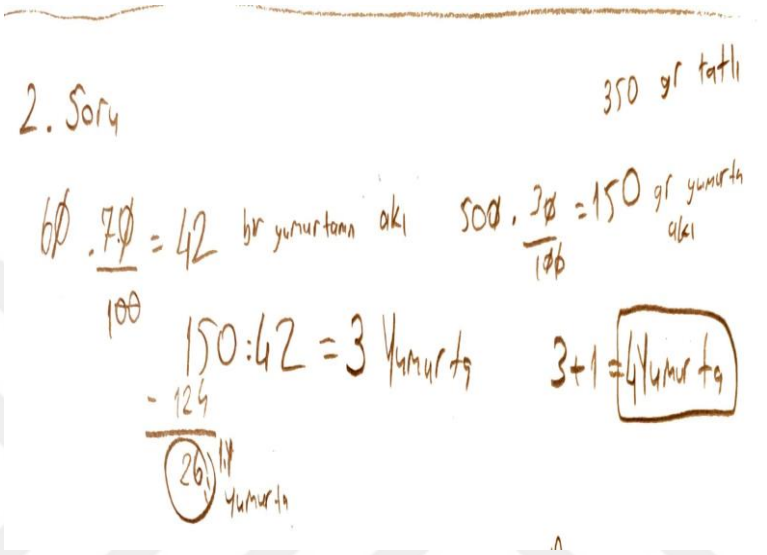
İkinci problemde öğrencilerin kullanmış oldukları alt kategoriler Şekil 29 ve Tablo 10'da verilmiştir. Bu soruda bazı öğrencilerin anlatılanı ve sorulanı anlayıp doğru olarak açıkladığı; problemi araştırıp örnek vermeye çalıştığı ve problemde anlatılanlara yönelik bilinçli hareketler yaptığı gözlemlenmiştir. Bunun sonucunda matematiksel düşünmenin özelleştirme basamağını kullanıp yeterli özelleştirme yaptıkları söylenebilir. Bununla beraber bazı öğrencilerin isteneni büyük oranda anladıkları ancak gözden kaçan küçük ama sonucu etkileyen durumların olduğu görülmüştür. Bunun sonucunda kısmi ve hatalı özeleştirmeler yaptıkları söylenebilir. Bu sorunun yapısı gereği öğrenciler varsayımda bulunma alt boyutunu kullanmamışlardır. Öğrenciler iki değişken arasındaki ilişkiyi matematiksel ve sözel olarak ifade ettiği ve bunlardan yola çıkarak çözüm için strateji geliştirdiği için genelleme boyutunda aritmetik genelleme ve saf genelleme kullanmışlardır. Öğrenciler birkaç örneğe bakarak ve

bilinen formüllere dayandırarak ispat basamağının saf deneycilik ve formüle dayalı ispat alt kategorilerini kullanmışlardır.

İkinci problemde kullanılan düşünme boyutları, alt kategorilerine yönelik açıklamalar ve bazı ortaokul öğrencilerinin çözüm yolu örnekleri aşağıda verilmiştir:

Şekil 30

Ö1'in Cevabı



Ö1, sorunun çözümünü matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

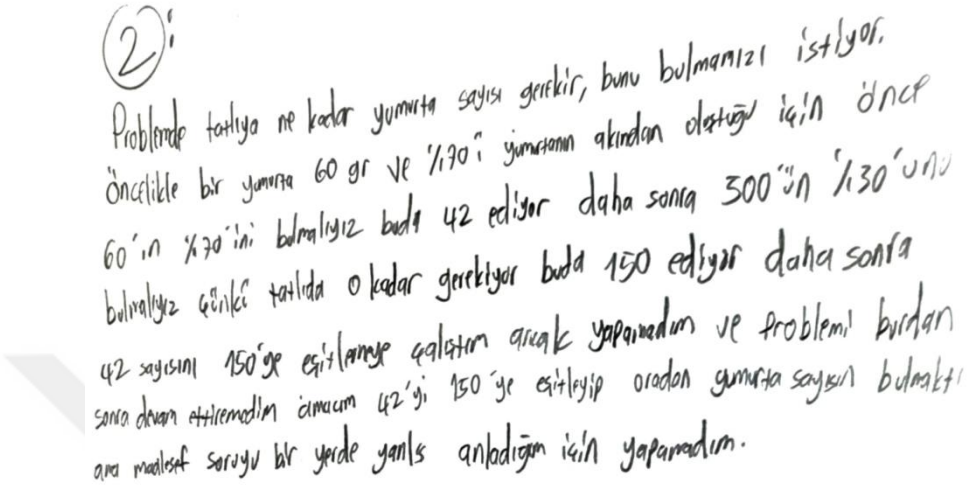
$Ö_1$: Öncelikle bir yumurtanın yüzde kaçının yumurta akı olduğunu buldum. Sonra 500 gr tatlıda ne kadar yumurta akı var onu hesapladım. Tatlıda 150 gr yumurta akı varmış. Sonrasında bir yumurta akı 42 gr olduğu için 150'yi 42'ye böldüm. Çünkü kaç tane yumurtaya ihtiyaç duyduğunu soruyor. Böldüğümüzde 3 yumurta buluruz. Ama sonuç kalanlı çıktığı için ve yetmediği için bir yumurta daha eklememiz gerekiyor. Bundan dolayı sonuç 4'tür.

İkinci problem için Ö1'in cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, verilenleri kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Bunun yanında da değişkenler arası ilişkiyi matematiksel olarak ifade ettiği ve genelleyebildiği için **saf genelleme** yapmıştır. Öğrenci

doğrudan işlemler yapıp sonuca ulaştığı için, ispat boyutunda **doğrudan ispat** yaptığını söyleyebiliriz.

Şekil 31

Ö12'nin Cevabı



Ö12, sorunun çözümünü sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö12: Yani işlemleri yaptım sonuca kadar geldim aslında. Tavuk yumurtasındaki akı, tatlıdaki ak miktarını falan hesapladım. Ama 42'yi 150'ye nasıl eşitleyeceğimi bulamıyorum.

A: Neden 42'yi 150'ye eşitlemek istiyorsun peki?

Ö12: E tatlıda 150 gr yumurta akı var. (Sessizlik ve düşünme)

A: Tamam. Yani?

Ö12: 150'ye ulaşmak için de eşitlikle ilgili bi denklem yazmam lazım. Onu bulamıyorum işte. Denklemi bulamadığım için ilerleyemiyorum.

A: Aslında çözüm yolun doğru. Sonuna da geldin.

Ö12: Yani gerçekten düşünüyorum ama son kısmı anlayamıyorum.

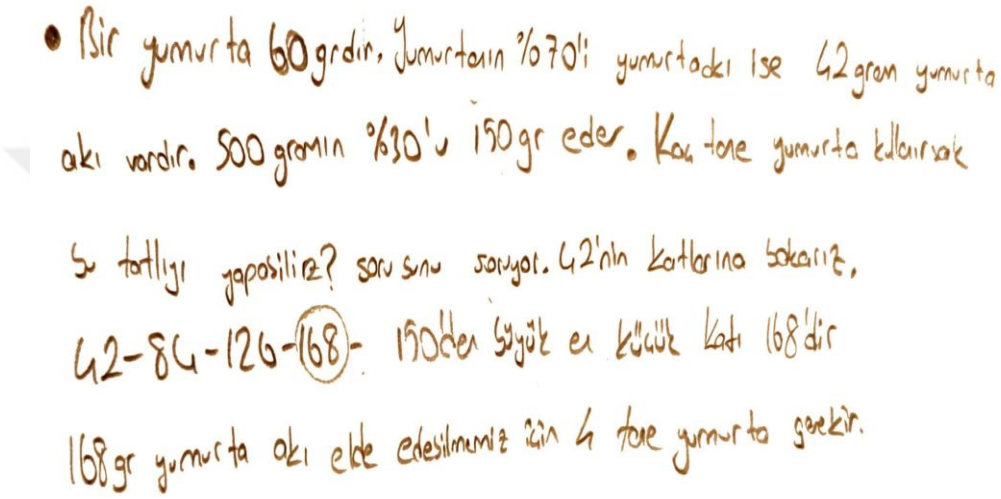
A: Tamam önemli değil. Sen sadece soruda istenen nedir? Ona bak. Ondan sora çözeceğine inanıyorum.

İkinci problem için Ö12'nin cevabı incelendiğinde, öğrencinin problemi kısmen doğru anladığını söyleyebiliriz. Sorunun tamamını değil bir kısmını göz önünde bulundurmuş, isteneni büyük ölçüde anlamış fakat gözden kaçan küçük ama sonucu etkileyen durumların olduğu anlaşılmaktadır. Dolayısıyla öğrenci 12'nin **kısmi özelleştirme** yaptığı söylenebilir.

Değişkenler arası ilişkiyi matematiksel olarak ifade etmiş fakat problemin son kısmında **genelleme** aşamasında problem yaşamıştır**.** Öğrenci doğrudan işlemler yapıp sonuca ulaşmaya çalıştığı için ispat boyutunda **doğrudan ispat** yaptığını söyleyebiliriz. Fakat çözümün son aşamasında 150 gr yumurta akı için toplam kaç tane 42 gr yumurta akı gerekir sorusunu soramamış ve başta özelleştiremediği bu ayrıntıdan dolayı soruyu doğru şekilde çözememiştir.

Şekil 32

Ö2'nin Cevabı



Ö2, sorunun çözümünü sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

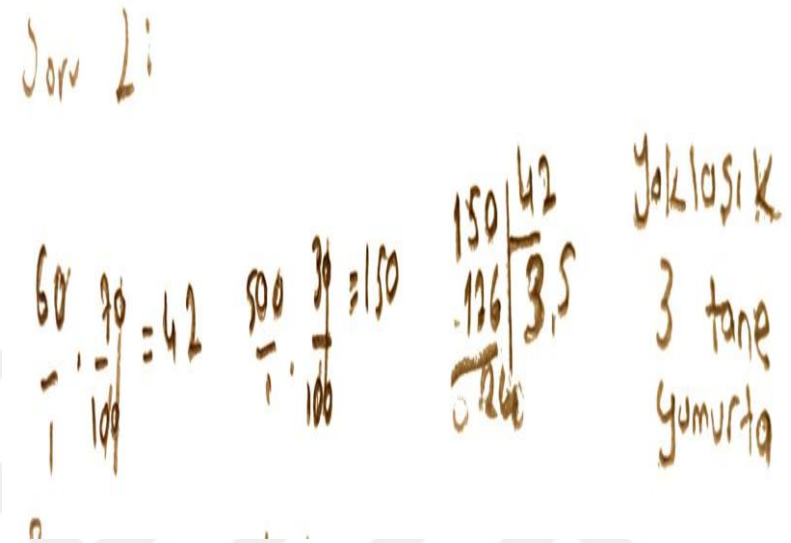
Ö2: Sorunun çözümüne de detaylı yazdım. Tavuk yumurtasında ne kadar yumurta akı var ve verilen tatlının ne kadarı yumurta akı. Onları hesapladım. Bunları hesaplarken yüzde probleminden yararlandım. Daha sonra pasta için yumurta akını sırasıyla ekledim. Bir tanesi 42 gr. 42-84-126 ve 168. 4 tane yumurta akı 168 gr yapıyor. Tabii ki 4. Yumurtanın tüm akını kullanmıyoruz ama tane olarak belirtmek gerekiyor. Ondan 4 sonucunu buldum.

İkinci problem için Ö2'in cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, verilenleri kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. 1. öğrenciden farklı olarak sayıları aritmetik olarak sıralayıp sonucu bulmaya odaklı genelleme yaptığından ötürü **aritmetik genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Yumurta akı ile ilgili verdiği örnekte sayının katlarına bakarak

ifadenin doğruluğuna karar verdiği için **ispat boyutunda saf deneycilik** yaptığını söyleyebiliriz.

Şekil 33

Ö4'ün Cevabı



Ö4, sorunun çözümünü hem matematiksel hem sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö4: İlk önce 60'ın %70'ini hesapladım. Çünkü soruda verilmiş. Yumurtanın yüzde 70'i yumurta akı diyor. Sonra tatlının da yüzde 30'u yumurta akıymış. Onu da hesapladım. Sonuç olarak 3.5 civarı olması lazım. 3 diyebiliriz.

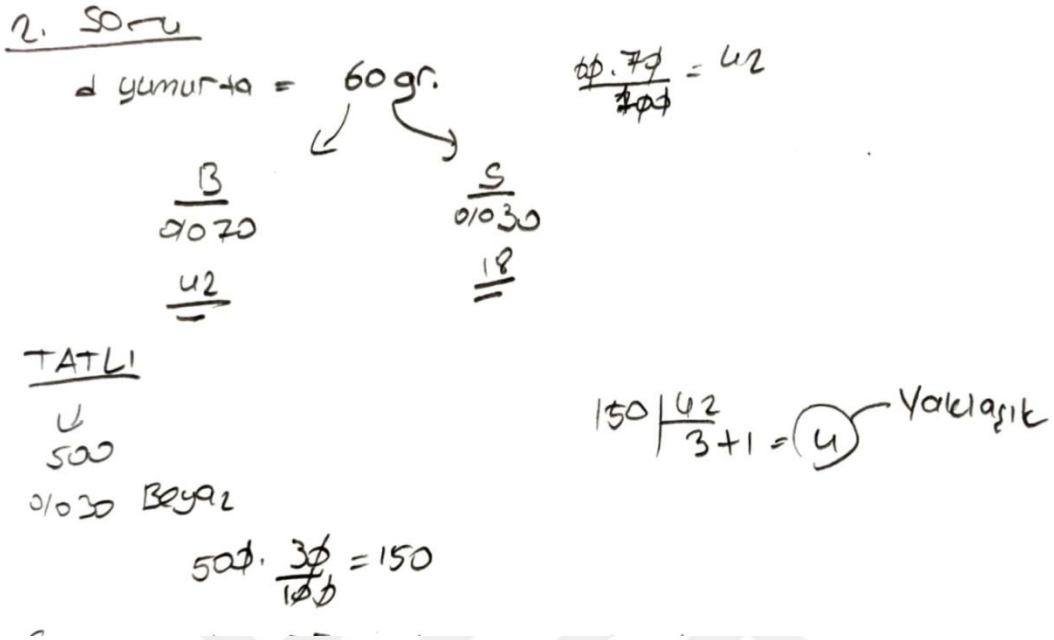
A: Sonuçtan emin misin?

Ö4: Evet, yani yarım yumurta olamayacağına göre ve soruda yaklaşık diyor.

İkinci problem için Ö4'ün cevabı incelendiğinde, öğrencinin problemi kısmen doğru anladığını söyleyebiliriz. Sorunun tamamını değil bir kısmını göz önünde bulundurmuş, isteneni büyük ölçüde anlamış fakat gözden kaçan küçük ama sonucu etkileyen durumların olduğu anlaşılmaktadır. Dolayısıyla öğrenci 4'ün **kısmi özelleştirme** yaptığı söylenebilir. Değişkenler arası ilişkiyi matematiksel olarak ifade ettiği ve genelleyebildiği için **saf genelleme** yapmıştır. Öğrenci doğrudan işlemler yapıp sonuca ulaştığı için, ispat boyutunda **doğrudan ispat** yaptığını söyleyebiliriz. Fakat çözümün sonunda 3.5 yumurta olmayacağını söylemesi ve 4 yumurta değil de 3 yumurta olması gerektiğini düşünmesi, soruda verilen kavramları ve kalıpları tam olarak özelleştiremediğinin göstergesidir diyebiliriz.

Şekil 34

Ö15'in Cevabı



Ö15, sorunun çözümünü matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

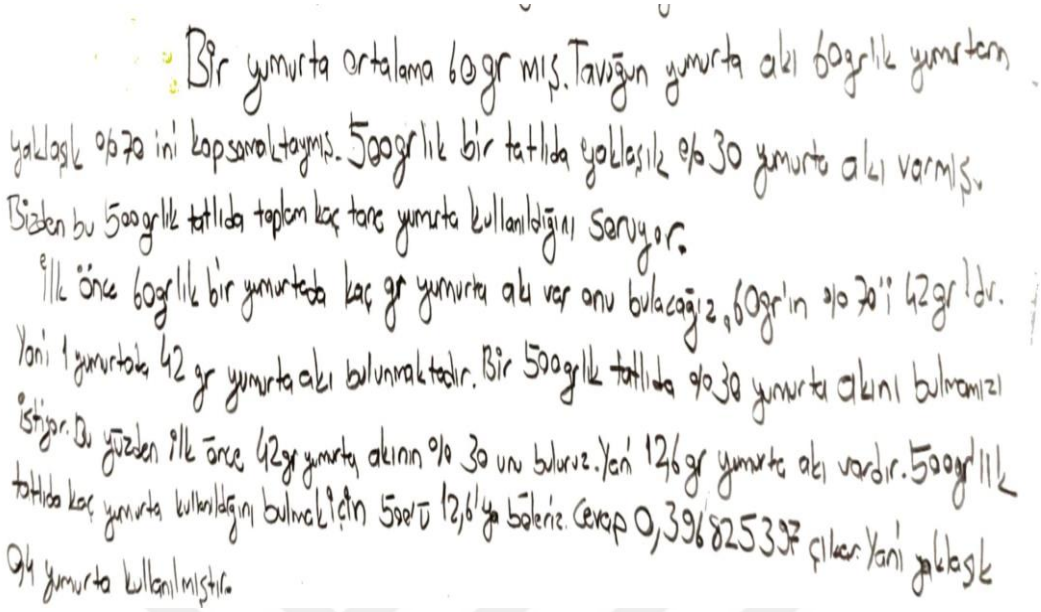
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_{15}$: Bence bu soruda öğrencinin yüzdelik hesaplama bilgisini ölçmek hedeflenmiştir. Öncelikle 1 yumurta 60 gr olduğu ve beyazı da %70'i olduğu için 60'ın %70'ini hesapladım. Ardından tatlı için gerekli yüzdeyi sayı cinsinden buldum. Sonrasında tatlı için gerekli olan sayıyı yumurtada bulunan beyaz yumurta akı sayısına böldüm. Soruda yaklaşık değer istediği için ve bir sonrakı tam sayı sonuca daha yakın olduğu için işaretledim. Problem çok ta zor değil bence.

İkinci problem için Ö15'in cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, verilenleri kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Açıklama kısmında öğrenciden istenen matematiksel bilgiyi dahi söylemitir. Dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Bunun yanında de değişkenler arası ilişkiyi matematiksel olarak ifade ettiği ve genelleyebildiği için **saf genelleme** yapmıştır. Öğrenci doğrudan işlemler yapıp sonuca ulaştığı için, ispat boyutunda **doğrudan ispat** yaptığını söyleyebiliriz.

Şekil 35

Ö16'nın Cevabı


Bir yumurta ortalama 60 gr mış. Tavuğun yumurta akı 60 gr'lık yumurtanın yaklaşık %70 ini kapsıyormuş. 500 gr'lık bir tatlıda yaklaşık %30 yumurta akı varmış. Bizden bu 500 gr'lık tatlıda toplam kaç tane yumurta kullanıldığını soruyor.
İlk önce 60 gr'lık bir yumurtada kaç gr yumurta akı var onu bulacağız. 60 gr'ın %70'i 42 gr'dır. Yani 1 yumurtada 42 gr yumurta akı bulunmaktadır. Bir 500 gr'lık tatlıda %30 yumurta akını bulmamızı istiyor. Bu yüzden ilk önce 42 gr yumurta akının %30 unu buluruz. Yani 126 gr yumurta akı vardır. 500 gr'lık tatlıda kaç yumurta kullanıldığını bulmak için 500'ü 126'ya böleriz. Cevap 0,3968253 çıkar. Yani yaklaşık 04 yumurta kullanılmıştır.

Ö16, sorunun çözümünü hem matematiksel hem sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö16: Problemi çözmek için önce bir yumurtadaki yaklaşık yumurta akını bulmak lazım. Sonrasında bulduğumuz yaklaşık yumurta akı gramını 500 gr'lık tatlıdaki %30'u bulmak lazım. %30'u bulduktan sonra kaç yumurta kullanıldığını öğrenmek için %30'da bulduğumuz yumurta akı gramını 500 gr'a bölmek lazım. Böldükten sonra sonucu buluruz.

A: Sonucun yaklaşık 0,4 olduğuna emin misin?

Ö16: Yani böyle soruyorsanız yanlış demek ki.

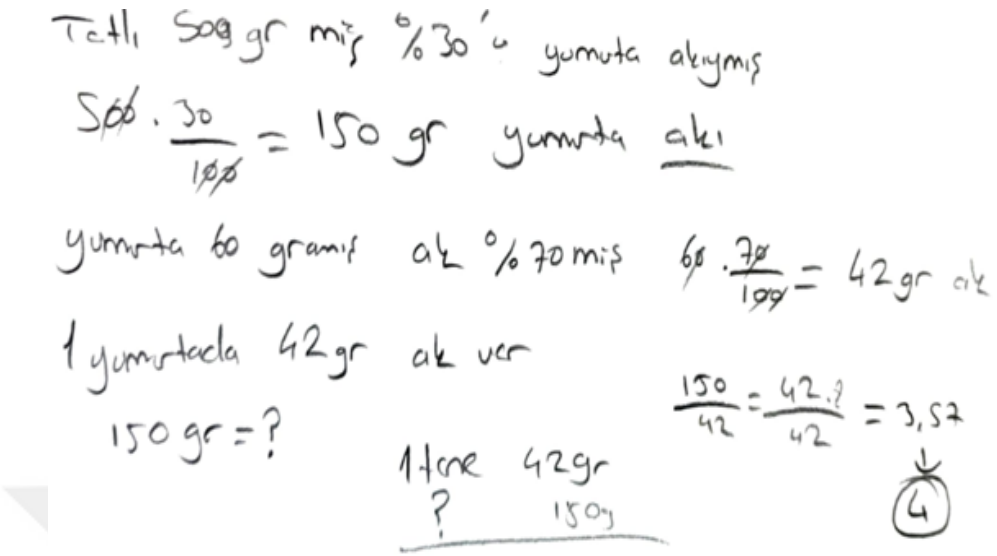
A: Hayır, sadece anlattığın çözümden emin misin diye sordum?

Ö16: Evet eminim.

İkinci problem için Ö16'nın cevabı incelendiğinde, öğrencinin soruyu tam olarak anlayamadığı, detaya girmeden akla ilk gelen şeymiş gibi özelleştirdiğini söyleyebiliriz. Bu tür özelleştirme sürecinde soruda söylenenler tam olarak çözülmemiş olup, devredilen kısımlarda soruda söylenenlere göre büyük sapmalar bulunmaktadır. Dolayısıyla öğrenci 16'nın **hatalı özelleştirme** yaptığı söylenebilir. Öğrenci doğrudan işlemler yapıp sonuca ulaştığı için, ispat boyutunda **doğrudan ispat** yaptığını söyleyebiliriz. Görüşme esnasında sorulan "çözümden emin misin" gibi sorular neticesinde öğrencinin soruyu tam olarak anlamadığı gözlemlenmiştir.

Şekil 36

Ö14'ün Cevabı



Ö14, sorunun çözümünü hem matematiksel hem sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö14: Aslında bütün her şey soruda verilmiş. Sadece işlem yapmak kalıyor geriye. 1 yumurta 60 gr'mış. %70'i de akıymış. Yüzde almak kalıyor geriye. Pastada da öyle. %30'u yumurta akıymış. O da hesaplanıyor. Belki sorunun sonunda bi zorluk olabilir. Hani tam çıkmıyor ya. Orda yuvarlamamız gerekiyor. Çünkü 3 tane yetmiyor. Yarım yumurta demek yerine 4 yumurta demek gibi.

İkinci problem için Ö14'ün cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, verilenleri kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Açıklama kısmında soruda verilenleri tek tek açıklamış, dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Bunun yanında de değişkenler arası ilişkiyi matematiksel olarak ifade ettiği ve genelleyebildiği için **saf genelleme** yapmıştır. Öğrenci doğrudan işlemler yapıp sonuca ulaştığı için, ispat boyutunda **doğrudan ispat** yaptığını söyleyebiliriz.

4.1.3. Nilüfer Çiçeğinin Yaprakları İsimli Probleme Ait Bulgular: Öğrencilere verilen okuryazarlık sorularından üçüncüsü nicelik sorularından olan Nilüfer Çiçeğinin Yaprakları isimli sorudur. Bu soruda beklenen çözüm yollarından biri şu şekildedir: Çözüm

yolu için geriye doğru çalışma işi kolaylaştıracaktır. 15. Günün sonunda gölün tamamı kaplandığına göre 14. günde $\frac{1}{2}$ 'si, 13. günde $\frac{1}{4}$'ü ve 12. günde $\frac{1}{8}$'i kaplanmış olur.

Soru matematiksel süreçler açısından incelendiğinde, bu süreçler şu adımları içerir:

Problemi matematiksel olarak formüle etme: İlk gün çiçeğin kapladığı alan x ise, ikinci gün 2x, üçüncü gün 4x şeklinde devam etmesi ve 5. gün sonunda tüm alanın çiçek tarafından kaplanması.

Matematiksel kavramları ve yöntemleri kullanma ve akıl yürütme: Çiçeğin 15 günde gölü tamamen kapladığı bilgisini kullanarak, 15. gün sonunda çiçeğin kapladığı alanın hesaplanması. Nilüfer çiçeğinin bir önceki güne göre kapladığı alanın iki katı kadar alanı kaplaması ve alanın iki katı ilişkisini keşfetme.

Matematiksel çıktıları yorumlama: Ulaşılan sonucu başta yapılan tahminlerle karşılaştırma, ilk gün ve son gün kaplanan alanlar arası ilişkileri yorumlama.

Bu problemde öğrencilerin verdiği cevaplar ve kullandığı stratejiler dikkatle incelenmiş, Tablo 11'daki veriler elde edilmiştir:

Tablo 11

Öğrencilerin 3. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları

Çözüm	Frekans
Doğru Sonuca Ulaşma	13
Yanlış Sonuca Ulaşma	4
Sonuca Ulaşamama	1
Toplam	18

Tablo 11 incelendiğinde öğrencilerin çoğunluğunun (% 70'den fazla) doğru sonuca ulaştığı görülmektedir. 13 öğrenci doğru sonuca ulaşırken 4 öğrenci de soruyu çözmesine rağmen yanlış sonuca ulaşmıştır. 1 öğrenci de soruyu çözememiştir. Bu soruda öğrencilerin matematiksel düşünmenin basamaklarını kullanıp kullanmadıkları belirlenecektir.

Tablo 12'de öğrencilerin 3. sorunun çözümü ile ilgili kullandıkları matematiksel düşünme boyutları verilmiştir.

Tablo 12

Öğrencilerin 3. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları

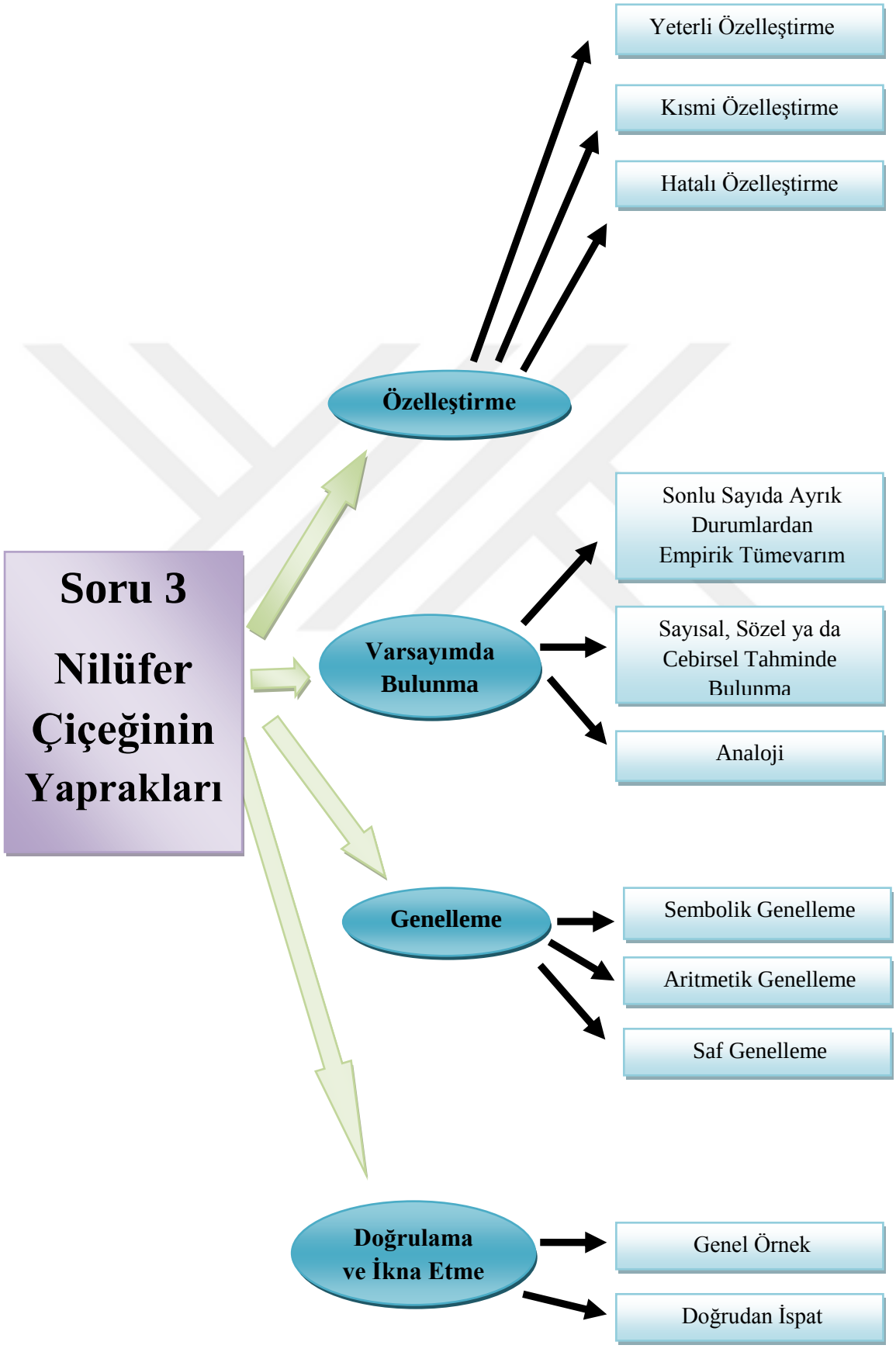
Matematiksel Düşünme Boyutları	Var	Yok
Özelleştirme	13	5
Varsayımda Bulunma	11	7
Genelleme	15	3
İspat	16	2

Tablo 12 incelendiğinde bazı öğrencilerin özelleştirme basamağında problem yaşadığı görülmektedir. Bunun yanında bazı öğrencilerin tahmin basamağını hiç kullanmadığı, bazı öğrencilerin de genelleme basamağında eksikliklerinin olduğu gözlenmektedir. Öğrencilerin çoğunluğunun ıspat basamağını kullanmaya çalıştıkları da gözlenen veriler arasındadır.

Öğrencilerin kullanmış oldukları düşünme boyutlarının hangi alt kategorilerde yoğunlaştığı Şekil 37 ve Tablo 13'te verilmiştir.

Şekil 37

3. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları



Tablo 13

3. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları

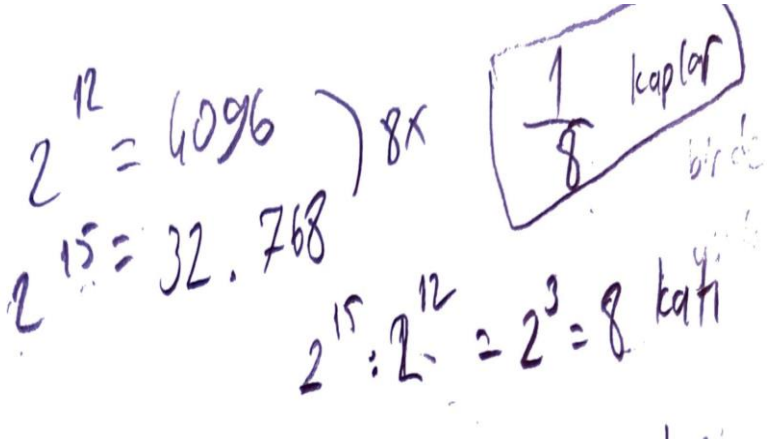
Boyutlar	Kullanılan Alt Kategoriler	Açıklama
Özelleştirme Boyutu	Yeterli Özelleştirme	Örneklerin temsil ettiği genel durumun doğru ve kapsamlı bir şekilde anlaşılıp ele alınması.
	Kısmi Özelleştirme	Örneklerin genel durumu tam olarak yansıtmadığı, eksik veya sınırlı bir perspektif sunması.
	Hatalı Özelleştirme	Yanlış veya yanıltıcı örneklerle genel bir durumu temsil etmeye çalışılması.
Varsayımda Bulunma Boyutu	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Gözlemlenen ayrık durumların genel bir ilke veya hipoteze ulaşmak için kullanılması.
	Analoji	Benzer durumlar veya olaylar arasındaki paralelliklerden yararlanarak sonuç çıkarma.
	Sayısal, Sözel ya da Cebirsel Tahminde Bulunma	Bireysel algı ve sezgilere dayalı öngörülerde bulunma.
Genelleme Boyutu	Sembolik Genelleme	Nesneler ve üzerlerinde gerçekleştirilen işlemlerin harf ve sayı (alfanümerik) cebirsel sisteminde ifade edilimesi.
	Aritmetik Genelleme	Kavramların ortak bir ilişkisinin genelleştirilmesi.
	Saf Genelleme	Doğrudan gözlemlerden elde edilen basit ve temel genellemeler.
Doğrulama ve İkna Etme Boyutu	Doğrudan İspat	Belirli bir hipotezin veya teorinin doğruluğunu kesin ve açık bir şekilde kanıtlama.
	Genel Örnek	Tek bir örneği inceleyip sonucu doğrulama.

Üçüncü problemde öğrencilerin kullanmış oldukları alt kategoriler Şekil 37 ve Tablo 13'de verilmiştir. Bu soruda bazı öğrencilerin anlatılanı ve sorulanı anlayıp doğru olarak açıkladığı; problemi araştırıp örnek vermeye çalıştığı ve problemde anlatılanlara yönelik bilinçli hareketler yaptığı gözlemlenmiştir. Bunun sonucunda matematiksel düşünmenin özelleştirme basamağını kullanıp yeterli özelleştirme yaptıkları söylenebilir. Bununla beraber bazı öğrencilerin isteneni büyük oranda anladıkları ancak gözden kaçan küçük ama sonucu etkileyen durumların olduğu görülmüştür. Bunun sonucunda kısmi ve hatalı özeleştirmeler yaptıkları söylenebilir. Bazı öğrenciler genel bir kurala dayalı olarak tahminde bulunurken bazıları formülde cebirsel ifadelerin yerini değiştirerek varsayımda bulunmuşlardır. Öğrenciler değişkenler arasındaki ilişkiyi matematiksel ve sözel olarak ifade ettiği ve bunlardan yola çıkarak çözüm için strateji geliştirdiği için genelleme boyutunda aritmetik genelleme ve sembolik genelleme kullanmışlardır. Öğrenciler genelde bir örnek üzerinden işlemler gerçekleştirmiş ve bilinen formüllere dayandırarak ispat basamağının genel örnek ve doğrudan ispat alt kategorileini kullanmışlardır.

Üçüncü problemde kullanılan düşünme boyutları, alt kategorilerine yönelik açıklamalar ve bazı ortaokul öğrencilerinin çözüm yolu örnekleri aşağıda verilmiştir:

Şekil 38

Ö1'in Cevabı



Ö1, sorunun çözümünü matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

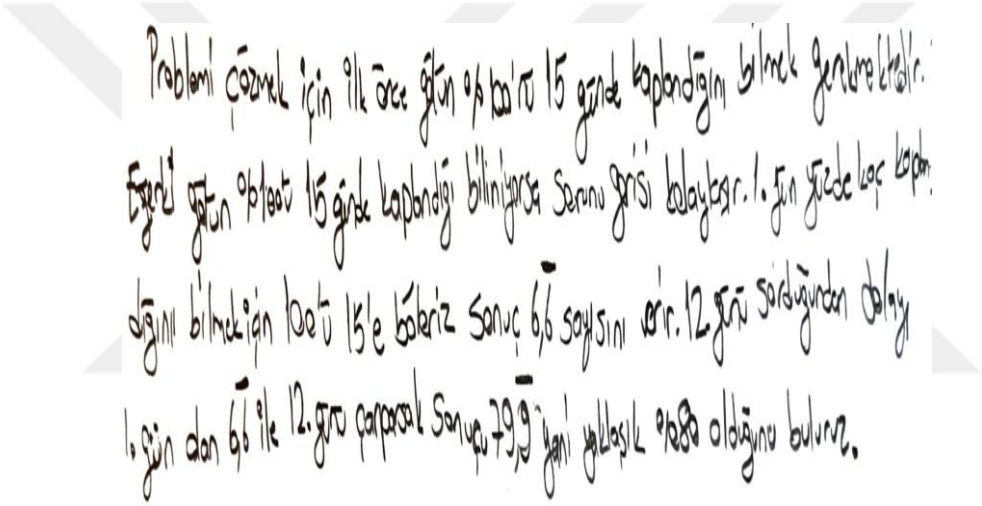
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_1$: İlk başta gölün alanını vermediği için varsayımla yola çıktım. Bir nilüferin alanını 2 olarak düşündüm. Sonrasında her gün 2 katını hesapladığımızda gölün alanı 15. Günün sonunda tamamen kaplanır. Bize 12. Günün sonundaki gölün alanını istediği için 12. Günün alanını 15. Günün alanına böldüm. Yani 8'de 1'iymiş.

Üçüncü problem için Ö1'in cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrencinin özelleştirme sonrası çözüm için bilinmeyene değer ataması ve çözüme bu yolla başlaması, **sayısal tahminde** bulunduğunu gösterir. Daha sonra her bir adımda bir önceki alanın 2 katı alan bularak yani terimler arası ortak bir ilişkiyi genelleyip **saf genelleme** yaparak işlemine devam etmiştir. Öğrencinin 2 değerini atayıp yani tek bir örneği inceleyip işlemlerle sonuca gitmesi ve doğru sonucu bulması **genel örnek alt boyutunda ispat** yaptığı söylenebilir.

Şekil 39

Ö16'nın Cevabı



Ö16, sorunun çözümünü sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

Ö16'nın çözümü resimde tam olarak anlaşılamadığı için tekrardan verilmiştir.

"Problemi çözmek için ilk önce gölün yüzde yüzünü 15 günde kaplandığını bilmek gerekmektedir. Eğer ki gölün %100'ü 15 günde kaplandığı biliniyorsa sorunun gerisi kolaylaşır. 1. gün yüzde kaç kapladığını bilmek için 100'ü 15'e böleriz sonuç $6,\overline{6}$ sayısını verir. 12. günü sorduğundan dolayı 1. gün olan $6,\overline{6}$ ile 12. günü çarpsak sonucu $79,\overline{9}$ yani yaklaşık % 80 olduğunu buluruz."

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_{16}$: Öncelikle %100'ü 15 günde kaplanıyorsa %100'ü 15'e bölmek lazım. %100'ü 15'e böldüğümüzde cevap 6,6 çıkıyor.

A: %100'ü 15'e bölmek ne demek. Yani bu işlemi yapınca neyi buluruz?

Ö16 : E ilk gün ne kadar kaplanır onu buluyoruz. Ondan bölüyoruz.

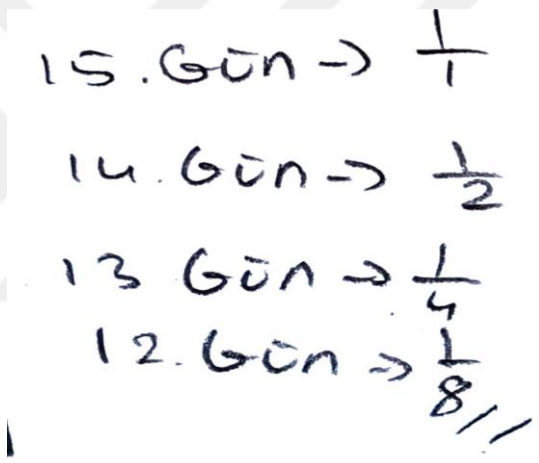
A: Tamam. Sonra?

Ö16 : Sonra da 12. günde ne kadar alan kapladığını bulmak için $6,\overline{6}$ yı 12 ile çarparız.

Üçüncü problem için Ö16'nın cevabı incelendiğinde, problemi anlayamadığı, verilenlerle alakalı bilinçli hareketler yapmadığı ve sorunun detaylarına inmeden aklına gelen ilk işlemi uyguladığı gözlemlenmiştir. Dolayısıyla **hatalı özelleştirme** yaptığı söylenebilir. Öğrenci soruda verilen sayılarla aklına ilk geldiği şekliyle işleme başlamış, doğru olduğu bilinen bir kurala benzetim ile aslında **analoji** alt basamağına bir varsayımda bulunmuştur. Bunun sonucunda herhangi bir genelleme yapamamış ve soruda verilen sayılarla işlemler yapıp **doğrudan ispat** yapmak istemiş fakat sonucu yanlış bulmuştur.

Şekil 40

Ö6'nın Cevabı



Ö6, sorunun çözümünü sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

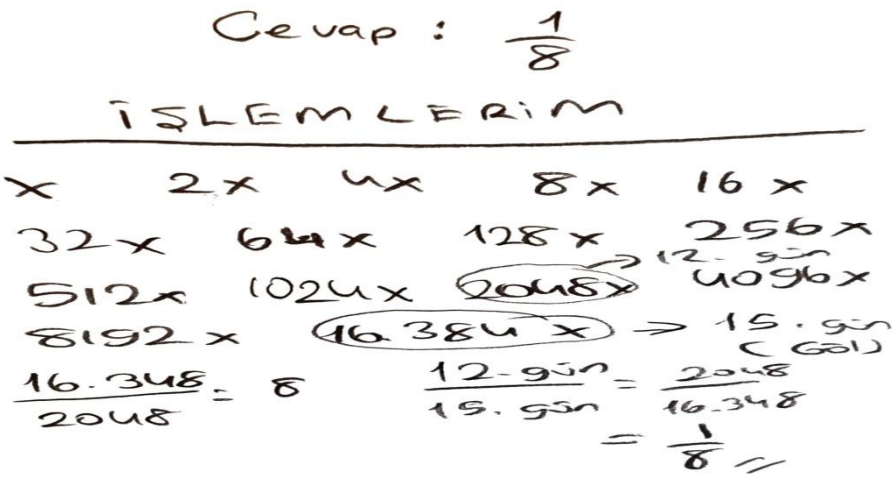
Ö6: Nilüfer çiçeği 15. Günde gölün tamamını yani $\frac{1}{1}$ *' ini kapladıysa dedim. 14. günde* $\frac{1}{1}$ *'in yarısı olan* $\frac{1}{2}$ *kadar kaplar. 13. günde* $\frac{1}{2}$ *'nin yarısı olan yani* $\frac{1}{4}$ *'ünü kaplar. 12. günde ise* $\frac{1}{4}$ *'ünün yarısı olan yani* $\frac{1}{8}$ *'ini kaplar.*

Üçüncü problem için Ö6'nın cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrencinin özelleştirme sonrası çözüm için bilinmeyene değer ataması ve çözüme bu yolla başlaması,

sayısal tahminde bulunduğunu gösterir. Daha sonra soruya tersten başlayıp geriye doğru her bir adımda bir önceki alanın yarısını bularak yani terimler arası ortak bir ilişkiyi genelleyerek **aritmetik genelleme** yapmış **ve** işlemine devam etmiştir. Öğrencinin tek bir örneği inceleyip işlemlerle sonuca gitmesi ve doğru sonucu bulması **genel örnek alt boyutunda ispat** yaptığı söylenebilir.

Şekil 41

Ö7'nin Cevabı



Ö7, sorunun çözümünü matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö7: Öncelikle her günde kapladığı alanın ne olduğunu belirledim. 1 günde X diyerek diğer günleri de bu X değeri üzerinden 2'nin kuvvetleri olacak şekilde arttırarak tek tek 15 günü de hesapladım. Daha sonra 15. gündeki 16.384X değerini 12. gündeki 2048X değerine böldüm. İşlem sonucunda 8 bulup cevabımı kesir olarak yazdım.

A: Bu soru için farklı bir çözüm yolu var mıdır?

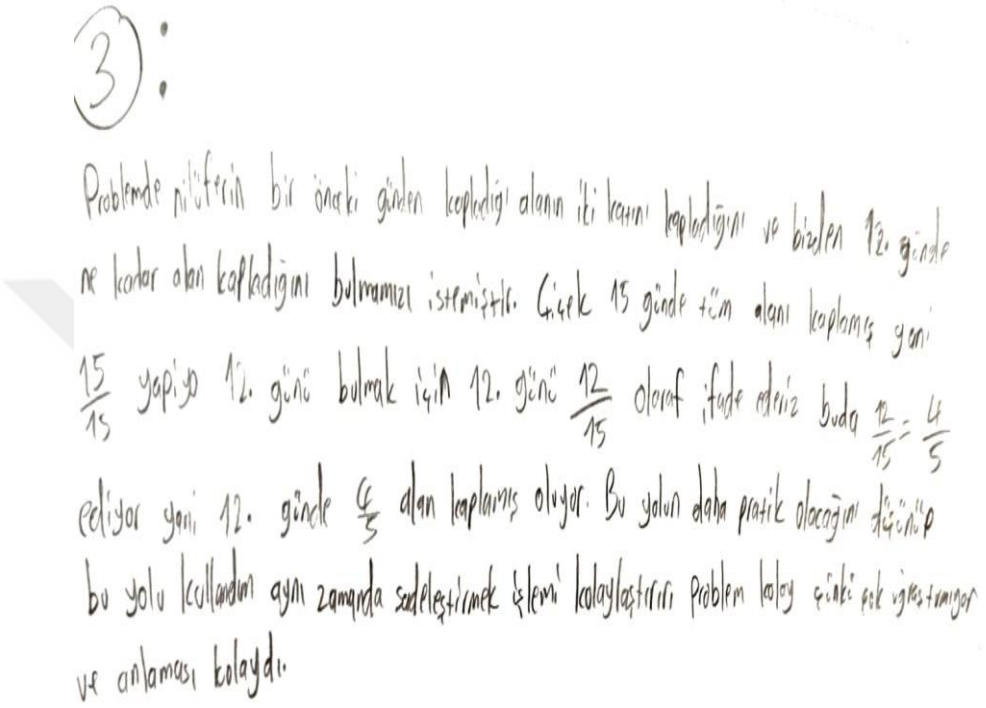
Ö7: Farklı yollarla da çözülebileceğini düşünüyorum. Fakat benim açımdan en kolay ve garanti yol bu olduğu için bu şekilde çözdüm. Bence çok zor bir soru değil.

Üçüncü problem için Ö7'nin cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Başta günlük olarak gölün kaplandığı alanı hesaplamış ve 15. Güne kadar bu hesaplamayı sürdürmüştür. Dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrencinin özelleştirme sonrası çözüm için bilinmeyen ataması ve çözüme bu yolla başlaması, **cebirsel tahmin**de bulunduğunu gösterir. Öğrenci cebirsel dili anlamış ve gölü

gün gün kaplayan alanla ilgili ilişkiyi bilinmeyen yardımıyla açıklayabilmiş, dolayısıyla **sembolik genelleme yapmıştır.** Öğrenci doğrudan işlemler yapıp sonuca ulaştığı için, ispat boyutunda **doğrudan ispat** yaptığını söyleyebiliriz

Şekil 42

Ö13'ün Cevabı



Ö13, sorunun çözümünü hem matematiksel hem de sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö13: Problem aslında basitti. 15. Günde nilüfer gölün tamamını kapsıyormuş. O zaman 15/15 olur. Bize 12. Günde ne kadar alan kapsadığını soruyor. O da 12/15 olur. Sadeleştirirsek 4/5 yapıyor. Yani 4/5 alan kaplamış olur.

A: Soruyu doğru olarak çözdüğüne emin misin?

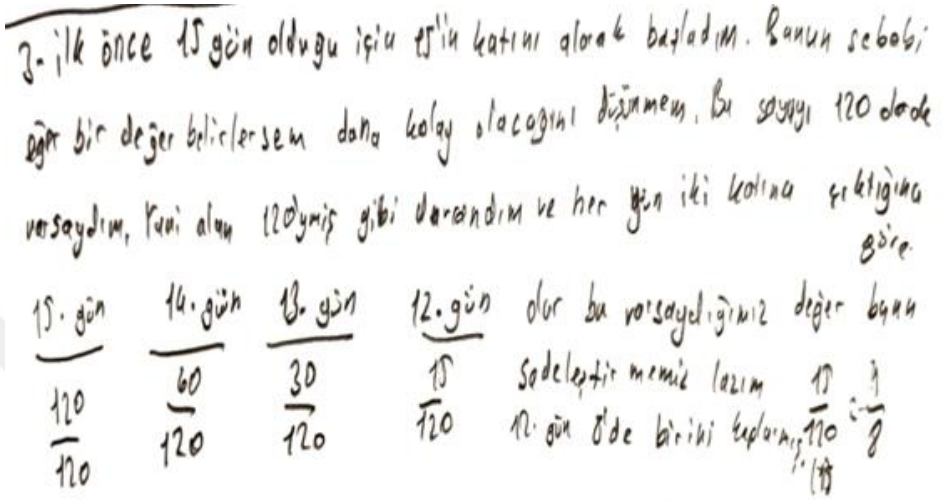
Ö13: Evet. Bence soru açık. Anlaşılıyor zaten.

Üçüncü problem için Ö13'ün cevabı incelendiğinde, problemi anlayamadığı, verilenlerle alakalı bilinçli hareketler yapmadığı ve sorunun detaylarına inmeden aklına gelen ilk işlemi uyguladığı gözlemlenmiştir. Dolayısıyla **hatalı özelleştirme** yaptığı söylenebilir. Öğrenci soruda verilen sayılarla aklına ilk geldiği şekliyle işleme başlamış, verilen gün sayılarını direkt oranlamış yani doğru olduğu bilinen bir kurala benzetim ile aslında **analoji** alt basamağına bir varsayımda bulunmuştur. Bunun sonucunda herhangi bir genelleme

yapamamış ve soruda verilen sayılarla işlemler yapıp **doğrudan ispat** yapmak istemiş fakat sonucu yanlış bulmuştur. Ayrıca öğrenci görüşme esnasında soruyu doğru anladığını birkaç defa tekrarlamış ve sorunun kolay olduğunu söylemiştir.

Şekil 43

Ö14'ün Cevabı



Ö14, sorunun çözümünü hem matematiksel hem de sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

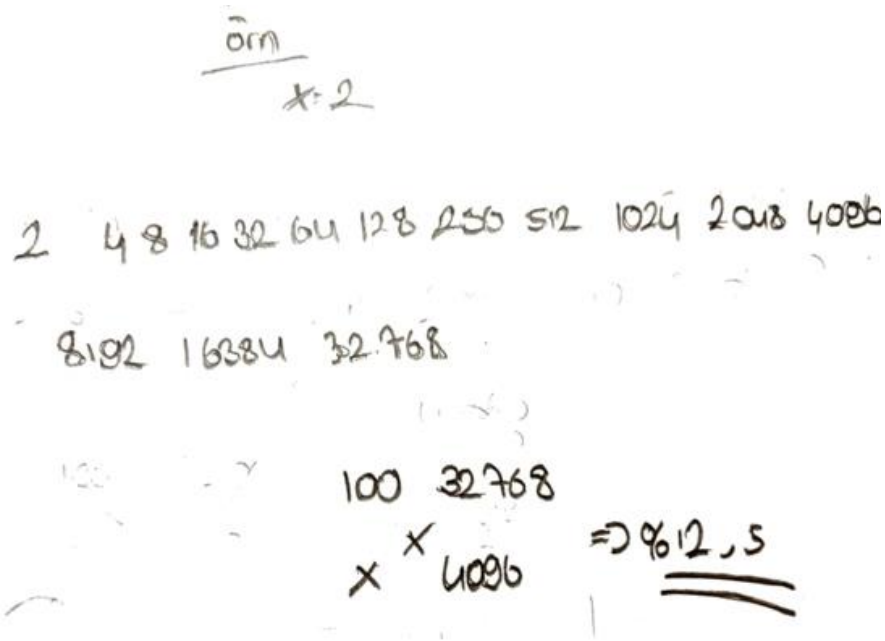
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_{14}$: Böyle soruların en iyi çözümü bence değer vermek. Ben de en son kapladığı alana değere verdim. 120 dedim. Yani 120 15. Gündeki toplam alan anlamında. Geriye doğru yarı yarı gidecek. 14. Gün 60, 13. Gün 30,12. Gün 15. Buradan 15/120 yaparsak 1/8 sonucunu buluruz. Bence kolay bir soruydu.

Üçüncü problem için Ö14'ün cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Gölün kaplandığı alana sayısal değer vererek önceki günleri hesaplamış ve 12. güne kadar bu hesaplamayı sürdürmüştür. Dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrencinin özelleştirme sonrası çözüm için sayısal değer ataması ve çözüme bu yolla başlaması, **sayısal tahmin**de bulunduğunu gösterir. Bunun yanında değişkenler arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade ettiği ve genelleyebildiği için **saf genelleme** yapmıştır. Öğrencinin doğrudan işlemler yapıp sonuca ulaştığı için, ispat boyutunda **doğrudan ispat** yaptığını söyleyebiliriz.

Şekil 44

Ö15'in Cevabı



Ö15, sorunun çözümünü matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö15: Öncelikle nilüfer çiçeğine X dedim. Sonra X'e değer verdim ve 2 dedim. Sonra 2'yi 15 kere 2 katıyla çarptım. Yani 15. gün sonunda kapladığı alanı buldum. Sonra doğru orantı yapıp sonucu buldum.

Üçüncü problem için Ö15'in cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Gölün alanını ilk günden son güne kadar tek tek hesaplamış ve her gün kapladığı alanı bulmuştur. Dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrencinin özelleştirme sonrası çözüm için bilinmeyen ataması ve çözüme bu yolla başlaması, **cebirsel tahmin**de bulunduğunu gösterir. Öğrenci cebirsel dili anlamış ve gölü gün gün kaplayan alanla ilgili ilişkiyi bilinmeyen yardımıyla açıklayabilmiş, dolayısıyla **sembolik genelleme yapmıştır.** Öğrenci doğrudan işlemler yapıp sonuca ulaştığı için, ispat boyutunda **doğrudan ispat** yaptığını söyleyebiliriz

4.1.4. Badana-Boya İsimli Probleme Ait Bulgular: Öğrencilere verilen okuryazarlık sorularından dördüncüsü nicelik sorularından olan Badana Boya isimli sorudur.

Bu soruda beklenen çözüm yolu şu şekildedir:

2 Litrelik 5 Litrelik

3 Adet 2 Adet

2+2+2+5+5=16 Litre

3x8=24 Lira 2x15=30 Lira

Toplam 24+30=54 Lira

2 Litrelik 5 Litrelik

1 Adet 3 Adet

2+5+5+5=17 Litre

1x8=8Lira 3x15=45 Lira

Toplam 8+45=53 Lira

Soru matematiksel süreçler açısından incelendiğinde;

Problemi matematiksel olarak formüle etme: 2 ve 5 litrelik kovaların fiyatlarını ve katlarını hesaplar. Kişinin bu ihtiyacını en az kaç lira harcayarak karşılayabileceğini hesaplamaya yönelik denklemi kurar.

Matematiksel kavramları ve yöntemleri kullanma ve akıl yürütme: Maliyet fonksiyonunu oluşturacak denklemi hesaplar ve işlemlerle sayılar arası ilişkileri tanımlar.

Matematiksel çıktıları yorumlama: Badana için en az ne kadar harcanması gerektiği sonucunu araştırmak, problemde verilen koşullar altında en optimize edilmiş çözümü bulmak. Çözüm sürecinde kullanılan formülasyonlar ve hesaplamaların sonuç ile ilişkisini incelemek.

Bu problemde öğrencilerin verdiği cevaplar ve kullandığı stratejiler dikkatle incelenmiş, Tablo 14'deki veriler elde edilmiştir:

Tablo 14

Öğrencilerin 4. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları

Çözüm	Frekans
Doğru Sonuca Ulaşma	11
Yanlış Sonuca Ulaşma	7
Sonuca Ulaşamama	0
Toplam	18

Tablo 14 incelendiğinde öğrencilerden 11 kişinin doğru sonuca ulaştığı görülmektedir. 7 öğrenci de soruyu çözmesine rağmen yanlış sonuca ulaşmıştır. Bu soruda öğrencilerin matematiksel düşünmenin basamaklarını kullanıp kullanmadıkları belirlenecektir.

Tablo 15'de öğrencilerin 4. Sorunun çözümü ile ilgili kullandıkları matematiksel düşünme boyutları verilmiştir.

Tablo 15

Öğrencilerin 4. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları

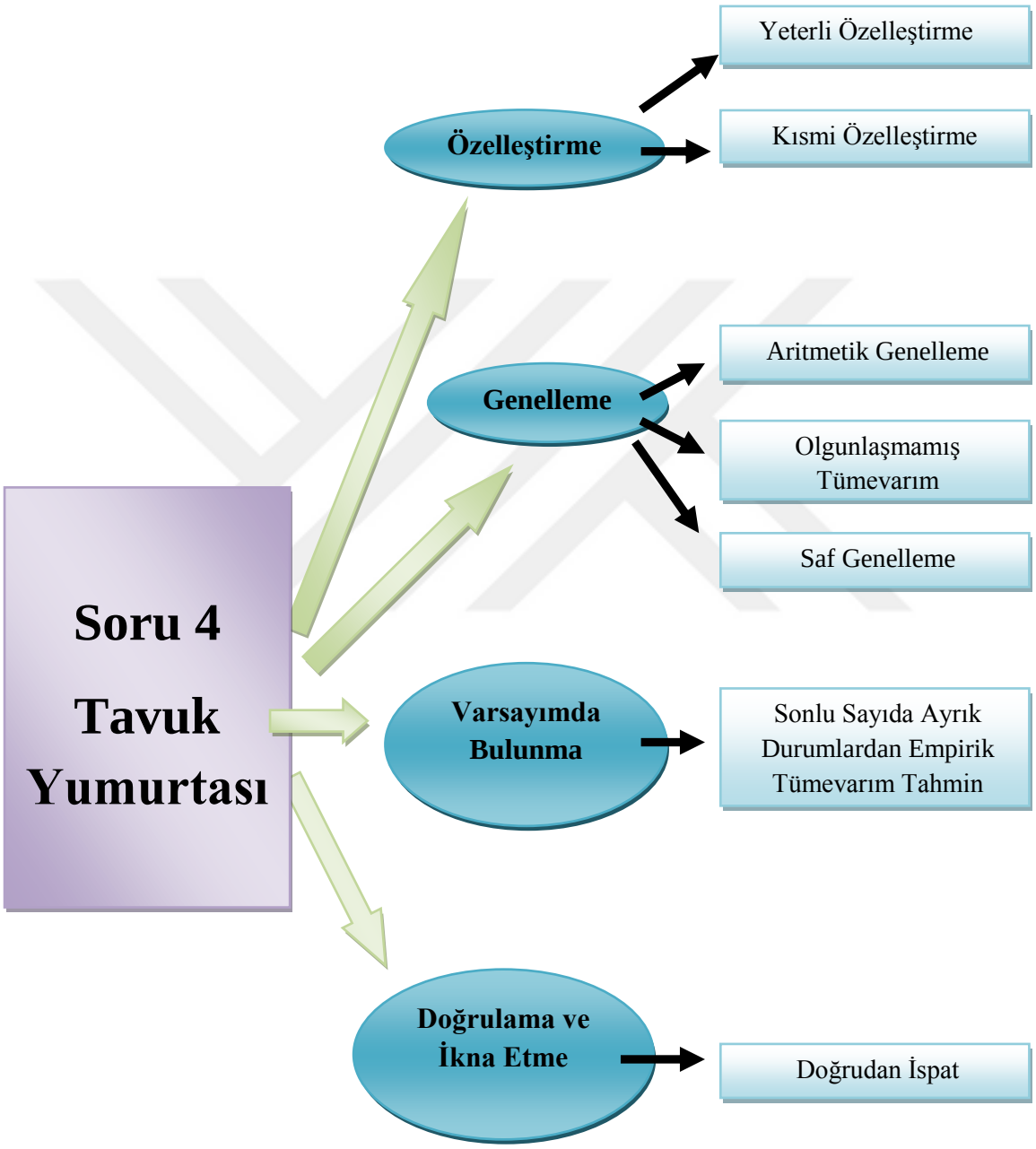
Matematiksel Düşünme Boyutları	Var	Yok
Özelleştirme	11	7
Varsayımda Bulunma	18	0
Genelleme	10	8
İspat	18	0

Tablo 15 incelendiğinde 11 öğrencinin soruyu çözerken matematiksel düşünme boyutlarından özelleştirme basamağını kullandığı, 7 öğrencinin soruyu yeterli düzeyde özelleştiremediği görülmüştür. Soru, yapısı itibari ile varsayımda bulunmayı gerektirdiği için tüm öğrencilerin bu basamağı kullandığı söylenebilir. Özelleştirme basamağında sıkıntı yaşayan öğrencilerin genelleme yaparken de problem yaşadığı görülmüştür. Tüm öğrenciler sonuca ulaşmış ve bunu ispatlamaya çalışmışlardır.

Öğrencilerin kullanmış oldukları düşünme boyutlarının hangi alt kategorilerde yoğunlaştığı Şekil 45 ve Tablo 16'da verilmiştir.

Şekil 45

4. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları



Tablo 16

4. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları

Boyutlar	Kullanılan Alt Kategoriler	Açıklama
Özelleştirme Boyutu	Yeterli Özelleştirme	Örneklerin temsil ettiği genel durumun doğru ve kapsamlı bir şekilde anlaşılıp ele alınması.
	Kısmi Özelleştirme	Örneklerin genel durumu tam olarak yansıtmadığı, eksik veya sınırlı bir perspektif sunması.
Varsayımda Bulunma Boyutu	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Gözlemlenen ayrık durumların genel bir ilke veya hipoteze ulaşmak için kullanılması.
Genelleme Boyutu	Olgunlaşmamış Tümevarım	Yeterli kanıt ve gözlem olmaksızın yapılan genellemeler.
	Aritmetik Genelleme	Kavramların ortak bir ilişkisinin genelleştirilmesi.
	Saf Genelleme	Doğrudan gözlemlerden elde edilen basit ve temel genellemeler.
Doğrulama ve İkna Etme Boyutu	Doğrudan İspat	Belirli bir hipotezin veya teorinin doğruluğunu kesin ve açık bir şekilde kanıtlama.

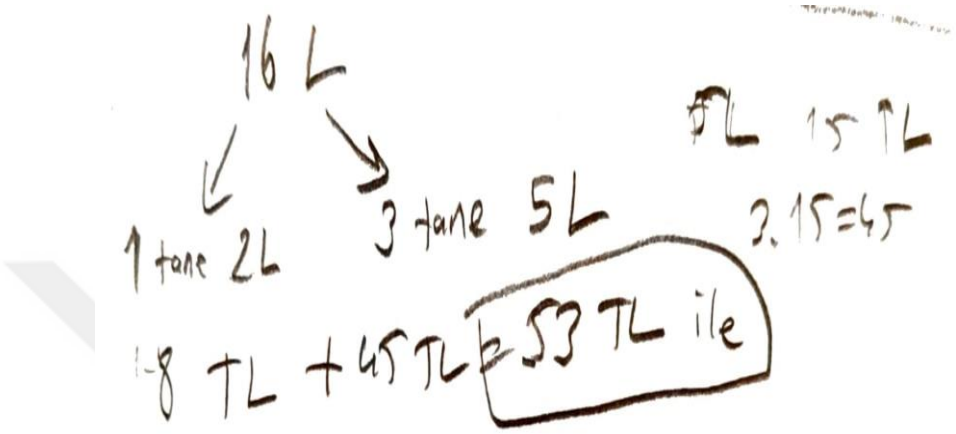
Dördüncü problemde öğrencilerin kullanmış oldukları alt kategoriler Şekil 45 ve Tablo 16'da verilmiştir. Bu soruda bazı öğrencilerin anlatılanı ve sorulanı anlayıp doğru olarak açıkladığı; problemi araştırıp örnek vermeye çalıştığı ve problemde anlatılanlara yönelik bilinçli hareketler yaptığı gözlemlenmiştir. Bunun sonucunda matematiksel düşünmenin özelleştirme basamağını kullanıp yeterli özelleştirme yaptıkları söylenebilir. Bununla beraber bazı öğrencilerin isteneni büyük oranda anladıkları ancak gözden kaçan küçük ama sonucu etkileyen durumların olduğu görülmüştür. Bunun sonucunda kısmi özeleştirmeler yaptıkları söylenebilir. Öğrencilerin çoğu genel bir kurala dayalı olarak tahminde bulunurken bazıları formülde cebirsel ifadelerin yerini değiştirerek varsayımda bulunmuşlardır. Öğrenciler değişkenler arasındaki ilişkiyi matematiksel ve sözel olarak ifade ettiği ve bunlardan yola çıkarak çözüm için strateji geliştirdiği için genelleme boyutunda aritmetik genelleme ve sembolik genelleme kullanmışlardır. Öğrenciler genelde bir örnek

üzerinden işlemler gerçekleştirmiş ve bilinen formüllere dayandırarak ispat basamağının genel örnek ve formüle dayalı ispat alt kategorilerinie kullanmışlardır.

Dördüncü problemde kullanılan düşünme boyutları, alt kategorilerine yönelik açıklamalar ve bazı ortaokul öğrencilerinin çözüm yolu örnekleri aşağıda verilmiştir:

Şekil 46

Ö1'in Cevabı



Ö1, sorunun çözümünü matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_1$: Öncelikle 2 litre ve 5 litre kovalar varmış. Bu kovalardan 1 tane 2 litrelik kovadan alırız. Bunun fiyatı 8 TL tutar. 3 tane 5 litrelik kovadan alırız. Bunun fiyatı ise 45 TL tutar. Böylelikle 16 litre ihtiyacını en uygun fiyatla karşılarız. Hem de 1 litre ekstradan boya elde etmiş oluruz.

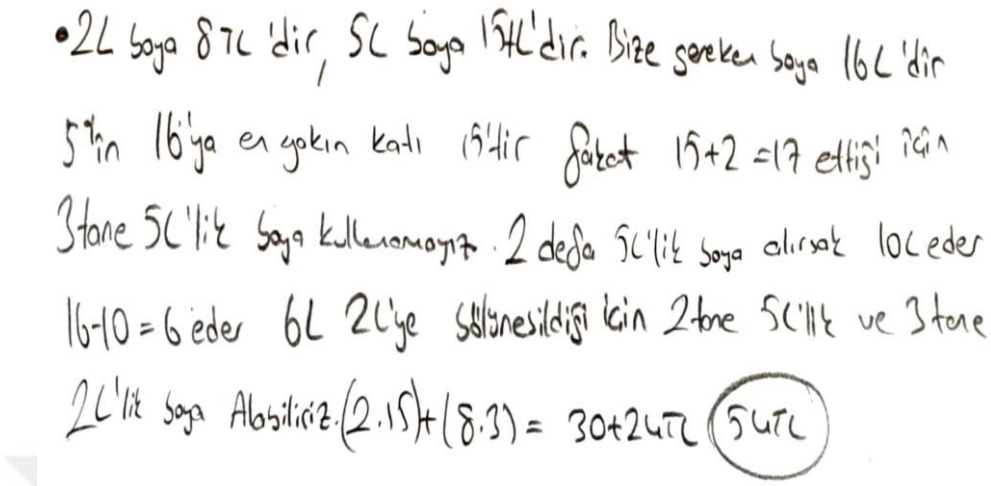
A: 16 litrelik kovaya ulaşmak için farklı alternatifler de var mı?

$Ö_1$: Tabii ki var. Zaten başta birkaç seçenek denedim. Ama en uygun fiyatlı dediği için bunu seçtim.

Dördüncü problem için Ö1'nin cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Dolayısıyla **yeterli özelleştirm**e yaptığı söylenebilir. En uygun fiyatlı kovaları alabilmek için birkaç alternatif düşünmüş olması **sonlu sayıda ayrık durumlardan empirik tümevarım** yaptığını gösterir. Öğrenci iki boya çeşidi arasındaki farklılıkları ortaya koyduğu ve bu ilişkiyi matematiksel olarak ifade ettiği için **saf genelleme** yapmıştır. Öğrenci sonuca doğrudan işlemler yapıp ulaştığı için ispat boyutunda **doğrudan ispat** yaptığı söylenebilir.

Şekil 47

Ö16'nın Cevabı



Ö16, sorunun çözümünü hem sözel hem de matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_{16}$: Burada aslında 5 litrelik boyalardan 3 tane kullanmak aklıma geldi. Böyle daha ucuz olacaktı.

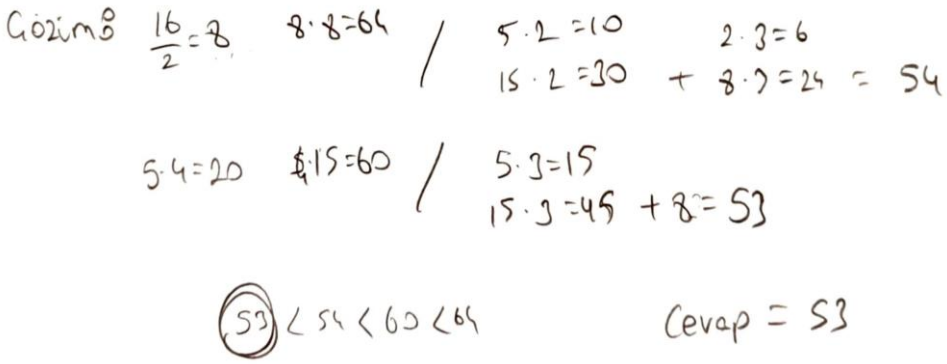
A: Peki neden kullanmadın?

$Ö_{16}$: Ama 3 tane kullanırsak 15 litre yapar.1 litrelik boya kutusu yok çünkü. Bir tane de 2 litrelik alsak 17 litre almış oluruz. Bize 16 litre lazım. Dolayısıyla 2 tane 5 litrelik, 3 tane de 2 litrelik boya alırız.

Dördüncü problem için Ö16'nın cevabı incelendiğinde, problemi anlayamadığı, verilenlerle alakalı bilinçli hareketler yapmadığı ve sorunun detaylarına inmeden aklına gelen ilk işlemi uyguladığı gözlemlenmiştir. Dolayısıyla **hatalı özelleştirme** yaptığı söylenebilir. Öğrenci görüşme esnasında doğru çözümden bahsetmiş fakat özelleştirmede hata yaptığı için genellemede de problem yaşamıştır. İki boya çeşidi arasındaki farklılıkları ortaya koymuş ve bu ilişkiyi matematiksel olarak ifade etmiş fakat genelleyebilmek için soruda istenileni anlayamamıştır. Dolayısıyla **saf genelleme** basamağında hatalar yapmıştır. Öğrenci en uygun fiyatlı kovaları alabilmek için birkaç alternatif düşünmüş, dolayısıyla **sonlu sayıda ayrık durumlardan empirik tümevarım** yapmıştır. Öğrencinin yanlış ta olsa sonuca doğrudan işlemler yapıp ulaştığı için ispat boyutunda **doğrudan ispat** yaptığı söylenebilir.

Şekil 48

Ö2'nin Cevabı



Ö2, sorunun çözümünü matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö$_2$: Boyalar 2 ve 5 litrelik kovalara koyulmuş ve bize 16 litrelik boya ihtiyacı olan bir kimsenin en az ne kadar harcayacağını sormuş. Burada 16' ya eşit ve büyük olabilecek 4 olasılık var.

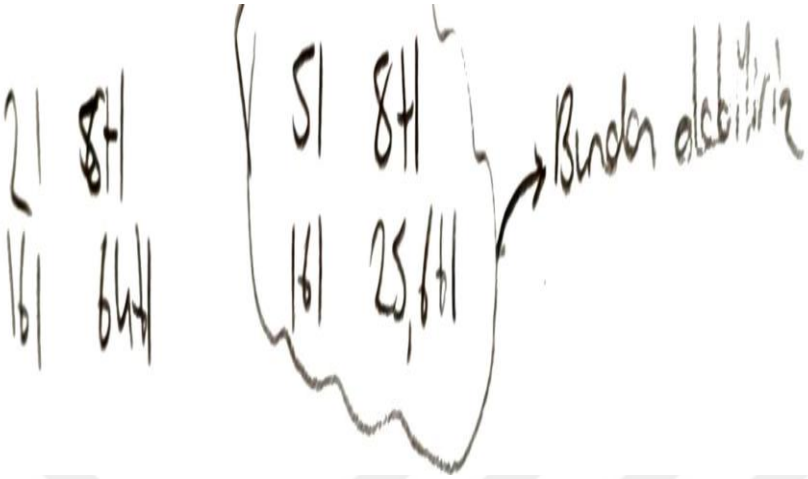
A:Nedir o olasılıklar?

Ö$_2$: İlk olarak 8 tane 2 litrelik olan kovalardan almak. Sonra 2 tane 5 litre ve 3 tane 2 litre almak. Diğer ihtimal 4 tane 5 litre kova almak ve son olarak 3 tane 5 litre ve 1 tane 2 litre almak. Bu ihtimallerin fiyatlarını tek tek buldum. Bulduğum sonuçlar 64, 54, 60 ve 53. Bize en azı sorduğu için cevap 53'tür.

Dördüncü problem için Ö2'nin cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Dolayısıyla **yeterli özelleştirm**e yaptığı söylenebilir. En uygun fiyatlı kovaları alabilmek için bütün olasılıkları tek tek yazdığı için tahmin basamağında **sonlu sayıda ayrık durumdan empirik tümevarım** alt temasını kullanmıştır. Öğrenci iki boya çeşidi arasındaki farklılıkları ortaya koyduğu ve bu ilişkiyi matematiksel olarak ifade ettiği için **saf genelleme** yapmıştır. Öğrenci sonuca doğrudan işlemler yapıp ulaştığı için ispat boyutunda **doğrudan ispat** yaptığı söylenebilir.

Şekil 49

Ö11'in Cevabı



Ö11, sorunun çözümünü matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşün celerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö$_{11}$: Bu soruda 16 litre boyaya ihtiyacı olan birinin bu ihtiyacı en az kaç tl ile yapabileceğini soruyor. Ben burada 2 litrelik kovadan ve 5 litrelik kovadan alırsak ne kadar harcayacağını buldum. 2 litrelik kovadan 16 litre alırsa 64 TL yapıyor. 5 litrelikten 16 litre alırsa 25.6 TL yapıyor. Dolayısıyla 5 litrelikten 16 litre alırız.

A: Peki 5 litrelikten 16 litre alabilir mi?

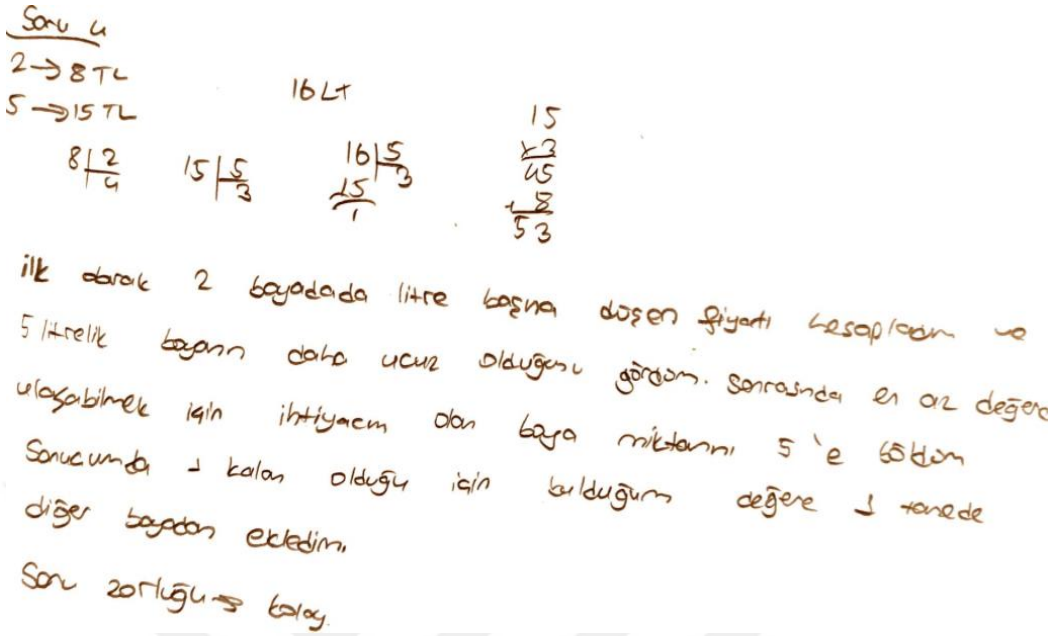
Ö11: (Öğrenci biraz düşndükten sonra) Alamaz mı?

A: Peki teşekkürler.

Dördüncü problem için Ö11'in cevabı incelendiğinde, problemi tam olarak anlayamadığı, verilenlerle alakalı bilinçli hareketler yapmadığı ve sorunun detaylarına inmeden aklına gelen ilk işlemi uyguladığı gözlemlenmiştir. Dolayısıyla **hatalı özelleştirme** yaptığı söylenebilir. Öğrenci soruda verilen 2 ve 5 litrelik kovaları kavrayamamış, özelleştirmede hata yaptığı için genellemede de problem yaşamıştır. İki boya çeşidi arasındaki farklılıkları ortaya koymuş ve bu ilişkiyi matematiksel olarak ifade etmiş fakat genelleyebilmek için bilinçli bir hareket yapamamıştır. Dolayısıyla **genelleme** basamağında hatalar yapmıştır. Öğrenci sonuca doğrudan işlemler yapıp ulaştığı için ispat boyutunda **doğrudan ispat** yapmaya çalışmıştır.

Şekil 50

Ö12'nin Cevabı



Ö12, sorunun çözümünü hem matematiksel hem de sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

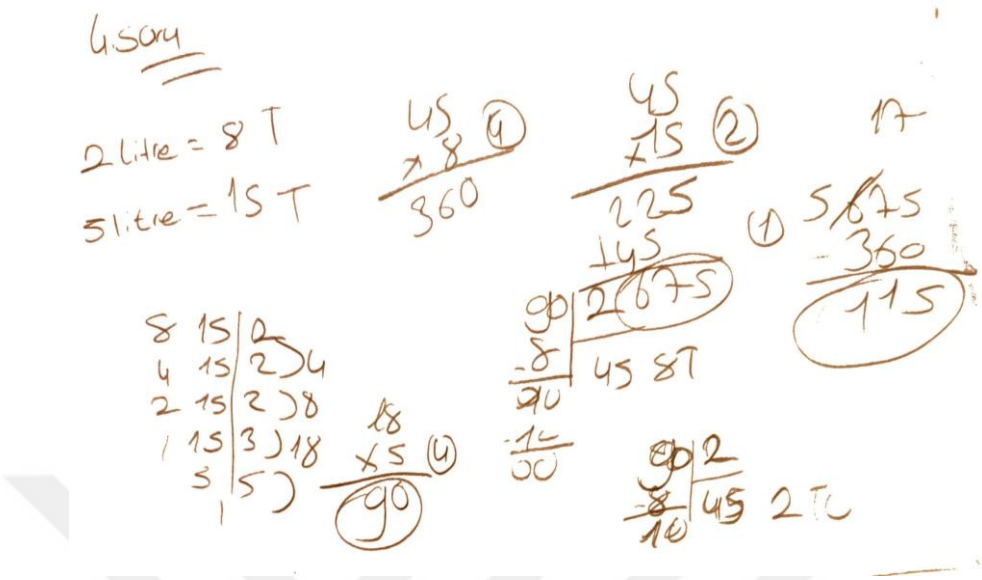
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_{12}$: Soruda da söyledim. Boyaların litre başına düşen fiyatlarını hesapladım. Sonra 5 litrelik boyanın daha ucuz olduğunu hesapladım. Sonra ihtiyacım olan boya miktarını 5'e böldüm. 1 litre açıkta kaldığı için de 2 litrelikten 1 tane ekledim. Sonucu 17 litre ve 53 lira olarak buldum.

Dördüncü problem için Ö12'nin cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülme ktedir. Dolayısıyla **yeterli özelleştirm**e yaptığı söylenebilir. En uygun fiyatlı kovaları alabilmek için litre fiyatlarını hesaplamış ve **sonlu sayıda ayrık durumlardan empirik tümevarım** yapmıştır. Öğrenci iki boya çeşidi arasındaki farklılıkları ortaya koyduğu ve bu ilişkiyi matematiksel olarak ifade ettiği için **saf genelleme** yapmıştır. Öğrencinin sonuca doğrudan işlemler yapıp ulaştığı için ispat boyutunda **doğrudan ispat** yaptığı söylenebilir.

Şekil 51

Ö4'ün Cevabı



Ö4, sorunun çözümünü matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşün celerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö4: 8 ve 15'in ebob'unu yapıp tek tek litrerye böleriz. Çıkan sonucu TL ile tek tek çarpar daha sonra en az dediği için çıkarırız.

A: 8 ve 15'in ebobunu neden aldın?

Ö4: Ortak noktasını bulmak için.

A: Obebi kaç çıktı peki?

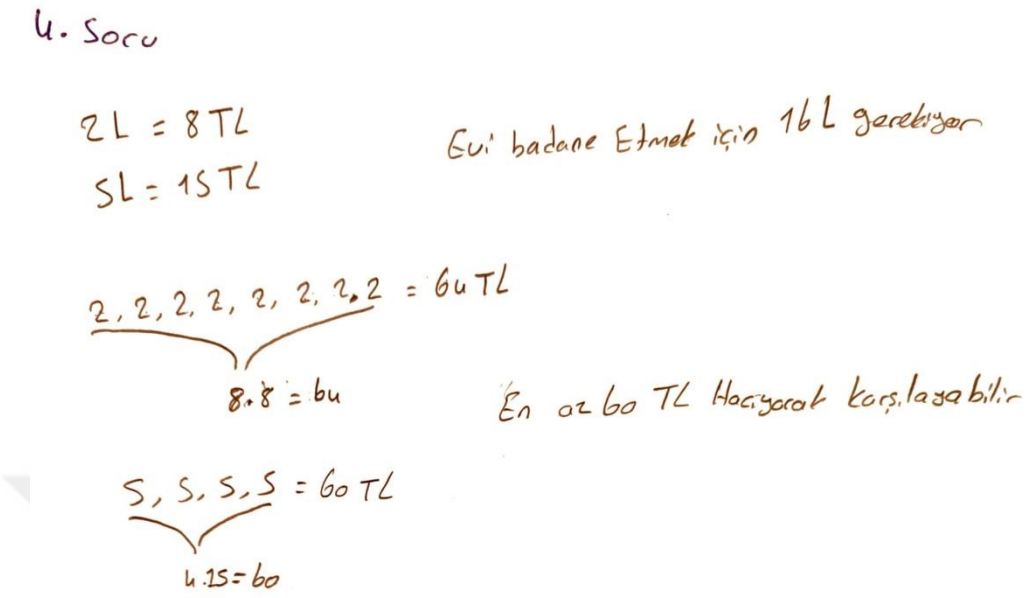
Ö4: …

(Öğrenci biraz bekledikten sonra gülmeye başlamış ve işleme tekrar başlamıştır)

Dördüncü problem için Ö4'ün cevabı incelendiğinde, problemi tam olarak anlayamadığı, verilenlerle alakalı gelişigüzel işlemler yaptığı ve sorunun detaylarına inmeden aklına gelen ilk işlemi uyguladığı gözlemlenmiştir. Dolayısıyla **hatalı özelleştirme** yaptığı söylenebilir. Öğrenci ilk olarak soruda verilen boya fiyatlarının ebobunu almak istemiş ve yanlış işlemler yapmıştır. Dolayısıyla aklına ilk gelen formülü uygulamış ve **abdüksiyon** türünden bir tahmin yapmıştır. Özelleştirmede hata yaptığı için genellemede de problem yaşamıştır. İki boya çeşidi arasındaki farklılıkları ortaya koyamamış ve bu ilişkiyi matematiksel olarak ifade etmiş fakat genelleyebilmek için bilinçli bir hareket yapamamıştır. Dolayısıyla **genelleme** basamağında hatalar yapmıştır. Öğrenci sonuca doğrudan işlemler yapıp ulaştığı için ispat boyutunda **doğrudan ispat** yapmaya çalışmıştır.

Şekil 52

Ö17'nin Cevabı



Ö17, sorunun çözümünü matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşün celerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_{17}$: 2 litrelik boyalardan 8 tane alırsak 16 litre yapıyor ve ihtiyacımızı karşılıyoruz. O da 64 TL yapar. 5 litrelik boyalardan 4 tane alırsak 20 litre yapıyor. Yine ihtiyacımızı karşılıyoruz. Hatta boya artıyor. O da 60 TL yapıyor. 64 ve 60 Tl arasından 60 TL'yi seçmemiz gerekiyor.

A: Peki bundan farklı bir çözüm yolu olabilir mi sence?

$Ö_{17}$: Yani istersek adha fazla boya alırız. O zaman da maliyet artar.

Dördüncü problem için Ö17'nin cevabı incelendiğinde, problemi tam olarak anlayamadığı ve sorunun detaylarına inmeden işleme başladığı gözlemlenmiştir. Dolayısıyla **kısmi özelleştirme** yaptığı söylenebilir. Öğrenci özelleştirmede hata yaptığı için genellemede de problem yaşamıştır. İki boya çeşidi arasındaki farkı ortaya koymuş ve bu ilişkiyi matematiksel olarak ifade etmiş fakat genelleyebilmek için soruda istenileni anlayamamıştır. Dolayısıyla **saf genelleme** basamağında hatalar yapmıştır. Öğrenci en uygun fiyatlı kovaları alabilmek için boya sayılarını hesaplamış, dolayısıyla **sonlu sayıda ayrık durumlardan empirik tümevarım** yapmıştır. Öğrencinin yanlış ta olsa sonuca doğrudan işlemler yapıp ulaştığı için ispat boyutunda **doğrudan ispat** yaptığı söylenebilir.

Nicelik sorularına ilişkin bulguları toparlayacak olursak; öğrencilerin bu sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde %50'den fazlasının (12 öğrenci) bu sorularda yeterli özelleştirme yaptığı, varsayımda bulunma basamağını yine %50'den fazla öğrencinin kullandığı (11 öğrenci), %50'den fazla öğrencinin (12 öğrenci) genelleme basamağını kullandığı ve %75'den fazla öğrencinin (14 öğrenci) ispat basamağını kullandığı/kullanmaya çalıştığı görülmektedir.

4.2. Değişim ve İlişkiler Sorularına İlişkin Bulgular

4.2.1. Yük Taşıma İsimli Probleme Ait Bulgular: Öğrencilere verilen okuryazarlık sorularından beşincisi değişim ve ilişkiler sorularından olan Yük taşıma isimli sorudur. Bu soruda beklenen çözüm yolu şu şekildedir:

A noktasındaki yükü hiç oynatmadan sadece B noktasındaki yükü A noktasına getirme işlemi ile en ucuz maliyetle yükleri aynı noktaya taşıyabiliriz. A noktası haricinde farklı bir noktada yükleri birleştirmek her zaman için daha maliyetli olmaktadır. Bunun nedeni A noktasındaki yükün taşıma maliyetinin B noktasındaki yükten fazla olmasıdır. Maliyeti az tutabilmek için pahalı olan yükü mümkün olduğunca az hareket ettirme gerekliliği, öğrencilerin farkına varması gereken önemli noktalardan biridir.

Soru matematiksel süreçler açısından incelendiğinde;

Problemi matematiksel olarak formüle etme: Soruda verilen bilgileri kullanarak, A ve B noktalarındaki yüklerin taşınma maliyetlerini matematiksel ifadelerle formüle etme.

Matematiksel kavramları ve yöntemleri kullanma ve akıl yürütme: Maliyet fonksiyonunu oluşturmak için yükleri hareket ettirme ve en uygun maliyeti hesaplama, sonuçları karşılaştırma.

Matematiksel çıktıları yorumlama: Yüklerin en düşük maliyetle taşınması için hangi uzaklıkta bir noktaya taşınması gerektiğini anlama. Ulaşılan sonucu başta yapılan tahminlerle karşılaştırarak doğruluğu hakkında karar verme.

Bu problemde öğrencilerin verdiği cevaplar ve kullandığı stratejiler dikkatle incelenmiş, Tablo 17'deki veriler elde edilmiştir:

Tablo 17

Öğrencilerin 5. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları

Çözüm	Frekans
Doğru Sonuca Ulaşma	2
Yanlış Sonuca Ulaşma	14
Sonuca Ulaşamama	2
Toplam	18

Tablo 17 incelendiğinde öğrencilerden sadece 2 kişinin doğru sonuca ulaştığı görülmektedir. 14 öğrenci yanlış sonuca ulaşmış, 2 öğrenci ise çözümle alakalı herhangi bir strateji geliştirememiştir. Bu soruda öğrencilerin matematiksel düşünmenin basamaklarını kullanıp kullanmadıkları belirlenecektir.

Tablo 18'te öğrencilerin 5. sorunun çözümü ile ilgili kullandıkları matematiksel düşünme boyutları verilmiştir.

Tablo 18

Öğrencilerin 5. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları

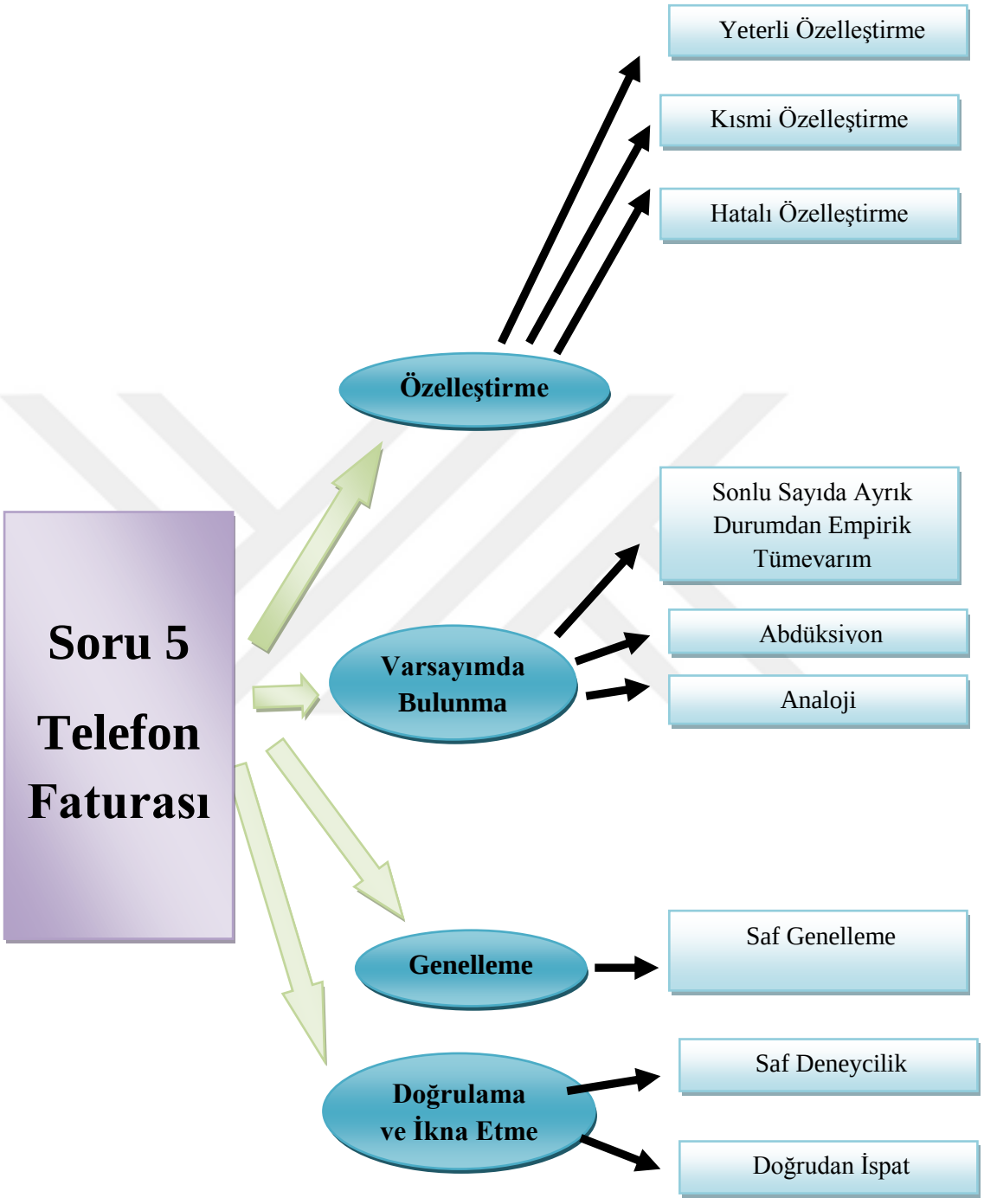
Matematiksel Düşünme Boyutları	Var	Yok
Yeterli Özelleştirme	2	16
Varsayımda Bulunma	8	10
Genelleme	10	8
İspat	10	8

Tablo 18 incelendiğinde öğrencilerden sadece 2 kişinin yeterli özelleştirme yaptığı görülmektedir. Soruyu yeterli derecede özelleştiremeyen öğrenciler diğer basamaklarda da düzenli olarak matematiksel düşünmenin alt basamaklarını kullanamamışlardır. Varsayımda bulunma, genelleme ve ispat basamakları ortalama yarı yarıya kullanılmıştır.

Öğrencilerin kullanmış oldukları düşünme boyutlarının hangi alt kategorilerde yoğunlaştığı Şekil 53 ve Tablo 19'da verilmiştir.

Şekil 53

5. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları



Tablo 19

5. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları

Boyutlar	Kullanılan Alt Kategoriler	Açıklama
Özelleştirme Boyutu	Yeterli Özelleştirme	Örneklerin temsil ettiği genel durumun doğru ve kapsamlı bir şekilde anlaşılıp ele alınması.
	Kısmi Özelleştirme	Örneklerin genel durumu tam olarak yansıtmadığı, eksik veya sınırlı bir perspektif sunması.
	Hatalı Özelleştirme	Yanlış veya yanıltıcı örneklerle genel bir durumu temsil etmeye çalışılması.
Varsayımda Bulunma Boyutu	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Gözlemlenen ayrık durumların genel bir ilke veya hipoteze ulaşmak için kullanılması.
	Analoji	Benzer durumlar veya olaylar arasındaki paralelliklerden yararlanarak sonuç çıkarma.
	Abdüksiyon	En iyi açıklamayı bulmak amacıyla mevcut kanıt ve bilgilerin yorumlanması.
Genelleme Boyutu	Saf Genelleme	Doğrudan gözlemlerden elde edilen basit ve temel genellemeler.
Doğrulama ve İkna Etme Boyutu	Doğrudan İspat	Belirli bir hipotezin veya teorinin doğruluğunu kesin ve açık bir şekilde kanıtlama.
	Saf Deneycilik	Sadece birkaç örneğe bakarak ifadenin doğru olduğu sonucuna varmak

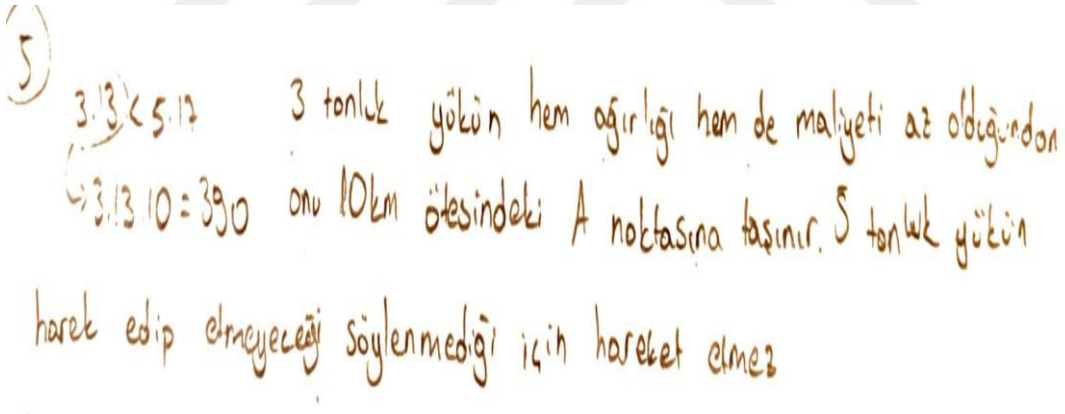
Beşinci problemde öğrencilerin kullanmış oldukları alt kategoriler Şekil 53 ve Tablo 19'da verilmiştir. Bu soruda az sayıda öğrencinin anlatılanı ve sorulanı anlayıp doğru olarak açıkladığı; problemi araştırıp örnek vermeye çalıştığı ve problemde anlatılanlara yönelik bilinçli hareketler yaptığı gözlemlenmiştir. Bunun sonucunda matematiksel düşünmenin özelleştirme basamağını kullanıp yeterli özelleştirme yaptıkları söylenebilir. Bununla beraber bazı öğrencilerin isteneni büyük oranda anladıkları ancak gözden kaçan küçük ama sonucu

etkileyen durumların olduğu görülmüştür. Bunun sonucunda kısmi özeleştirmeler yaptıkları söylenebilir. Bazı öğrencilerin ise soruyu büyük ölçüde anlamadığı, ilk gördüğü haliyle özelleştirmeye çalıştığı ve bunun sonucunda hatalı işlemler yaptıkları görülmüştür. Bu öğrenciler hatalı özelleştirmeler yapmış diyebiliriz. Öğrencilerin çoğu olası tüm durumları tanımlamaya çalışıp karşılaştırma yapmışlardır. Yine çoğu öğrencinin genelleme yaptığını söyleyebilriz. Fakat çoğu öğrenci özelleştirme basamağında hata yaptığından dolayı genelleme yaparken de problem yaşadığını belirtmeliyiz. Bazı öğrenciler çözümü açıklamak için bilinen başka bir kuralı referans göstermiş, bazıları ise algıya dayalı varsayımlar yamışlardır. Bunun sonucunda abdüksiyon ve algıya dayalı tahminler yapmışlardır. Bazı öğrenciler tek bir örnek üzerinden işlemler gerçekleştirmiş, bazıları ise birkaç örneğe bakarak ispat yoluna gitmişlerdir. Dolayısıyla saf deneycilik ve kritik deney alt kategorilerini kullanmışlardır.

Beşinci problemde kullanılan düşünme boyutları, alt kategorilerine yönelik açıklamalar ve bazı ortaokul öğrencilerinin çözüm yolu örnekleri aşağıda verilmiştir:

Şekil 54

Ö14'ün Cevabı



Ö14, sorunun çözümünü sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

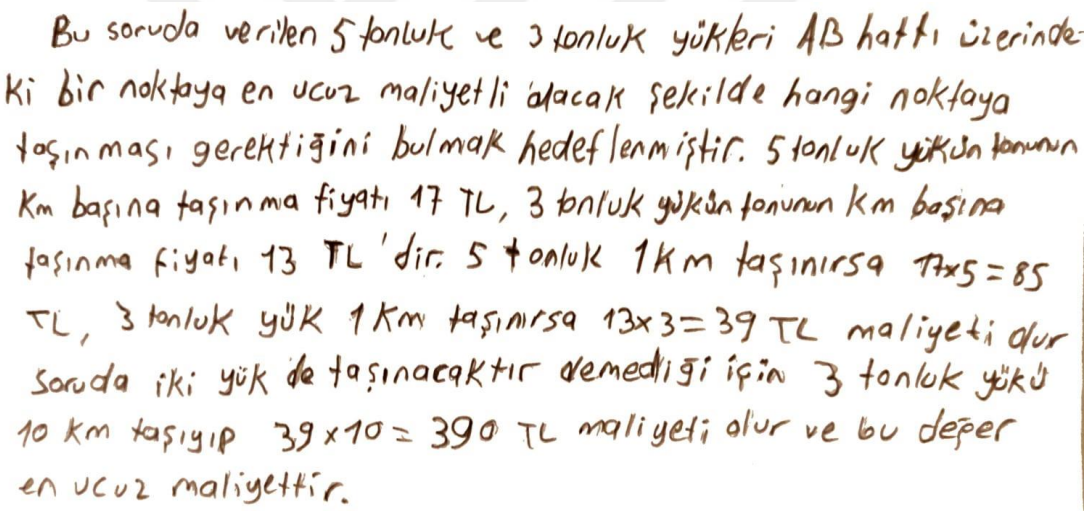
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö14: Şimdi iki yükü de karşılaştırdığımız zaman sağdakinin hem maliyeti düşük. Hem de ağırlığı. Soldakini olabildiğince az oynatmamız lazım diye düşündüm. Sonra baktım ki her birinin hareket etme şartı yok. O zaman sağdaki yükü direk soldakinin olduğu yere alırsak yani soldakini hiç yerinden oynatmazsak en ucuz maliyeti yakalamış oluruz. Zaten daha önce de böyle bir soru çözmüştüm. En az en çok sorusu. Orda da sadece bir tarafla ilgili işlem yapmıştık. Bütün hepsinde uygulanabilir.

Beşinci problem için Ö14'ün cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci yüklerin ağırlıklarını ve taşınma maliyetlerini doğru hesaplamış ve maliyeti az tutabilmek için pahalı olan yükü mümkün olduğunca az hareket ettirmenin gerekli olduğunu kavramıştır. Olası tüm durumların farkına vardığı ve bu durumları karşılaştırdığı için **saf genelleme** yapmıştır diyebiliriz. Öğrenci görüşme esnasında sorunun benzerini çözdüğünü belirttiği için doğruluğu bilinen bir duruma benzetim yapmıştır, yani tahmin basamağında **analojiyi** kullanmıştır. Öğrenci verdiği bir örnek üzerinden işlemler yapmış ve sonuca ulaşmıştır. Dolayısıyla **kritik deney** alt boyutunda ispat yapmıştır.

Şekil 55

Ö5'in Cevabı


Bu soruda verilen 5 tonluk ve 3 tonluk yükleri AB hattı üzerinde-
ki bir noktaya en ucuz maliyetli olacak şekilde hangi noktaya
taşınması gerektiğini bulmak hedeflenmiştir. 5 tonluk yükün tonunun
Km başına taşınma fiyatı 17 TL, 3 tonluk yükün tonunun km başına
taşınma fiyatı 13 TL'dir. 5 tonluk 1 km taşınırsa 17x5 = 85
TL, 3 tonluk yük 1 Km taşınırsa 13x3 = 39 TL maliyeti olur
Soruda iki yük de taşınacaktır demediği için 3 tonluk yükü
10 km taşıyıp 39x10 = 390 TL maliyeti olur ve bu değer
en ucuz maliyettir.

Ö5, sorunun çözümünü sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

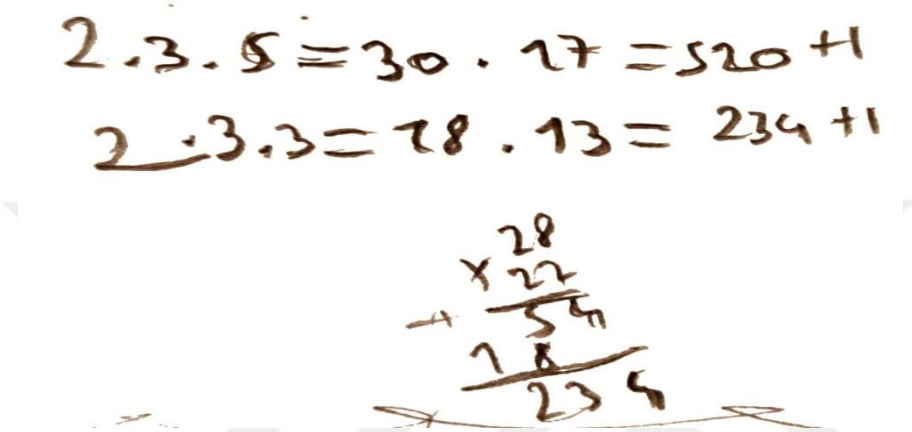
$Ö_5$: Bu sorunun çözümünde bize verilen bilgileri analiz edip her bir cismin birim taşıma maliyetini hesaplayıp hangi cismin taşınması gerektiğine karar verdim. Burda bence kritik nokta iki cismin de taşınacakmış gibi algılanması. Aslında öyle bir şey yok. Sadece B'yi A'ya taşımak yeterli.

Beşinci problem için Ö5'in cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Dolayısıyla genel resmin küçük parçaları

üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci yüklerin ağırlıklarını ve taşınma maliyetlerini doğru hesaplamış ve yüklerden birinin yerinde kalabileceğini belirtmiş, dolayısıyla olası tüm durumların farkına vardığını yani **saf genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci doğrudan işlemler yapıp sonuca ulaştığı için, ispat boyutunda **doğrudan ispat** yaptığını söyleyebiliriz.

Şekil 56

Ö13'ün Cevabı



Ö13, sorunun çözümünü sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_{13}$: Öncelikle işlemleri yaptım. Bu soruda bir daire olduğu için π sayısını içine kattım. Onu da kolay olsun diye 3 aldım. A yükü 5 ton, B yükü 3 ton ve ben de birkaç matematiksel işlem yaptıktan sonra A yükü 520 TL, B yükü 234 TL çıktı. Ucuz olanı yani B yükünü seçmiş oldum.

A: Sonuç olarak ne bulmuş oldun?

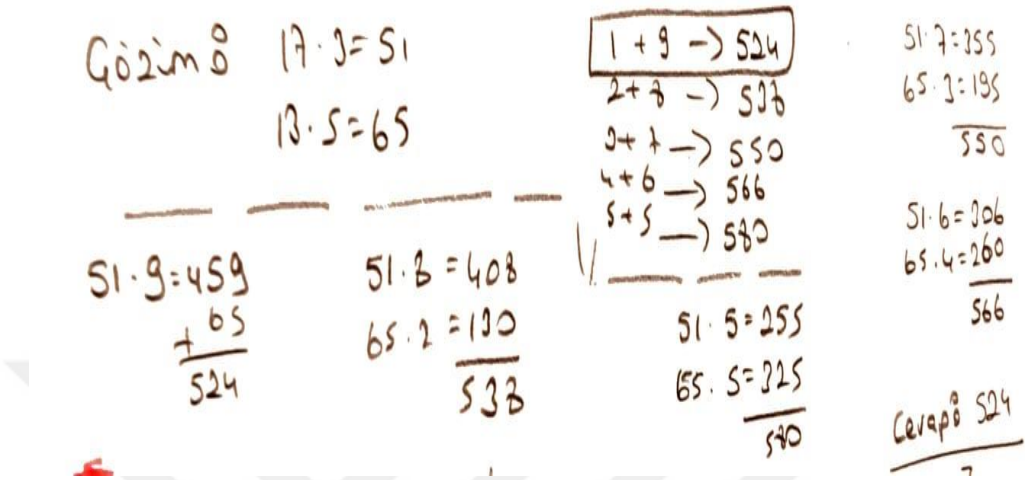
$Ö_{13}$: En ucuz maliyeti.

Beşinci problem için Ö13'ün cevabı incelendiğinde; problemi doğru anlamadığı, soruda istenenin ne olduğunu kavrayamadığı ve verilenleri kullanamadığı görülmüştür. Açıklamalarında soruda söylenenlere göre büyük sapmalar olduğu gözlemlenmiştir. Dolayısıyla akla ilk gelen şeyi özelleştirmeye çalıştığı görülmektedir. Bunun sonucu **hatalı özelleştirme** yaptığı söylenebilir. Öğrenci yükleri daireye benzeterek **analoji** alt temasında tahminde bulunmuş, daha sonra dairenin çevresi formülünü kullanarak işlem yapmaya başlamıştır. Dolayısıyla genel bir kural çerçevesinde açıklamaya çalışmış ve aynı zamanda tahmin basamağında **abdüksiyon kullanmıştır.** Öğrenci verilenler arasında herhangi bir karşılaştırma yapamamış ve bulguları genelleyememiştir. Öğrenci doğrudan işlemler yapıp

sonuca ulaşmış fakat farklı bir sonuç bulmuştur. Dolayısıyla ispat boyutunda **doğrudan ispat** yapmaya çalıştığını söyleyebiliriz.

Şekil 57

Ö10'un Cevabı



Ö10, sorunun çözümünü matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

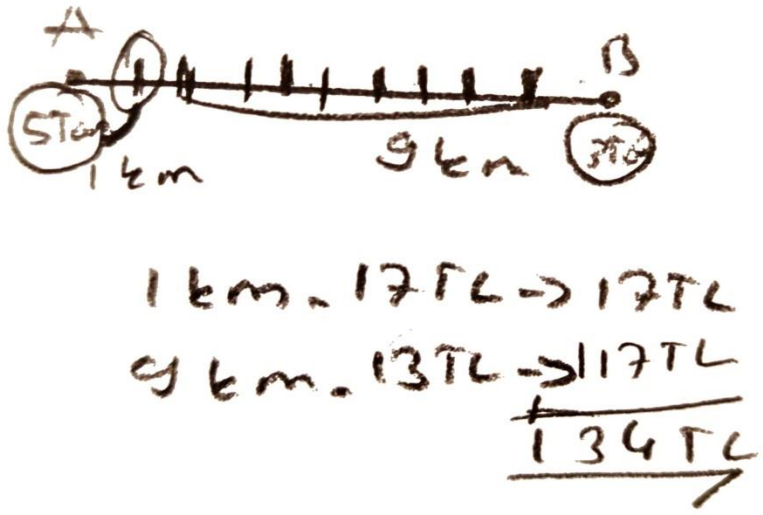
$Ö_{10}$: Şimdi A ile B noktalarında sırasıyla 5 ton ile 3 ton olan yükler bulunmaktadır. A ile B yükünün tonunun km başına olan ücreti verilmiş. Şimdi burada tonun km başına fiyatı verilmiş. Lakin bizim yüklerimiz 5 ve 3 ton. Bu durumda ilk olarak km başına düşen fiyatları buldum. A noktasına 65 ve B noktasına 51 TL eder. Buradan sonra 10 km yolun neresine gelirse en ucuz maliyet elde edilir diye sormuş. Şimdi burada hangi sayıların toplamının 10 ettiğine gittim. Burada çarpım sonucu olanın en küçük değerini bulmak için 65'i küçük 51'i büyük sayı ile çarpmak gerekir. Burada 1 ve 9'un en küçük değeri vereceğini anlayabiliriz. Lakin eğer bu sonuca verilerden ulaşamıyorsak teker teker hepsini deneyerek te bulabiliriz. Ama bize en ucuz maliyeti sorduğu için 51x9 +65 =524 bizim cevabımız olur.

Beşinci problem için Ö10'un cevabı incelendiğinde, öğrencinin soruyu büyük çoğunlukla anladığı, fakat soruda söylenenlerin bir kısmını dikkate alıp, bazı kısımların unutulduğu veya ihmal edildiği, cevaba doğru ilerlerken eksik kalan kısımların olduğu anlaşılmaktadır. Dolayısıyla öğrencinin **kısmi özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Sorunun başında km'ye düşen birim fiyat hesaplamasında veriler arasında ilişki kurabildiğini fakat yanlış sayıları çarptığını ve bu yanlış hesaplama üzerinden **saf genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci sorudaki tüm ihtimalleri yazarak **sonlu sayıda ayrık durumlardan empirik tümevarım** yapmıştır. Burada öğrencinin bulduğu birden çok örneğe bakarak işlem

yapması ve sonuca gitmesi ispat basamağının **saf deneycilik** alt temasında çalıştığını göstermektedir.

Şekil 58

Ö16'nın Cevabı



Ö16, sorunun çözümünü şekil üzerinden matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

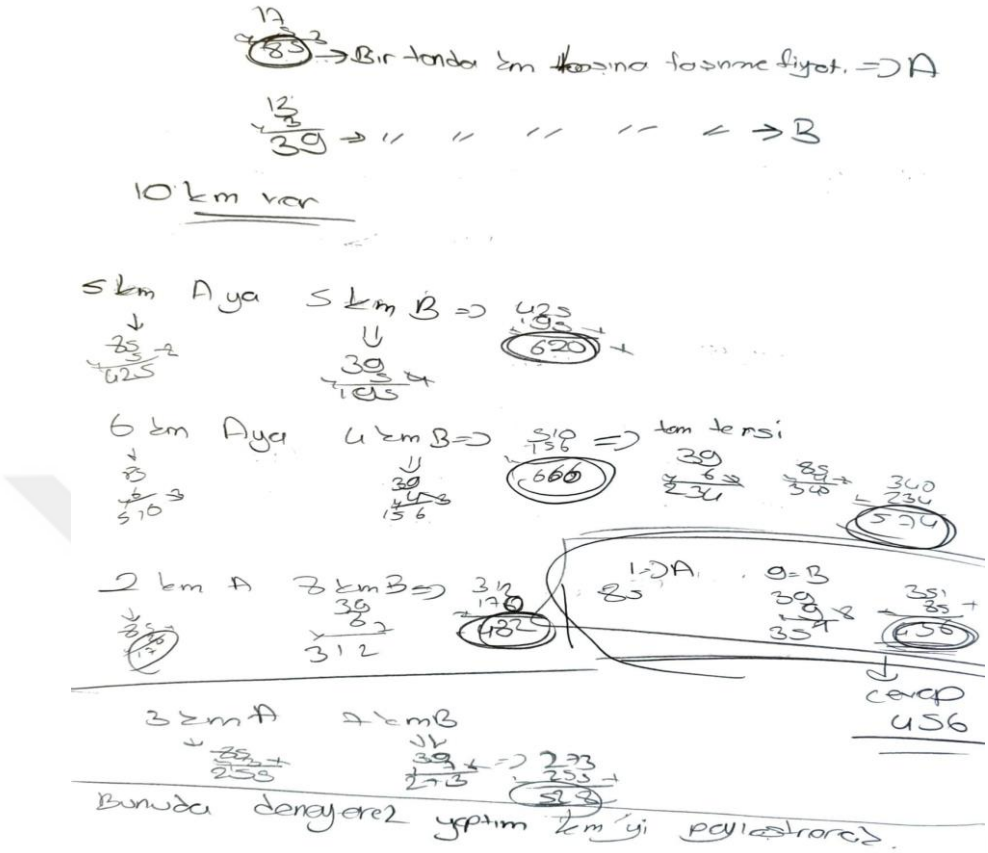
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_{16}$: A yükünün taşınma fiyatı B yükünün taşınma fiyatına göre daha pahalıdır. O yüzden taşınma noktasını A yükü en az yolu kat edecek şekilde seçmeliyiz. A yükü 1 km ve B yükü 9 km taşınacak şekilde yükler A noktasından 1 km öteye taşınmalıdır. Taşınma maliyeti 134 TL olur.

Beşinci problem için Ö16'nın cevabı incelendiğinde, öğrencinin soruyu tam olarak anlayamadığı ve çözüme aktaramadığı, soruda söylenenlerin bir kısmını dikkate alıp kalan kısımlarına odaklanmadığı, verdiği örnekte eksikliklerin olduğu ve sorunun detaylarına inmeden akla ilk gelen haliyle soruyu açıklamaya çalıştığı görülmüştür. Bunun sonucunda **kısmi özeleştirme** yaptığı söylenebilir. Öğrenci yüklerin tonlarına göre km fiyatlarını hesaplamamış, 1 tonu için verilen sayı üzerinden hesap yapmıştır. Bu yanlış işlem neticesinde ucuz oaln yükün daha fazla taşınması gerektiğini **genellemiş** fakat işlemi yanlış yaptığı için sonucu da yanlış bulmuştur. Çözüm sırasında problemi çizimler yoluyla görselleştirerek kuralla ilgili tahminde bulunduğu yani **algıya dayalı tahmin** yaptığı söylenebilir. Öğrenci doğrudan işlemler yapıp sonuca ulaşmış fakat farklı bir sonuç bulmuştur. Dolayısıyla ispat boyutunda **doğrudan ispat** yapmaya çalıştığını söyleyebiliriz.

Şekil 59

Ö8'in Cevabı



Ö8, sorunun çözümünü matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö8: Soruya başlarken km başına düşen taşınma fiyetlarını buldum. Sonra nerde buluşabilirler diye AB arasındaki noktaları tek tek tahmin etmeye çalıştım. İlk önce tam ortada buluşturdum yani 5'e 5 yaptım mesafeyi. Sonra 6'ya 4 yaptım. 2'ye 8, 1'e 9, 3'e 7. Hepsini tek tek karşılaştırdığımda cevabın A'yı 1 km B'yi de 9 km oynatarak çıkacağını buldum. Yani 456 lira.

A: Tek tek tüm olasılıkları denemen güzel. Peki, başka bir alternatif var mı? Ya da denemediğin başka bir seçenek?

Ö8: Yani hepsine baktım. (Biraz düşündükten sonra) Tabi ben 1 km'lik oynamaların hepsine baktım. Eğer 1 km'nin altına da bakacaksak örneğin 500 metre. O zaman değişir tabi. Onlara bakmalı mıyız?

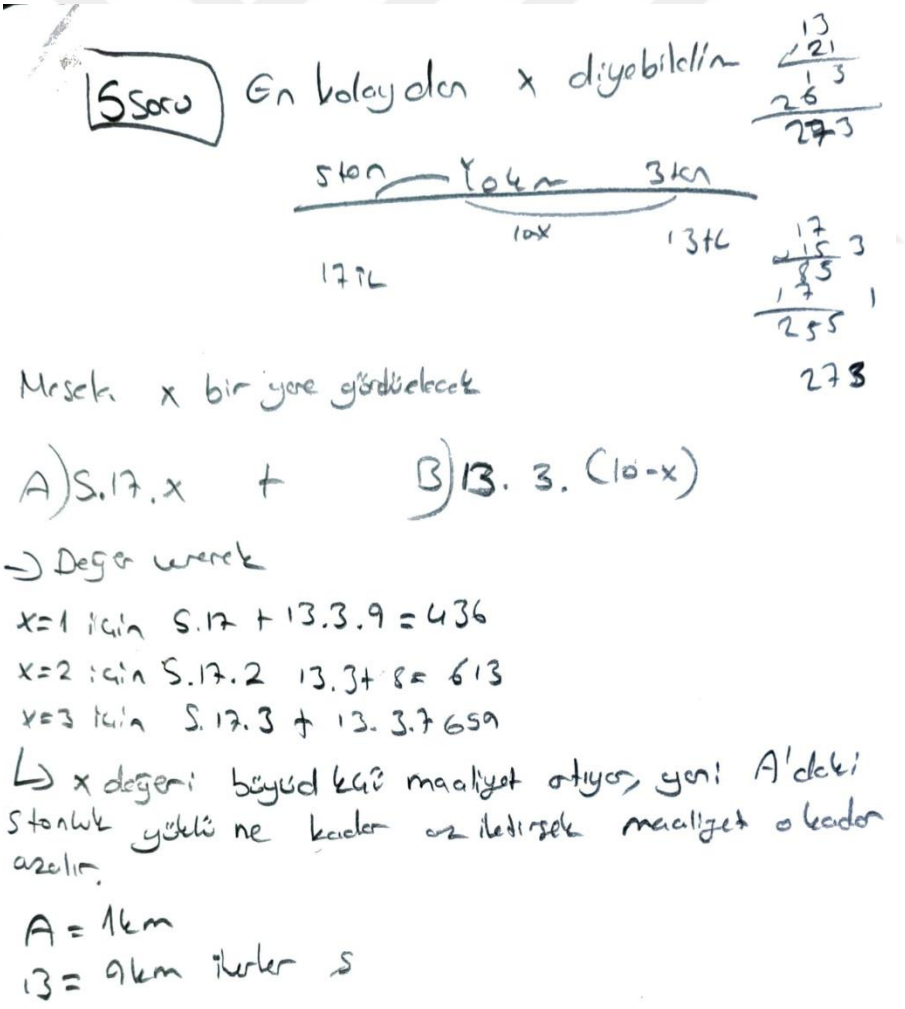
A: Sence bakmalı mıyız?

$Ö_8$: O zaman hesap bitmez ki. Sabaha kadar deneriz.

Beşinci problem için Ö8'in cevabı incelendiğinde, öğrencinin soruyu büyük çoğunlukla anladığı, fakat soruda söylenenlerin bir kısmını dikkate alıp, bazı kısımların unutulduğu veya ihmal edildiği, cevaba doğru ilerlerken eksik kalan kısımların olduğu anlaşılmaktadır. Yüklerin mutlaka oynaması gerektiğini düşünmüş, dolayısıyla **kısmi özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Sorunun başında km'ye düşen birim fiyat hesaplamasında verilen harfler arasında ilişki kurabildiği ve işlemleri bu doğrultuda yapabildiği için **sembolik genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci soruda aklına gelen tüm ihtimalleri yazarak **sonlu sayıda ayrık durumlardan empirik tümevarım** yapmıştır. Burada öğrencinin bulduğu birden çok örneğe bakarak işlem yapması ve sonuca gitmesi ispat basamağının **saf deneycilik** alt temasında çalıştığını göstermektedir.

Şekil 60

Ö9'un Cevabı



Ö9, sorunun çözümünü hem matematiksel olarak hem de sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_9$: Öncelikle buluşacakları noktaya X dedim. Her iki yük için x'e dayalı formül yazdım. X=1 için, x=2 için ve x=3 için hesaplamalar yapınca anladım ki A'daki yük için x büyüdükçe maliyet artıyor. Dolayısıyla A yükünün sadece 1 km gitmesi yetiyor.

A: Peki A yükü illaki gitmeli mi?

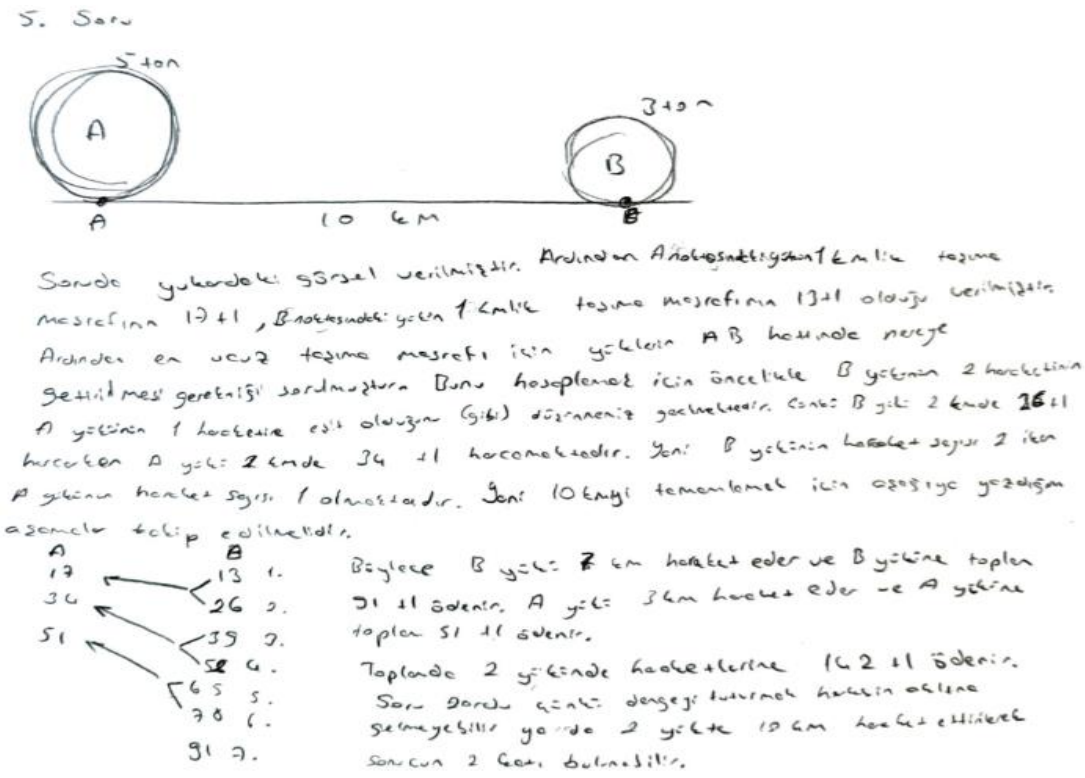
$Ö_9$: Nasıl yani?

A: Çözümünü birazdan hep birlikte yapacağız.

Beşinci problem için Ö9'un cevabı incelendiğinde, öğrencinin soruyu büyük çoğunlukla anladığı, fakat soruda söylenenlerin bir kısmını dikkate alıp, bazı kısımların unutulduğu veya ihmal edildiği görülmüştür. Bir önceki öğrencide olduğu gibi bu öğrenci de yüklerin mutlaka oynaması gerektiğini düşünmüş, dolayısıyla **kısmi özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Sorunun başında şekil çizerek bilinmeyen atamış ve işlemlere başlamıştır. Dolayısıyla **algıya dayalı tahminde** bulunmuştur. Bununla birlikte mesafe ölçümünde bilinmeyen kullandığı ve işlemleri bu doğrultuda yapabildiği için **sembolik genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci soruda aklına gelen tüm ihtimalleri yazarak **sonlu sayıda ayrık durumlardan empirik tümevarım** yapmıştır. Burada öğrencinin bulduğu birden çok örneğe bakarak işlem yapması ve sonuca gitmesi ispat basamağının **saf deneycilik** alt temasında çalıştığını göstermektedir.

Şekil 61

Ö4'ün Cevabı



Ö4, sorunun çözümünü şekil üzerinden sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö4: A yükü daha maliyetli olduğu için 2'ye 1 gibi düşündüm. Yani B yükü 2 hareket ederken A yükü 1 hareket etmeli bence. Böylece 7. harekette buluşabilirler.

Beşinci problem için Ö4'ün cevabı incelendiğinde, öğrencinin soruyu tam olarak anlayamadığı ve çözüme aktaramadığı, soruda söylenenlerin bir kısmını dikkate alıp kalan kısımlarına odaklanmadığı, verdiği örnekte eksikliklerin olduğu ve sorunun detaylarına inmeden akla ilk gelen haliyle soruyu açıklamaya çalıştığı görülmüştür. Bunun sonucunda **kısmi özeleştirme** yaptığı söylenebilir. Bunun neticesinde her iki yükün de oynaması gerektiğini düşünmüştür. Öğrenci yüklerin tonlarına göre km fiyatlarını hesaplamamış, 1 tonu için verilen sayı üzerinden hesap yapmıştır. Bu yanlış işlem neticesinde **genelleme** basamağında problem yaşamıştır. Çözüm sırasında problemi çizimler yoluyla görselleştirerek kuralla ilgili tahminde bulunduğu yani **algıya dayalı tahmin** yaptığı söylenebilir. Öğrenci doğrudan işlemler yapıp sonuca ulaşmış fakat farklı bir sonuç bulmuştur. Dolayısıyla ispat boyutunda **doğrudan ispat** yapmaya çalıştığını söyleyebiliriz.

4.2.2. Mekik İsimli Probleme Ait Bulgular: Öğrencilere verilen okuryazarlık sorularından altıncısı değişim ve ilişkiler sorularından olan Mekik isimli sorudur. Bu soruda beklenen çözüm yolu şu şekildedir: 109 mekik 100 puan ve 59 mekik 0 puan olarak hesaplanacak. Dolayısıyla puan verilmeye 60 mekikten itibaren başlanacak. 59 ve 109 arasında 50 birim var. Dolayısıyla 59 mekikten sonra 50 mekik yapan 100 puan alacaktır. 50 mekik 100 puan ise 1 mekik 2 puandır. Bunu formüle dökecek olursak; x mekik sayısı olmak üzere p=(x-59).2 şeklindedir. Dolayısıyla 70 mekik yapan bir kişi 59'dan sonra 11 mekik yaptığı için (70-59).2 formülünden 22 puan almış olur.

Soru matematiksel süreçler açısından incelendiğinde;

Problemi matematiksel olarak formüle etme: Verilen mekik sayısı ile puanlama arasındaki ilişkiyi ifade edebilecek formülü yazabilme. Puanlamanın başlangıç ve bitiş sınırlarını hesaplayabilme.

Matematiksel kavramları ve yöntemleri kullanma ve akıl yürütme: Sorunun çözümü için basit orantı kullanarak, verilen bilgiler doğrultusunda doğrusal bir ilişkiyi açıklama ve nasıl hesaplanacağını belirleme. Matematiksel işlemler ve orantı kullanımını gerektirme.

Matematiksel çıktıları yorumlama: Elde edilen formül sayesinde, herhangi bir mekik sayısının puanını doğru bir şekilde hesaplayabilme. Sorunun gereksinimlerine uygun olarak puanlama sisteminin nasıl çalıştığını açıklama.

Bu problemde öğrencilerin verdiği cevaplar ve kullandığı stratejiler dikkatle incelenmiş, Tablo 20'deki veriler elde edilmiştir:

Tablo 20

Öğrencilerin 6. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları

Çözüm	Frekans
Doğru Sonuca Ulaşma	5
Yanlış Sonuca Ulaşma	7
Sonuca Ulaşamama	6
Toplam	18

Tablo 20 incelendiğinde öğrencilerden sadece 3 kişinin doğru sonuca ulaştığı görülmektedir. 7 öğrenci yanlış sonuca ulaşmış, 8 öğrenci ise çözümle alakalı herhangi bir strateji geliştirememiştir. Bu soruda öğrencilerin matematiksel düşünmenin basamaklarını kullanıp kullanmadıkları belirlenecektir.

Tablo 21'de öğrencilerin 6. sorunun çözümü ile ilgili kullandıkları matematiksel düşünme boyutları verilmiştir.

Tablo 21

Öğrencilerin 6. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları

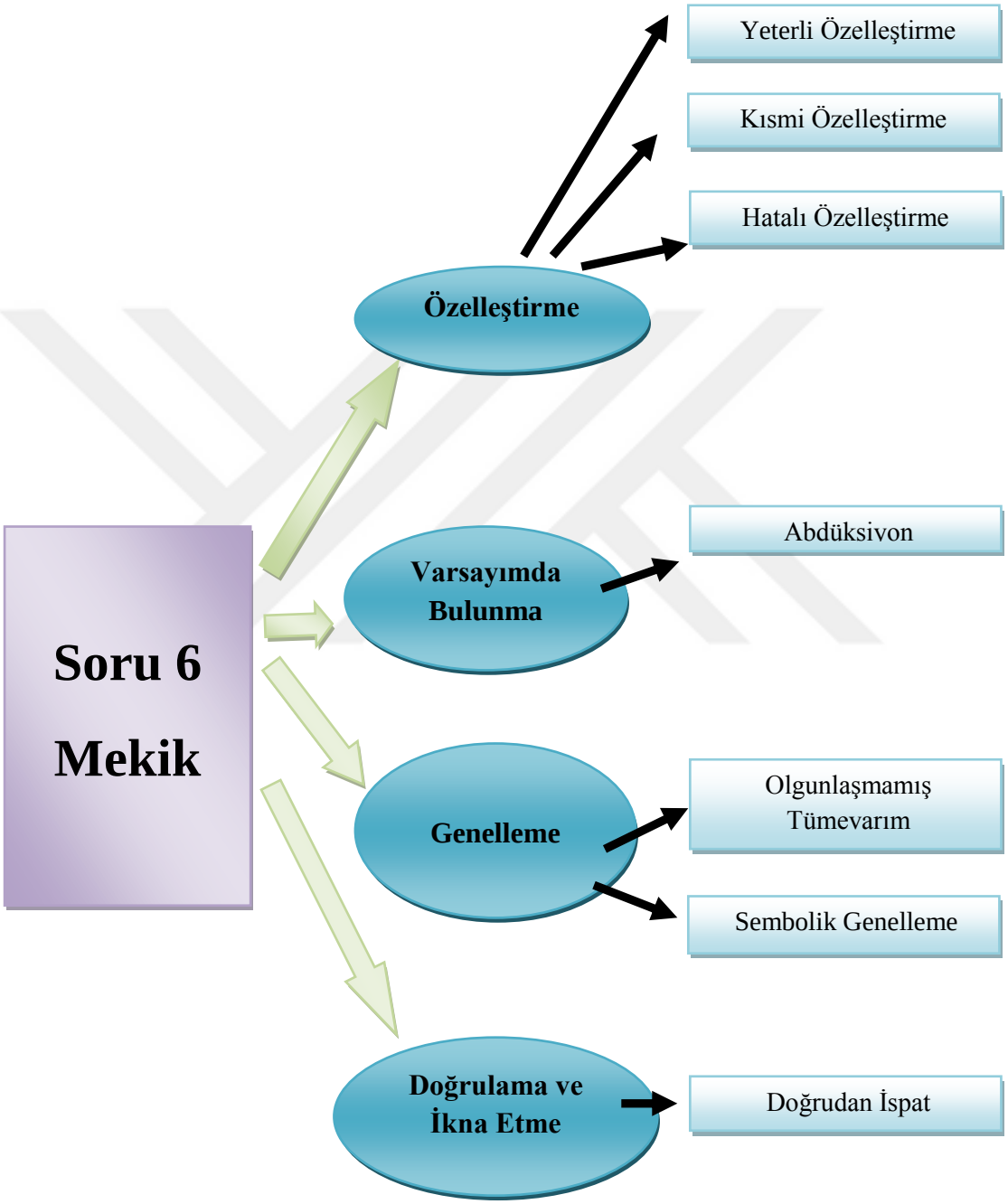
Matematiksel Düşünme Boyutları	Var	Yok
Yeterli Özelleştirme	5	13
Varsayımda Bulunma	14	4
Genelleme	5	13
İspat	6	12

Tablo 21 incelendiğinde sadece 2 öğrencinin yeterli özelleştirme yaptığı görülmektedir. Diğer öğrenciler ise problemi anlama noktasında eksiklikler yaşamışlardır. 14 öğrenci varsayımda bulunmayı kullanmıştır. Bu soruda yeterli özelleştirme az olduğu için öğrenciler varsayımda bulunmayı daha fazla kullanmışlardır. Genelleme ve ispat basamakları da ortalamanın altında kullanılmış ve düşük kalmıştır.

Öğrencilerin kullanmış oldukları düşünme boyutlarının hangi alt kategorilerde yoğunlaştığı Şekil 62 ve Tablo 22'de verilmiştir.

Şekil 62

6. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları



Tablo 22

6. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları

Boyutlar	Kullanılan Alt Kategoriler	Açıklama
Özelleştirme Boyutu	Yeterli Özelleştirme	Örneklerin temsil ettiği genel durumun doğru ve kapsamlı bir şekilde anlaşılıp ele alınması.
	Kısmi Özelleştirme	Örneklerin genel durumu tam olarak yansıtmadığı, eksik veya sınırlı bir perspektif sunması.
	Hatalı Özelleştirme	Yanlış veya yanıltıcı örneklerle genel bir durumu temsil etmeye çalışılması.
Varsayımda Bulunma Boyutu	Abdüksiyon	En iyi açıklamayı bulmak amacıyla mevcut kanıt ve bilgilerin yorumlanması.
Genelleme Boyutu	Olgunlaşmamış Tümevarım	Yeterli kanıt ve gözlem olmaksızın yapılan genellemeler.
	Sembolik Genelleme	Nesneler ve üzerlerinde gerçekleştirilen işlemlerin harf ve sayı (alfanümerik) cebirsel sisteminde ifade edilimesi.
Doğrulama ve İkna Etme Boyutu	Doğrudan İspat	Belirli bir hipotezin veya teorinin doğruluğunu kesin ve açık bir şekilde kanıtlama.

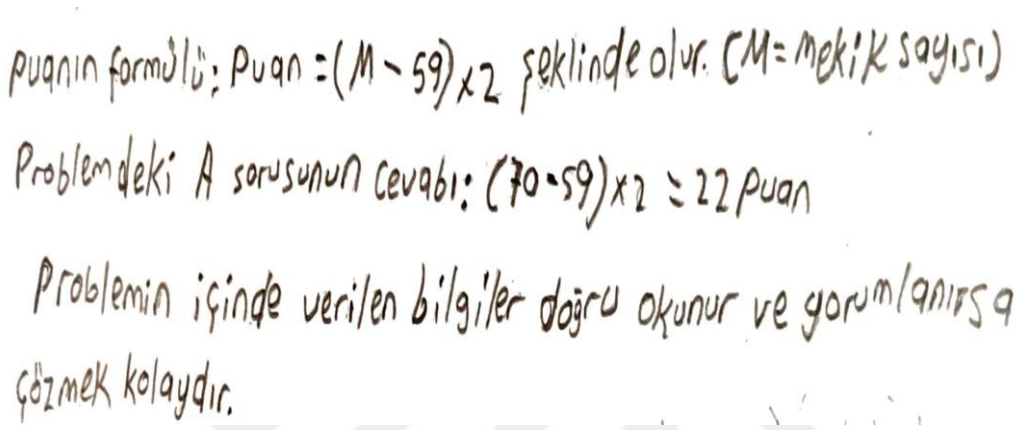
Altıncı problemde öğrencilerin kullanmış oldukları alt kategoriler Şekil 62 ve Tablo 22'de verilmiştir. Bu soruda az sayıda öğrencinin anlatılanı ve sorulanı anlayıp doğru olarak açıkladığı; problemi araştırıp örnek vermeye çalıştığı ve problemde anlatılanlara yönelik bilinçli hareketler yaptığı gözlemlenmiştir. Bunun sonucunda az sayıda öğrencinin matematiksel düşünmenin özelleştirme basamağını kullanıp yeterli özelleştirme yaptıkları söylenebilir. Bununla beraber çoğu öğrencinin soruyu büyük ölçüde anlamadığı, detaya girmeden ilk gördüğü haliyle özelleştirmeye çalıştığı ve bunun sonucunda hatalı işlemler yaptıkları görülmüştür. Bu öğrenciler hatalı özelleştirmeler yapmış diyebiliriz. Öğrencilerin çoğunun özelleştirme basamağında sıkıntı yaşamasından ötürü genel bir kural çerçevesinde varsayımda bulunduğu yani abdüksiyon yaptığı söylenebilir. Bunun sonucunda soruda verilenlere dayalı olarak düzenli tahminler yaptıkları yani bir genelleme türü olmayan

olgunlaşmamış tümevarım basamağını kullandıkları söylenebilir. Öğrenciler doğrudan ispat yöntemi ile sonuca varmaya çalışmış fakat doğru sonuca ulaşan öğrenci sayısı sınırlı kalmıştır.

Altıncı problemde kullanılan düşünme boyutları, alt kategorilere yönelik açıklamalar ve bazı ortaokul öğrencilerinin çözüm yolu örnekleri aşağıda verilmiştir:

Şekil 63

Ö6'nın Cevabı



Ö6, sorunun çözümünü sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

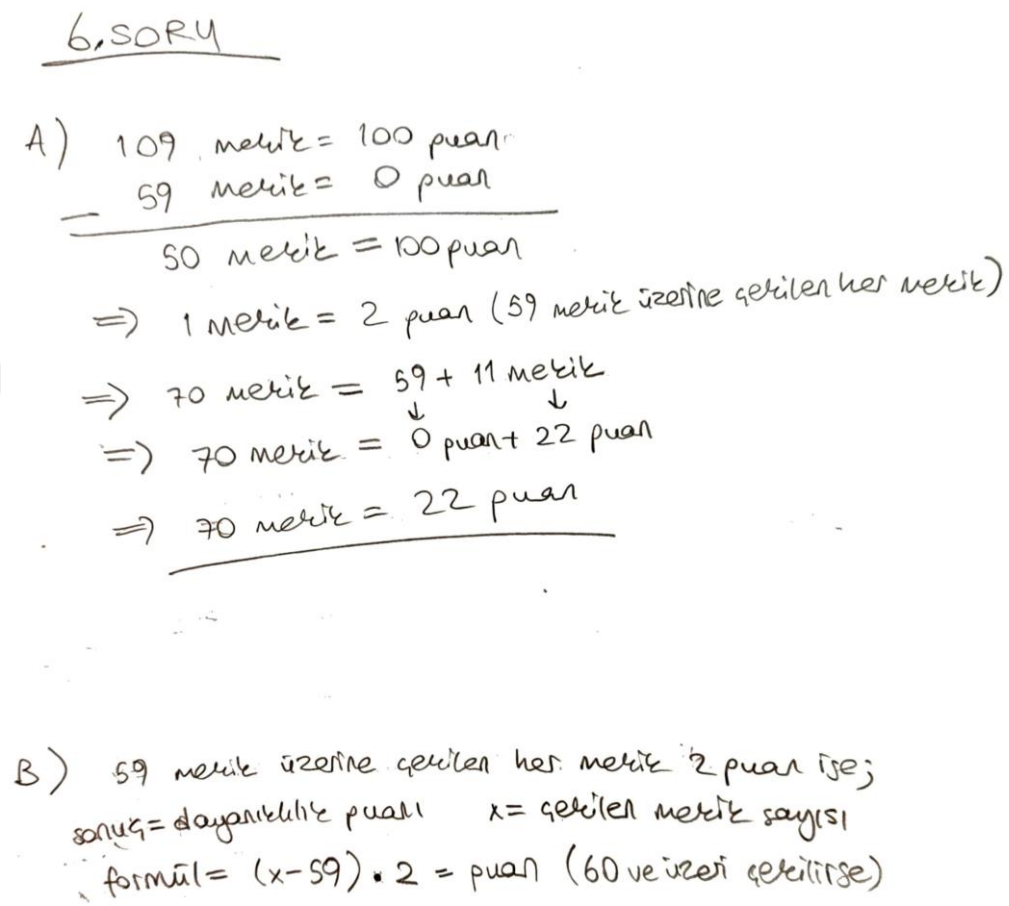
$Ö_6$: Verilen bilgilere göre puan alabilmek için en az 60 mekik çekilebilmesi gerekiyor. Çekilen en yüksek mekik de 109'muş. Bu kişi 100 puan aldıysa puan alınabilecek mekik aralığını bulmamız gerekiyor. Ondan sonra mekik başına kaç puan alacağımızı hesaplayabiliriz. Mekik sayısına 59'dan sonra puan veriliyorsa eğer demek ki 60'dan sonra puanlama başlıyor demek ki. Yani 60 ile 109 arasına puan veriliyor. Bu arayı hesaplarsak 50 yapıyor. E zaten en yüksek mekik 100 puan ise 50 mekik yapmıştır. Yani mekik başına 2 puan olduğunu buluyoruz. Böylelikle formülü de çekilen mekik sayısından 59 çıkarıp 2 ile çarparak buluyoruz.

Altıncı problem için Ö6'nın cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Soruda puanlamanın 60 mekikten itibaren başladığını ve toplam 50 mekik olduğunu kavrayabilmiş dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci dayanıklılık puanlarını mekik sayısına bağlı olarak belirleyen cebirsel bir formül yazılabilmiş, dolayısıyla cebirsel genelleme türlerinden biri olan **sembolik genelleme**

yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yapmış ve sonuca ulaşmıştır. Dolayısıyla **doğrudan ispat** yapmıştır.

Şekil 64

Ö8'in Cevabı



Ö8, sorunun çözümünü hem sözel hem de matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

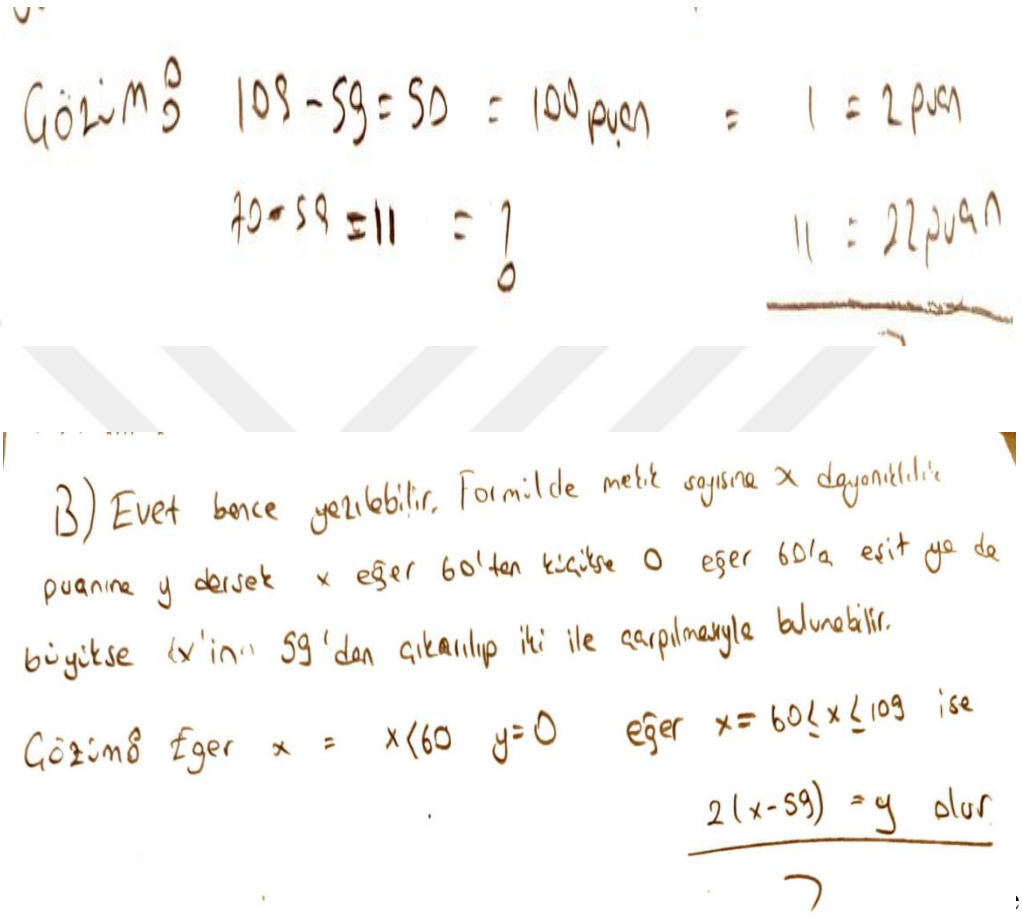
Ö8: Çekilen mekik sayıları incelenirse 100 puanın 50 mekiğe verildiği görülür. 59 ve 109 arası hesaptan. Dolayısıyla bir mekiğin 2 puan olduğu anlaşılıyor. 59 mekiğin üzerindeki mekik sayısını 59'dan çıkarırsak ve 2 ile çarparsak formülü de bulmuş oluruz.

Altıncı problem için Ö8'in cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Soruda puanlamanın 60 mekikten itibaren başladığını ve en fazla 50 mekiğe puan verildiğini kavrayabilmiş dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci dayanıklılık puanlarını mekik sayısına bağlı olarak belirleyen cebirsel

bir formül yazılabilmiş, dolayısıyla **sembolik genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yapmış ve sonuca ulaşmıştır. Dolayısıyla **doğrudan ispat** yapmıştır**.**

Şekil 65

Ö10'ın Cevabı



soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

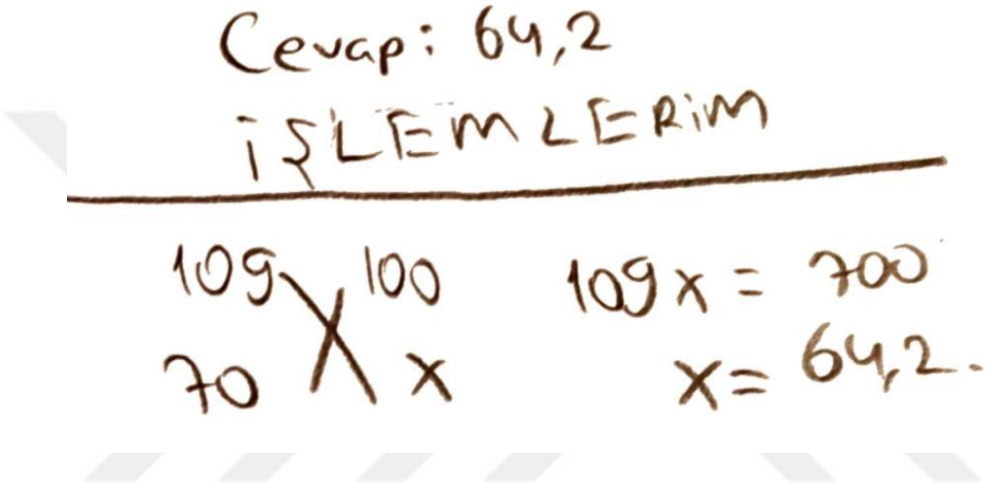
$Ö_{10}$: Puan verme işlemi 60'tan başlıyor. Şimdi soruda 70 mekik çeken birinin ne kadar puan aldığı soruluyor. Burada sınır 59'muş. Mesela biri 61 mekik çektiyse sınırı 2 mekikle geçmiştir. Buradan en fazla mekik çeken birinin sınırı ne kadar aştığını bu iki sayıyı çıkararak buldum. Bulduğum sonucu 100 ile oranlarsak 1 mekiğin 2 puan olduğunu görürüz. 70 puan alan biri sınırı 11 ile aştığı için 22 puan almıştır.

Altıncı problem için Ö10'un cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Soruda puanlamanın 60 mekikten itibaren başladığını ve toplam 50 mekik olduğunu kavrayabilmiş dolayısıyla genel resmin küçük

parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci dayanıklılık puanlarını mekik sayısına bağlı olarak belirleyen cebirsel bir formül yazılabilmiş, dolayısıyla **sembolik genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yapmış, aynı zamanda çözüm esnasında başka bir örnek vermiş ve sonuca ulaşmıştır. Dolayısıyla **doğrudan ispat ve kritik deney** basamaklarını kullanmıştır.

Şekil 66

Ö7'nın Cevabı



Ö7, sorunun çözümünü matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

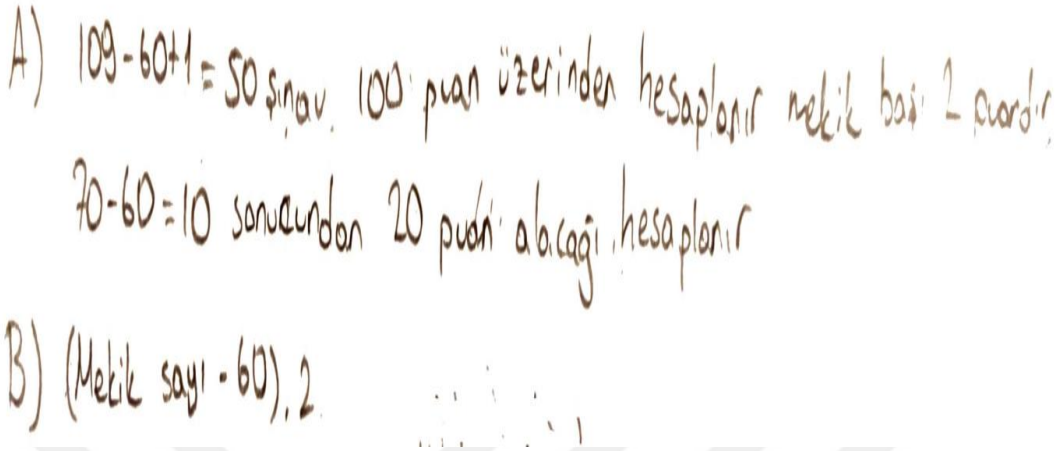
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö7: Sorunun orantı kurularak yapılabileceğini düşündüm. Fakat sonucun doğru olduğunu düşünmüyorum. Çünkü tam sayı çıkmadı ve başka yolların olduğunu düşünüyorum. Formül olarak da ne yazmam gerektiğini bilemedim.

Altıncı problem için Ö7'nin cevabı incelendiğinde; problemi doğru anlamadığı, soruda istenenin ne olduğunu kavrayamadığı ve verilenleri kullanamadığı görülmüştür. Dolayısıyla akla ilk gelen şeyi özelleştirmeye çalıştığı görülmektedir. Bunun sonucu **hatalı özelleştirme** yaptığı söylenebilir. Aklına ilk oran hesabı geldiğini söyleyen öğrenci, gözlemlediği bir özelliğin farklı bir kuralda da uygulanabileceğine dayanan tahmin yaptığı için **abdüksiyon** kullanmıştır. Öğrenci verilenler arasında herhangi bir karşılaştırma yapamamış ve bulguları genelleyememiştir. Çözüme ulaşmak için **doğrudan ispat** yöntemini kullanmaya çalışmış ve başarısız olmuştur.

Şekil 67

Ö14'ün Cevabı



Ö14, sorunun çözümünü hem sözel hem de matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

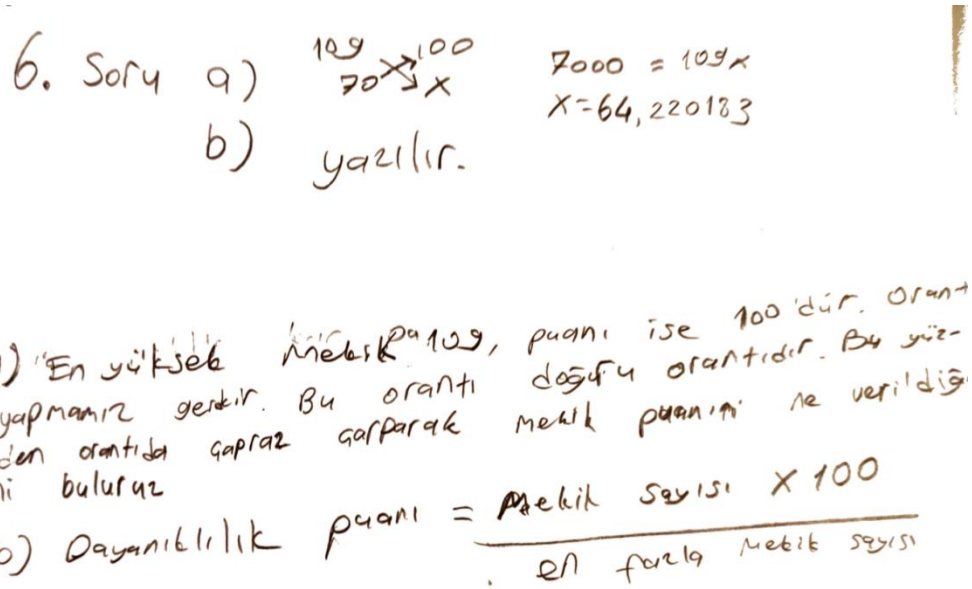
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö14: Öncelikle bir kişi en fazla kaç mekik çeker bunu buldum. Normalde 109 ama puanlandırılabilmesi için 60'dan sonrası bizim için önemli. O zaman bir mekiğin 2 puan olduğunu buluruz. Sonra bizden istenen 70 mekik çeken birinin kaç puan alacağıdır. 70 mekik çeken kişi 60 mekikten 10 fazla olduğu için ve bir mekik 2 puan olduğu için 20 puan alacaktır. Formül olarak da mekik sayısından 60 çıkarırız ve 2 ile çarparız.

Altıncı problem için Ö14'ün cevabı incelendiğinde, öğrencinin problemi kısmen doğru anladığını söyleyebiliriz. Sorunun tamamını değil bir kısmını göz önünde bulundurmuş, isteneni büyük ölçüde anlamış fakat gözden kaçan küçük ama sonucu etkileyen durumların olduğu anlaşılmaktadır. Dolayısıyla öğrenci 4'ün **kısmi özelleştirme** yaptığı söylenebilir. Öğrenci dayanıklılık puanlarını mekik sayısına bağlı olarak belirleyen cebirsel bir formül yazılabilmiş, dolayısıyla **sembolik genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Fakat özelleştirme yaparken sorunun bir basamağını atladığı için bu genelleme yanlış neticelenmiştir. Öğrenci mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yaparak sonuca ulaşmıştır. Dolayısıyla **doğrudan ispat basamağını** kullanmıştır.

Şekil 68

Ö1'in Cevabı



Ö1, sorunun çözümünü hem sözel hem de matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_{1:}$ Bu soruyu oran-orantı yaparak çözmeliyiz. Benim ilk aklıma gelen oydu. Doğru orantı yaparak 109 mekik 100 puan ise 70 mekik kaç puandır? Sorusuna cevap buluruz. Cevap da 64,2 çıkar.

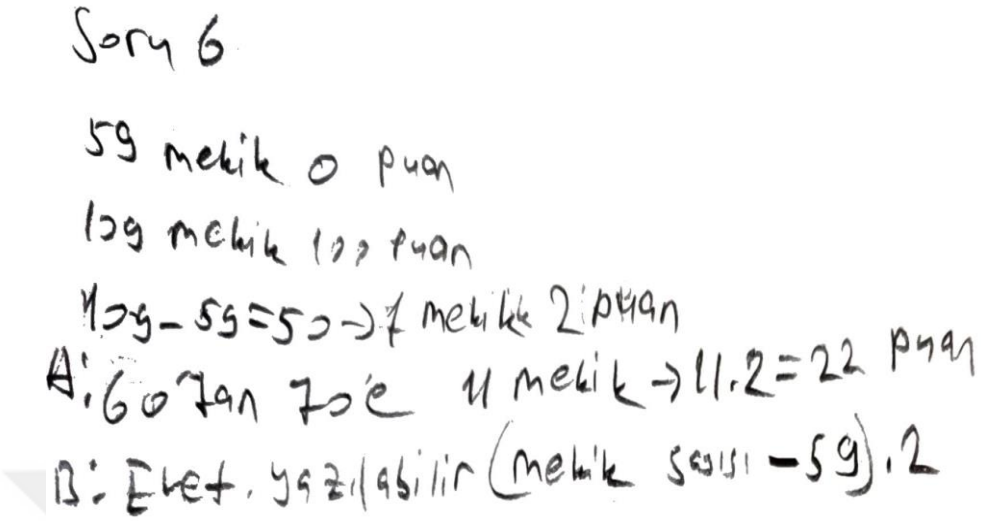
A: Peki sorudaki 60 mekiğin altına puan verilmemesi kuralı sence ne anlama geliyor?

$Ö_{1:}$ O işlem herkese uygulandığı için yöntemi değiştirmez.

Altıncı problem için Ö1'in cevabı incelendiğinde; problemi doğru anlamadığı, soruda istenenin ne olduğunu kavrayamadığı ve verilenleri kullanamadığı görülmüştür. Dolayısıyla akla ilk gelen şeyi özelleştirmeye çalıştığı görülmektedir. Bunun sonucu **hatalı özelleştirme** yaptığı söylenebilir. Aklına ilk oran-orantı konusu geldiğini söyleyen öğrenci, gözlemlediği bir özelliğin farklı bir kuralda da uygulanabileceğine dayanan tahmin yaptığı için **abdüksiyon** kullanmıştır. Öğrenci verilenler arasında herhangi bir karşılaştırma yapamamış ve bulguları genelleyememiştir. Öğrenciye sorulan 2. Soruda da görüldüğü üzere hatalı özelleştirmesini kabullenmiş ve sonuca bu hatalı özelleştirmeyi kullanarak varmıştır. Çözüme ulaşmak için **doğrudan ispat** yöntemini kullanmaya çalışmış fakat başarısız olmuştur.

Şekil 69

Ö9'un Cevabı



Ö9, sorunun çözümünü sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

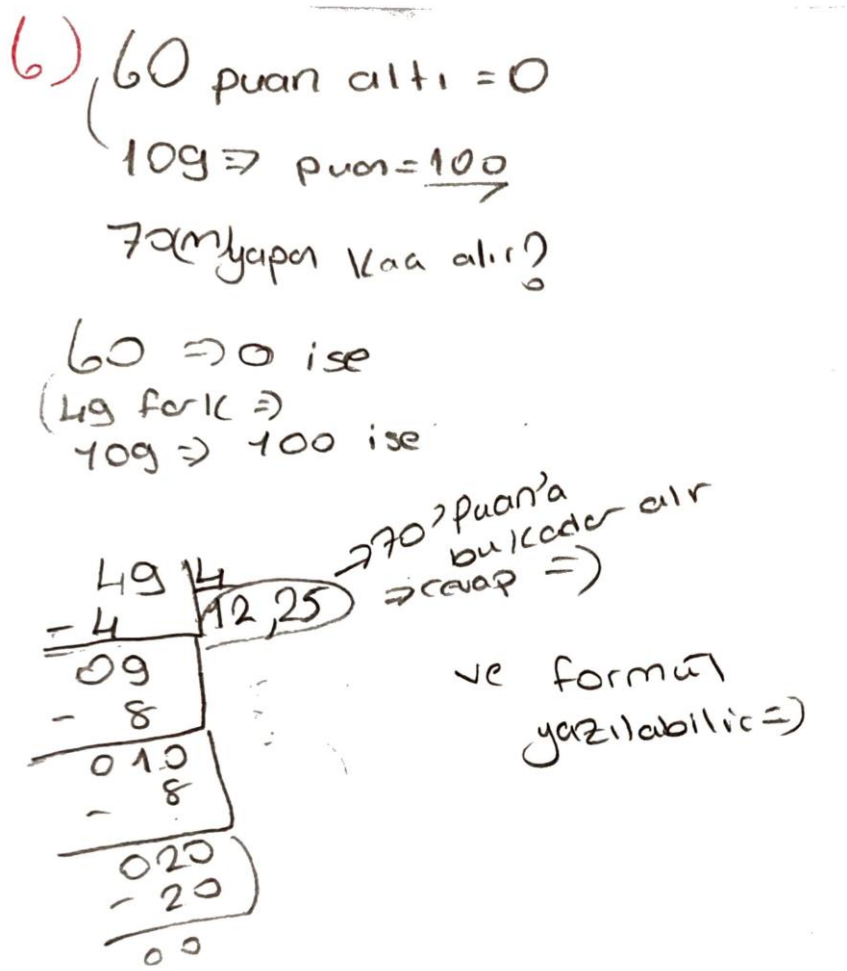
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_9$: Burda kritik nokta bence 59 mekik ve 109 mekik olayını görebilmek. Arada 50 mekik var. Bunu yapan 100 puan alıyor. Çünkü 60'a kadar çekilen mekiğin hükmü yok. 50 mekik 100 puan ise 1 mekik 2 puan. Dolayısıyla 11 meekik 22 puan. Formülü de çözümde belirttiğim gibi.

Altıncı problem için Ö9'un cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Soruda puanlamanın 60 mekikten itibaren başladığını ve toplam 50 mekik olduğunu kavrayabilmiş dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci dayanıklılık puanlarını mekik sayısına bağlı olarak belirleyen cebirsel bir formül yazılabilmiş, dolayısıyla cebirsel genelleme türlerinden biri olan **sembolik genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yapmış ve sonuca ulaşmıştır. Dolayısıyla **doğrudan ispat** yapmıştır.

Şekil 70

Ö2'nin Cevabı



Ö2, sorunun çözümünü hem sözel hem de matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

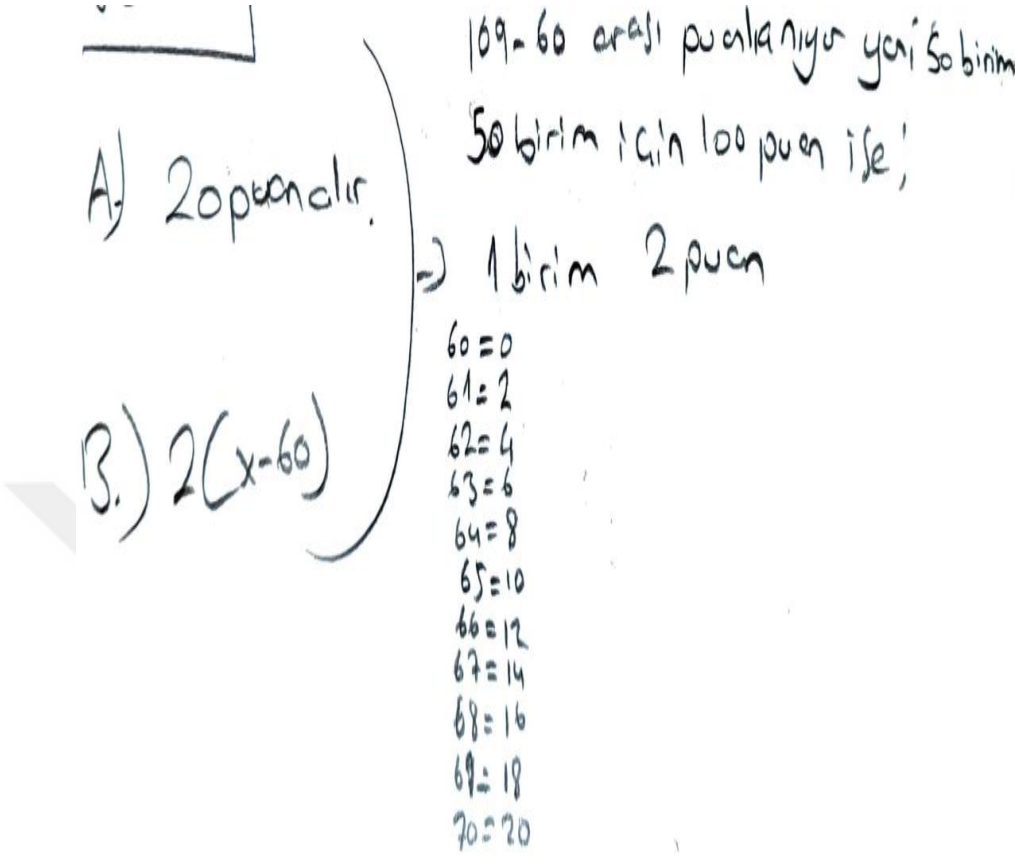
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö2: 60 puanın altına sıfır puan verildiğine göre 109 puanla arasında 49 puan var.

Altıncı problem için Ö2'nin cevabı incelendiğinde, öğrencinin problemi kısmen doğru anladığını söyleyebiliriz. Sorunun tamamını değil bir kısmını göz önünde bulundurmuş, isteneni büyük ölçüde anlamış fakat gözden kaçan küçük ama sonucu etkileyen durumların olduğu anlaşılmaktadır. Dolayısıyla öğrenci 4'ün **kısmi özelleştirme** yaptığı söylenebilir. Öğrenci dayanıklılık puanlarını mekik sayısına bağlı olarak belirleyen cebirsel bir formül yazılabilmiş, dolayısıyla **sembolik genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Fakat özelleştirme yaparken sorunun bir basamağını atladığı için bu genelleme yanlış neticelenmiştir. Öğrenci mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yaparak sonuca ulaşmıştır. Dolayısıyla **doğrudan ispat basamağını** kullanmıştır.

Şekil 71

Ö17'nin Cevabı



Ö17, sorunun çözümünü hem sözel hem de matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

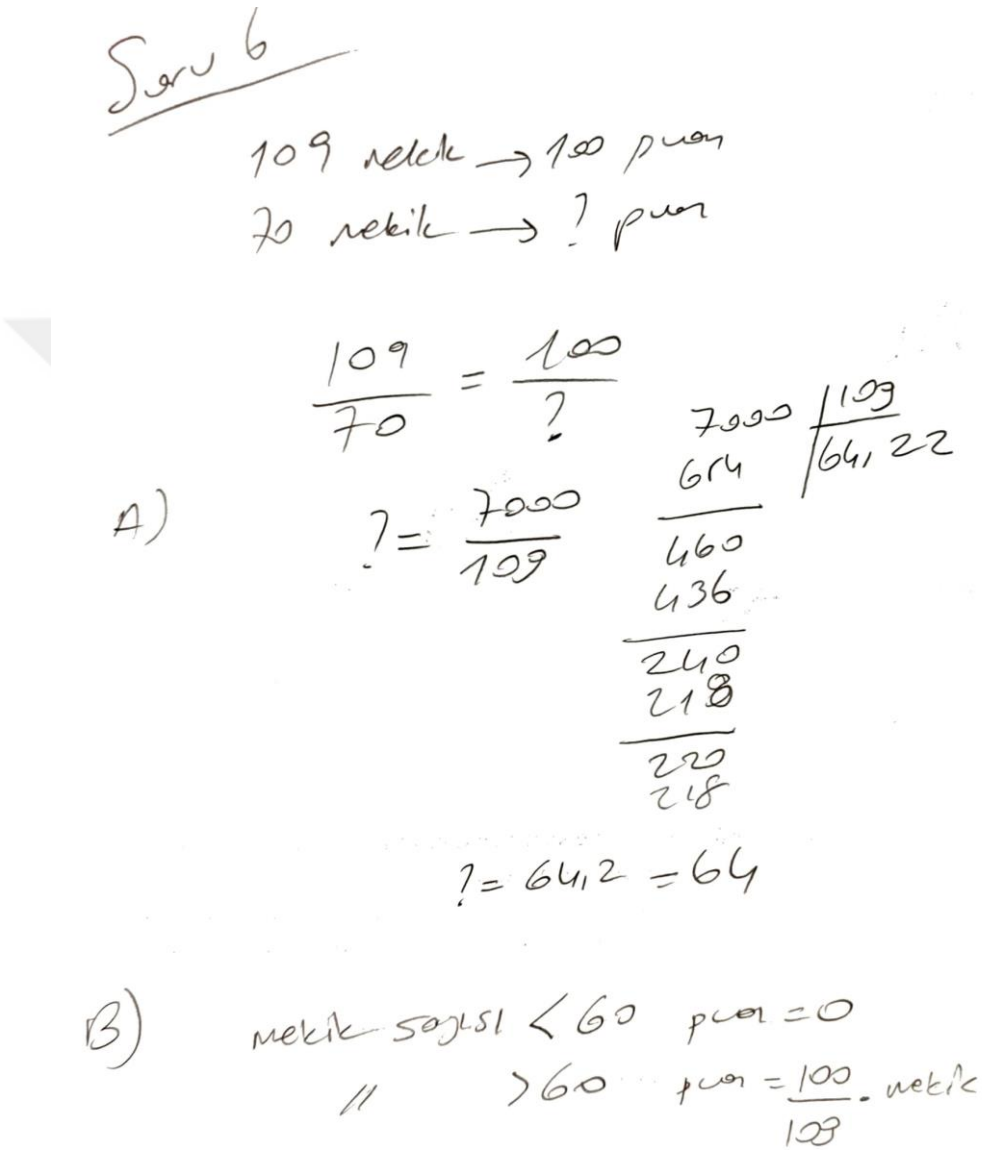
$Ö_{17}$: Şimdi dayanıklılık dereceleri mekik sayılarıyla ölçülüyormuş. 60 mekiğin altına puan yoksa en yüksek yapan 100 puan alıyor ise arada 50 mekik var. Yani 50 mekik 100 puanmış. O zaman 1 mekik 2 puan denebilir.70 puan alan kişi de 10x2'den 20 puan alır. Denklemi de alınan puandan 60 çıkarıp 2 ile çarparak bulabiliriz.

Altıncı problem için Ö17'nin cevabı incelendiğinde, öğrencinin problemi kısmen doğru anladığını söyleyebiliriz. Sorunun tamamını değil bir kısmını göz önünde bulundurmuş, isteneni büyük ölçüde anlamış fakat gözden kaçan küçük ama sonucu etkileyen durumların olduğu anlaşılmaktadır. Soruda 60 mekiğin altına puan verilmediği söylenmiş fakat öğrenci yaptığı işlemlerde 60 mekiğe de sıfır puan vererek bir nevi soruda verilen barajı 61'e çıkarmıştır. Dolayısıyla öğrenci 17'nin **kısmi özelleştirme** yaptığı söylenebilir. Öğrenci dayanıklılık puanlarını mekik sayısına bağlı olarak belirleyen cebirsel bir formül yazılabilmiş, dolayısıyla **sembolik genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Fakat özelleştirme yaparken sorunun

bir basamağını atladığı için bu genelleme yanlış neticelenmiştir. Öğrenci mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yaparak sonuca ulaşmıştır. Dolayısıyla **doğrudan ispat basamağını** kullanmıştır.

Şekil 72

Ö13'nin Cevabı



Ö13, sorunun çözümünü matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_{13:}$ Direkt oran orantı yaparak çözüm. 109 mekik 100 puan ise 70 mekik kaç puandır hesabı ile 64 sonucuna ulaştım. Formül de yine şu şekilde: mekik sayısı ile 100/109 u çarpıyoruz.

A: Böyle bir orantı yapman doğru mu peki?

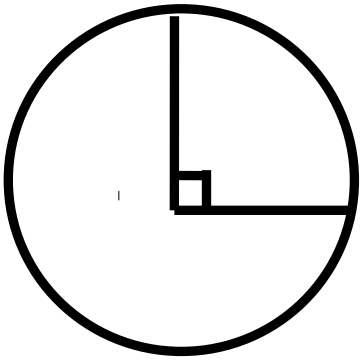
Ö13: Evet başka nasıl yapacağız ki?

Altıncı problem için Ö13'ün cevabı incelendiğinde; problemi doğru anlamadığı, soruda istenenin ne olduğunu kavrayamadığı ve verilenleri kullanamadığı görülmüştür. Dolayısıyla akla ilk gelen şeyi özelleştirmeye çalıştığı görülmektedir. Bunun sonucu **hatalı özelleştirme** yaptığı söylenebilir. Aklına ilk oran-orantı konusu geldiğini söyleyen öğrenci, gözlemlediği bir özelliğin farklı bir kuralda da uygulanabileceğine dayanan tahmin yaptığı için **abdüksiyon** kullanmıştır. Öğrenci verilenler arasında herhangi bir karşılaştırma yapamamış ve bulguları genelleyememiştir. Öğrenciye sorulan 2. Soruda da görüldüğü üzere hatalı özelleştirmesini kabullenmiş ve sonuca bu hatalı özelleştirmeyi kullanarak varmıştır. Çözüme ulaşmak için **doğrudan ispat** yöntemini kullanmaya çalışmış fakat başarısız olmuştur.

Değişim ve ilişkiler sorularına ilişkin bulguları toparlayacak olursak; öğrencilerin bu sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde; her iki soru için sadece 2 öğrencinin yeterli özelleştirme yaptığı, varsayımda bulunma basamağının özelleştirmeye nazaran çok fazla olduğu (>%60), %40 oranında (7 öğrenci) genelleme basamağını kullandığı ve %50'ye yakın öğrencinin (8 öğrenci) ispat basamağını kullandığı/kullanmaya çalıştığı söylenebilir.

4.3. Belirsizlik ve Veri Soruları

4.3.1. Seçim İsimli Probleme Ait Bulgular: Öğrencilere verilen okuryazarlık sorularından yedincisi belirsizlik ve veri sorularından olan Seçim isimli sorudur. Bu soruda beklenen çözüm yolu şu şekildedir:



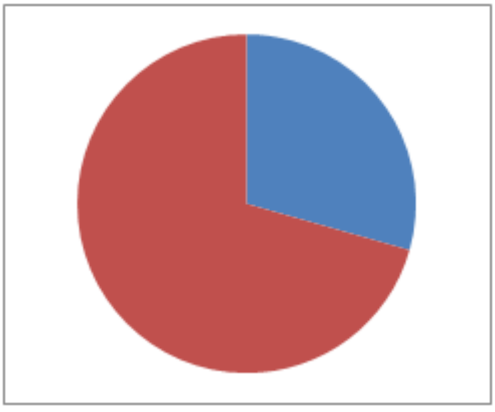
A Partisi 20.000 A $\longrightarrow \frac{20.000}{100000} = \%20$

B Partisi 30.000 B $\longrightarrow \frac{30.000}{100000} = \%30$

C Partisi 40.000 C $\longrightarrow \frac{40.000}{100000} = \%40$

D Partisi 10.000 D $\longrightarrow \frac{10.000}{100000} = \%10$

Toplam 100.000



Mavi gölgeli kısım %25'ten daha yüksektir. %25'i referans alarak çizilen yerin %25'ten fazla olanlar içinde en yakın %30'u temsil edeceğine ve bunun da B Partisi olacağına karar veriliyor.

Soru matematiksel süreçler açısından incelendiğinde;

Problemi matematiksel olarak formüle etme: Bu aşamada, soruyu anlamak ve gerekli bilgileri matematiksel bir forma dönüştürmek gerekir. Soru bize, dört partinin aldığı oyları hem sütun grafikte hem de dairesel grafikte karşılaştırmamızı istemektedir.

Matematiksel kavramları ve yöntemleri kullanma ve akıl yürütme: Bu aşamada partilerin yüzde dönüşümleri yapılarak, daire grafiğindeki yerlerinin tespit edilmesi. Dairesel grafikteki yüzde dönüşümlerinin yapılması ve taralı alanın ortalama kapladığı alanın ölçülmesi.

Matematiksel çıktıları yorumlama: Mavi gölgeli kısmın temsil ettiği partiyi elde etme, elde edilen sonucun bir önceki grafik ile karşılaştırılması. Hesaplamaların tutarlılığı hakkında yorumlama yapma.

Bu problemde öğrencilerin verdiği cevaplar ve kullandığı stratejiler dikkatle incelenmiş ve Tablo 23'teki veriler elde edilmiştir:

Tablo 23

Öğrencilerin 7. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları

Çözüm	Frekans
Doğru Sonuca Ulaşma	10
Yanlış Sonuca Ulaşma	4
Sonuca Ulaşamama	4
Toplam	18

Tablo 23 incelendiğinde öğrencilerden sadece 10 kişinin doğru sonuca ulaştığı görülmektedir. 4 öğrenci yanlış sonuca ulaşmış, 4 öğrenci ise çözümle alakalı herhangi bir strateji geliştirememiştir. Bu soruda öğrencilerin matematiksel düşünmenin basamaklarını kullanıp kullanmadıkları belirlenecektir.

Tablo 24'te öğrencilerin 7. Sorunun çözümü ile ilgili kullandıkları matematiksel düşünme boyutları verilmiştir.

Tablo 24

Öğrencilerin 7. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları

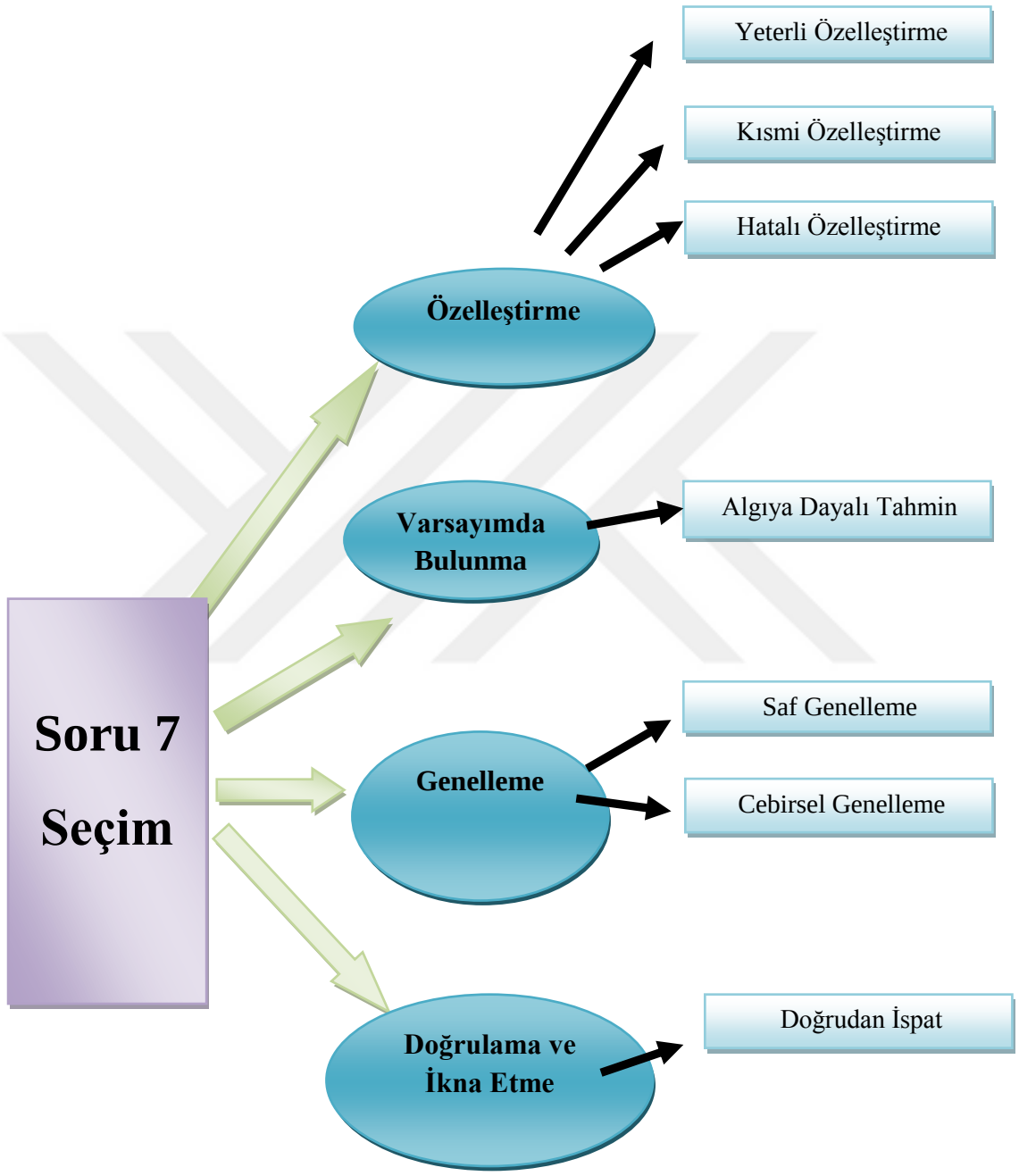
Matematiksel Düşünme Boyutları	Var	Yok
Yeterli Özelleştirme	10	8
Varsayımda Bulunma	1	17
Genelleme	9	9
İspat	12	6

Tablo 24 incelendiğinde öğrencilerden 10 kişinin yeterli özelleştirme yaptığı görülmektedir. Bu soruda sadece 1 öğrencinin varsayımda bulunma boyutunu kullandığını söyleyebiliriz. Genelleme ve ispat basamakları da ortalama yarı yarıya kullanılmıştır.

Öğrencilerin kullanmış oldukları düşünme boyutlarının hangi alt kategorilerde yoğunlaştığı Şekil 73 ve Tablo 25'te verilmiştir.

Şekil 73

7. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları



Tablo 25

7. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları

Boyutlar	Kullanılan Alt Kategoriler	Açıklama
Özelleştirme Boyutu	Yeterli Özelleştirme	Örneklerin temsil ettiği genel durumun doğru ve kapsamlı bir şekilde anlaşılıp ele alınması.
	Kısmi Özelleştirme	Örneklerin genel durumu tam olarak yansıtmadığı, eksik veya sınırlı bir perspektif sunması.
	Hatalı Özelleştirme	Yanlış veya yanıltıcı örneklerle genel bir durumu temsil etmeye çalışılması.
Varsayımda Bulunma Boyutu	Algıya Dayalı Tahmin	Bireysel algı ve sezgilere dayalı öngörülerde bulunma.
Genelleme Boyutu	Saf Genelleme	Doğrudan gözlemlerden elde edilen basit ve temel genellemeler.
	Cebirsel Genelleme	Matematiksel veya cebirsel yöntemler kullanarak genelleme yapma.
Doğrulama ve İkna Etme Boyutu	Doğrudan İspat	Belirli bir hipotezin veya teorinin doğruluğunu kesin ve açık bir şekilde kanıtlama.

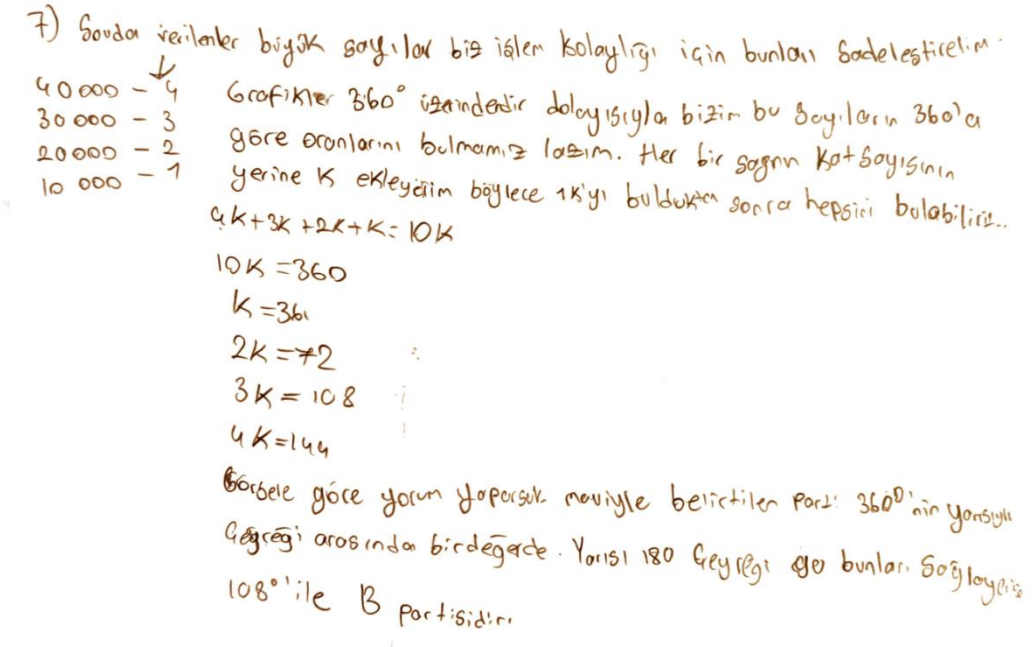
Yedinci problemde öğrencilerin kullanmış oldukları alt kategoriler Şekil 73 ve Tablo 25'te verilmiştir. Bu soruda yarı yarıya öğrencilerin anlatılanı ve sorulanı anlayıp doğru olarak açıkladığı; problemi araştırıp örnek vermeye çalıştığı ve problemde anlatılanlara yönelik bilinçli hareketler yaptığı gözlemlenmiştir. Bunun sonucunda matematiksel düşünmenin özelleştirme basamağını kullanıp yeterli özelleştirme yaptıkları söylenebilir. Bununla beraber bazı öğrencilerin isteneni büyük oranda anladıkları ancak gözden kaçan küçük ama sonucu etkileyen durumların olduğu görülmüştür. Bunun sonucunda kısmi özeleştirmeler yaptıkları söylenebilir. Bazı öğrencilerin ise soruyu büyük ölçüde anlamadığı, ilk gördüğü haliyle özelleştirmeye çalıştığı ve bunun sonucunda hatalı işlemler yaptıkları görülmüştür. Bu öğrenciler hatalı özelleştirmeler yapmış diyebiliriz. Öğrencilerin bu soru özelinde varsayımda bulunma bileşenini kullanmadığı söylenebilir. Yine öğrencilerin yarısının değişkenler arasındaki ilişkileri tanımlayabildiği ve genelleme yaptıklarını

söyleyebilriz. Fakat bazı öğrencilerin özelleştirme basamağında hata yaptığından dolayı genelleme yaparken de problem yaşadığını belirtmeliyiz. Öğrencilerin çoğunun doğrudan ispat yöntemini kullandığı söylenebilir.

Yedinci problemde kullanılan düşünme boyutları, alt kategorilerine yönelik açıklamalar ve bazı ortaokul öğrencilerinin çözüm yolu örnekleri aşağıda verilmiştir:

Şekil 74

Ö17'nin Cevabı



Ö17, sorunun çözümünü hem sözel hem de matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

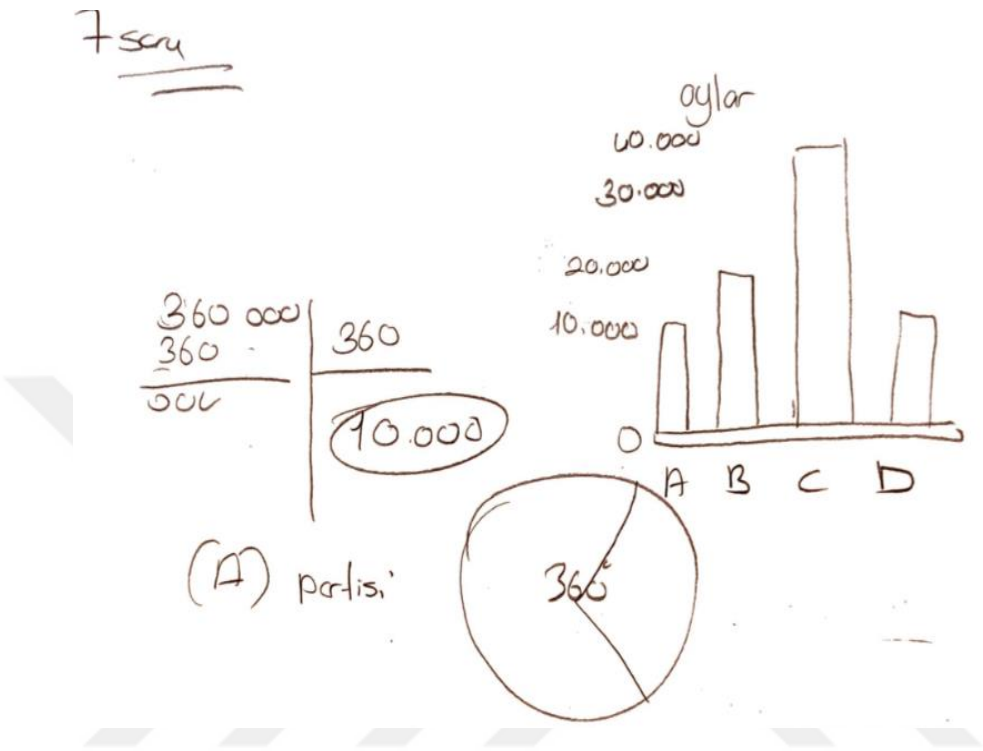
Ö17: Soruda detaylı şekilde anlattım. Oy sayıları büyük olduğu için kolay işlem yapmak adına sadeleştirdim. Sayılardan sıfırları attım. Grafik 360 derece olduğu için oy sayılarını toplayıp katsayıyla birlikte 360'a böldüm. Oylar 36, 72, 108 ve 144 şeklinde çıktı. Görsele göre mavi alan dörtte bir ve üçte bir arasında. Dolayısıyla cevap B partisidir.

Yedinci problem için Ö17'nin cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Soruda verilen yüzdeleri ayırt edebilmiş ve nasıl kullanacağını bildiği dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci verilen yüzdeleri daire grafiğine uyarlayabilmiş, verileri benzerlik ve farklılıklarına göre sınıflayabildiği ve cebirsel olarak denklem kurabildiği için **cebirsel genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci

mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yapmış, dolayısıyla **doğrudan ispat** basamaklarını kullanmıştır.

Şekil 75

Ö18'in Cevabı



Ö18, sorunun çözümünü grafik çizerek ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

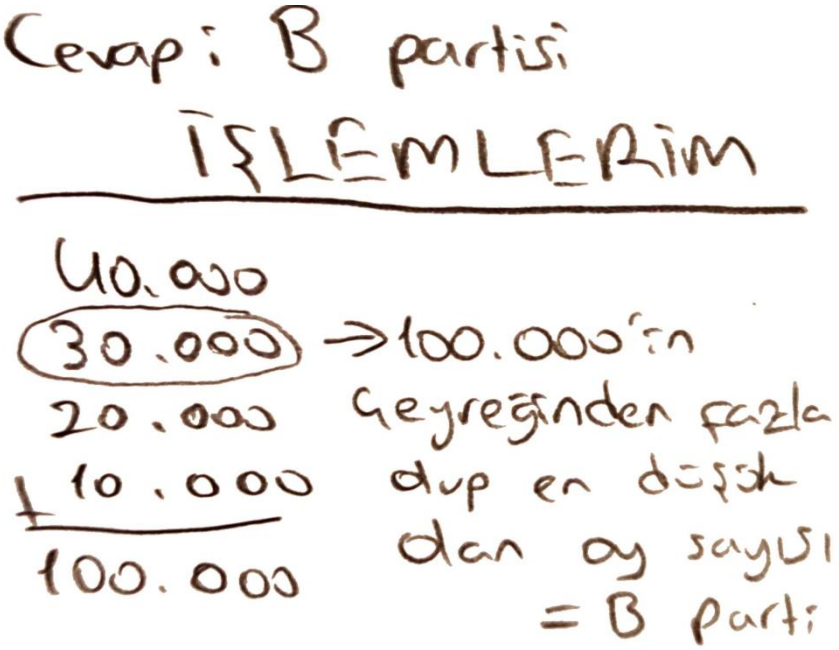
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö18: Mavi alanı önce saymayarak alanın tamamının 360 olduğunu bilmemiz gerekiyor. Daha sonra paylaştırmamız gerekiyor. 360.000'i 360'a bölmemiz gerekiyor. Ancak sorudan emin olamadım. 4'e de bölmemiz gerekebilir.

Yedinci problem için Ö18'in cevabı incelendiğinde, öğrencinin soruyu tam olarak anlayamadığı ve çözüme aktaramadığı, soruda söylenenleri dikkate almayıp aklına ilk gelen işlemleri yaptığı, verdiği örnekte eksikliklerin olduğu ve sorunun detaylarına inmeden akla ilk gelen haliyle soruyu açıklamaya çalıştığı görülmüştür. Bunun sonucunda **hatalı özeleştirme** yaptığı söylenebilir. Verilen oylar arasında herhangi bir ilişki kuramamış, dolayısıyla genelleme kısmında bir hata yapmış, aklına ilk gelen işlemle açıklamaya çalıştığı için **abdüksiyon** boyutunda varsayımda bulunduğu söylenebilir. Öğrenci soruyu tamamlayamadığı için herhangi bir ispat yöntemi kullanmamıştır.

Şekil 76

Ö7'nin Cevabı



Ö7, sorunun çözümünü matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

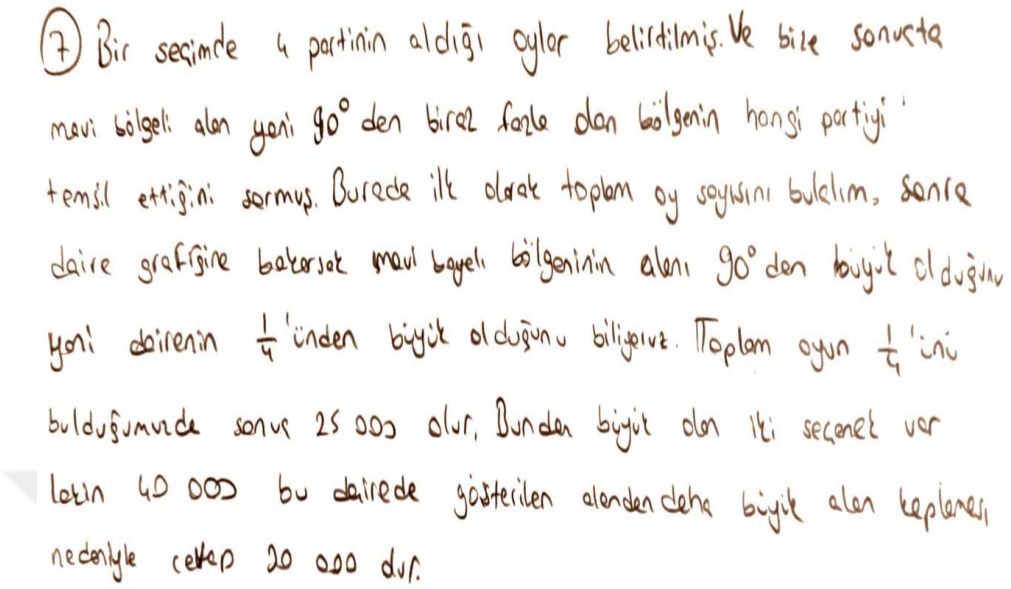
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö7: Öncelikle grafikteki taralı kısmın toplam alanın çeyreğinden biraz fazla olduğunu görsel olarak yorumladım. Daha sonrasında bu %25'ten biraz fazla olan kısmı bulabilmek için önce toplam oy sayısını buldum. Daha sonra bu sayının çeyreğinden fazla en küçük sayıyı cevap olarak yazdım.

Yedinci problem için Ö7'nin cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Sorudaki verileri ayırt edebilmiş, yüzdeleri ayırt edebilmiş ve nasıl kullanacağını bildiği dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci verilen yüzdeleri daire grafiğine uyarlayabilmiş, verileri benzerlik ve farklılıklarına göre sınıflayabildiği için **saf genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yapmış, dolayısıyla **doğrudan ispat** basamaklarını kullanmıştır.

Şekil 77

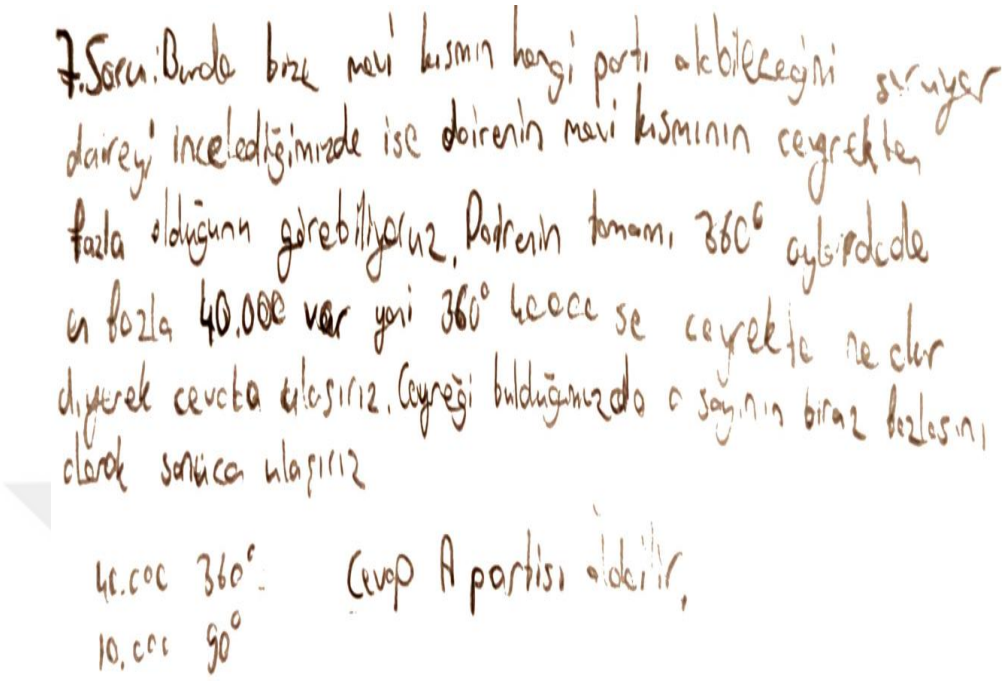
Ö10'un Cevabı



Yedinci problem için Ö10'un cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Sorudaki verileri ayırt edebilmiş, taralı bölgenin alanının 90 dereceden büyük olduğunu yani oy sayısının dörtte birinden fazla olduğunu görmüş dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. . Öğrenci verilen yüzdeleri daire grafiğine uyarlayabilmiş, verileri benzerlik ve farklılıklarına göre sınıflayabildiği için **saf genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yapmış, dolayısıyla **doğrudan ispat** basamaklarını kullanmıştır.

Şekil 78

Ö11'in Cevabı



Ö11, sorunun çözümünü sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

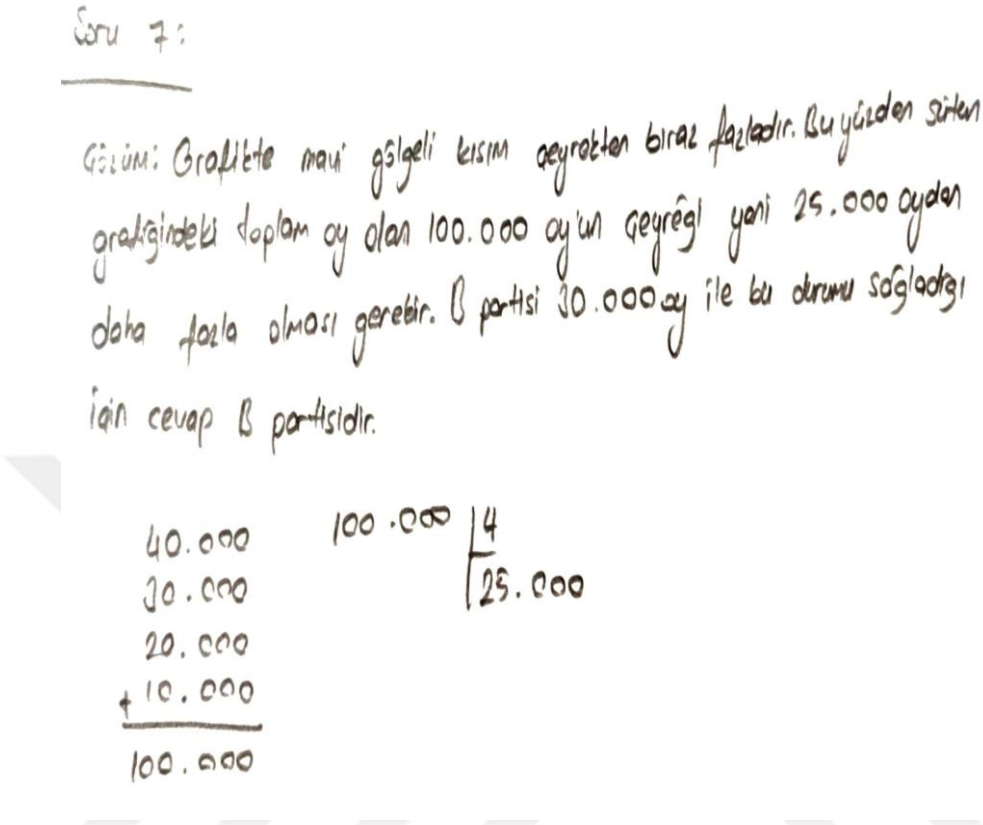
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_{11}$: Sorudaki mavi alan çeyrekten biraz fazla. Oylar arasında da en fazla 40.000 var. 360 derece 40.000 ise çeyrekte ne olur dediğimizde 10000 sonucuna ulaşırız. Bildiğimiz orantı sorusu aslında.

Yediinci problem için Ö11'in cevabı incelendiğinde, öğrencinin soruyu tam olarak anlayamadığı ve çözüme aktaramadığı, soruda söylenenlerin bir kısmını dikkate alıp kalan kısımlarına odaklanmadığı, verdiği örnekte eksikliklerin olduğu ve sorunun detaylarına inmeden akla ilk gelen haliyle soruyu açıklamaya çalıştığı görülmüştür. Bunun sonucunda **kısmi özeleştirme** yaptığı söylenebilir. Dairenin tamamını toplam oylarla değil verilen en yüksek oyla eşitlediği görülmüştür. Dolayısıyla genelleme kısmında bir hata yapmış, aklına ilk gelen işlemle açıklamaya çalıştığı için **abdüksiyon** boyutunda varsayımda bulunduğu söylenebilir. Öğrenci doğrudan işlemler yapmış, dolayısıyla **doğrudan ispat** basamaklarını kullanmaya çalışmıştır.

Şekil 79

Ö3'ün Cevabı


Soru 7:

Çözüm: Grafikte mavi gölgeli kısım çeyrekten biraz fazladır. Bu yüzden sirken grafiğindeki toplam oy olan 100.000 oy'un çeyreği yani 25.000 oydan daha fazla olması gerekir. B partisi 30.000 oy ile bu durumu sağladığı için cevap B partisidir.

40.000
30.000
20.000
+10.000
100.000

100.000 | 4
25.000

Ö3, sorunun çözümünü hem matematiksel hem de sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

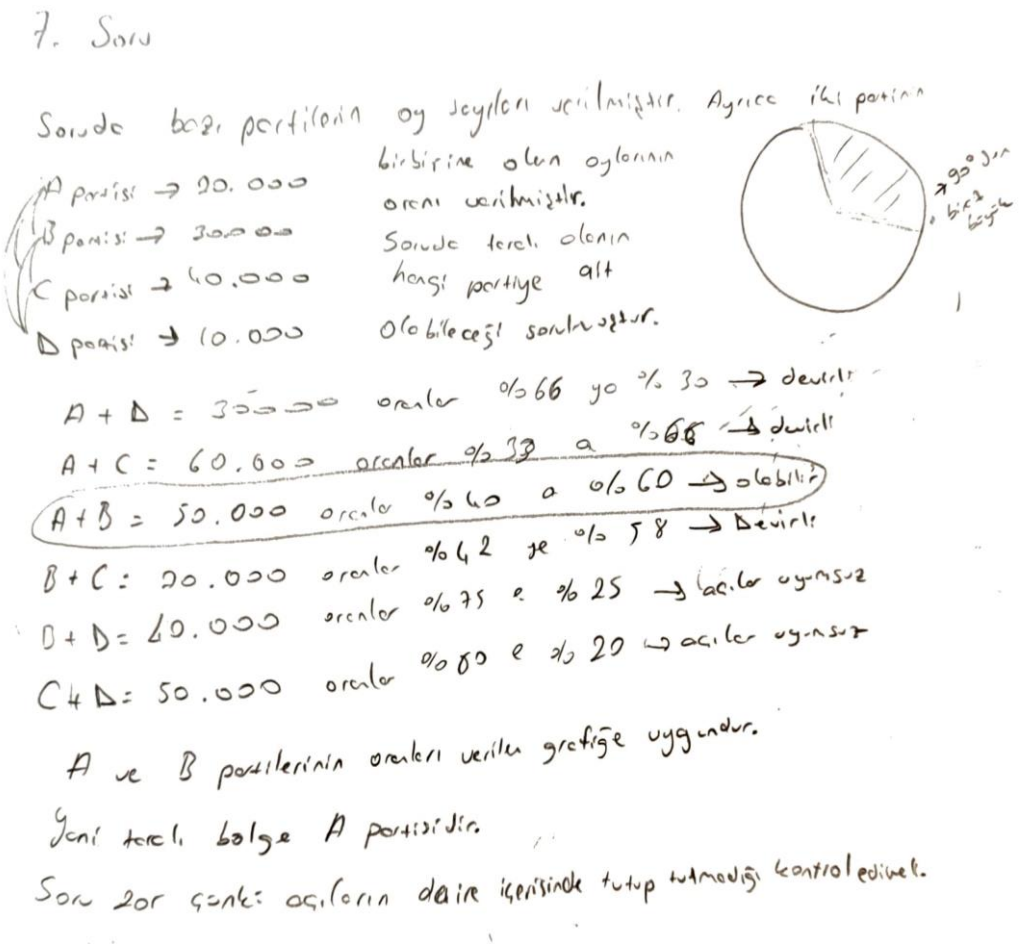
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö3: Zaten grafikten anlaşılıyor. Oylar toplam 100 yapıyor. Oranlarsak mavi kısım 25 ten fazla olduğu için 25'in altında iki parti devre dışı kalıyor. En yakın da B partisi var. C partisi neredeyse buçuğa yakın olduğu için o da iptal olmuş oluyor.

Yedinci problem için Ö3'ün cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Sorudaki verileri ayırt edebilmiş, yüzdeleri ayırt edebilmiş ve nasıl kullanacağını bildiği dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci verilen yüzdeleri daire grafiğine uyarlayabilmiş, verileri benzerlik ve farklılıklarına göre sınıflayabildiği için **saf genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yapmış, dolayısıyla **doğrudan ispat** basamaklarını kullanmıştır.

Şekil 80

Ö5'in Cevabı



Ö5, sorunun çözümünü hem sayısal hem de sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö5: Daire grafiğinde iki partinin birbiriyle olan oyları verilmiş. Taralı alanı istiyor. Bütün partileri tek tek düşündüm. Hangileri olabilir diye. En yakını A+B. A ve B partilerinin oranları verilen grafiğe en uygunu. Dolayısıyla A partisi daha düşük olduğu için taralı bölge A partisidir.

A: Soruda verilen dairesel grafik sana göre ne anlama geliyor? Biraz daha açıklayabilir misin?

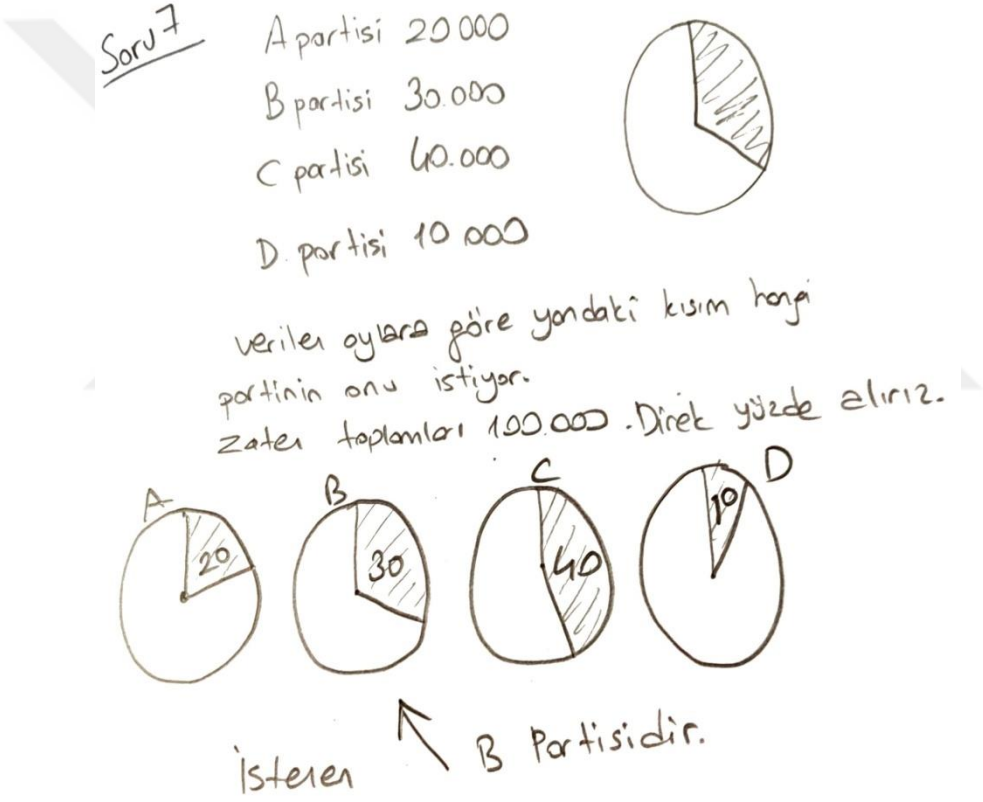
Ö5: Dairesel grafik iki ayrı partinin gösterimini sembolize ediyor. İki ayrı renk olduğu için. Açıların daire içinde tutup tutmadığı da tek tek kontrol edilmeli.

Yedinci problem için Ö5'in cevabı incelendiğinde, öğrencinin soruyu tam olarak anlayamadığı ve çözüme aktaramadığı, detaya girmeden akla ilk gelen şeymiş gibi

özelleştirdiğini söyleyebiliriz. Bu tür özelleştirme sürecinde soruda söylenenler tam olarak çözümlenememiş olup, devredilen kısımlarda soruda söylenenlere göre büyük sapmalar bulunmaktadır. Soruda verilen dairesel grafiğin hangi amaçla verildiğini anlayamamış ve grafikteki renklere göre yorum yapmıştır. Bunun sonucunda **hatalı özeleştirme** yaptığı söylenebilir. Soruda verilen oyları dairesel grafikte karşılaştıramamış ve genelleme kısmında bir hata yapmıştır. Aklına ilk gelen işlemle çözüme başlamış ve soruyu bu doğrultuda açıklamaya çalıştığı için **abdüksiyon** boyutunda varsayımda bulunduğu söylenebilir. Öğrenci doğrudan işlemler yapmış, dolayısıyla **doğrudan ispat** basamaklarını kullanmaya çalışmıştır.

Şekil 81

Ö15'in Cevabı



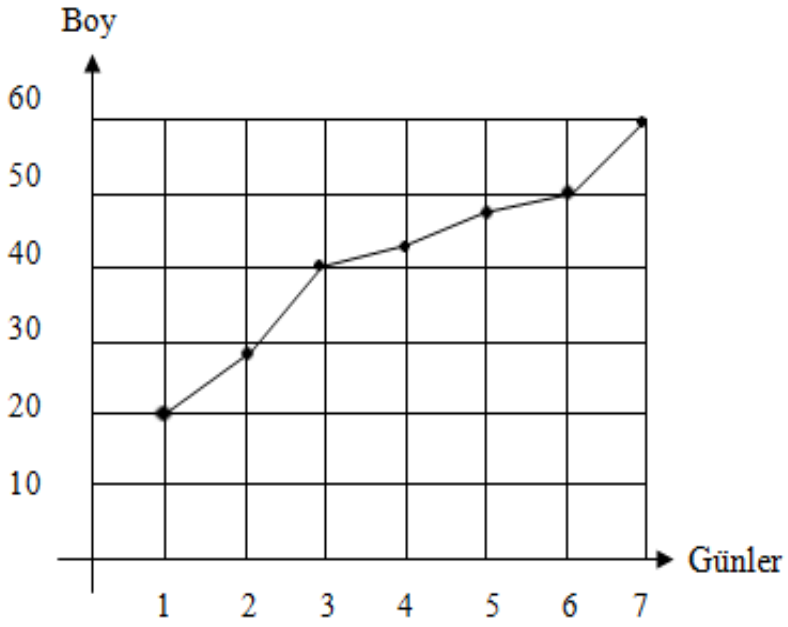
Ö15, sorunun çözümünü grafik çizerek sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö15: Partilerin oy sayılarını topladığımızda 100.000 yapıyor. Dolaayısıyla yüzde vermek daha kolay. Oy sayılarına göre tüm partilerin kaplayacağı grafikleri verdim. Soruda verilen grafik direkt olarak B partisine aittir.

Yedinci problem için Ö15'in cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Sorudaki verileri ayırt edebilmiş, yüzdeleri ayırt edebilmiş ve nasıl kullanacağını bildiği dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci verilen yüzdeleri daire grafiğine uyarlayabilmiş, verileri benzerlik ve farklılıklarına göre sınıflayabildiği için **saf genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci soruyu çizimlerle görselleştirip algısal bir gösterime dönüştürdüğü için **algıya dayalı tahmin** yapıştır. Öğrenci verdiği birkaç örneğe bakarak ifadenin doğruluğuna karar verdiği için **saf deneycilik** türünden bir ispat yapmıştır.

4.3.2. Fasulye İsimli Probleme Ait Bulgular: Öğrencilere verilen okuryazarlık sorularından sekizincisi belirsizlik ve veri sorularından olan fasulye isimli sorudur.



Bu soruda beklenen çözüm yollarından biri şu şekildedir: Bitkinin boyu 20'den 60'a çıktığı için 40 cm uzamıştır. Dolayısıyla %200'lük bir artış olmuştur. 6 günde 40 cm uzayan bitki 3 günde ortalama 20 cm uzar. 7. Günde 60 cm olan bitki 3 gün daha uzarsa ortalama 80 cm civarında olacaktır.

Soru matematiksel süreçler açısından incelendiğinde;

Problemi matematiksel olarak formüle etme: Bu aşamada, grafikte verilen bilgileri düzenleyip dört işlem becerisi ile yorumlama. Yüzde hesabı yapma. Grafiğin devamını yorumlayabilme.

Matematiksel kavramları ve yöntemleri kullanma ve akıl yürütme: Bitkinin boy artışını hesaplayabilme. Hesaplama sonucu %200'lük artışı belirleme. Bitkinin ortalama büyüme hızını oran-orantı yardımı ile açıklayabilme.

Matematiksel çıktıları yorumlama: Yüzde 200'lük artışın grafikle karşılaştırılarak doğruluğunun araştırılması. Grafiğe dayanarak yapılan yorumlamanın tutarlılığının ölçülebilmesi.

Bu problemde öğrencilerin verdiği cevaplar ve kullandığı stratejiler dikkatle incelenmiş, Tablo 26'daki veriler elde edilmiştir:

Tablo 26

Öğrencilerin 8. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları

Çözüm	Frekans
Doğru Sonuca Ulaşma	9
Yanlış Sonuca Ulaşma	8
Sonuca Ulaşamama	1
Toplam	18

Tablo 26 incelendiğinde öğrencilerin yarısının (9 kişi) doğru sonuca ulaştığı görülmektedir. 8 öğrenci soruyu çözmesine rağmen yanlış sonuca ulaşmıştır. 1 öğrenci de soruyu çözememiştir. Bu soruda öğrencilerin matematiksel düşünmenin basamaklarını kullanıp kullanmadıkları belirlenecektir.

Tablo 27'de öğrencilerin 8. sorunun çözümü ile ilgili kullandıkları matematiksel düşünme boyutları verilmiştir.

Tablo 27

Öğrencilerin 8. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Var	Yok
Özelleştirme	9	9
Varsayımda Bulunma	15	3
Genelleme	12	6
İspat	11	7

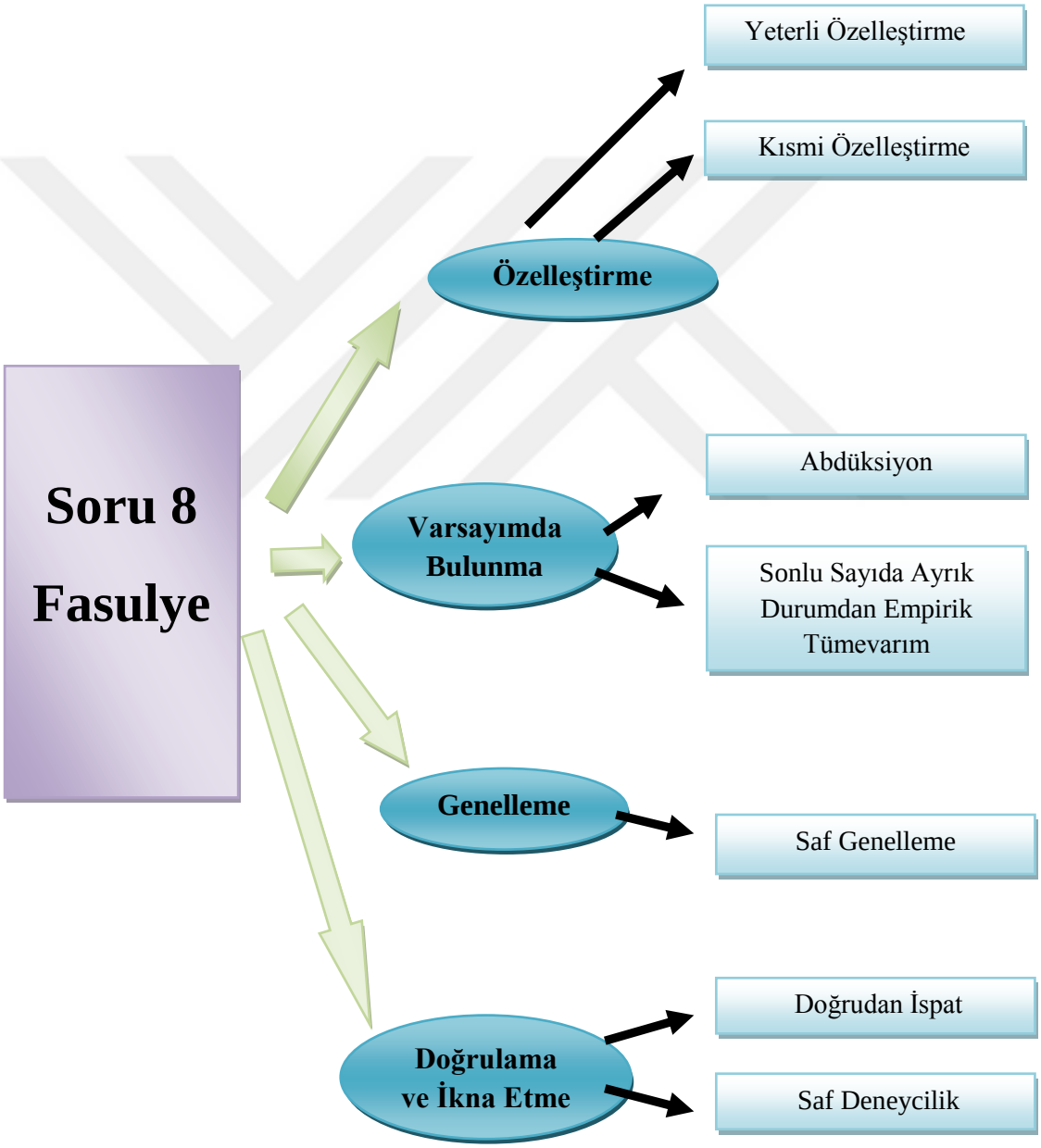
Tablo 27 incelendiğinde öğrencilerin yarısının soruyu yeterli özelleştirdiği, diğer yarısının ise özelleştirme basamağında problem yaşadığı görülmektedir.

Özelleştirme basamağında yaşanan problem genellemeyi de etkilemiş ve genelleme basamağında eksikliklerinin olduğu gözlenmektedir. Öğrencilerin çoğunluğunun varsayımda bulunma basamağını kullandığı ve ıspat basamağını da kullanmaya çalıştıkları gözlenen veriler arasındadır.

Öğrencilerin kullanmış oldukları düşünme boyutlarının hangi alt kategorilerde yoğunlaştığı Şekil 82 ve Tablo 28'de verilmiştir.

Şekil 82

8. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları



Tablo 28

8. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları

Boyutlar	Kullanılan Alt Kategoriler	Açıklama
Özelleştirme Boyutu	Yeterli Özelleştirme	Örneklerin temsil ettiği genel durumun doğru ve kapsamlı bir şekilde anlaşılıp ele alınması.
	Kısmi Özelleştirme	Örneklerin genel durumu tam olarak yansıtmadığı, eksik veya sınırlı bir perspektif sunması.
Varsayımda Bulunma Boyutu	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Gözlemlenen ayrık durumların genel bir ilke veya hipoteze ulaşmak için kullanılması.
	Abdüksiyon	En iyi açıklamayı bulmak amacıyla mevcut kanıt ve bilgilerin yorumlanması.
Genelleme Boyutu	Saf Genelleme	Doğrudan gözlemlerden elde edilen basit ve temel genellemeler.
Doğrulama ve İkna Etme Boyutu	Doğrudan İspat	Belirli bir hipotezin veya teorinin doğruluğunu kesin ve açık bir şekilde kanıtlama.
	Saf Deneycilik	Sadece birkaç örneğe bakarak ifadenin doğru olduğu sonucuna varmak

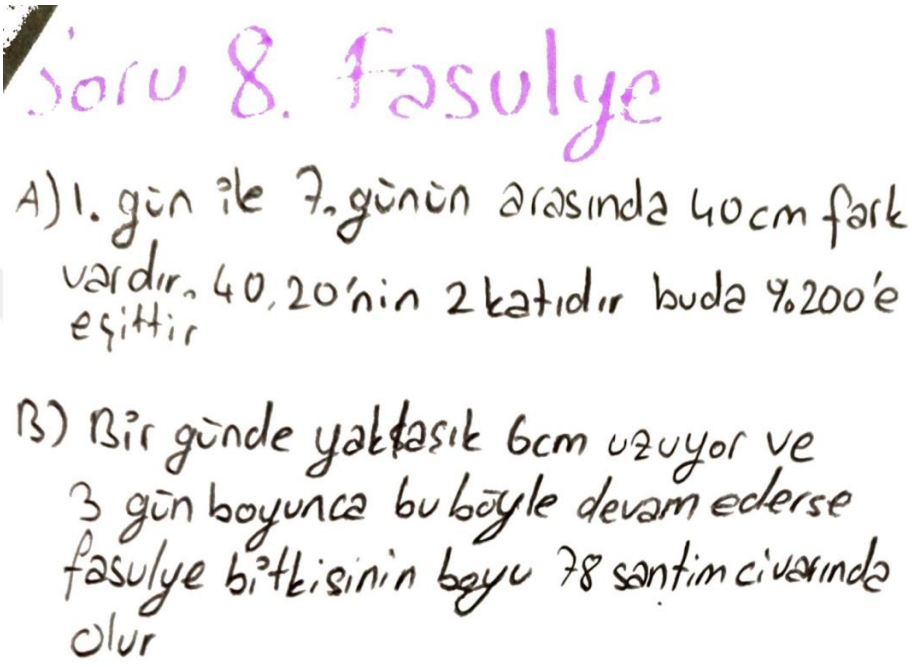
Sekizinci problemde öğrencilerin kullanmış oldukları alt kategoriler Şekil 82 ve Tablo 28'de verilmiştir. Bu soruda bazı öğrencilerin anlatılanı ve sorulanı anlayıp doğru olarak açıkladığı; problemi araştırıp örnek vermeye çalıştığı ve problemde anlatılanlara yönelik bilinçli hareketler yaptığı gözlemlenmiştir. Bunun sonucunda matematiksel düşünmenin özelleştirme basamağını kullanıp yeterli özelleştirme yaptıkları söylenebilir. Bununla beraber bazı öğrencilerin isteneni büyük oranda anladıkları ancak gözden kaçan küçük ama sonucu etkileyen durumların olduğu görülmüştür. Bunun sonucunda kısmi özeleştirmeler yaptıkları söylenebilir. Bazı öğrenciler soruyu algısal gösterime çevirip zihinlerindeki temsilleri gözlemleyerek, bazı öğrenciler ise açıklayamadıkları bir durumu genel bir kural çerçevesinde açıklamaya çalışarak varsayımda bulunmuşlardır. Az sayıda öğrenci örüntü içermeyen genellemeleri kullanmışlardır. Sonuca giden öğrencilerden bir kısmı problemi çözerken bir

durumu gözlemlemesi sonucunda bir yargıya vararak saf deneycilik, bir kısmı da doğrudan ispat yöntemiyle doğrula yöntemi kullamışlardır.

Sekizinci problemde kullanılan düşünme boyutları, alt kategorilerine yönelik açıklamalar ve bazı ortaokul öğrencilerinin çözüm yolu örnekleri aşağıda verilmiştir:

Şekil 83

Ö6'nın Cevabı



Ö6, sorunun çözümünü sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

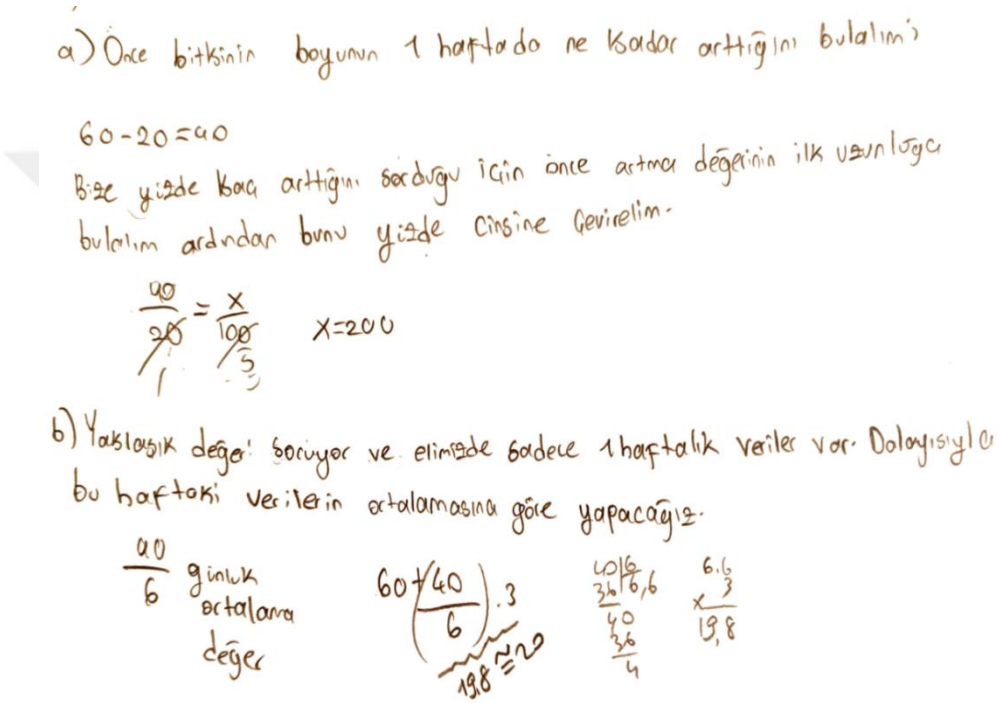
Ö6: Grafiğe baktığımız zaman bitki boyunun 20'den 60'a çıktığını görüyoruz. Yani 3 katına çıkyıor. Bize de yüzde kaç arttığını soruyor. Dolayısıyla bizim artış farkına bakmamız gerekiyor. 'Aradaki fark 40 cm. 20 iken 40 artıp 60 oluyorsa 20'nin iki katı büyümüş oluyor. Yani artış %200 olmuş demektir. B şıkkına gelirsek burada düzenli bir artış yok aslında. Ben de günlük ortalama ne kadar uzamış ona baktım. Günlük ortalama 6 dersek kalan 3 günde de 18 cm uzarsa 60+18=78 cm civarı olmuş olur.

Sekizinci problem için Ö6'nın cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Soruda verilen grafiği doğru şekilde okumuş ve açıklayabilmiş dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Verilen miktarları yüzde olarak

yazabildiği, günlük değişimleri karşılaştırabildiği yani verileri benzerlik ve farklılıklarına göre sınıflayabildiği için **saf genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci bitkinin günlük boy uzamalarını karşılaştırıp yani sınırlı sayıda ayrık durumu gözlemleyip sonuçla ilgili tahminde bulunduğu için **sonlu sayıda ayrık durumlardan empirik tümevarım yapmıştır.** Son olarak mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yapmış, dolayısıyla **doğrudan ispat** basamaklarını kullanmıştır.

Şekil 84

Ö17'nin Cevabı



Ö17, sorunun çözümünü hem matematiksel hem de sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

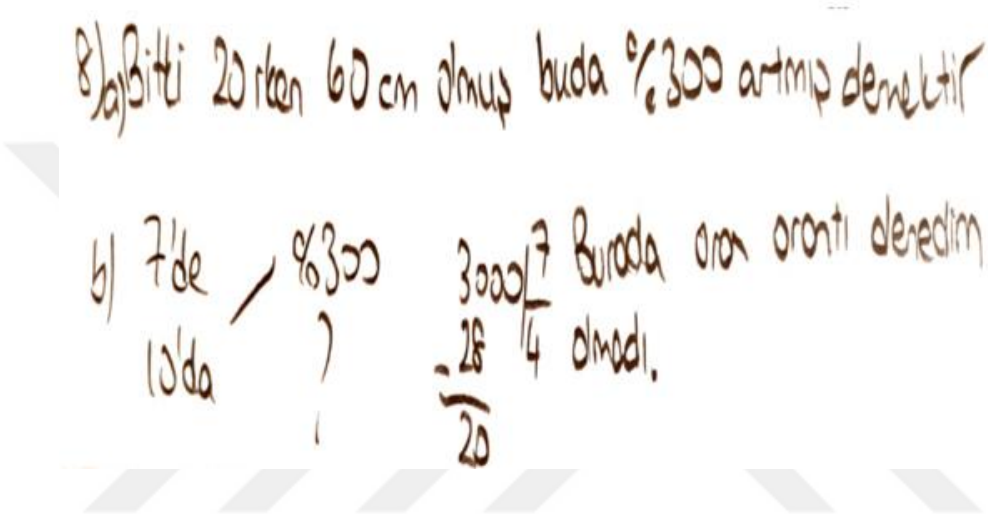
$Ö_{17}$: 1 haftada 40 cm arttığı için bunun yüzde değerini oran orantı ile buldum. Yani 20'den 40'a çıkmış. O zaman %200 artoş olmuştur. 1 haftalık veriden günlük artışı $\frac{40}{6}$ *olarak buldum. O da 3 gün için ortalama 20 cm yapar. Yani tahmini ortalam 80 cm denebilir.*

Sekizinci problem için Ö17'nin cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Verilen grafik üzerinde günlük miktarı hesaplayabilmiş ve veriler arası ilişkiyi açıklayabilmiş, dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz.

Verilen miktarları yüzde olarak yazabildiği, günlük değişimleri karşılaştırabildiği yani verileri benzerlik ve farklılıklarına göre sınıflayabildiği için **saf genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci bitkinin günlük boy uzamalarını karşılaştırıp yani sınırlı sayıda ayrık durumu gözlemleyip sonuçla ilgili tahminde bulunduğu için **sonlu sayıda ayrık durumlardan empirik tümevarım yapmıştır.** Son olarak mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yapmış, dolayısıyla **doğrudan ispat** basamaklarını kullanmıştır.

Şekil 85

Ö18'in Cevabı



Ö18, sorunun çözümünü sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

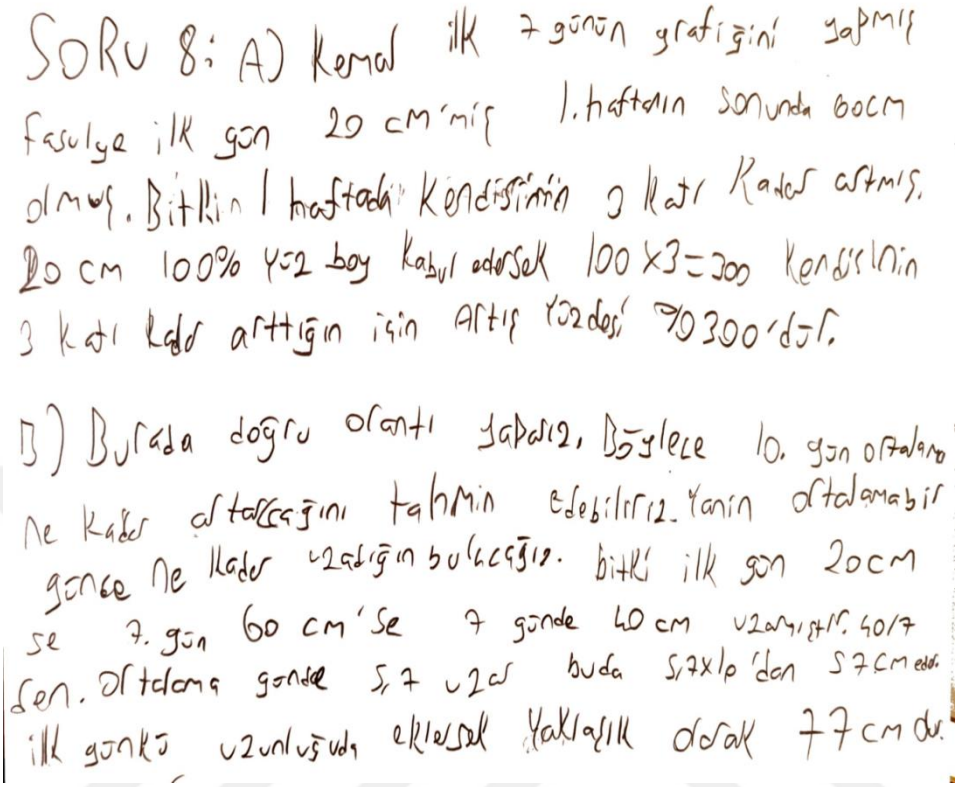
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_{18}$: Bitkinin grafikte verilen bilgiyle 20'den 60'a çıktığını biliyoruz. Dolayısıyla 3 katına çıkmıştır. Bu da %300 artmış demektir.10. günle alakalı bir oranlama denedim ama sanırım yanlış.

Sekizinci problem için Ö18'in cevabı incelendiğinde, öğrencinin soruyu tam olarak anlayamadığı ve çözüme aktaramadığı, soruda söylenenlerin bir kısmını dikkate alıp kalan kısımlarına odaklanmadığı, verdiği örnekte eksikliklerin olduğu ve sorunun detaylarına inmeden akla ilk gelen haliyle soruyu açıklamaya çalıştığı görülmüştür. Öğrenci bitki boyundaki artışın sorulmasına rağmen bunu dikkate almamış ve son hali ve ilk halini kıyaslamılştır. Bunun sonucunda **kısmi özeleştirme** yaptığı söylenebilir. Sorunun b şıkkı ile alakalı aklına ilk gelen işlemle açıklamaya çalıştığı için **abdüksiyon** boyutunda varsayımda bulunduğu söylenebilir. Sorudaki günlük değişimleri karşılaştıramadığı, verileri benzerlik ve farklılıklarına göre sınıflayamadığıı için **genelleme**den bahsedemeyiz. A şıkkı için **doğrudan ispat** yöntemi ile açıklama yapmış fakat b şıkkına dair bir strateji geliştirememiştir.

Şekil 86

Ö9'un Cevabı



Ö9, sorunun çözümünü sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

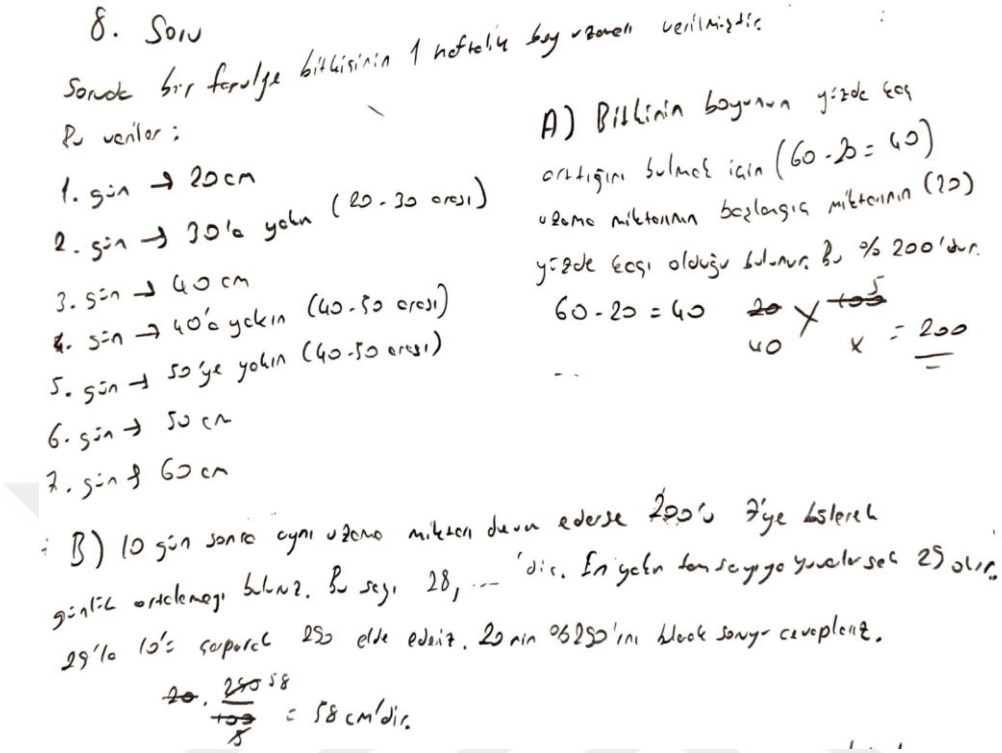
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö9: Bitkinin boyu 1 haftada 3 katına çıkmış. Dolayısıyla %300 artmıştır. Bu çok kolaydı. Diğer şık için de orantı yaparız. 7 günde 40 cm artmışsa $\frac{40}{7}$ *'den ortalama 5,7 gün yapar. 10 ile çarparsak 57 cm yapar. İlk günü de ekleyince 77 yapar.*

Sekizinci problem için Ö9'un cevabı incelendiğinde, öğrencinin soruyu tam olarak anlayamadığı ve çözüme aktaramadığı, soruda söylenenlerin bir kısmını dikkate alıp kalan kısımlarına odaklanmadığı, verdiği örnekte eksikliklerin olduğu ve sorunun detaylarına inmeden akla ilk gelen haliyle soruyu açıklamaya çalıştığı görülmüştür. 9 numaralı öğrenci bir önceki öğrenci gibi bitki boyundaki artış sorulmasına rağmen bunu dikkate almamış ve son hali ve ilk halini kıyaslamılştır. Bunun sonucunda **kısmi özeleştirme** yaptığı söylenebilir. Sorunun b şıkkı ile alakalı grafiğin verilen bir miktarına bakarak geneli hakkında yorum yaptığı için **saf genelleme** yapmıştır**.** Son olarak mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yapmış, dolayısıyla **doğrudan ispat** basamaklarını kullanmıştır.

Şekil 87

Ö5'in Cevabı



Ö5, sorunun çözümünü hem matematiksel hem de sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

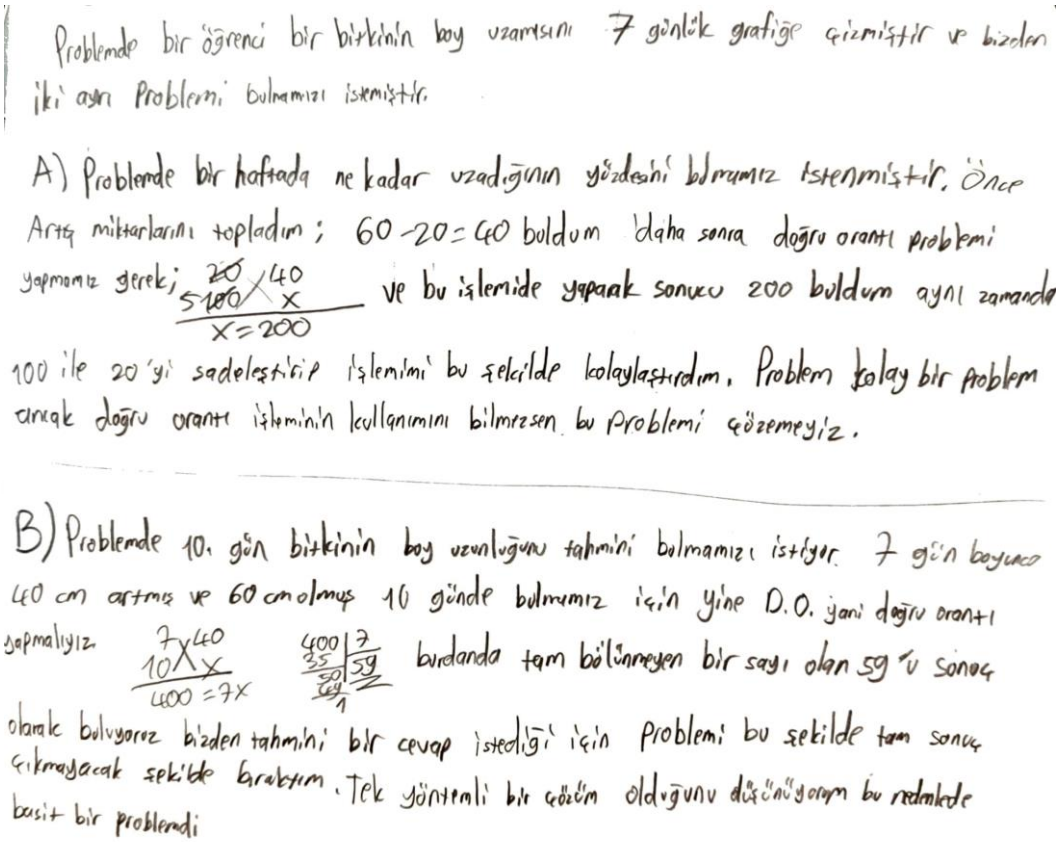
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö5: Bitkinin uzama miktarı, başlangıç miktarının yüzde kaçı olduğunu buldum. Arada 40 cm'lik fark var. Dolayısıyla % 200 artmıştır.

Sekizinci problem için Ö5'in cevabı incelendiğinde, a şıkkı için problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Verilen grafik üzerinde günlük miktarı hesaplayabilmiş ve veriler arası ilişkiyi açıklayabilmiş, dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Verilen miktarları yüzde olarak yazabildiği, günlük değişimleri karşılaştırabildiği yani verileri benzerlik ve farklılıklarına göre sınıflayabildiği için **saf genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci bitkinin günlük boy uzamalarını karşılaştırıp yani sınırlı sayıda ayrık durumu gözlemleyip sonuçla ilgili tahminde bulunduğu için **sonlu sayıda ayrık durumlardan empirik tümevarım yapmıştır.** Son olarak mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yapmış, dolayısıyla **doğrudan ispat** basamaklarını kullanmıştır. B şıkkı için öğrencinin özelleştirmede zorlandığı, bunun da sonucu etkilediği görülmüştür.

Şekil 88

Ö12'in Cevabı



Ö12, sorunun çözümünü hem matematiksel hem de sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

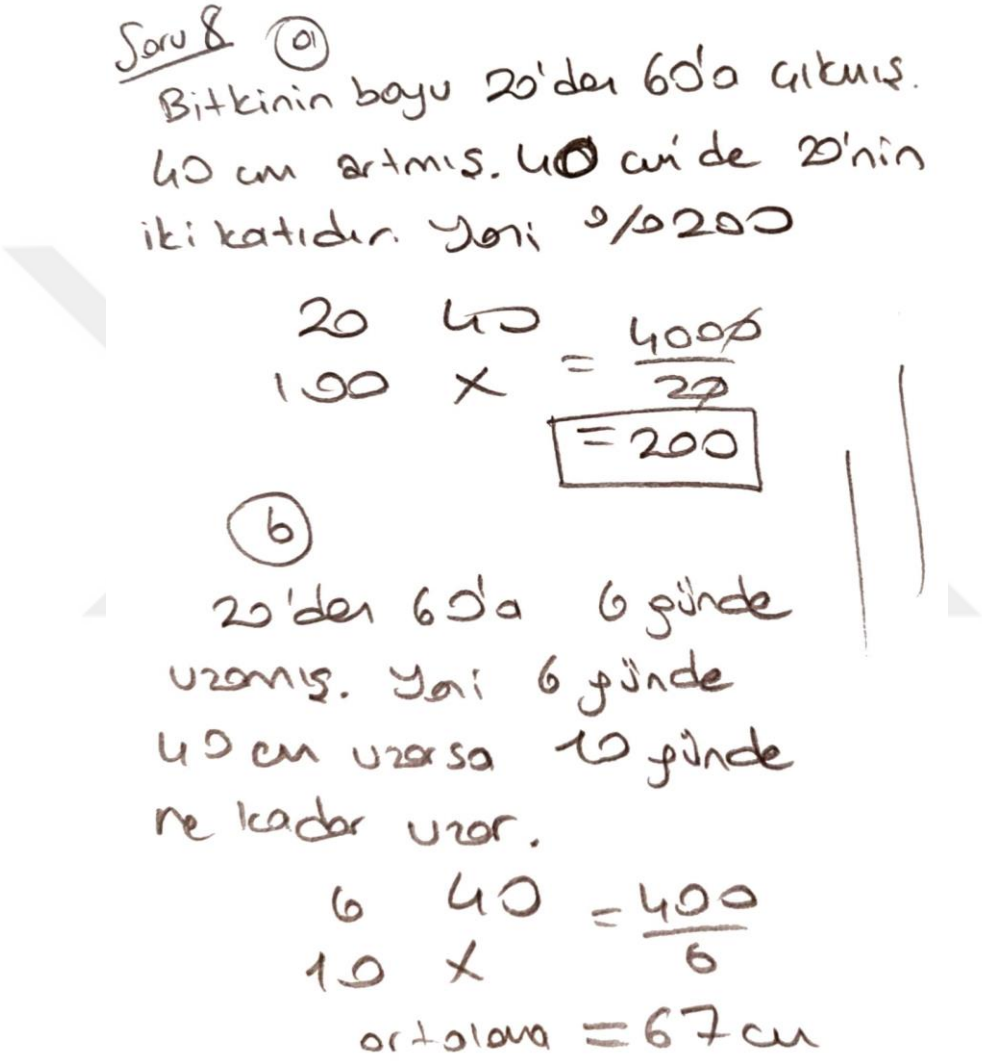
$Ö_{12}$: Grafiğe bakarak artış miktarının 40 cm olduğunu anlarız. Orantı yaparak 20'den 60'a gittiyse yüzde 200 artış olduğunu görebiliriz. 10 günlük bir uzamayı da yine orantısal olarak buldum. 7 günde 40 artmış ise 10 günde ne kadar artar hesabıyla buldum.

Sekizinci problem için Ö12'nin cevabı incelendiğinde, a şıkkı için problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Verilen grafik üzerinde günlük miktarı hesaplayabilmiş ve veriler arası ilişkiyi açıklayabilmiş, dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Verilen miktarları yüzde olarak yazabildiği, günlük değişimleri karşılaştırabildiği yani verileri benzerlik ve farklılıklarına göre sınıflayabildiği için **saf genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci bitkinin günlük boy uzamalarını karşılaştırıp yani

sınırlı sayıda ayrık durumu gözlemleyip sonuçla ilgili tahminde bulunduğu için **sonlu sayıda ayrık durumlardan empirik tümevarım yapmıştır.** Son olarak mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yapmış, dolayısıyla **doğrudan ispat** basamaklarını kullanmıştır. B şıkkı için öğrencinin özelleştirmede zorlandığı, bunun da sonucu etkilediği görülmüştür.

Şekil 89

Ö15'in Cevabı



Ö15, sorunun çözümünü hem matematiksel hem de sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

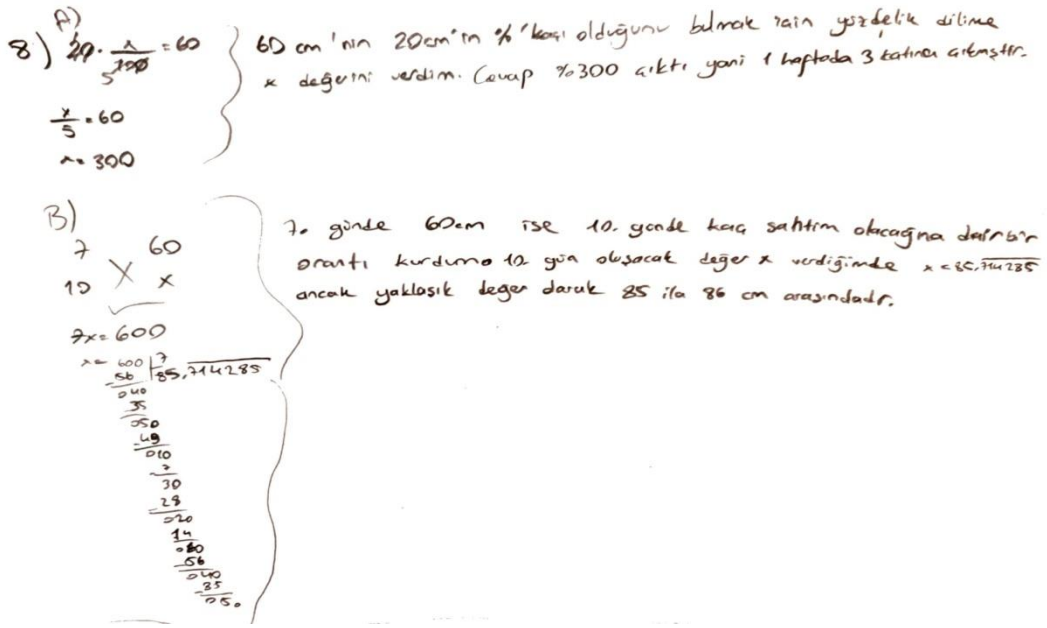
Ö15: 20'den 60'a çıkan bie şey sanki yüzde 300 artmış gibi duruyor. Fakat artış miktarını sorduğu için ne kadar arttığı önemli. 40 arttıysa iki katı artmıştır. Yani

yüzde 200 artmıştır. B şıkkında da orantı yaptım ama tam emin değilim sanki olmadı gibi.

Sekizinci problem için Ö15'in cevabı incelendiğinde, a şıkkı için problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Verilen grafik üzerinde artış miktarını hesaplayabilmiş ve veriler arası ilişkiyi açıklayabilmiş, dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Verilen miktarları yüzde olarak yazabildiği, günlük değişimleri karşılaştırabildiği yani verileri benzerlik ve farklılıklarına göre sınıflayabildiği için **saf genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci bitkinin günlük boy uzamalarını karşılaştırıp yani sınırlı sayıda ayrık durumu gözlemleyip sonuçla ilgili tahminde bulunduğu için **sonlu sayıda ayrık durumlardan empirik tümevarım yapmıştır.** Son olarak mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yapmış, dolayısıyla **doğrudan ispat** basamaklarını kullanmıştır. B şıkkı için öğrencinin özelleştirmede zorlandığı, bunun da sonucu etkilediği görülmüştür.

Şekil 90

Ö14'ün Cevabı



Ö14, sorunun çözümünü hem matematiksel hem de sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

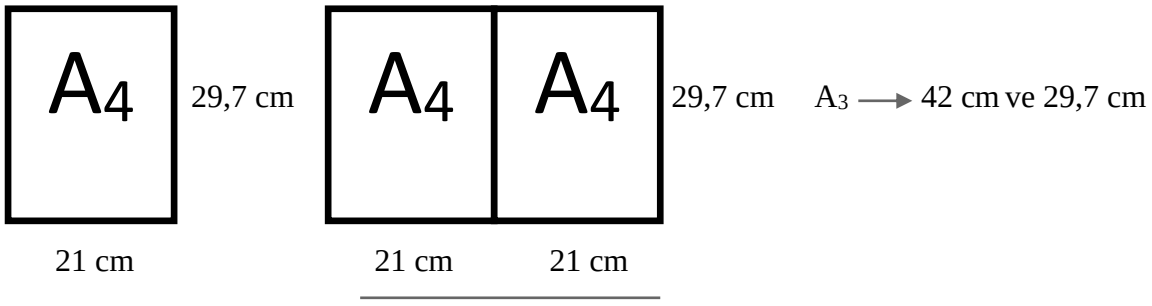
$Ö_{14}$: 60, 20'nin yüzde kaçıdır diye hesapladım. Cevap yüzde 300. Zaten 3 katına çıktığı belli. B şıkkı için de orantı yaptm. O da 85 civarında bir şey çıkıyor. Zaten soruda da yaklaşık değer soruyor.

Sekizinci problem için Ö14'ün cevabı incelendiğinde, a şıkkı için öğrencinin soruyu tam olarak anlayamadığı ve çözüme aktaramadığı, soruda söylenenlerin bir kısmını dikkate alıp kalan kısımlarına odaklanmadığı, verdiği örnekte eksikliklerin olduğu ve sorunun detaylarına inmeden akla ilk gelen haliyle soruyu açıklamaya çalıştığı görülmüştür. Öğrenci bitki boyundaki artış sorulmasına rağmen bunu dikkate almamış ve son hali ve ilk halini kıyaslamılştır. Bunun sonucunda **kısmi özeleştirme** yaptığı söylenebilir. Sorunun b şıkkı ile alakalı grafiğin verilen bir miktarına bakarak geneli hakkında yorum yaptığı için **saf genelleme** yapmıştır. Son olarak mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yapmış, dolayısıyla **doğrudan ispat** basamaklarını kullanmıştır.

Belirsizlik ve veri sorularına ilişkin bulguları toparlayacak olursak; öğrencilerin bu sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde; %50'den fazla (10 öğrenci) öğrencinin yeterli özelleştirme yaptığı, %50'den az (8 öğrenci) öğrencinin varsayımda bulunma basamağını kullandığı, %50'den fazla (11öğrenci) genelleme basamağının kullanıldığı ve %50'den fazlasının (12 öğrenci) ispat basamağını kullandığı söylenebilir.

4.4. Uzay ve Şekil Soruları

4.4.1. Dosya Kâğıdı İsimli Probleme Ait Bulgular: Öğrencilere verilen okuryazarlık sorularından dokuzuncusu uzay ve şekil sorularından olan Dosya Kâğıdı isimli sorudur. Bu soruda beklenen çözüm yollarından biri şu şekildedir: İki tane A_4 kâğıdını uzun kenarlarını yan yana getiririz.



Kısa kenarı iki ile çarparak kâğıdın uzun kenarını buluruz

Soru matematiksel süreçler açısından incelendiğinde;

Problemi matematiksel olarak formüle etme: Kâğıt boyutları arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade edebilme. Bir büyük boyutu elde edebilmek için işlemler yapma.

Matematiksel kavramları ve yöntemleri kullanma ve akıl yürütme: A4 kâğıdının uzun kenarları boyunca yan yana getirilmesiyle A3 kâğıdını elde etme. Hesaplamaların doğruluğunu kontrol etme. Görselleri açıklayabilme.

Matematiksel çıktıları yorumlama: Elde edilen kağıt boyutunun kontrol edilmesi ve diğer boyutlarla karşılaştırılması.

Bu problemde öğrencilerin verdiği cevaplar ve kullandığı stratejiler dikkatle incelenmiş, Tablo 29'daki veriler elde edilmiştir:

Tablo 29

Öğrencilerin 9. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları

Çözüm	Frekans
Doğru Sonuca Ulaşma	7
Yanlış Sonuca Ulaşma	4
Sonuca Ulaşamama	7
Toplam	18

Tablo 29 incelendiğinde öğrencilerin az bir kısmının (% 50'den az) doğru sonuca ulaştığı görülmektedir. 7 öğrenci doğru sonuca ulaşırken 4 öğrenci de soruyu çözmesine rağmen yanlış sonuca ulaşmıştır. 7 öğrenci de soruyu çözememiştir. Bu soruda öğrencilerin matematiksel düşünmenin basamaklarını kullanıp kullanmadıkları belirlenecektir.

Tablo 30'da öğrencilerin 9. sorunun çözümü ile ilgili kullandıkları matematiksel düşünme boyutları verilmiştir.

Tablo 30

Öğrencilerin 9. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları

Matematiksel Düşünme Boyutları	Var	Yok
Özelleştirme	7	11
Varsayımda Bulunma	7	11
Genelleme	2	16
İspat	11	7

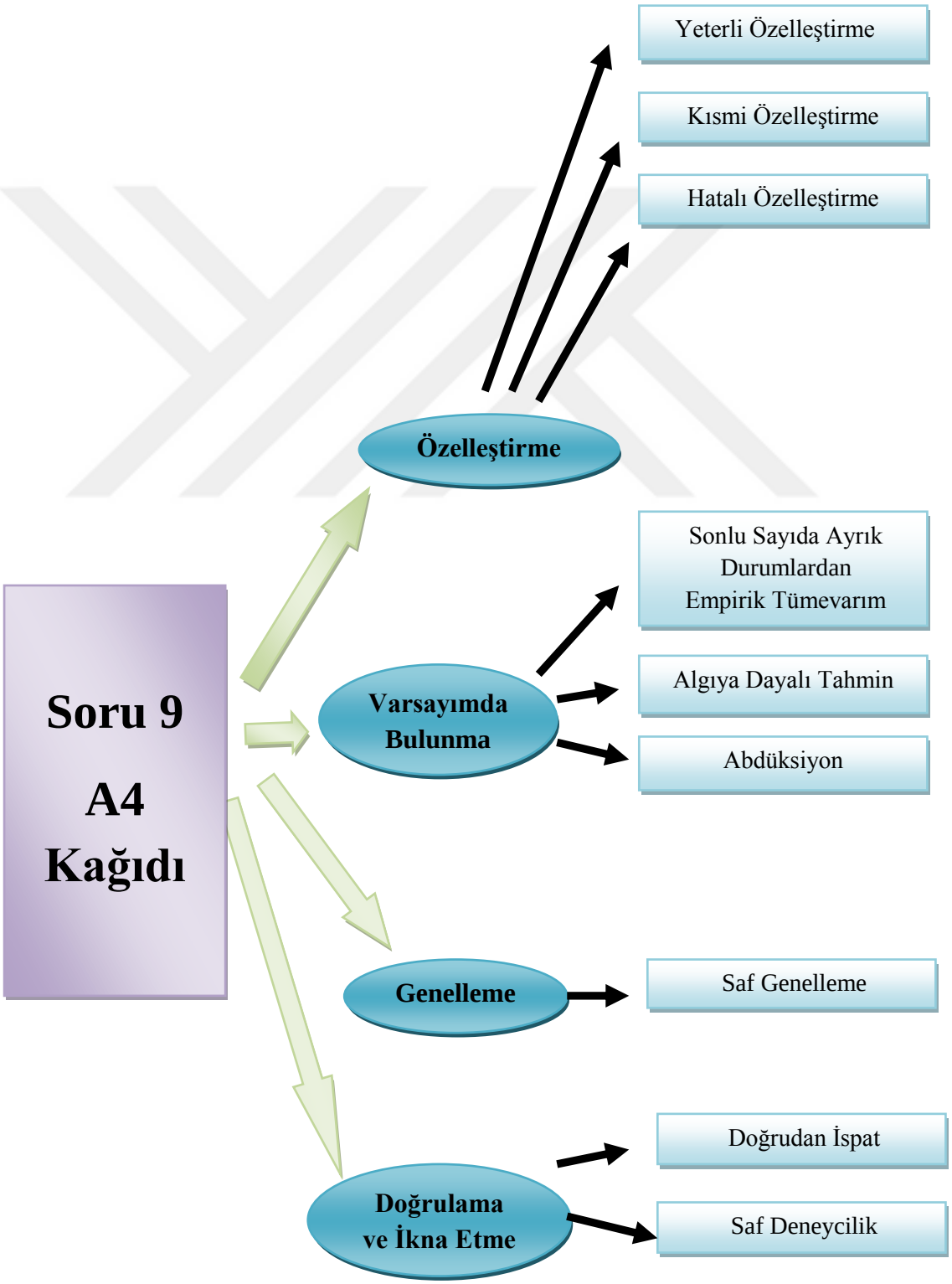
Tablo 30 incelendiğinde öğrencilerin çoğunluğunun özelleştirme basamağında problem yaşadığı görülmektedir. Özelleştirme basamağında yaşanan problem genellemeyi de

etkilemiş ve genelleme basamağında eksikliklerinin olduğu gözlenmektedir. Öğrencilerin çoğunluğunun ıspat basamağını kullanmaya çalıştıkları da gözlenen veriler arasındadır.

Öğrencilerin kullanmış oldukları düşünme boyutlarının hangi alt kategorilerde yoğunlaştığı Şekil 91 ve Tablo 31'de verilmiştir.

Şekil 91

9. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları



Tablo 31

9. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları

Boyutlar	Kullanılan Alt Kategoriler	Açıklama
Özelleştirme Boyutu	Yeterli Özelleştirme	Örneklerin temsil ettiği genel durumun doğru ve kapsamlı bir şekilde anlaşılıp ele alınması.
	Kısmi Özelleştirme	Örneklerin genel durumu tam olarak yansıtmadığı, eksik veya sınırlı bir perspektif sunması.
	Hatalı Özelleştirme	Yanlış veya yanıltıcı örneklerle genel bir durumu temsil etmeye çalışılması.
Varsayımda Bulunma Boyutu	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Gözlemlenen ayrık durumların genel bir ilke veya hipoteze ulaşmak için kullanılması.
	Algıya Dayalı Tahmin	Bireysel algı ve sezgilere dayalı öngörülerde bulunma.
	Abdüksiyon	En iyi açıklamayı bulmak amacıyla mevcut kanıt ve bilgilerin yorumlanması.
Genelleme Boyutu	Saf Genelleme	Doğrudan gözlemlerden elde edilen basit ve temel genellemeler.
Doğrulama ve İkna Etme Boyutu	Doğrudan İspat	Belirli bir hipotezin veya teorinin doğruluğunu kesin ve açık bir şekilde kanıtlama.
	Saf Deneycilik	Sadece birkaç örneğe bakarak ifadenin doğru olduğu sonucuna varmak

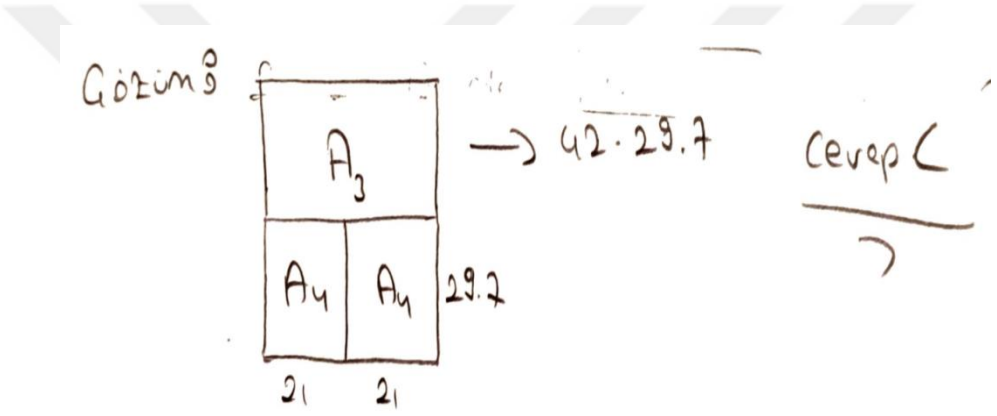
Dokuzuncu problemde öğrencilerin kullanmış oldukları alt kategoriler Şekil 91 ve Tablo 31'de verilmiştir. Bu soruda bazı öğrencilerin anlatılanı ve sorulanı anlayıp doğru olarak açıkladığı; problemi araştırıp örnek vermeye çalıştığı ve problemde anlatılanlara yönelik bilinçli hareketler yaptığı gözlemlenmiştir. Bunun sonucunda matematiksel düşünmenin özelleştirme basamağını kullanıp yeterli özelleştirme yaptıkları söylenebilir. Bununla beraber bazı öğrencilerin isteneni büyük oranda anladıkları ancak gözden kaçan küçük ama sonucu etkileyen durumların olduğu görülmüştür. Bazı öğrenciler ise soruyu hiç

anlayamamışlardır. Bunun sonucunda kısmi ve hatalı özeleştirmeler yaptıkları söylenebilir. Bazı öğrenciler soruyu algısal gösterime çevirip zihinlerindeki temsilleri gözlemleyerek, bazı öğrenciler ise açıklayamadıkları bir durumu genel bir kural çerçevesinde açıklamaya çalışarak varsayımda bulunmuşlardır. Az sayıda öğrenci örüntü içermeyen genellemeleri kullanmışlardır. Sonuca giden öğrencilerden bir kısmı problemi çözerken bir durumu gözlemlemesi sonucunda bir yargıya vararak saf deneycilik, bir kısmı da doğrudan ispat yöntemiyle doğrula yöntemi kullamışlardır.

Dokuzuncu problemde kullanılan düşünme boyutları, alt kategorilerine yönelik açıklamalar ve bazı ortaokul öğrencilerinin çözüm yolu örnekleri aşağıda verilmiştir:

Şekil 92

Ö10'un Cevabı



Ö10, sorunun çözümünü şekil çizerek matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

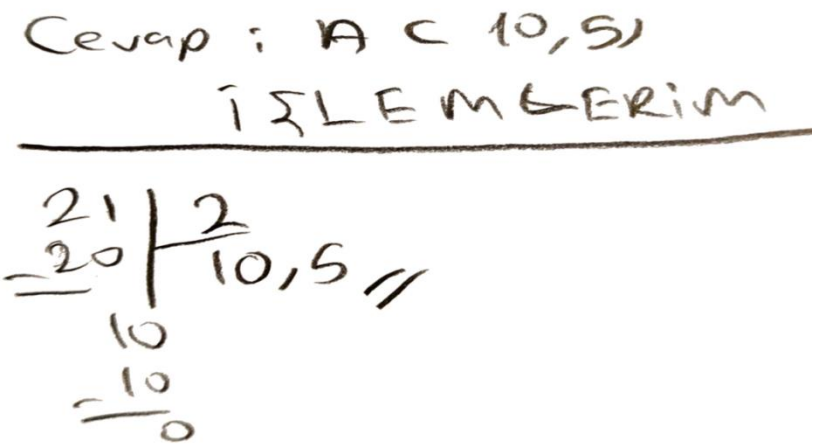
$Ö_{10}$: Bu soruda A_3'ü elde etmek için A_4'ün uzun kenarları birbirine değecek şekilde 2 tane A_4'ü birleştirdim. A_4'ün boyutları 21x29,7 ise ve uzun kenarları çakışık ise A_3'ün boyutları 42x29,7'ye eşit olur. Yani uzun kenarlar çakışık ise kısa kenarlar yan yana demektir. Cevap c şıkkı olur.

Dokuzuncu problem için Ö10'un cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. A_3 ve A_4 boyutlu kağıtların arasındaki ilişkiyi doğru anlamış, dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci tüm kağıt çeşitleri arasındaki ilişkiyi anlayarak istenen sonuca ulaşabilmiş yani olası tüm durumların farkına vardığını için **saf genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Soruda verilenleri algısal bir gösterime dönüştürdüğü

yani çizimle görselleştirip kuralla ilgili varsayım yolunu seçtiği için **algıya dayalı tahmin** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yaptığı için **doğrudan ispat** yapmıştır.

Şekil 93

Ö7'nin Cevabı



Ö7, sorunun çözümünü şekil çizerek matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

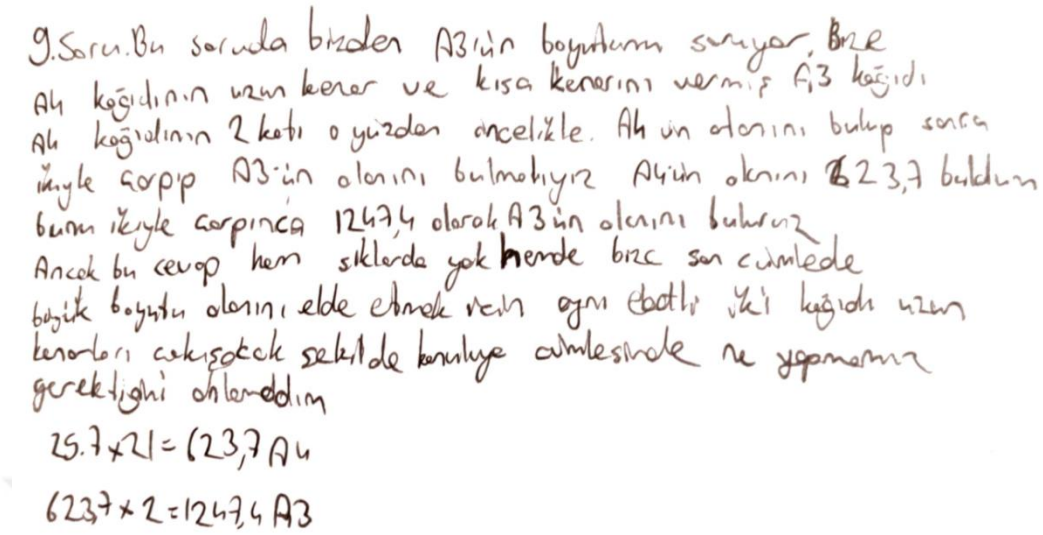
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö7: A_3 kâğıdı A_2'nin bir küçüğü olduğu için ve soruda verilen bilgiye göre yarı ölçülerinde olduğu için A_2'nin uzunluklarını ikiye böldüm. Bulduğum sonuçlardan biri A şıkkındaydı. Cevabı bu şekilde buldum.

Dokuzuncu problem için Ö7'nin cevabı incelendiğinde, öğrencinin soruyu tam olarak anlayamadığı ve çözüme aktaramadığı, detaya girmeden akla ilk gelen şeymiş gibi özelleştirdiğini söyleyebiliriz. Bu tür özelleştirme sürecinde soruda söylenenler tam olarak çözümlenememiş olup, devredilen kısımlarda soruda söylenenlere göre büyük sapmalar bulunmaktadır. Soruda dosya kağıdı olarak bilinen A_4 kağıdının bilgileri verilmiş ve bir büyük boyu olan A_3 boyutlu kağıt bilgileri sorulmaktadır. Fakat öğrenci A_3 ile A_2'yi kıyaslamış, bunun sonucunda **hatalı özeleştirme** yaptığı söylenebilir. Öğrenci kâğıtlar arası ilişkiyi anlamaya çalışmış fakat özelleştirmede hataya düştüğü için genelleme kısmında da hatalı genelleme yapmıştır. Soruda verilen bilgilerle sonuca gitmeye çalıştığı için **doğrudan ispat** basamağını kulalnmıştır.

Şekil 94

Ö11'in Cevabı


9.Soru. Bu soruda bizden A3'ün boyutunu soruyor, Bize A4 kağıdının uzun kenar ve kısa kenarını vermiş A3 kağıdı A4 kağıdının 2 katı o yüzden öncelikle A4 ün alanını bulup sonra ikiyle çarpıp A3'ün alanını bulmalıyız A4'ün alanını 623,7 buldum bunu ikiyle çarpınca 1247,4 olarak A3'ün alanını bulurız Ancak bu cevap hem şıklarda yok hemde bize son cümlede büyük boyutu alanı elde etmek için aynı ebatlı iki kağıdı uzun kenarları çakışacak şekilde konuya cümlesinde ne yapmamız gerektiğini anlamadım

25.7×21=623,7 A4

623,7×2=1247,4 A3

Ö11, sorunun çözümünü sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö11: Burda öncelikle A4'ün alanını bulmalıyız. Daha sonra ikiyle çarparsak A3'ün alanını bulabiliriz.

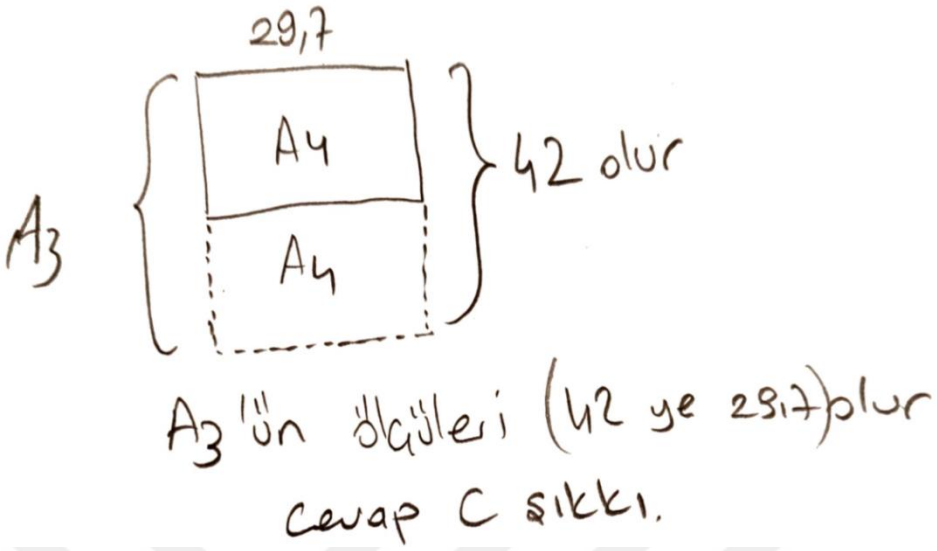
A:Peki sonuç doğru mu? Sanırım yaklaşık bir sayı buldun.

Ö11:Yani ben A4'ün alanını 623,7 buldum. İkiyle çarpınca da 1247,4 çıkıyor. Şıklarda olmayınca da uzun kenarlarının çakışmsı meselesine döndüm ama onu da tam anlamadım.

Dokuzuncu problem için Ö11'in cevabı incelendiğinde, öğrencinin soruyu tam olarak anlayamadığı ve çözüme aktaramadığı, detaya girmeden akla ilk gelen şeymiş gibi özelleştirdiğini söyleyebiliriz. Bu tür özelleştirme sürecinde soruda söylenenler tam olarak anlaşılamamış olup, açıklama kısımlarında soruda söylenenlere göre büyük sapmalar bulunmaktadır. Soruda dosya kağıdı olarak bilinen A_4 kağıdının bilgileri verilmiş ve bir büyük boyu olan A_3 boyutlu kağıt bilgileri sorulmaktadır. Fakat öğrenci A_3 ile A_4'ün alanlarını bulmaya yönelik hamleler yapmıştır. Bunun sonucunda **hatalı özeleştirme** yaptığı söylenebilir. Öğrenci kâğıtlar arası ilişkiyi tam olarak anlayamamış ve bilgileri genelleyememiştir. Faklı türlü açıklanamayan bir olayı aklına gelen genel bir kurala dayandırarak tahmin ettiği için **abdüksiyon** türünden tahminde bulunmuştur. Soruda verilen bilgilerle sonuca gitmeye çalıştığı için **doğrudan ispat** basamağını kulalnmıştır.

Şekil 95

Ö18'in Cevabı



Ö18, sorunun çözümünü şekil çizerek matematiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

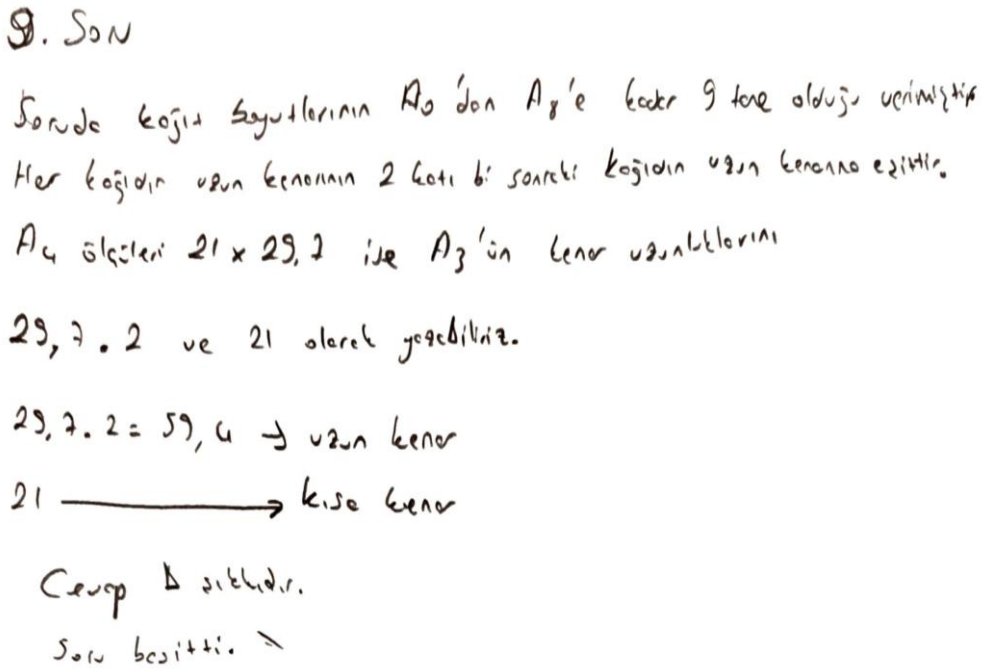
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_{18}$: A_4 kâğıdının boyutları verilmiş. Verilen kurala göre bir büyük boyutuna ulaşmak için kısa kenarlarını yan yana koyarız. Böylece her bir büyük boyutu elde edilebilir. Biz de A_3'ü elde ederiz. Sonuç 42 olur. Cevap c şıkkı.

Dokuzuncu problem için Ö18'in cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. A_3 ve A_4 boyutlu kağıtların arasındaki ilişkiyi doğru anlamış, dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci tüm kağıt çeşitleri arasındaki ilişkiyi anlayarak istenen sonuca ulaşabilmiş yani olası tüm durumların farkına vardığını için **saf genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Soruda verilenleri algısal bir gösterime dönüştürdüğü yani çizimle görselleştirip kuralla ilgili varsayım yolunu seçtiği için **algıya dayalı tahmin** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yaptığı için **doğrudan ispat** yapmıştır.

Şekil 96

Ö16'nın Cevabı



Ö16, sorunun çözümünü sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö16: Eğer kâğıtlardan bir büyüğünü elde etmek istiyorsak uzun kenarları 2 ile çarpıyormuşuz. Dolayısıyla uzun kenarı çarptım ve 59,4 buldum. Ölçüleri 21 ve 59,4'tür. D şıkkı doğru cevap.

A: Bir büyük boyunu elde etmek için uzun kenarları çarpman gerektiği nerede yazıyor?

Ö16: "Soruyu göstererek" iki kağıdı uzun kenarı boyunca yan yana getirmek gerekir yazıyor.

A: Peki.

Dokuzuncu problem için Ö16'nın cevabı incelendiğinde, öğrencinin soruyu tam olarak anlayamadığı ve çözüme aktaramadığı, detaya girmeden akla ilk gelen şeymiş gibi özelleştirdiğini söyleyebiliriz. Bu tür özelleştirme sürecinde soruda söylenenler tam olarak anlaşılamamış olup, açıklama kısımlarında soruda söylenenlere göre büyük sapmalar bulunmaktadır. Soruda dosya kağıdı olarak bilinen A_4 kağıdının bilgileri verilmiş ve bir büyük boyu olan A_3 boyutlu kağıt bilgileri sorulmaktadır. Fakat öğrenci büyük boyutu bulmak için verilen bilgileri yanlış anlamıştır. Bunun sonucunda **hatalı özeleştirme** yaptığı

söylenebilir. Öğrenci kâğıtlar arası ilişkiyi tam olarak anlayamamış ve bilgileri genelleyememiştir. Faklı türlü açıklanamayan bir olayı aklına gelen ilk kurala dayandırarak tahmin ettiği için **abdüksiyon** türünden tahminde bulunmuştur. Soruda verilen bilgilerle sonuca gitmeye çalıştığı için **doğrudan ispat** basamağını kulalnmıştır.

4.4.2. Çam Ağacı Gövdesinin Çapı İsimli Probleme Ait Bulgular: Öğrencilere verilen okuryazarlık sorularından onuncusu uzay ve şekil sorularından olan Çam Ağacı Gövdesinin Çapı isimli sorudur. Bu soruda beklenen çözüm yolu şu şekildedir:

Ağaca sarıldığında elinin parmak uçları birbirine deyiyorsa ağacın çevresi Buğra'nın kulaç uzunluğu kadardır. Ağacın çevresi 2πr formülü ile bulunursa;

$$2\pi r = 165cm$$

$$r = \frac{165}{2.3} = \frac{165}{6}$$

$$r = 27.5 \text{ ise}$$

$$\text{çap: } 2r = 55 \text{ cm'dir.}$$

Soru matematiksel süreçler açısından incelendiğinde;

Problemi matematiksel olarak formüle etme: Ağacın çapı ile Buğra'nın kulaç uzunluğu arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak açıklayabilme. Çevre formüllerini yazabilme.

Matematiksel kavramları ve yöntemleri kullanma ve akıl yürütme: Ağaç gövdesi ile boy uzunluğunu eşitleme. Problemi çözmek için gerekli denklemi yazıp sonuca gitme.

Matematiksel çıktıları yorumlama: Matematiksel olarak tam ölçüm yapmamasına rağmen, kendi vücudundan ve vücut ölçülerinden yola çıkarak mantıklı bir tahminde bulunma. Sonucu gerçek hayat ile genelleştirebilme.

Bu problemde öğrencilerin verdiği cevaplar ve kullandığı stratejiler dikkatle incelenmiş, Tablo 32'deki veriler elde edilmiştir:

Tablo 32

Öğrencilerin 10. Problemdeki Sonuca Ulaşma Frekansları

Çözüm	Frekans
Doğru Sonuca Ulaşma	14
Yanlış Sonuca Ulaşma	2
Sonuca Ulaşamama	2
Toplam	18

Tablo 32 incelendiğinde öğrencilerin çoğunluğunun (14 kişi) doğru sonuca ulaştığı görülmektedir. 2 öğrenci yanlış sonuca ulaşmış, 2 öğrenci ise çözümle alakalı herhangi bir strateji geliştirememiştir. Bu soruda öğrencilerin matematiksel düşünmenin basamaklarını kullanıp kullanmadıkları belirlenecektir.

Tablo 33'te öğrencilerin 10. Sorunun çözümü ile ilgili kullandıkları matematiksel düşünme boyutları verilmiştir.

Tablo 33

Öğrencilerin 10. Problemde Kullandıkları Matematiksel Düşünme Boyutları

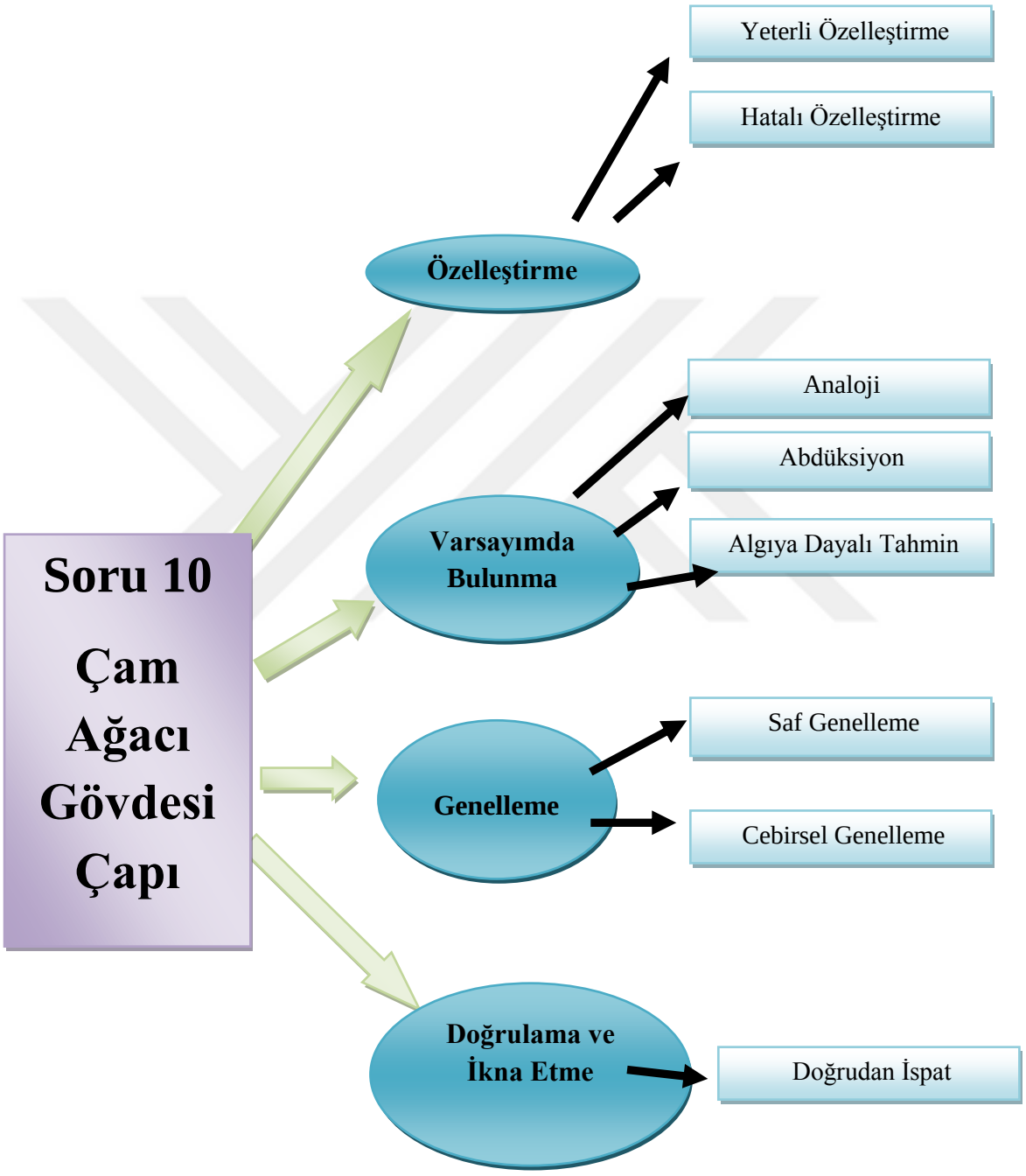
Matematiksel Düşünme Boyutları	Var	Yok
Yeterli Özelleştirme	13	5
Varsayımda Bulunma	12	6
Genelleme	12	6
İspat	15	3

Tablo 33 incelendiğinde öğrencilerden 12 kişinin yeterli özelleştirme, genelleme ve varsayımda bulunma basamaklarını kullandıkları görülmektedir. 15 kişinin de ispat basamağını kullandığını belirtmrliyiz.

Öğrencilerin kullanmış oldukları düşünme boyutlarının hangi alt kategorilerde yoğunlaştığı Şekil 97 ve Tablo 34'te verilmiştir.

Şekil 97

10. Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları



Tablo 34

10.Problemde Kullanılan Matematiksel Düşünme Boyutları ve Açıklamaları

Boyutlar	Kullanılan Alt Kategoriler	Açıklama
Özelleştirme Boyutu	Yeterli Özelleştirme	Örneklerin temsil ettiği genel durumun doğru ve kapsamlı bir şekilde anlaşılıp ele alınması.
	Hatalı Özelleştirme	Yanlış veya yanıltıcı örneklerle genel bir durumu temsil etmeye çalışılması.
Varsayımda Bulunma Boyutu	Analoji	Benzer durumlar veya olaylar arasındaki paralelliklerden yararlanarak sonuç çıkarma.
	Algıya Dayalı Tahmin	Bireysel algı ve sezgilere dayalı öngörülerde bulunma.
	Abdüksiyon	En iyi açıklamayı bulmak amacıyla mevcut kanıt ve bilgilerin yorumlanması.
Genelleme Boyutu	Saf Genelleme	Doğrudan gözlemlerden elde edilen basit ve temel genellemeler.
	Cebirsel Genelleme	Matematiksel veya cebirsel yöntemler kullanarak genelleme yapma.
Doğrulama ve İkna Etme Boyutu	Doğrudan İspat	Belirli bir hipotezin veya teorinin doğruluğunu kesin ve açık bir şekilde kanıtlama.

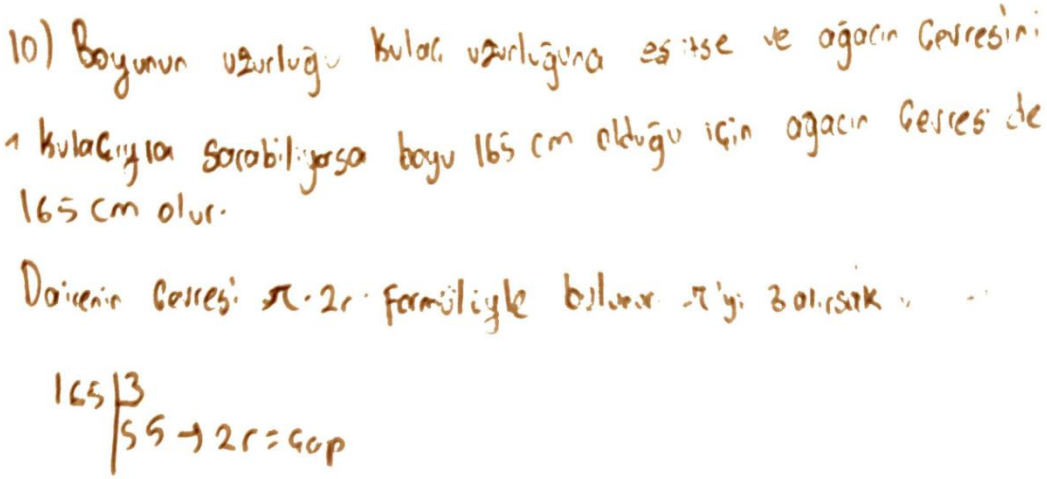
Onuncu problemde öğrencilerin kullanmış oldukları alt kategoriler Şekil 97 ve Tablo 34'te verilmiştir. Bu soruda öğrencilerin anlatılanı ve sorulanı anlayıp doğru olarak açıkladığı; problemi araştırıp örnek vermeye çalıştığı ve problemde anlatılanlara yönelik bilinçli hareketler yaptığı gözlemlenmiştir. Bunun sonucunda matematiksel düşünmenin özelleştirme basamağını kullanıp yeterli özelleştirme yaptıkları söylenebilir. Bununla beraber bazı öğrencilerin isteneni büyük oranda anladıkları ancak gözden kaçan küçük ama sonucu etkileyen durumların olduğu görülmüştür. Bunun sonucunda kısmi özeleştirmeler yaptıkları söylenebilir. Öğrenciler karşılaştıkları bir durumu simüle ederek yani benzeterek tahminde bulunmuşlardırç. Bu tür bir tahmin, bilinen başka bir pratik kurala dayanan tahmin yapısını

içermektedir. Öğrencilerin değişkenler arasındaki ilişkileri tanımlayabildiği ve bunu matematiksel olarak ifade edebildikleri için genelleme yaptıklarını söyleyebilriz. Öğrencilerin çoğunun doğrudan ispat yöntemini kullandığı söylenebilir.

Onuncu problemde kullanılan düşünme boyutları, alt kategorilerine yönelik açıklamalar ve bazı ortaokul öğrencilerinin çözüm yolu örnekleri aşağıda verilmiştir:

Şekil 98

Ö17'nin Cevabı



Ö17, sorunun çözümünü sözel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

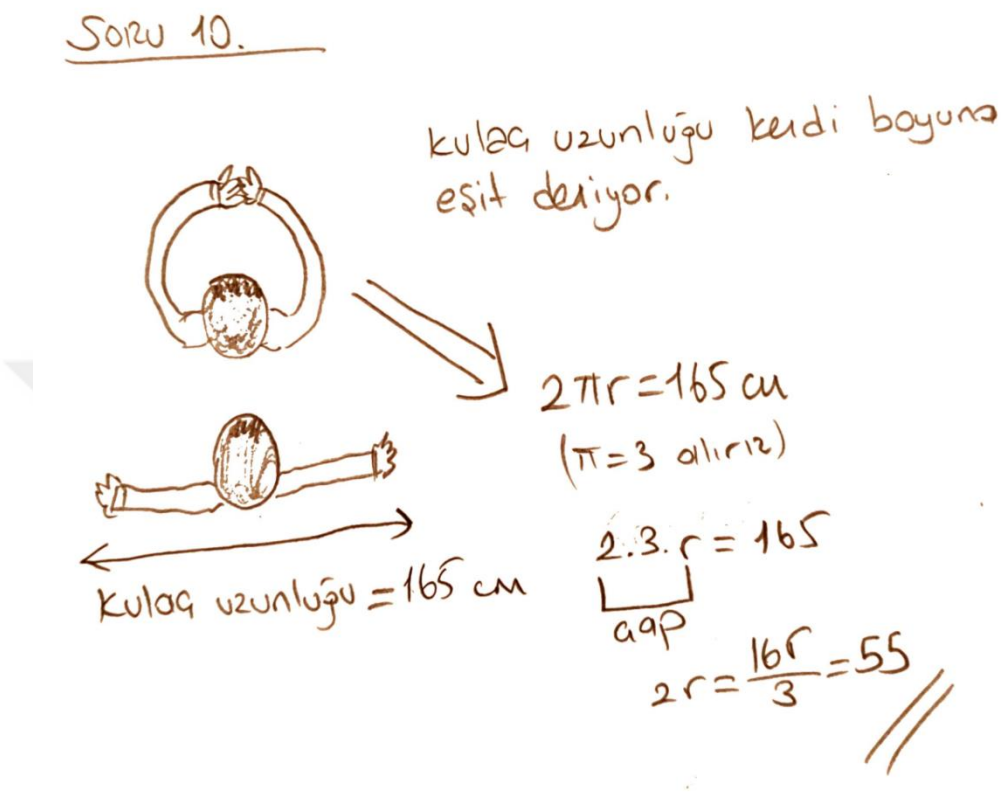
$Ö_{17}$: Sorunun içinde aslında cevap gizli olarak verilmiş. Boy uzunluğu kulaçla eşitse ve ağaca sarılmışsa aslında ağacın çevresini bulmuş oluyor. Çünkü parmakları birbirlerine değiyormuş. Dolayısıyla kendi boyu ağaç çevresidir. Π'yi 3 alırsak 3.R çevre olur. Boy uzunluğunu da 3'e bölersek çapı buluruz.

Onuncu problem için Ö17'in cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Ağaca sarılan bir kişinin çevreyi bulmak için boy uzunluğuna bakmış ve ağaç, kulaç ve çevre arasındaki ilişkiyi doğru anlamış, dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci verilenler arasındaki benzerlik ve farklılıkları belirleyebildiği ve aralarındaki ilişkiyi açıklayabildiği için **saf genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Ağaca sarılan kişinin aynı zamanda çevresini veren bir çembere benzediğini düşünmesi **analoji**

basamağında varsayımda bulunmayı kullandığını göstermektedir. Öğrenci mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yaptığı için **doğrudan ispat** yapmıştır.

Şekil 99

Ö3'ün Cevabı



Ö3, sorunun çözümünü şekil çizerek matmatiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

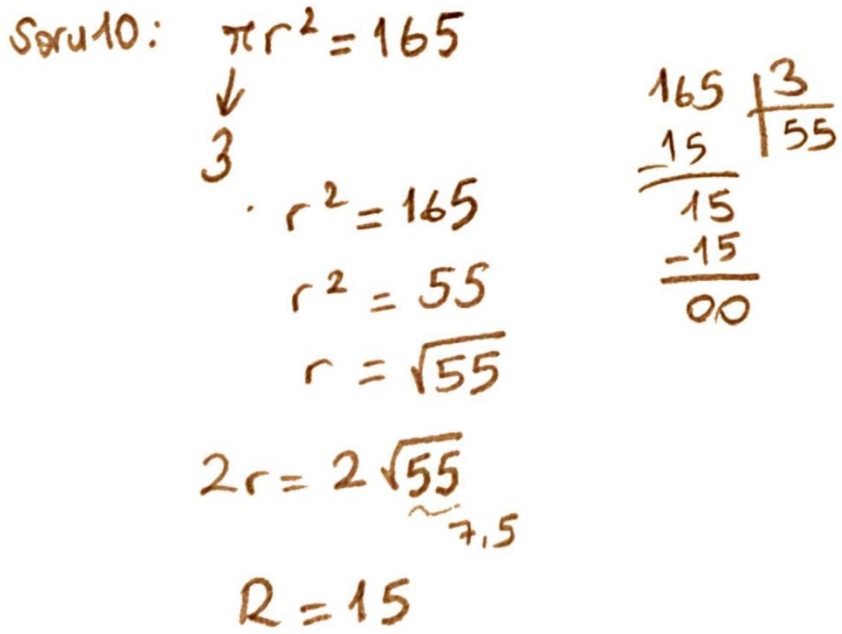
Ö3: Kulaç uzunluğunun kişinin kendi boyuna eşit olduğu söyleniyor. Zaten şekil olarak da göstermek istedim. Ağaca sarılınca çember gibi oluyor. E biz çemberin uzunluğunu biliyoruz. Dolayısıyla geriye formüldeki r yani yarıçap kalıyor. İşlemleri yapınca yarıçap dolayısıyla çap bulunmuş oluyor.

Onuncu problem için Ö3'ün cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Ağaca sarılan bir kişiyi resmetmiş ve ağaç, kulaç ve çevre arasındaki ilişkiyi doğru anlamış, dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci verilenler arasındaki benzerlik ve farklılıkları belirleyebildiği ve algısal olarak resmedebildiği için **algıya dayalı tahminde** bulunmuş ve aralarındaki ilişkiyi açıklayabildiği için **saf**

genelleme yaptığını söyleyebiliriz. Ağaca sarılan kişinin aynı zamanda çevresini veren bir çembere benzediğini düsünmesi **analoji** basamağında varsayımda bulunmayı kullandığını göstermektedir. Öğrenci mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yaptığı için **doğrudan ispat** yapmıştır.

Şekil 100

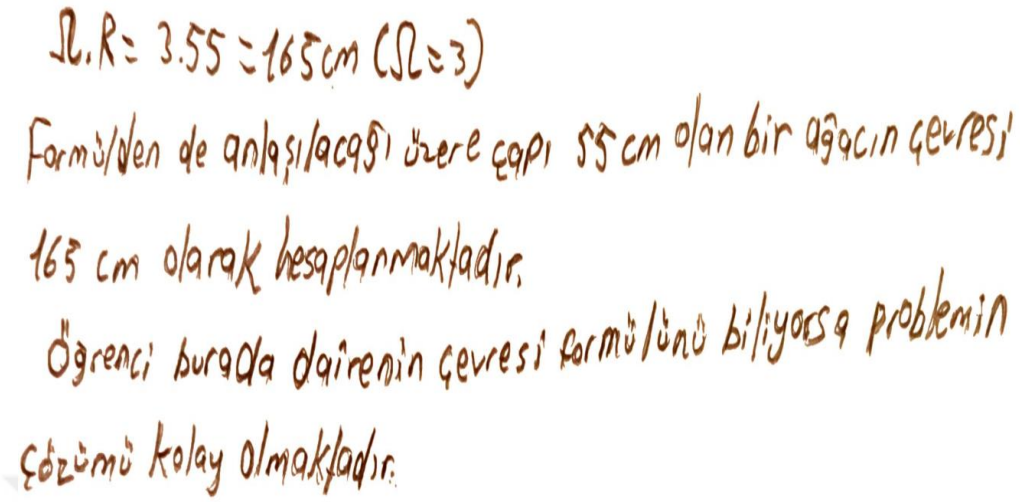
Ö4'ün Cevabı



Onuncu problem için Ö4'ün cevabı incelendiğinde, soruda istenilenin öğrenci tarafından tam anlaşılamadığı, ilk aklına gelen formülle işlem yaptığı, yaptığı işlemlerde cevaptan büyük sapmalar olduğu söylenebilir. Bu açıdan **hatalı özelleştirme** yaptığı söylenebilir. Öğrenci ilk aklına gelen formül türünde bir izahta bulunmaya çalışmış, soruda verilen bilgiler doğrultusunda dairenin alan formülünü kullanmıştır. Dolayısıyla **abdüksiyon** türünde bir varsayımda bulunmuştur. Öğrenci verilen bilgilerle cebirsel bir formül yazılabilmiş, dolayısıyla **sembolik genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Fakat özelleştirme yaparken sorunun bir basamağını atladığı için bu genelleme yanlış neticelenmiştir. Öğrenci mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yaparak sonuca ulaşmıştır. Dolayısıyla **doğrudan ispat basamağını** kullanmıştır.

Şekil 101

Ö5'in Cevabı



Ö5, sorunun çözümünü şekil çizerek matmatiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

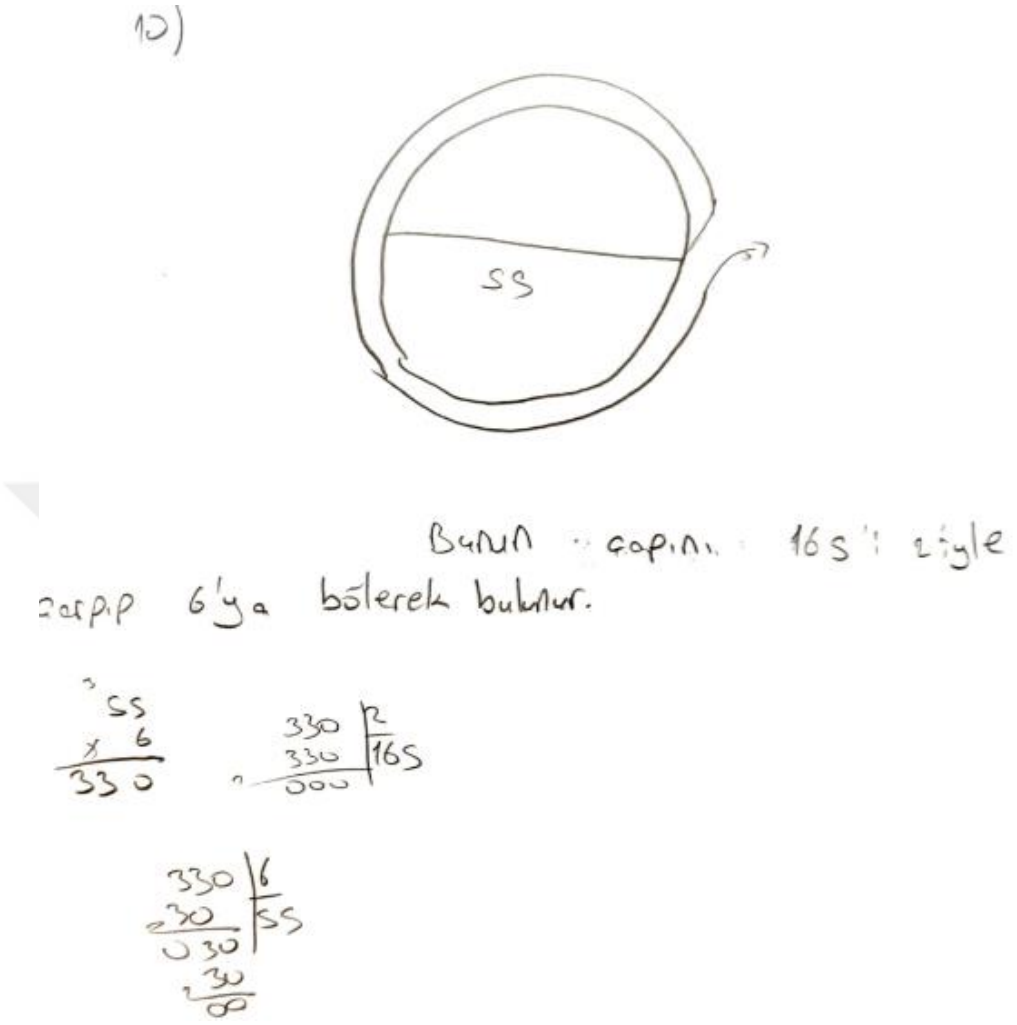
A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

$Ö_5$: Bu soruda çevresi bilinen ağacın çapının bulunması dairenin çevresi ile çapı arasındaki ilişki soruluyor. Buğra ağaca sarıldığında aslında soru çözülüyor. Geometri formüllerinden biliyoruz ki bir dairenin çevresi ile çapı arasındaki ilişki şu şekilde oluyor. Dairenin çevresi çapının pi sayısı ile çarpımına eşittir. Yani çevre=π.R (R=çap) Soruda da ağacın çapının 165 cm olduğu ve çapının 55 cm olduğu belirtiliyor. Buğranın verdiği bu bilginin doğruluğunu böylece ispatlamış oluyoruz.

Onuncu problem için Ö5'in cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Çemberin çevre formülü ile yarıçap uzunluğu arasındaki ilişkiyi anlatmış, dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Ağaca sarılan kişinin aynı zamanda çevresini veren bir çembere benzediğini düsünmesi **analoji** basamağında varsayımda bulunmayı kullandığını göstermektedir. Öğrencinin verilenler arasındaki benzerlikleri belirleyebildiği ve aralarındaki ilişkiyi açıklayabildiği için **saf genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yaptığı için **doğrudan ispat** yapmıştır

Şekil 102

Ö9'un Cevabı



Ö9, sorunun çözümünü şekil çizerek matmatiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

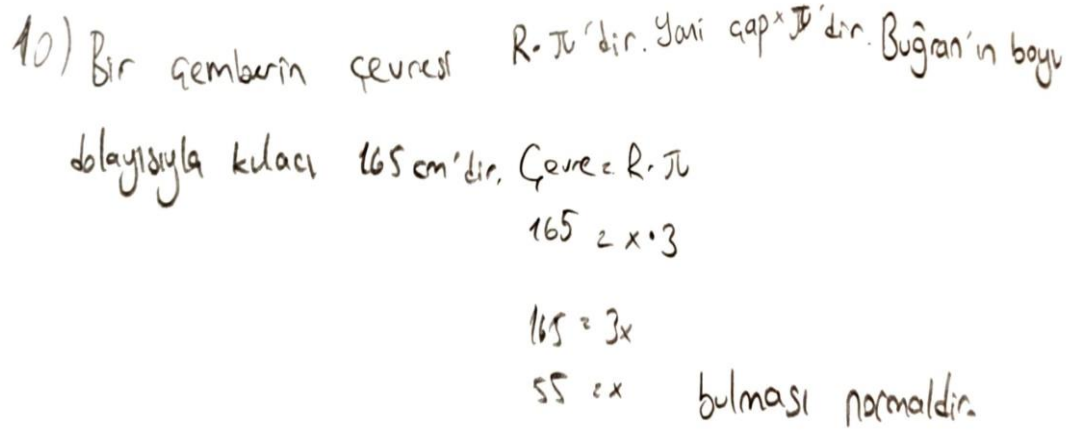
Ö9: Kulaç uzunluğunun boya eşit olması verilmese zaten soruyu yapamazdık. Boyundan direk ağacın çevresini bulabiliyoruz. Formülü kullanarak 55'i çok rahat bulabiliyoruz.

Onuncu problem için Ö9'un cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Görselle destekleyerek ağaç, kulaç ve çevre arasındaki ilişkiyi doğru anlamış, dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci verilenler arasındaki benzerlik ve farklılıkları belirleyebildiği ve algısal olarak resmedebildiği için **algıya dayalı**

tahminde bulunmuş ve aralarındaki ilişkiyi açıklayabildiği için **saf genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Ağaca sarılan kişinin aynı zamanda çevresini veren bir çembere benzediğini düsünmesi **analoji** basamağında varsayımda bulunmayı kullandığını göstermektedir. Öğrenci mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yaptığı için **doğrudan ispat** yapmıştır.

Şekil 103

Ö7'nin Cevabı



Ö7, sorunun çözümünü matmatiksel olarak ifade etmiş ve soruyla ilgili düşüncelerini görüşme esnasında belitmiştir.

A: Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Ö7: Çember formüllerinden biliyoruz ki bir çemberin çevresi π.R'dir. Bunu da Buğra'nın boyuna yani kulacına eşitlersek soru zaten çözülmüş oluyor.

Onuncu problem için Ö7'nin cevabı incelendiğinde, problemi doğru anladığı, problemde verilenleri yerinde kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştığı ve verileri kullanmaya yönelik bilinçli hareketler yaptığı görülmektedir. Çemberin çevre formülünü bilmiş, dolayısıyla genel resmin küçük parçaları üzerinde bilinçli çalıştığından ötürü **yeterli özelleştirme** yaptığını söyleyebiliriz. Ağaca sarılan kişinin aynı zamanda çevresini veren bir çembere benzediğini düsünmesi **analoji** basamağında varsayımda bulunmayı kullandığını göstermektedir. Öğrencinin verilenler arasındaki benzerlikleri belirleyebildiği ve aralarındaki ilişkiyi açıklayabildiği için **saf genelleme** yaptığını söyleyebiliriz. Öğrenci mevcut örnek üzerinden doğrudan işlemler yaptığı için **doğrudan ispat** yapmıştır.

Uzay ve şekil sorularına ilişkin bulguları toparlayacak olursak; öğrencilerin bu sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde %50'den fazla (11 öğrenci) öğrencinin yeterli özelleştirme yaptığını, %50'den fazla (10 öğrenci) öğrencinin varsayımda bulunma

basamağını kullandığını, %50'den az (7 öğrenci) öğrencinin genelleme basamağının kullanıldığı ve %50'den fazlasının (14 öğrenci) ispat basamağını kullandığını söyleyebiliriz.

5. BÖLÜM
SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmada matematiksel düşünmeyi ölçmesi bakımından matematik okuryazarlık problemleri değerlendirilmiş, öğrencilerin bu problemleri çözerken kullanmış oldukları matematiksel düşünme boyutları incelenmiştir. Bu başlık altında çalışmanın sonuçları ifade edilmiş ve literatür referans alınarak bu sonuçlar tartışılmıştır. Devamında ise araştırma kapsamında ortaya çıkan bazı öneriler sunulmuştur.

5.1. Sonuç

Bu çalışmada öğrencilere sorulan matematik okuryazarlığı problemleri konu alanlarına göre ayrılmış ve dört ana başlıkta tasnif edilmiştir. Sonuçlar bu dört ana başlık altında değerlendirilmiştir.

5.1.1. Nicelik (Sayılar) Problemleri ile ilgili Elde Edilen Sonuçlar: Nicelik (Sayılar) soruları sayıları, sayı sistemlerini, sayısal işlemler ve işlemlerin özelliklerini, yazılı ve zihinden işlem yapmayı, tahminde bulunmayı barındırır. Oran, orantı, yüzde hesapları, sayılarla düşünme, ölçme sonucu elde edilen sayısal sonuçların anlamlandırılması da nicelik konusunun kapsamındadır. Bu kapsamda öğrencilerin bu soruları çözerken matematiksel düşünme basamakları incelenmiştir.

Araştırmada sorulan ilk dört soru nicelik sorularıdır. Sorulardan bazılarının tek bir cevabı yoktur ve öğrencilerin farklı ve değişik stratejiler üretmesi beklenmektedir. Bazı sorularda oran-orantı ve yüzde hesaplamaları yapmaları, bazı sorularda ise sayılarla düşünme ve tahminde bulunmaları istenmiştir.

- Öğrencilerin bu sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde %50'den fazlasının (12 öğrenci) bu sorularda yeterli özelleştirme yaptığı görülmektedir. Sorularda anlatılanları ve sorulanı anlayıp doğru olarak açıkladıkları; problemi, çizdikleri ya da ifadeleri ile araştırıp örnek vermeye çalıştıkları ve problemde anlatılanlara yönelik bilinçli hareketler yaptıkları gözlemlenmiştir. Yeterli özelleştirme yapan öğrencilerin neredeyse tamamı soruyu doğru şekilde çözmüş ya da doğru sonuca ulaşmıştır. Yeterli özelleştirme yapan öğrenciler soruyu tam olarak anlamış ve matematiksel düşünmenin sonraki basamaklarına rahat bir şekilde geçmişlerdir. Bu sonuç Arslan ve Yıldız'ın (2010) çalışmasında da görülmüştür. Kısmi ve hatalı özelleştirme yapan öğrenciler soruda istenen durumları tam olarak anlamamışlar, akla ilk gelen şeymiş gibi özelleştirmeye kalkmışlardır. Bu öğrencilerden doğru sonuca ulaşan kişi sayısı çok azdır. Dolayısıyla nicelik sorularının çözümünde özelleştirme basamağının ve yeterli özelleştirmenin çok önemli olduğunu söyleyebiliriz.

- Öğrencilerin cevapları incelendiğinde varsayımda bulunma basamağını yine %50'den fazlasının kullandığını (11 öğrenci) söyleyebiliriz. Yeterli özelleştirme yapan öğrencilerin genel olarak problemi algısal bir gösterime dönüştürdüğü ve algısal tahmin yaptığı, soruda özelleştirdiği birkaç durumu gözlemleyip incelemesi neticesiyle sonlu sayıda ayrık durumlardan empirik tümevarım yaptığı görülmüştür. Kısmi ve hatalı özelleştirme yapan öğrenciler genel olarak çözümü doğruluğu bilinen bir duruma benzeterek yani analoji basamağını kullanarak ya da bilinen genel bir kural ile varsayımda bulunarak yani abdüksiyon basamağını kullanarak sonuca ulaşmaya çalışmışlardır. Bu sonuçlar Dindyal'ın (2007) lise öğrencileri ile yapmış olduğu çalışmasıyla örtüşmektedir.
- Öğrencilerin cevapları incelendiğinde %50'den fazlasının (12 öğrenci) genelleme basamağını kullandığı belirlenmiştir. Burada yeterli özelleştirme yapan öğrencilerin soruda verilen terimlerin arasında ortak bir ilişkiyi genellediğini yani aritmetik genelleme yaptığını, bunun yanında örüntünün tüm terimlerinde geçerli olacak bir özelliği kavrayıp tüm soruya genelleyebildiğini yani cebirsel genelleme yaptığını söyleyebiliriz. Yine kısmi ve hatalı özelleştirme yapan öğrencilerin bir genelleme türü olmayan ve deneme-yanılma yoluyla genelleme yapmaya çalıştıkları yani olgunlaşmamış tümevarım basamağını kullandıkları görülmüştür. Benzer durumlar Rico (1996), Yeşildere ve diğerleri (2017) ve Göl ve Duru (2016) çalışmalarında da görülmüştür.
- Öğrencilerin bu sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde %75'ten fazlasının (14 öğrenci) ispat basamağını kullandığı/kullanmaya çalıştığı görülmektedir. Çünkü ispatlamaya başlayıp sonunu getiremeyen öğrenciler de mevcuttur. Yeterli özelleştirme ve genelleme yapan öğrencilerin büyük bir kısmının ispat basamağını kullanmaya çalıştığı, kısmi ve hatalı özelleştirme yapan öğrencilerin de ispat basamağını kullanmaya çalıştığı fakat yarıda kaldığı görülmüştür. Tüm öğrencilerin kullandığı ispat yöntemleri birbirine benzemekle beraber çoğunlukla birkaç örneğe bakarak ifadenin doğruluğuna karar verme, tek bir örnekten yola çıkarak sonuca ulaşma ve soruda verilen bilgileri kullanarak doğrulama yoluna gitme yöntemleri kullanılmıştır. Dolayısıyla doğrudan ispat, saf deneycilik, kritik deney ve genel örnek türünden ispatlar denenmiştir. Bu durum Arslan ve Yıldız'ın (2010), Moralı ve diğerleri (2006) ile Özer ve Arıkan (2002) çalışmalarıyla benzemektedir. İspat yapan/yapmaya çalışan öğrencilerin diğer matematiksel düşünme basamakları ile anlamlı bir ilişkisi bulunamamıştır.

5.1.2. Değişim ve İlişkiler (Cebir) Problemleri ile ilgili Elde Edilen Sonuçlar: Değişim ve İlişkiler (Cebir) sorularında doğrusal denklemler, doğrusal denklem sistemleri ve bunların çözümleri, koordinat sistemi ve verilerin koordinat sisteminde gösterilmesi, eşitsizlikler, fonksiyonlar, cebirsel ifadeler ile ilgili bilgi ve beceriler sorgulanır. Fonksiyonların gösterim şekilleri, analitik düzlemdeki grafikleri, bunların problem çözmede kullanımı da bilinmeyen kullanarak problem kurma ve çözme, cebirsel ifadeleri değişik amaçlarla kullanabilme vs. gibi konularda bu kapsamdadır. Bu kapsamda öğrencilerin bu soruları çözerken matematiksel düşünme basamakları incelenmiştir.

Araştırmada sorulan beşinci ve altıncı sorular değişim ve ilişkiler sorularıdır. Bu soruları çözerken öğrencilerin farklı ve değişik stratejiler üretmesi beklenmektedir. Burada sorularda doğrusal denklemleri kullanabilme, cebirsel ifadeler ile ilgili bilgi ve becerilerin kullanımı istenmiştir.

- Öğrencilerin bu sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde her iki soru için sadece 2 öğrencinin yeterli özelleştirme yaptığı gözlemlenmiştir. Bu öğrencilerle yapılan görüşmelerde sorularda anlatılanları ve sorulanı anlayıp doğru olarak açıkladıkları, problemde anlatılanlara yönelik bilinçli hareketler yaptıkları gözlemlenmiştir. Yeterli özelleştirme yapan öğrenciler aynı zamanda soruları doğru cevaplamışlardır. Soruları yanlış cevaplayan ya da hiç cevaplayamayan öğrenciler genel itibariyle yeterli özelleştirme yapamamışlar, kısmi ve hatalı özelleştirmeler yapmışlardır. Büyük çoğunluğu sorularda anlatılanların tümünü değil bir kısmını göz önünde bulundurmuş ve sorularda verilen yönergeleri çözüme tam olarak aktaramamışlardır. Bazı öğrenciler ise soruda istenilenleri tam olarak anlayamamış ve soruda istenenleri çözüme aktaramamış, aktarılan kısımlarında ise soruda istenilenlere göre büyük sapmalar olduğu görülmüştür.
- Öğrencilerin cevapları incelendiğinde varsayımda bulunma basamağının özelleştirmeye nazaran çok fazla olduğu (>%60) görülmektedir. Soruyu doğru çözen öğrencilerin soruda özelleştirdiği birkaç durumu gözlemleyip incelemesi neticesiyle sonlu sayıda ayrık durumlardan empirik tümevarım yaptığı görülmüştür. Özelleştirmenin neredeyse hiç olmadığı durumlarda öğrencilerin varsayımda bulunma sayılarının çok fazla olması incelenmiş ve raporlanmıştır. Buna göre öğrencilerin abdüksiyon ve analoji basamağını çok sık kullandığı görülmüştür. Öğrenciler bu basamaklarda doğruluğu bilinen bir duruma benzetim yaparak yani analoji basamağını kullanarak ya da bilinen genel bir kural ile varsayımda bulunarak yani abdüksiyon basamağını kullanarak sonuca ulaşmaya çalışmışlardır. Bu da yeterli

özelleştirme yapamayan öğrencilerin bu basamakları kullanmak zorunda kaldıkları sonucunu doğurur.

- Öğrencilerin cevapları incelendiğinde %40 oranında (7 öğrenci) genelleme basamağını kullandığı belirlenmiştir. Bu öğrencilerden doğru cevap verenlerin problemde karşılaştıkları durumların benzerlik ve farklılıklarını belirleyebildiği, iki değişken arasındaki ilişkiyi sözel ya da matematiksel olarak ifade edebildiği yani saf genelleme yapabildiği ve cebirsel dili anlayıp kullanabildiği yani sembolik genelleme yapabildiği görülmüştür. Bunun yanında doğru cevaba ulaşamayan öğrencilerin aslında bir genelleme türü olmayan ve deneme-yanılma yoluyla genelleme yapmaya çalıştıkları yani olgunlaşmamış tümevarım basamağını kullandıkları görülmüştür. Benzer durumlar Yeşildere ve diğerleri (2017) ve Göl ve Duru (2016) çalışmalarında da görülmüştür.
- Öğrencilerin bu sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde %50'ye yakın öğrencinin (8 öğrenci) ispat basamağını kullandığı/kullanmaya çalıştığı görülmektedir. Öğrencilerin çoğunlukla birkaç örneğe bakarak ifadenin doğruluğuna karar verme ve soruda verilen bilgileri kullanarak doğrulama yoluna gitme yöntemlerini kullandıkları görüşmüştür. Dolayısıyla doğrudan ispat ve saf deneycilik basamaklarını kullandıkları sonucuna varırız. Bu problemde de öğrenciler ispat yapmaya çalışmış fakat bazı öğrenciler ispatın sonunu getirememişlerdir. . Bu durum Moralı ve diğerleri (2006) ile Özer ve Arıkan (2002) çalışmalarıyla benzemektedir.

5.1.3. Belirsizlik ve Veri (İstatistik) Problemleri ile ilgili Elde Edilen Sonuçlar: Belirsizlik ve Veri (İstatistik) sorularında veri toplama, verileri özetleme ve çeşitli şekillerde gösterme, grafiklerini anlatma, örneklem seçme, örneklem üzerinden bilgi üretme, olasılıkla ilgili olarak basit ve hilesiz olaylar, random kavramı, olasılık, olasılık sonucunu anlamlandırma ve yazma, olasılık kavramını temel alarak düşünme ve yorum yapma gibi konular ele alınır. Bu kapsamda öğrencilerin bu soruları çözerken matematiksel düşünme basamakları incelenmiştir.

Araştırmada sorulan yedinci ve sekizinci sorular belirsizlik ve veri sorularıdır. Bu soruları çözerken öğrencilerin farklı ve değişik stratejiler üretmesi beklenmektedir. Burada sorularda grafikleri anlatma, olasılık kavramını temel olarak düşünme ve sonucunu anlamlandırma ile ilgili bilgi ve becerilerin kullanımı istenmiştir.

- Öğrencilerin bu sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde %50'den fazla (10 öğrenci) öğrencinin yeterli özelleştirme yaptığını söyleyebiliriz. Bu öğrencilerle

yapılan görüşmelerde sorularda anlatılanları ve sorulanı anlayıp doğru olarak açıkladıkları, problemde anlatılanlara yönelik bilinçli hareketler yaptıkları gözlemlenmiştir. Yeterli özelleştirme yapan öğrenciler aynı zamanda soruları doğru cevaplamışlardır. Bu öğrenciler grafikleri okuma ve açıklama, olasılık kavramını temel olarak düşünme konularında bilinçli hareketler yapmıştır. Soruları yanlış cevaplayan ya da hiç cevaplayamayan öğrenciler genel itibariyle yeterli özelleştirme yapamamışlar, kısmi ve hatalı özelleştirmeler yapmışlardır. Bu öğrenciler soruda verilen grafikleri ya tam anlayamamış ya da grafiklerin belirli bir bölümü üzerinden işlem yapmışlardır.

- Öğrencilerin cevapları incelendiğinde %50'den az (8 öğrenci) öğrencinin varsayımda bulunma basamağını kullandığını söyleyebiliriz. 7. sorudaki sütun ve pasta grafiklerinde öğrenciler problemi algısal bir gösterime dönüştürmüş, cevaplarını çizimlerle görselleştirip kurallarla ilgili tahminde bulunmuşlardır. Bunun sonucunda algıya dayalı tahmin basamağını kullanmışlardır. 8. soruda ise verilen grafikle birlikte öğrencilerin olasılık tahminleri ölçülmüş, doğru sonuçları veren öğrenciler soruda özelleştirdiği birkaç durumu gözlemleyip incelemesi neticesiyle sonlu sayıda ayrık durumlardan empirik tümevarım yapmışlardır. Diğer öğrenciler ise bilinen genel bir kural ile varsayımda bulunarak yani abdüksiyon basamağını kullanarak sonuca ulaşmaya çalışmışlardır.
- Öğrencilerin cevapları incelendiğinde %50'den fazla (11öğrenci) genelleme basamağının kullanıldığı görülmektedir. Öğrencilerin bu sorularda grafikte verilen bilgilerin benzerlik ve farklılıklarını belirleyebildiği, iki değişken arasındaki ilişkiyi sözel ya da matematiksel olarak ifade edebildiği yani saf genelleme yapabildiği ve cebirsel dili anlayıp kullanabildiği yani cebirsel genelleme yapabildiği görülmüştür. Bunun yanında doğru cevaba ulaşamayan öğrencilerin aslında bir genelleme türü olmayan ve deneme-yanılma yoluyla genelleme yapmaya çalıştıkları yani olgunlaşmamış tümevarım basamağını kullandıkları görülmüştür. Benzer durumlar Yeşildere ve diğerleri (2017) ve Göl ve Duru (2016) çalışmalarında da görülmüştür.
- Öğrencilerin cevapları incelendiğinde %50'den fazlasının (12 öğrenci) ispat basamağını kullandığı söylenebilir. Öğrenciler grafiklerde verilen bilgilere bakarak ifadenin doğruluğuna karar verme ve yine bu bilgileri kullanmak suretiyle işlemler yaparak doğrulama yoluna gitme yöntemlerini kullanmışlardır. Dolayısıyla doğrudan ispat ve saf deneycilik basamaklarını kullandıkları sonucuna varırız. Bu durum Moralı ve diğerleri'nin (2006) çalışmasıyla benzemektedir.

5.1.4. Uzay ve Şekil (Geometri) Problemleri ile ilgili Elde Edilen Sonuçlar: Uzay ve Şekil (Geometri) sorularında düzlemde şekiller, birbirleriyle benzerlikleri, farklılıkları, eşlik ve benzerlik, öteleme ve dönme, uzayda cisimler ve özellikleri, onların değişik alanlardan görünümler, ölçüsel geometri, geometrinin bu kavram ve genellemeleri ile ilgili problemler de şekil ve uzay başlığı kapsamı içindedir. Bu kapsamda öğrencilerin bu soruları çözerken matematiksel düşünme basamakları incelenmiştir.

Araştırmada sorulan dokuzuncu ve onuncu sorular belirsizlik ve veri sorularıdır. Bu soruları çözerken öğrencilerin farklı ve değişik stratejiler üretmesi beklenmektedir. Burada öteleme ve dönme, geometrik cisimler ve özellikleri, onların değişik alanlardan görünümleri ve ölçüsel geometri ile ilgili bilgi ve becerilerin kullanımı istenmiştir.

- Öğrencilerin bu sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde %50'den fazla (11 öğrenci) öğrencinin yeterli özelleştirme yaptığını söyleyebiliriz. Bu öğrencilerle yapılan görüşmelerde sorularda anlatılanları ve sorulanı anlayıp doğru olarak açıkladıkları, problemde anlatılanlara yönelik bilinçli hareketler yaptıkları gözlemlenmiştir. Yeterli özelleştirme yapan öğrenciler aynı zamanda soruları doğru cevaplamışlardır. Bu öğrenciler soruda verilen geometrik cisimler ve özelliklerini, onların değişik alanlardan görünümleri açıklayabilmiştir. Soruları yanlış cevaplayan ya da hiç cevaplayamayan öğrenciler genel itibariyle yeterli özelleştirme yapamamışlar, kısmi ve hatalı özelleştirmeler yapmışlardır. Bu öğrenciler soruda verilen geometrik şekilleri ve bilgileri tam kavrayamamış ve sonuca ulaşmada problem yaşamışlardır.
- Öğrencilerin cevapları incelendiğinde %50'den fazla (10 öğrenci) öğrencinin varsayımda bulunma basamağını kullandığını söyleyebiliriz. Bu sorularda öğrenciler verilen geometrik şekilleri algısal bir gösterime dönüştürmüş, cevaplarını çizimlerle görselleştirip kurallarla ilgili tahminde bulunmuşlardır. Bunun sonucunda algıya dayalı tahmin basamağını kullanmışlardır. Aynı zamanda doğru sonuçları veren öğrenciler soruda özelleştirdiği birkaç durumu gözlemleyip incelemesi neticesiyle sonlu sayıda ayrık durumlardan empirik tümevarım yapmışlardır. Diğer öğrenciler ise bilinen genel geometrik bir kural ile varsayımda bulunarak yani abdüksiyon basamağını kullanarak ya da doğruluğu bilinen farklı bir geometrik bilgiye benzetim yaparak yani analoji basamağını kullanarak sonuca ulaşmaya çalışmışlardır.
- Öğrencilerin cevapları incelendiğinde %50'den az (7 öğrenci) öğrencinin genelleme basamağının kullanıldığı görülmektedir. Öğrencilerin bu sorularda geometrik şekillerin benzerlik ve farklılıklarını belirleyebildiği, şekiller arası öteleme ve dönme

ilişkisini sözel ya da matematiksel olarak ifade edebildiği yani saf genelleme yapabildiği ve cebirsel dili anlayıp kullanabildiği yani cebirsel genelleme yapabildiği görülmüştür. Bunun yanında doğru cevaba ulaşamayan öğrencilerin genelleme yapamadıkları görülmüştür.

- Öğrencilerin cevapları incelendiğinde %50'den fazlasının (14 öğrenci) ispat basamağını kullandığı söylenebilir. Öğrenciler soruda verilen geometrik şekillere bakarak ifadenin doğruluğuna karar verme ve yine bu bilgileri kullanmak suretiyle işlemler yaparak doğrulama yoluna gitme yöntemlerini kullanmışlardır. Dolayısıyla doğrudan ispat ve saf deneycilik basamaklarını kullandıkları sonucuna varırız.

Yukarıda her bir konu alanına yönelik olarak verilen sorularla ilgili sonuçlar açıklanmıştır. Bu sonuçlardan hareketle elde edilen genel sonuçlar aşağıda verilmiştir. Bu çalışmada öğrencilerin cevapları incelendiğinde:

1. Yeterli özelleştirme yapan öğrencilerin %96'sı soruları doğru yanıtlamıştır. Kısmi ve hatalı özelleştirme yapan ya da hiç özelleştirme yapamayan öğrencilerin büyük çoğunluğunun doğru çözüme ulaşamadığı tespit edilmiştir. Dolayısıyla yeterli özelleştirme yapmak okuryazarlık problemlerinin doğru çözümü için olmazsa olmaz şarttır. Yeterli özelleştirme yapabilen öğrencilerin, problem çözme başarılarının sadece doğru cevap vermekle sınırlı olmadığı, aynı zamanda problemi derinlemesine anlama ve bağlamsal olarak çözümleme yetenekleriyle de ilişkili olduğu tespit edilmiştir. Özelleştirme, öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini zenginleştirerek problem çözme kalitesini artırmaktadır.
2. Yeterli özelleştirme yapan ve soruyu doğru çözen öğrenciler; algıya dayalı tahmin ve sonlu sayıda ayrık durumdan empirik tümevarım alt boyutlarında tahminlerde bulunarak sonuca gitmiştir. Bunun yanında yeterli özelleştirme yapamayan öğrenciler analoji ve abdüksiyon basamaklarında tahminlerde bulunmuşlar, bir nevi akla ilk gelen şekliyle tahmin yapmışlardır
3. Bazı soruların anlaşılamaması ve yeterli özelleştirmelerin yapılamaması öğrencilerin okuduklarını anlama noktasında problemler yaşadığını göstermektedir. Dolayısıyla bu problem örencileri otomatik olarak varsayımda bulunma basamağına itmiştir. Bu varsayımların çoğu öğrencileri yanlış sonuca götürmüştür. Özellikle öğrencilerin bazı soruları anlamakta zorlandıkları durumlarda, varsayımlarda bulunma eğiliminde oldukları ve bu varsayımların genellikle yanlış sonuçlara yol açtığı görülmüştür. Bu durum, problem çözme

sürecinde doğru anlama ve analiz yeteneklerinin eksikliğinin potansiyel sonuçları üzerinde önemli bir etkiye sahiptir.

4. Genelleme basamağında öğrencilerin en fazla başvurduğu yöntem, verileri karşılaştırma, benzerlik ve farklılıkları belirleme ve iki değişken arasındaki ilişkiyi matematiksel ve sözel olarak ifade edip tümevarıma ulaşma şeklinde olmuştur.
5. İspat basamağını kullanan öğrencilerin tamamı en çok bilinen ve en kolay ispat tekniklerinden biri olan doğrudan ispat yöntemini kullanmıştır. Verilen önerme veya problemin şartlarını aynen alıp istenen sonuca ulaşılmaya çalışmışlardır. Bunları yaparken saf deneycilik, kritik deney ve genel örnek alt boyutlarında ispat çeşitlerini kullanmışlardır. Bunların dışında aksine örnekle (ters durum) ispat, çelişki yoluyla (olmayana ergi) ispat ve tümevarım yöntemiyle ispat yöntemlerini kullanan öğrenci olmamıştır.
6. Öğrencilerin soru çözümleri incelendiğinde bazılarının sadece matematiksel ifadelerle çözümü açıkladığı, bazılarının sadece sözel ifadeler kullandığı, bazılarının ise hem matematiksel hem de sözel ifadeler kullandığı görülmektedir. Bunun, öğrencilerin herhangi bir varsayımda bulunurken ortaya koyduğu matematiksel ifadeleri, sözel ifadelerle açıklama gereği hissettiklerinden kaynaklandığı düşünülebilir. Benzer durum Arslan ve Yıldız (2010) ile Keskin ve diğeleri (2013) ve Kükey (2018)'in çalışmalarında da görülmüştür.
7. Nicelik (sayılar), değişim ve ilişkiler (cebir), uzay ve şekil (geometri) ve belirsizlik ve veri (istatistik) konu alanlarında sorulan sorulardan değişim ve ilişkiler konusundaki sorulara verilen yanıtlarda matematiksel düşünme boyutlarının kullanımı çok sınırlı kalmıştır. Diğer konu alanlarındaki soru çözümlerinde ortalama % 50 oranında matematiksel düşünme boyutları kullanılmıştır.

5.2. Tartışma ve Öneriler

Bu araştırmada elde edilen verilerin çözümlenmesi ve analizi ile 4 temel sonuca ulaşılmıştır. Bunlardan ilki nicelik (sayılar) problemleri ile ilgili elde edilen sonuçlardır. Buna göre öğrencilerin %50'den fazlasının yeterli özelleştirme yaptığı, varsayımda bulunma basamağına uygun işlemler gerçekleştirdiği ve genelleme basamağını kullandığı tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin %75'inden fazlası ispat basamağını kullanmış ya da kullanma girişiminde bulunmuştur.

Bu bulgular öğrencilerin matematiksel problem çözme becerilerinde belli bir etkililiğe ulaştıklarını göstermektedir. Spesifik olarak, %50'den fazlasının yeterli özelleştirme yapması,

varsayımları kullanma becerisi göstermesi ve genelleme yapabilmesi, problem çözme sürecinde üst düzey düşünme becerilerinde bir ilerleme olduğunu göstermektedir. Bu, öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini geliştirmeye yönelik önemli bir adım olarak görülebilir. Arslan ve Yıldız'ın (2010), Dindyal'ın (2007), Rico (1996), Yeşildere ve diğerleri (2017) ve Göl ve Duru (2016)'nun çalışmaları da benzer sonuçları ortaya çıkarmıştır. Mevcut araştırma ve bahsi geçen araştırmaların gerçekleştirdiği çalışmada öğrencilerin neredeyse %50'sinden fazlasının bu sonuçları elde etmesinde sınıf düzeyi, çalışmaların orta sosyo-ekonomik bölgede olması ve velilerin eğitsel süreçlere önem vermesi etkili olmuş olabilir.

Yılmaz ve Özdil (2022)'nin çalışması, özelleştirmenin matematiksel problem çözme süreçlerinde nasıl etkili olduğunu ve öğrencilerin bu aşamadaki başarısının öğrenme üzerindeki etkilerini incelemektedir. Yılmaz ve Özdil, özelleştirme stratejilerinin öğrencilerin matematiksel problemleri daha iyi anlamalarına ve çözmelerine nasıl katkıda bulunduğunu vurgulamakta ve tezimizin sonuçlarıyla paralellik göstermektedir.

Yeni bir çalışma olarak Lai ve Liao (2022)'nin çalışması ise, özelleştirmenin matematiksel problem çözme stratejileri üzerindeki etkilerini incelemekte ve özelleştirmenin öğrenme başarısını artırıcı bir etken olduğunu vurgulamaktadır. Lai ve Liao'nun çalışması, özelleştirme stratejilerinin öğrencilerin problem çözme süreçlerinde nasıl daha etkili kullanıldığını ve bu stratejilerin matematiksel düşünme süreçlerini nasıl desteklediğini ortaya koymaktadır. Bu iki çalışma da mevcut tezdeki özelleştirme sonuçları ile uyumludur ve okuryazarlık problemlerinin çözümünde özelleştirmenin rolünü çok net bir şekilde ortaya koymaktadır.

Tez bulgularında, varsayımda bulunma basamağını %50'den fazla öğrencinin kullandığı belirtilmiştir. Varsayımda bulunmanın matematiksel düşünme üzerindeki etkilerini araştıran güncel bir çalışma Wang ve Li (2023) tarafından yapılmıştır. Bu çalışma, öğrencilerin matematiksel problem çözme süreçlerinde varsayımda bulunmanın önemini ve bu yaklaşımın öğrenci başarısına olan katkısını araştırmıştır. Wang ve Li, bizim tezimizin sonuçlarıyla paralel olarak varsayımda bulunmanın matematiksel düşünme süreçlerinde nasıl daha etkili bir strateji oluşturduğunu ve öğrencilerin analitik becerilerini nasıl geliştirdiğini göstermektedir.

Kaya ve Demirtaş (2021)'in çalışması, varsayımda bulunma ve bu stratejilerin öğrencilerin matematiksel problem çözme yeteneklerine olan etkilerini ele almaktadır. Kaya ve Demirtaş, varsayımda bulunma sürecinin öğrenci başarısı üzerindeki etkilerini inceleyerek, bu basamağın matematiksel düşünme süreçlerinde ne kadar kritik olduğunu ortaya koymuştur. Bu araştırmanın sonuçları da mevcut sonuçlarla ölçüşmekte ve birbirini desteklemektedir.

Tezde, öğrencilerin %50'den fazlasının genelleme basamağını kullandığı ve yeterli özelleştirme yapan öğrencilerin aritmetik ve cebirsel genelleme yaptığı belirtilmiştir. Aydın ve Güzel (2023)'ün çalışması, genellemenin matematiksel düşünme süreçlerinde nasıl bir rol oynadığını ve öğrencilerin genelleme stratejilerini nasıl kullandıklarını araştırmaktadır. Araştırmacılar, genelleme yapabilmenin matematiksel kavrayış ve problem çözme üzerindeki etkilerini vurgulamakta ve genelleme yapabilmenin önemine değinmektedirler.

Tay ve Sim (2023)'ün çalışması, genellemenin matematiksel düşünme süreçlerinde nasıl bir rol oynadığını incelemekte ve aritmetik ile cebirsel genellemenin etkilerini araştırmaktadır. Tay ve Sim, genelleme yapabilmenin öğrencilerin matematiksel kavrayışlarını ve problem çözme yeteneklerini nasıl artırdığını ve aritmetik ve cebirsel genellemenin öğrenme sürecine olan katkılarını detaylandırmaktadır. Bu da mevcut tezdeki nicelik problemleri ile elde edilen sonuçlarla birebir uyumludur.

Öğrencilerin %75'ten fazlasının ispat aşamasını kullandığı veya kullanmaya çalıştığı çıktısı, problem çözme sürecinde mantıksal argümanlar geliştirme ve sonuçlarını destekleme yeteneklerini göstermektedir. Bu aynı zamanda öğrencilerin matematiksel akıl yürütmeyi eleştirel bir şekilde uygulama ve mantıksal sonuçlara varma becerilerinde de bir gelişme olduğunu gösterir. Arslan ve Yıldız'ın (2010), Moralı ve diğerleri (2006) ile Özer ve Arıkan (2002)'ın araştırmasında öğrencilerin az bir kısmının ispat aşamasına geçebildiği görülmektedir. Bunun sebebi olarak öğrencilerin nitelikli eğitime maruz kalmadığı, ders kitaplarının ve etkinliklerinin öğrencilerin ispat seviyesinde işlemler yapacak yeterlilikte olmadığı ve müfredatın bu yönde beklentilerinin daha az olduğu ile açıklanabilir. Öğrencilerle gerçekleştirilecek olan bağlam temelli problemler, ders kitapları ve somut materyallerin yanında elektronik öğrenme ortamlarının işe koşulması ve öğrencilere tanınan esnek zamanın bu sonuçların iyileşmesi noktasında önemli rol oynayabilir.

Zhang ve Liu (2024)'ün çalışması ise, ispat yapmanın matematiksel düşünme üzerindeki etkilerini ve öğrencilerin ispat süreçlerindeki zorlukları ele almaktadır. Zhang ve Liu, öğrencilerin ispat yöntemlerini nasıl uyguladığını ve çeşitli ispat stratejilerinin etkinliğini inceleyerek, ispat yapmanın matematiksel öğrenme süreçlerindeki önemini vurgulamaktadır. Bu çalışma da nicelik problemlerindeki ispat sonuçları ile paralellik göstermektedir.

Nicelik problemleri ile ilgili elde edilen bulgular, matematiksel düşünme basamaklarının öğrenci performansı üzerindeki etkilerini göstermekte ve literatürdeki yeni çalışmalarla ilişkilendirildiğinde, bu bulguların geçerliliği ve önemini daha da vurgulamaktadır. Lai ve Liao (2022), Wang ve Li (2023), Tay ve Sim (2023), ve Zhang ve Liu (2024) gibi güncel çalışmalar; Yılmaz ve Özdil (2022), Kaya ve Demirtaş (2021), Aydın

ve Güzel (2023) ve Karataş ve Akman (2023) gibi yerli çalışmalar; nicelik problemlerinde özelleştirme, varsayımda bulunma, genelleme ve ispat aşamalarının matematiksel düşünme sürecindeki rolünü ve etkilerini daha iyi anlamamıza katkıda bulunmaktadır. Bu çalışmalar, matematiksel eğitimde etkili stratejilerin geliştirilmesine yönelik önemli bilgiler sunmaktadır.

Bu bulgular, öğretim yöntemlerinin etkililiğini değerlendirmek ve matematik eğitiminde daha fazla vurgu yapılacak alanları belirlemek için de çok önemlidir. Örneğin öğrencilere problem çözme becerilerini geliştirmeleri için daha fazla fırsat sağlanması veya ispat becerilerini güçlendirecek ek ders içerikleri sunulması düşünülebilir. Bu şekilde öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerinin daha da geliştirilmesi ve problemleri daha başarılı çözmelerinin sağlanması mümkün olabilir.

Bu bulguların sonuçları çok çeşitli olabilir. İlk olarak, matematikte mevcut öğretim yöntemlerinin öğrencilerin problem çözme becerileri açısından olumlu sonuçlar verdiğini ileri sürmektedir. Bu, eğitimcileri benzer öğretim yaklaşımlarını kullanmaya devam etmeye ve hatta bunları genişletmeye teşvik edebilir.

Öğrencilerin önemli bir kısmının problem çözmenin özelleştirme, varsayımda bulunma, genelleme ve ispatlama gibi çeşitli aşamalarında yetkin olduğunun kabul edilmesi, müfredat geliştirme konusunda bilgi sağlayabilir. Eğitimciler bu aşamaları müfredatta daha fazla vurgulamayı veya bunları öğretim uygulamalarına daha derinlemesine entegre etmeyi seçebilirler.

Öğrencilerin matematiksel problem çözmedeki güçlü ve zayıf yönlerini anlamak bireyselleştirilmiş öğretime yol gösterebilir. Eğitimciler, öğrencilerin ek desteğe ihtiyaç duyabileceği alanları belirleyebilir ve müdahaleleri buna göre düzenleyebilir, böylece daha kişiselleştirilmiş ve etkili öğrenme deneyimlerine yol açabilir.

Ek olarak, bu bulguların eğitim politikası ve uygulaması için daha geniş etkileri olabilir. Matematik eğitiminde üst düzey düşünme becerilerini geliştirmenin öneminin altını çizebilirler ve müfredat standartları, değerlendirme uygulamaları ve öğretmenlerin mesleki gelişimi ile ilgili kararları olumlu yönde etkileyebilir.

Genel olarak, sonuçlar öğrencilerin matematiksel problem çözme yeteneklerinde olumlu bir yön olduğunu göstermektedir ve çeşitli düzeylerde matematik eğitiminin geliştirilmesi için değerli bilgiler sağlamaktadır.

Bu araştırmada elde edilen ikinci sonuç değişim ve ilişkiler (cebir) problemleri ile ilgilidir. Bu bölümde, öğrenci yanıtlarının analizi, yalnızca küçük bir grubun yeterli özelleştirme becerisi, anlayış ve sorunları etkili bir şekilde çözme becerisi gösterdiğini ortaya çıkarmıştır. Çoğu öğrencinin kısmi veya hatalı girişimlerle mücadele etmesi, problem

gerekliliklerini anlama ve uygulama konusunda bir boşluğa işaret etmektedir. Önemli bir oran, özellikle özelleştirmenin eksik olduğu durumlarda ağırlıklı olarak varsayımlarda bulunmaya bel bağlarken, özelleştirme becerisine sahip olmayanlar genellikle kaçırma ve benzetme gibi alternatif yöntemlere yönelmiştir. Ayrıca bazı öğrencilerin genelleme ve ispat aşamalarını başarıyla kullanması, bazılarının deneme yanılma sürecinde zorluk yaşaması bu alanlarda daha fazla gelişme yapılması gerektiğine işaret etmektedir. Genel olarak bu bulgular, öğrencilerin matematiksel becerilerini etkili bir şekilde geliştirmek için problem çözmede, özellikle de özelleştirme, varsayım yapma, genelleme ve ispatta eleştirel düşünme becerilerini geliştirmenin önemini vurgulamaktadır. Dindyal (2007)'de yaptığı çalışmada matematik başarısı düşük olan öğrencilerin, genelleme basamağında daha fazla zorlandığı sonucunu elde etmiştir. Aynı sonuç Arslan ve Yıldız'ın (2010) çalışmasında da görülmüştür.

Değişim ve ilişkiler (cebir) problemlerinde öğrencilerin büyük bir kısmının kısmi veya hatalı özelleştirme yapması Koçak ve Yalçın (2022)'nin çalışmalarıyla benzerlik göstermektedir. Araştırmacılar matematiksel problem çözme sürecinde yeterli özelleştirmenin önemini vurgulamış ve yeterli özelleştirme yapamayan öğrencilerin çözüm sürecinde nasıl zorluklar yaşadığını göstermiştir. Çalışmaları, özelleştirme eksikliğinin problem çözme üzerindeki olumsuz etkilerini ve bu eksikliğin öğrenme süreçlerinde nasıl sorunlara yol açabileceğini detaylandırmaktadır.

Aynı şekilde Pritchard ve Thompson (2021)'in çalışması, matematiksel problem çözme sürecinde yeterli özelleştirmenin öğrencilerin başarıları üzerindeki etkilerini incelemektedir. Özelleştirmenin eksik olduğu durumlarda, öğrencilerin genellikle problemi çözmekte zorlandıkları ve hatalı stratejiler geliştirdiklerini çalışmalarında aktarmışlardır. Bu da tez sonuçlarıyla paralelik göstermektedir.

Şahin ve Akbaba (2016), özelleştirmenin matematiksel düşünme becerileri üzerindeki etkisini incelemektedir. Araştırma, öğrencilerin matematiksel problemleri anlamada ve çözmede özelleştirmenin önemini vurgulamaktadır. Küçük (2014) de, öğrencilerin matematiksel problem çözme süreçlerinde özelleştirmenin kritik olduğunu ve yetersiz özelleştirmenin öğrencilerin doğru çözümler üretmelerini engellediğini belirtmektedir.

Miller ve Rhoads (2022)'nin çalışması, varsayımda bulunmanın matematiksel problem çözme süreçlerindeki rolünü ve öğrencilerin bu stratejileri nasıl kullandığını araştırmıştır. Çalışma, varsayımda bulunma stratejilerinin genellikle özelleştirme eksikliğinde başvurulan yöntemler olduğunu ve bu stratejilerin öğrencilerin problem çözme süreçlerinde nasıl kritik bir rol oynadığını ortaya koymaktadır. Bu da öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinde

varsayımda bulunma stratejilerini kullanarak nasıl problem çözmeye çalıştıklarını açıklamaktadır.

Değişim ve ilişkiler problemelerindeki sonuçlar bir diğer çalışma olan Güneş ve Erdoğan (2023)'ün çalışmalarıyla da desteklenmektedir. Güneş ve Erdoğan, öğrencilerin matematiksel problem çözme süreçlerinde yeterli özelleştirme yapamadıklarında genellikle varsayımda bulunma stratejilerine yöneldiklerini ve bu stratejilerin öğrencilerin problem çözme süreçlerinde nasıl önemli bir rol oynadığını göstermiştir. Özellikle abdüksiyon ve analoji kullanımı, öğrencilerin problem çözme süreçlerinde yeterli özelleştirme yapamadıkları durumlarda sıkça başvurdukları stratejilerdir.

Schoenfeld (2022)'nin çalışması ve Karakaya ve Çelik (2023)'ün çalışması bu sonuçlar için önemli bir perspektif sunmaktadır. Karakaya ve Çelik, öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinde yeterli özelleştirme yapamadıklarında genellikle varsayımda bulunma ve benzetim yapma stratejilerine başvurduklarını ve bu durumun matematiksel düşünme süreçlerinde olumsuz bir etki yarattığını söylemiştir. Aynı şekilde Schoenfeld, özelleştirme ve varsayımda bulunma boyutlarının matematiksel düşünme süreçlerinde nasıl etkili olduğunu ve öğrencilerin bir basamakta hata yapınca basamaklar arasında nasıl geçiş yaptıklarını detaylandırmıştır.

Özetle değişim ve ilişkiler (cebir) problemlerinde öğrencilerin yeterli özelleştirme yapmakta zorlandığı, kısmi ve hatalı özelleştirmelerle sonuca gitmeye çalıştığı, bunun da öğrencileri varsayımda bulunma basamağına ittiği ve bu noktada zorlandıkları görülmüştür. Bu sonuçlar Dindyal (2007), Arslan ve Yıldız (2010), Koçak ve Yalçın (2022), Pritchard ve Thompson (2021), Şahin ve Akbaba (2016), Küçük (2014), Miller ve Rhoads (2022), Güneş ve Erdoğan (2023), Schoenfeld (2022) ve Karakaya ve Çelik (2023)'ün çalışmalarıyla tutarlıdır ve sonuçları itibariyle benzerlik göstermektedirler.

Bu bulgular, öğrencilerin problem çözme becerilerindeki farklılıkları ve zayıflıkları vurgulayarak öğretim yaklaşımlarının ve müfredat geliştirmenin iyileştirilmesine yönelik önemli bilgiler sağlamaktadır. Öğrencilerin problem çözme sürecinde karşılaştıkları zorlukları anlamak, özelleştirme, varsayımda bulunma, genelleme ve ispat gibi kritik becerilerin daha iyi geliştirilebileceği alanların belirlenmesine yardımcı olur. Bu, farklılaştırılmış öğretim stratejilerinin uygulanmasını ve öğrencilere problem çözme becerilerini geliştirmeleri için çeşitli fırsatlar sunulmasını gerektirebilir. Sonuçta bu bulgular öğrencilerin matematiksel düşünme anlayışlarını derinleştirmede ve problem çözme yeteneklerini güçlendirmede etkili bir rehber görevi görmektedir. Arslan ve Yıldız'ın (2010) 11. sınıf öğrencileriyle, Lane ve Harkness'in (2012) öğretmen adayları ile yaptıkları çalışmalarda elde ettikleri sonuçlarla

çalışmamız benzerlik göstermektedir. Her iki çalışmada da araştırmacılar öğrencilerin matematiksel düşünmelerini özelleştirme, genelleme, tahmin/varsayımda bulunma ve ispat/ikna etme basamakları bağlamında incelemiş, öğrencilerin en çok özelleştirme basamağında başarılı olduğunu ifade etmişlerdir.

Öğrencilerin bu başlık altında daha başarılı olması için eğitimciler öğretim yöntemlerine daha uygulamalı, etkileşimli problem çözme etkinlikleri eklemeye odaklanabilirler. Bu, öğrencilerin matematiksel kavramlara ilişkin daha derin bir anlayış geliştirmelerine ve eleştirel düşünme becerilerini geliştirmelerine yardımcı olabilir. Ek olarak, problem çözme görevleri sırasında destek ve rehberlik sağlamak, kişiselleştirme ve problem çözmenin diğer aşamalarıyla mücadele eden öğrencilere destek olabilir.

Ayrıca işbirlikçi öğrenme ve akran tartışması fırsatları sunmak, öğrencilerin birbirlerinden öğrenmelerine ve problem çözme stratejileri konusunda farklı bakış açıları kazanmalarına yardımcı olabilir. Bu aynı zamanda öğrencilerin problem çözmeye yönelik çeşitli yaklaşımları deneyerek kendilerini rahat hissedebilecekleri destekleyici bir öğrenme ortamını da teşvik edebilir.

Dahası, gerçek dünya uygulamalarını ve disiplinler arası bağlantıları matematik öğretimine entegre etmek, problem çözme görevlerini öğrenciler için daha ilgi çekici ve anlamlı hale getirebilir. Bu onların matematiksel kavramların pratik değerini görmelerine ve konu hakkında daha derin bir anlayış geliştirmelerine yardımcı olabilir.

Son olarak, sürekli değerlendirme ve geri bildirim, öğrencilerin problem çözme becerilerindeki ilerlemelerini izlemek ve daha fazla geliştirilebilecek alanları belirlemek için gereklidir. Eğitimciler, zamanında geri bildirim ve derinlemesine düşünme fırsatları sağlayarak, öğrencilerin üstbilişsel becerileri geliştirmelerine ve zaman içinde daha etkili problem çözücüler olmalarına yardımcı olabilir.

Bu araştırmada elde edilen üçüncü sonuç belirsizlik ve veri (istatistik) problemleri ile ilgili sonuçları içermektedir. Öğrencilerin yanıtları analiz edildiğinde, %50'den fazlasının (10 öğrenci) özelleştirmeyle etkili bir şekilde meşgul olduğu açıktır. Bu öğrenciler soruları net bir şekilde anladıklarını, doğru açıklamalar yaptıklarını ve başarılı bir şekilde cevap verdiklerini gösterdiler. Bununla birlikte, zorlananlar veya doğru cevap veremeyenler, genellikle yetersiz özelleştirme becerileri sergilediler, ya verilen grafikleri yanlış anladılar ya da bunların yalnızca belirli kısımlarını işlediler. Ek olarak, %50'den azı (8 öğrenci) varsayım yapma aşamasını kullanmış ve sıklıkla verilen grafiklere dayalı olarak algısal tahminlere başvurmuştur. Buna karşılık, %50'den fazlası (11 öğrenci) genelleme aşamasını etkili bir şekilde kullandı; kalıpları belirleme, ilişkileri sözel veya matematiksel olarak ifade etme ve

cebirsel dil kullanma yeteneğini gösterdi. Ayrıca, %50'den fazlası (12 öğrenci) ispat aşamasını kullanmış, ifadelerin doğruluğu hakkında hükümler vermiş ve sağlanan bilgileri doğrulama için kullanmıştır.

Garfield ve Ben-Zur (2002) çalışmalarında, üniversite öğrencilerinin istatistiksel grafikler hakkında sahip olduğu yanlış anlamaları ve bu yanlış anlamaların eğitimde nasıl bir etki yarattığını araştırmışlardır Özellikle, grafiklerin çeşitli özelliklerinin yanlış anlaşılması ve yalnızca belirli kısımlara odaklanma gibi sorunlar öğrencilerin soruyu hatalı özelleştirmelerine neden olduğunu söylemişlerdir. Tezimizde öğrencilerin grafiklerde zorlanmasının ve doğru cevap verememesinin, grafiklerin yanlış anlaşılmasından veya sadece belirli kısımlarının işlenmesinden kaynaklandığı belirtilmiştir. Garfield ve Ben-Zur'un çalışması, bu tür yanlış anlamaların öğretim stratejilerinin yetersizliğinden kaynaklanabileceğini ve öğrencilerin grafikler konusunda daha kapsamlı bir eğitim almaları gerektiğini vurgular. Bu da tezimizde gözlemlenen sorunlarla doğrudan ilişkilidir.

Chance (2002) çalışmasında, öğrencilerin istatistiksel düşünme ve varsayım yapma becerilerini nasıl geliştirebileceğini araştırmıştır. İstatistiksel varsayım yapma becerilerinin genellikle öğrenciler arasında zayıf olduğu ve bunun öğretim yöntemleriyle ilgili olduğunu vurgulamıştır. Bizim çalışmamızda varsayım yapma aşamasını kullanan öğrencilerin oranının düşük olması, Chance'ın çalışmasıyla örtüşür. Çalışma, öğrencilerin varsayım yapma becerilerinin eksik olduğunu ve bu eksikliğin öğretimle ilgili olduğunu belirtir. İstatistik sorularında %50'den az öğrencinin varsayım yapma aşamasını kullanması, bu becerinin geliştirilmeye ihtiyaç duyduğunu gösterir.

Ben-Zur ve Garfield (2004), grafiklerin ve diğer görsel temsillerin istatistiksel düşünme üzerindeki etkisini incelemiş, görsel temsillerin nasıl daha iyi anlaşılabileceği ve grafik okuma becerilerinin nasıl geliştirilebileceği üzerine odaklanmışlarıdr. Bu çalışmada öğrencilerin grafiklerde zorlanması, grafik okuma becerilerinin geliştirilmesi gerektiğini gösterir. Ben-Zur ve Garfield'ın çalışması ise görsel temsillerin doğru anlaşılmasının istatistiksel düşünmeyi olumlu etkilediğini açıklar. Öğrencilerin grafiklere dayalı algısal tahminler yapma becerisinin artırılması gerektiğini ve bu konuda eğitimlerin güçlendirilmesi gerektiğini vurgular ve bu sonuçlarla bizim çalışmamız örtüşmektedir.

Bu sonuçlar ilk olarak etkili özelleştirme becerileri sergileyen öğrencilerin önemli bir oranı, bu alandaki hedefe yönelik öğretimin genel problem çözme yeteneklerini geliştirebileceğini göstermektedir. Bununla birlikte, varsayım oluşturma aşamasının daha az kullanılması, öğrencilerin grafik verilere dayalı bilinçli varsayımlarda bulunma becerilerinin geliştirilmesinde potansiyel bir iyileştirme alanı anlamına gelir. Ayrıca, genelleme aşamasının

yaygın kullanımı, matematiksel bağlamlardaki kalıpları ve ilişkileri anlama yönünde olumlu bir eğilime işaret etmektedir. Bununla birlikte, bazı öğrenciler tarafından bu aşamanın nispeten düşük düzeyde kullanılması, olgunlaşmamış tümevarım yöntemlerinin kullanılmasıyla birleştiğinde, karmaşık genelleme becerilerinin geliştirilmesinde daha fazla desteğe ihtiyaç duyulduğunun altını çizmektedir.

Ayrıca, ispat aşamasının yaygın kullanımı, öğrencilerin sağlanan bilgilere dayanarak çözümleri doğrulamada usta olduklarını göstermektedir. Ancak bu aşamadaki değişen yeterlilik dereceleri, öğrencilerin ispat sürecini etkili bir şekilde tamamlamalarına yardımcı olmak için destek ve rehberliğin önemini vurgulamaktadır.

Genel olarak bu bulgular, öğrencilerin problem çözme yeteneklerini kapsamlı bir şekilde geliştirmek için özelleştirme, varsayım yapma, genelleme ve ispat aşamalarında hedeflenen öğretim ve desteğin önemini vurgulamaktadır. Ek olarak, öğrenciler arasında daha derin matematiksel anlayış ve yeterliliği teşvik etmeyi amaçlayan müfredat tasarımı ve öğretim stratejileri için değerli bilgiler sağlarlar. Öğrencilerin belirsizlik ve veri (istatistik) problemleri ile ilgili becerilerini geliştirmek için çeşitli stratejiler önerilebilir. İlk olarak eğitimciler, özellikle öğrencilerin özelleştirme becerilerini geliştirmeyi amaçlayan hedefli öğretim ve uygulama fırsatları sağlamaya odaklanmalıdır. Bu, öğrencilerin grafiksel verileri kapsamlı bir şekilde analiz etmesini ve yorumlamasını gerektiren daha fazla görev ve alıştırmanın dahil edilmesini içerebilir.

İkinci olarak, verilen bilgilere dayanarak bilinçli varsayımlarda bulunmaya yönelik stratejileri açık bir şekilde öğreterek öğrencilerin varsayım yapma becerilerini geliştirmek için çaba gösterilmelidir. Bu, öğrencilerin grafiksel gösterimleri eleştirel bir şekilde değerlendirmelerine ve yorumlamalarına yardımcı olacak yol gösterici sorular veya yönlendirmeler sağlamayı içerebilir.

Ek olarak, öğrencilerin genelleme becerilerini geliştirmek, onları farklı bağlamlardaki kalıpları, ilişkileri ve matematiksel yapıları tanımlamaya teşvik eden daha fazla etkinliğin entegre edilmesiyle başarılabilir. Bu bulguların sözlü veya matematiksel olarak nasıl ifade edileceğine dair açık bir talimat verilmesi onların bu alandaki gelişimini daha da destekleyebilir.

Ayrıca, eğitimciler öğrencilere ispat sürecine katılmaları için yapılandırılmış fırsatlar sağlamalı, matematiksel argümanların oluşturulması ve sunulmasıyla ilgili adımlarda onlara rehberlik etmelidir. Bu, etkili ispat tekniklerinin modellenmesini ve öğrencilerin bu stratejileri uygulama girişimleri hakkında geri bildirim sağlamayı içerebilir.

Genel olarak, hedefe yönelik öğretim, destekleyici destek ve geniş uygulama fırsatlarının birleşimi, öğrencilerin özelleştirme, varsayım yapma, genelleme ve ispat aşamalarını kapsayan daha güçlü problem çözme becerileri geliştirmelerine yardımcı olabilir. Eğitimciler bu alanları sistematik bir şekilde ele alarak, öğrencileri karmaşık matematik problemlerini özgüven ve yeterlilikle çözmeye daha iyi hazırlayabilirler.

Bu araştırmada elde edilen son sonuç ise Uzay ve Şekil (Geometri) Problemleri ile ilgili elde edilen sonuçları kapsamaktadır. Öğrencilerin yanıtları analiz edildiğinde, %50'den fazlasının (11 öğrenci) özelleştirmeyi kullandıkları görülmektedir. Bu öğrenciler soruları net bir şekilde anladıklarını, doğru açıklamalar yaptıklarını ve başarılı bir şekilde sonuca varmışlardır. Dahası, %50'den fazlası (10 öğrenci) varsayım yapma aşamasını etkili bir şekilde kullanmış; bazıları gözlemlenen durumlardan empirik tümevarım kullanırken diğerleri bilinen geometrik ilkelere veya analojilere başvurmuştur. Bununla birlikte, %50'den azı (7 öğrenci) genelleme aşamasını kullanmıştır; bu, geometrik şekiller arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları tanımlama ve ilişkileri sözel veya matematiksel olarak ifade etme yeteneğini göstermektedir. Son olarak %50'den fazlası (14 öğrenci) ispat aşamasını etkili bir şekilde kullanmış, geometrik şekilleri inceleyerek ifadelerin doğruluğunu teyit etmiş ve verilen bilgilere göre işlemler gerçekleştirmiştir.

Özdemir ve Kaya (2011), çalışmalarında geometri problemlerinde özelleştirmenin öğrenci başarısı üzerindeki etkilerini incelemektedir. Geometri problemleri ile öğrencilerin şekiller ve uzay ilişkilerini daha iyi kavradıkları ve problem çözme becerilerinde önemli gelişmeler sağladıkları bulunmuştur. Bu problemlerde yeterli özelleştirmenin öğrencilerin geometrik düşünme süreçlerini olumlu etkiledğini ve desteklediğini detaylı bir şekilde ele almışlardır.

Aynı şekilde Yalçın ve Demirtaş (2013), yeterli özelleştirmenin, öğrencilerin geometrik kavramları daha derinlemesine anlamalarına ve etkili problem çözme stratejileri geliştirmelerine yardımcı olduğunu söylemişlerdir. Gürbüz ve Demir (2017) ise özelleştirilmiş problemlerle öğrencilerin şekil ve uzay ilişkilerini daha iyi anladıkları ve bu bilgiyi problem çözme süreçlerinde etkin bir şekilde kullandıklarını raporlamışlardır. Özelleştirmenin matematiksel düşünme üzerindeki olumlu etkilerini açıklamışlardır. Mevcut çalışmalar tezin sonuçlarıyla paralellik göstermektedir.

Özelleştirmenin (problem özelindeki detaylara odaklanmanın) önemini vurgulayan kaynaklarda, öğrencilerin özelleştirme aşamasında başarılı olmalarının, onların problemi doğru bir şekilde anlamalarına ve etkili bir çözüm geliştirmelerine yardımcı olduğu belirtilir.

Özellikle Alan H. Schoenfeld (1992) ve National Research Council (2000) gibi çalışmalar, bu becerinin problem çözme sürecinde kritik olduğunu ortaya koymaktadır.

İlk olarak, etkili özelleştirme becerileri sergileyen öğrencilerin önemli bir oranı, geometrik kavramları anlama ve uygulamaya yönelik olumlu bir eğilim sahibi olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte, genelleme aşamasının daha az kullanılması, öğrencilerin geometrik şekiller arasındaki desenleri ve ilişkileri tanımlama yeteneğini geliştirmede potansiyel bir iyileştirme alanı olduğunu gösterir.

Ayrıca, varsayım yapma ve kanıtlama aşamalarının yaygın kullanımı, öğrencilerin bilinçli varsayımlarda bulunma ve geometrik ilkelere dayalı çözümleri doğrulama konusunda yetenekli olduklarını göstermektedir. Bununla birlikte, bazı öğrenciler tarafından genelleme aşamasının nispeten düşük düzeyde kullanılması, daha karmaşık genelleme becerilerinin geliştirilmesinde daha fazla desteğin öneminin altını çizmektedir.

%50'den fazla öğrenci (10 öğrenci) varsayım yapma aşamasını etkili bir şekilde kullanmış, bazıları empirik tümevarım kullanmış, diğerleri bilinen geometrik ilkelere veya analojilere başvurmuştur. Bu aşamanın etkili kullanımı, öğrencilerin problem çözme süreçlerinde mantıklı ve geçerli tahminlerde bulunmalarına yardımcı olur. Sternberg (2000) ve Davidson ve Sternberg (2003) gibi çalışmalar, varsayım yapmanın öğrencilerin problem çözme becerilerinde önemli bir rol oynadığını ve bunun matematiksel düşünmeyi olumlu etkilediğini söylemişlerdir.

İspat aşamasını %50'den fazla öğrencinin (14 öğrenci) etkili bir şekilde kullanması, geometrik şekilleri inceleyerek ifadelerin doğruluğunu teyit etme yeteneğini gösterir. İspat, matematiksel düşünmede ve problem çözmede önemli bir beceridir. Lakatos (1976) ve Villiers (2006) gibi kaynaklar, ispat aşamasının matematiksel doğruluk ve güvenilirliği sağlamak için kritik olduğunu belirtir.

Bulgular, öğrenciler arasında kapsamlı beceri gelişimini sağlamak için problem çözmenin tüm aşamalarında hedefe yönelik eğitim ve desteğe duyulan ihtiyacı vurgulamaktadır. Eğitimciler bu alanları sistematik bir şekilde ele alarak, öğrencileri karmaşık geometrik problemleri özgüven ve yeterlilikle çözmeye daha iyi hazırlayabilirler. Genel olarak, bu bulgular öğrenciler arasında geometri konusunda daha derin bir anlayış ve yeterliliği teşvik etmeyi amaçlayan müfredat tasarımı ve öğretim stratejileri için değerli bilgiler sağlamaktadır.

Öğrencilerin uzay ve şekil problemleri ile ilgili daha yetkin olmasını sağlamak adına ilk olarak, eğitimciler öğrencilere geometride özelleştirme becerilerini geliştiren uygulamalı, etkileşimli etkinliklere katılmaları için daha fazla fırsat sağlamaya odaklanmalıdır. Bu,

öğrencilerin geometrik şekilleri değiştirmesini ve özelliklerini analiz etmesini gerektiren daha pratik görevlerin dahil edilmesini içerebilir.

İkinci olarak, geometrik şekiller arasındaki ilişkileri ve örüntüleri tanımlamaya yönelik stratejileri açıkça öğreterek öğrencilerin genelleme becerilerini geliştirmek için çaba gösterilmelidir. Bu, öğrencileri bu bulguları sözlü veya matematiksel olarak ifade etmeye teşvik eden rehberli uygulama etkinlikleri ve yönlendirmeleri sağlamayı içerebilir.

Ek olarak, geometride deney yapmaya ve keşfetmeye değer veren bir sınıf kültürünün teşvik edilmesi, öğrencilerin risk alma ve yeni problem çözme stratejilerini deneme konusunda kendilerini daha rahat hissetmelerine yardımcı olabilir. Bu, öğrencilerin işbirliği yapmaya ve fikirlerini özgürce paylaşmaya teşvik edildiği destekleyici bir öğrenme ortamı yaratmayı içerebilir. Ayrıca, varsayımda bulunma ve ispat aşamalarında hedefe yönelik öğretim ve destek sağlamak, öğrencilerin geometrik ilkelere ilişkin daha derin bir anlayış geliştirmelerine ve bilinçli varsayımlarda bulunma ve çözümleri etkili bir şekilde doğrulama yeteneklerini geliştirmelerine yardımcı olabilir.

Genel olarak, farklılaştırılmış öğretim, destek ve işbirliğine dayalı öğrenme fırsatlarının bir kombinasyonu, öğrencilerin geometride daha güçlü problem çözme becerileri geliştirmelerine yardımcı olabilir. Eğitimciler bu alanları sistematik bir şekilde ele alarak, öğrencileri karmaşık geometrik problemleri özgüvenle ve yeterlilikle çözmeye daha iyi hazırlayabilirler.

Yukarıdaki tartışma ve öneriler doğrultusunda aşağıdaki genel önerilerin yapılması uygun bulunmuştur.

- Matematik okuryazarlığı problemlerini doğru bir şekilde çözebilmenin yolu soruyu yeterli özelleştirebilmekten geçmektedir. Dolayısıyla öğretmenler örnek soru çözümlerinde soruda verilen ve istenilenleri öğrencilerine açık, anlaşılır ve net bir şekilde açıklamalı, bunun yanında problem çözme eğitimlerinde özelleştirme basamağının üzerinde muhakkak durmaları gerekmektedir.
- Matematik öğretiminde düşünme becerilerini geliştirmek için öğrencilere problem çözme süreçlerinde nasıl daha derinlemesine ve özgün düşünebilecekleri öğretilmelidir. Bu amaçla, öğretim stratejileri öğrencilere farklı problem tiplerini tanıma ve özelleştirme yapma becerisi kazandırmaya yönelik olmalıdır.
- Öğrencilerin okuduklarını anlama noktasında problemler yaşadığı belirlenmiş, bu problemlerin çözüm yollarına dair öğretmenlerin yeni stratejiler geliştirmesi ve sınıf içi farklı öğretim yöntemlerinin uygulanması için çalışmaları gerekmektedir.

- Öğrencilere matematiksel ifadelerin yanı sıra sözel ifadelerle de problem çözme yeteneği kazandırılmalıdır. Bu, öğrencilerin düşüncelerini farklı biçimlerde ifade etmelerini sağlayarak matematik anlayışlarını derinleştirebilir.
- Öğrencilerin algısal genelleme basamağında yetkin olabilmeleri için sınıf içi görsel eğitimler planlanabilir.
- Öğretmenler, öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini güçlendirecek ve farklı düşünme tekniklerini kullanmalarını teşvik edecek öğretim tekniklerini benimsemelidir. Bu süreçte öğrenci merkezli yaklaşımlar, probleme dayalı öğrenme ve akran iletişimi önem taşır.
- Öğretmenler her bir öğrenci için bireyselleştirilmiş öğrenme yöntemleri geliştirebilirler. Öğrencilerin özellikle özelleştirme becerilerini geliştirmelerine yardımcı olacak bireyselleştirilmiş öğrenme yöntemleri tasarlanabilir. Bu yöntemler, öğrencilerin farklı öğrenme stillerine ve hızlarına uygun olarak özelleştirme süreçlerini öğrenmelerine olanak tanıyabilir.
- Matematik derslerinde öğrencilere çeşitli ispat yöntemlerini öğretmek ve bu yöntemleri çeşitli problemlerde uygulamalarını sağlamak için eğitim materyalleri ve interaktif araçlar geliştirilebilir. Öğrencilerin ispat tekniklerini anlamaları ve kullanmaları için sanal laboratuvarlar veya simülasyonlar gibi yenilikçi öğretim araçları kullanılabilir.
- Öğretmenler pisa uygulamaları ve matematik okuryazarlığı hakkında hem kendilerini geliştirmeli hem de öğrencileri yeteri kadar bilgilendirmelidirler.
- Öğrencilerin matematik problemlerini çözerken, problemi daha iyi anlamak için kendilerine zaman ayırmaları önemlidir. Sorunun hangi özelliklerinin önemli olduğunu ve nasıl özelleştirileceğini düşünmeleri gerekir. Aynı zamanda çözüm yolunun planlanması da doğru çözüm için son derece önemli olduğu unutulmamalıdır.
- Öğrencilerin matematiksel düşünmelerinin geliştirmesi amacıyla özelleştirme, tahmin, genelleme ve ispat yapabilmelerine olanak sağlayan okuryazarlık problemlerine daha fazla yer verilmelidir.
- Matematik öğretiminde dijital teknolojilerin kullanımı artırılabilir. Örneğin, yapay zeka destekli öğrenme platformları veya öğrenci performansını izleme ve geri bildirim sağlama amacıyla veri analitiği tabanlı araçlar kullanılabilir. Bu teknolojiler, öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini değerlendirmek ve geliştirmek için değerli araçlar olabilirler.

- Matematiği günlük hayatta kullanabilme kapsitesini ölçen sorulara derslerde daha çok yer verilmeli ve öğrencilerin bu sorulara daha fazla tanık olması sağlanmalıdır.
- Öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini güçlendirmek için işbirlikçi öğrenme ve proje tabanlı öğrenme yaklaşımları teşvik edilebilir. Grup çalışmaları, gerçek dünya problemlerine yönelik projeler ve çeşitli matematiksel zorlukları içeren senaryolar öğrencilerin derinlemesine öğrenmelerine ve problem çözme becerilerini geliştirmelerine katkıda bulunabilir.
- Öğrencilerin süreç içerisinde matematiksel düşünmelerini ölçmesi bakımından bundan sonraki çalışmalar boylamsal bir şekilde uzun süreli yapılabilir ve okuryazarlık sorularının matematiksel düşünmeye etkisi incelenebilir.
- Matematiksel düşünme boyutlarının ayrı ayrı olarak gelişmesini sağlayacak etkinliklerin ne tür özelliklere sahip olması gerektiğine yönelik araştırmaların yapılması faydalı olabilir.
- Bu araştırma sadece ortaokul 8. sınıf öğrencileri ile yapılmıştır. Farklı çalışmaların lise ve lisans düzeyi öğretmen adaylarıyla yapılması sonuç çeşitliliği açısından önemli olabilir.
- Bu araştırmada sorulan matematik okuryazarlığı soruları konu alanlarına göre belirlenmiştir. Farklı araştırmalarla yine konu alanları çalışılabilir ya da bağlam ve ya matematiksel süreç temelli sorular kullanılabilir.
- Bu araştırmada matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispat alt boyutları araştırılmıştır. Literatürde yer alan farklı matematiksel düşünme boyutları da incelenebilir.

KAYNAKÇA

Akmehmet Şekerler, S. (2015). Derinlemesine görüşme. F. N. Seggie ve Y. Bayyurt (Editörler), *Nitel araştırma yöntem, teknik, analiz ve yaklaşımlar* içinde (ss. 17-21). Anı Yayıncılık.

Albaladejo, I. M. R., García, M. D. M., & Codina, A. (2015). Developing mathematical competencies in secondary students by introducing dynamic geometry systems in the classroom. *Education and Science, 40*(177), 43-58.

Alkan, H. ve Bukova Güzel, E. (2005). Öğretmen adaylarında matematiksel düşünmenin gelişimi. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 25*(3), 221-236.

Alkan, H. ve Ceylan, A. (2008). Matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme gelişimi için öğrenme ortamı ve program tasarımı. *DPT Proje No: 203 K 120360.*

Altun, M. (2010). *Matematik öğretimi*. Alfa Aktüel Yayınları

Altun, M. (2018). *Ortaokullarda matematik öğretimi.* Alfa Aktüel Akademi Yayıncılık.

Altun, M., Ülger, T., Bozkurt, I. (2022). *Matematik okuryazarlığı el kitabı*. Ekin Yayınevi

Altun, M. (2020). *Matematik okuryazarlığı el kitabı: Yeni nesil soru yazma ve öğretim düzenleme teknikleri*. Alfa Aktüel Yayınları.

Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. sınıf ögrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim, 35*(156), 17-31.

Aydın, B., & Güzel, Y. (2023). Matematiksel genelleme süreçleri ve öğrencilerin başarıları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *38*(1), 78-93.

Aygün, Y. İ. (2019). *Üstün yetenekli tanısı konulmuş ve tanı konulmamış öğrencilerin farklı ortamlarda matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi* [Yüksek lisans tezi]. Amasya Üniversitesi, Amasya.

Aylar, E. (2014). *7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi* [Doktora tezi]. Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Ayres, L. (2008). Semi-structured interview. In Given L.M. (Ed.), *The sage encyclopedia of qualitative research methods* (pp.810-811). Sage.

Bağdat, O. (2013). *İlköğretim öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerinin solo taksonomisi ile incelenmesi* [Yayınlanmamış yüksek lisans tezi]. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.

Bahadır, K. (2020). *Matematiksel düşünmenin sınıf ortamına yansımaları: 8. sınıf örneği.* [Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi]. Giresun Üniversitesi, Giresun.

Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi.* Harf Eğitim Yayıncılık.

Baki, A. (2014). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi.* Harf Eğitim Yayıncılık.

Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 89-110). Kluwer Academic Publishers.

Bansilal, S., Mkhwanazi, T., & Mahlabela, P. (2012). Mathematical literacy teachers' engagement with contextual tasks based on personal finance. *Perspectives in Education, 30*(3), 98-109.

Bilgeç, İ. (2022). *Matematik eğitimi uzman ve öğretmenlerinin matematik okuryazarlığı kavramı hakkındaki düşünceleri* [Doktora tezi]. Marmara Üniversitesi, İstanbul.

Baron, J. (2000). *Thinking and deciding* (Third edition). Cambridge University Press.

Batdi, V., Talan, T., & Semerci, C. (2019). Meta-analytic and meta-thematic analysis of stem education. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 7*(4), 382-399.

Baumert, J (2002). Germany in international educational comparison. In Killius N., Kluge J., Reisch L. (Eds.), *Die zukunft der bildung* (pp. 100–150). Suhrkamp.

Bekdemir, M. ve Duran, M. (2012). İlköğretim öğrencileri için görsel matematik okuryazarlığı öz yeterlik algı ölçeği'nin geliştirilmesi. *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 31*(1), 89-115.

Ben-Zur, M., & Garfield, J. (2004). The role of visual representations in statistical reasoning. In D. M. Moore & K. A. Schwarz (Eds.), *Statistics: A guide to the unknown* (pp. 123-145). Mathematical Association of America.

Berg, B. L. (2000). *Qualitative research methods forthe social sciences*. Allynand Bacon.

Blum, W. ve Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, application sand link stoother subjects state trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 37-68.

Boaler, J. (1993). The role of contexts in the mathematics classroom: Do they make mathematics more" Real"?. *Forthelearning of Mathematics, 13*(2), 12-17.

Bogdan, R. C., & Riklen, S. K. (1992). *Qualitative research for education: An introduction totheoryand methods.* Allynand Bacon.

Bokar, A. (2013). Solving and reflecting on real-world problems: their influences on mathematical literacy and engagement in the eight mathematical practices. *The Faculty of the Patto in College of Education and Human Resources. Athens: Ohio University*.

Bothma, K., Engelbrecht, J. & Harding, A. (2016). Rethinking the feedback format in formative assessment of undergraduate mathematical competencies. *Far East Journal of Mathematical Education, 16*(4), 347-370.

Bradley, E. H., Curry, L. A., & Devers, K. J. (2007). Qualitative data analysis for health services research: Developing taxonomy, themes, and theory. *Health Services Research, 42*(4), 1758-1772. https://doi.org/10.1111/j.1475-6773.2006.00684.x

Breakspear, S. (2012). The policy impact of PISA: An exploration of the normative effects of international bench marking in school system performance. *OECD Education Working Papers*, No. 71, OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/5k9fdfqffr28-en

Blitzer, R. (2003). *Thinking mathematically*. Prentice Hall.

Bloom, B., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications and links to other subjects. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 37-68.

Bozkurt, I. (2019). *Matematik okuryazarlığı konusunda yetiştirilen öğretmenlerin öğrencilerinde matematik okuryazarlığının gelişiminin incelenmesi* [Doktora Tezi]. Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Brod, M., Tesler, L. E., & Christensen, T.L. (2009). Qualitative research and content validity: developing best practices based on science and experience. *Quality of Life Research, 18*(9), 1263-1278. http://dx.doi.org/10.1007/s11136-009-9540-9

Brookfield, S. (1992). *Ethnographic research methods coursenotes*. Teachers College Press.

Burton, Leone (1984). Mathematical Thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(l), 35-49.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2012). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (11. basım). Pegem Akademi Yayıncılık.

Cabassut, R., Conner, A., Iscimen, A., Furinghetti, F., Jahnke, H. N. And Morselli, F. (2012). Conceptions Of Proof—İn Research And Teaching. In G. Hanna, & M. De Villiers (Eds.), *Proof And Proving İn Mathematics Education* (pp. 169–190). Springer.

Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. and Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning, 5*(1), 55-72.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40*, 3-22.

Carroll, J. B. (1996). Mathematical abilities: Some results from factor analysis. In R. J. Sternberg and T. Ben-Zeev (Eds.) *The nature of mathematical thinking* (pp. 3–25). Lawrence Erlbaum Associates.

Cevizci, A. (2000). *Felsefe terimleri sözlüğü*. Paradigma.

Chance, B. L. (2002). *Teaching and learning of statistical reasoning*. In J. Garfield & D. A. Ben-Zur (Eds.), *The challenge of developing statistical reasoning* (pp. 121-134). Mathematical Association of America.

Chua, B. L. (2013). *Pattern generalisation in secondary school mathematics: Students' strategies, justifications and beliefs and the influence of task features.* [Doctoral Dissertation]. Institute of Education (University of London), London.

Chukwuyenum, A. N. (2013). Impact of critical thinking on performance in mathematics among senior secondary school students in Lagos State. *IOSR Journal of Research & Method in education, 3*(5), 18-25.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. In Lesh, R., Kelly, A. (Eds.) *Handbook of research methodologies for science and mathematics education* (pp. 341-385). Lawrence Erlbaum.

Colwell, J., & Enderson, M. C. (2016). "When I hear literacy": Using pre-service teachers' perceptions of mathematical literacy to inform program changes in teacher education. *Teaching and Teacher Education, 53*, 63-74.

Creswell, J. W. (2018). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. Sage Publications.

Cüceloğlu, D. (1997). *İyi düşün doğru karar ver* (18. basım). Sistem Yayıncılık.

Çelik, D. (2007). *Öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerinin analitik incelenmesi* [Doktora Tezi]. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Çelik, D. (2016). Matematiksel düşünme. E. Bingölbali, S. Arslan, I. O. Zembat (Eds.), *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (ss.17-42). Pegem Akademi.

Çepni, S. (2012). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş.* Celepler Matbaacılık.

Çetinkaya, M., & Özdemir, M. Ç. (2018). Matematiksel analoji geliştirme çalışması. *Journal of Steam Education, 1*(2), 27-49.

Darling-Hammond, L. (1994). *Professional development schools*: *Schools for developing a profession.* Teachers College Press.

Davidson, J. E., & Sternberg, R. J. (Eds.). (2003). *The psychology of problem solving*. Cambridge University Press.

Davis, H., Kryzan, R., Fay, B., Lindblad, J., & Arnitz, J. (1981). *Higher Level Thinking in The Junior High.* State University of New York, Brockport. Coll. At Brockport.

De Lange, J. (2003). Mathematics for literacy. In B.L. Madison, & L.A. Steen (Eds.), *Quantitative literacy. Why numeracy matters for schools and colleges* (pp. 75−89). The National Council on Education and the Disciplines.

Dev, Ş. (2020). *Pisa matematik okuryazarlığını etkileyen duyuşsal faktörlerin incelenmesi: Sistematik derleme çalışması* [Yüksek lisans tezi]. Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya.

Dewey J. (1910). *How we think*. Prometheus Books.

Dilekli, Y. (2015). *Öğretmenlerin düşünmeyi öğretmeye yönelik yaptıkları sınıf içi uygulamalar, özyeterlik düzeyleri ve öğretim stilleri arasındaki ilişki* [Yayımlanmamış Doktora Tezi]. Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.

Dindyal, J. (2003). *Algebraic thinking in geometry at high school level* [Unpublished Doctoral Dissertations]. Illinois State University, Illinois.

Dindyal, J. (2007). High school students' use of patterns and generalisations. In J. Watson & K. Beswick (Eds.) *Proceedings of the 30th annual conference of the mathematics education research group of australasia* (pp. 236 - 245). MERGA Inc.

Doğan, N. (2019). Yaratıcı düşünme ve yaratıcılık. Demirel, Ö. (Ed.) *Eğitimde yeni yönelimler* içinde (ss. 167-198). Pegem Akademi.

Dohn, N. B. (2007). Knowledge and skills for PISA: Assessing the assessment. *Journal Of Philosophy Of Education, 41*(1), 1-16.

Duran, N. (2005). *Matematiksel düşünme bbecerilerine ilişkin bir araştırma* [Yüksek Lisans Tezi]. Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Erbaş, A. K., Kertil, M., Çetinkaya, B., Çakıroğlu, E., Alacacı, C., & Baş, S. (2014). Matematik eğitiminde matematiksel modelleme: Temel kavramlar ve farklı yaklaşımlar. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 14*(4), 1-21.

Erkek, Ö., & Işıksal Bostan, M. (2019). Prospective middle school mathematics teachers' global argumentation structures. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(3), 613-633.

Erlandson, D. A., Harris, E. L., Skipper, B. L., & Allen, S. T. (1993). *Doing naturalistic inquiry; A guideto methods. Sage.*

Ersoy, E. (2012). *Üst düzey düşünme becerilerinin probleme dayalı öğrenme sürecinde duyuşsal kazanımlara etkisi* [Doktora Tezi]. Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Ersoy, E. ve Başer, N. (2013). Matematiksel düşünme ölçeğinin geliştirilmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 21*(4), 1471-1486.

Eryılmaz Toksoy, S. ve Akdeniz, A. R. (2015). Öğrencilerin kuvvet ve hareket ünitesi ile ilgili problemleri çözerken güçlük çektikleri noktaların ipucu kartlarıyla belirlenmesi. *Eğitim ve Bilim*, *40*(180), 343-362.

Finkelstein, S., Sharma, U., & Furlonger, B. (2021). The inclusive practices of classroom teachers: A scoping review and thematic analysis. *International Journal of Inclusive Education, 25*(6), 735-762.

Gabriel, F., Buckley, S., & Barthakur, A. (2020). The impact of mathematics anxiety on self-regulated learning and mathematical literacy. *Australian Journal of Education*, *64*(3), 227-242.

Garfield, J., & Ben-Zur, M. (2002). Students' misconceptions about graphs: Implications for teaching. *International Statistical Review, 70*(1), 1-18.

Geiger, V., Goos, M., & Forgasz, H. (2015). A rich interpretation of numeracy for the 21st century: *A survey of the state of the field. ZDM, 47*(4), 531-548.

Goldman, D. (2002). Mathematics, content, process, product, but do thinking skills‟ fit in?. *AMT*, *58*(4), 38-44.

Gossett, E. (2003). *Discrete mathematics with proof.* Pearson Education,

Gök, M. (2022). *Matematiksel düşünme üzerine yapılan çalışmaların sistematik olarak incelenmesi* [Yüksek Lisans Tezi]. Ordu Üniversitesi, Ordu.

Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2012). Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi, 1*(4), 56- 64.

Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2013). Öğrencilerin problem çözme sürecinde anlam bilgisini kullanma düzeyleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 21*(2), 469-488.

Göl, A. G. R., & Duru, A. (2016). Lise öğrencilerinin matematiksel genelleme süreçlerinin incelenmesi. *Yaşam Boyu Eğitim Dünya Kongresi*, 16-17.

Göl, R. (2017). *12. sınıf fen lisesi öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerinin özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında incelenmesi* [Yüksek Lisans Tezi]. Uşak Üniversitesi, Uşak.

Graven, M., & Venkat, H. (2007). Emerging pedagogic agendas in the teaching of mathematical literacy. *African Journal of Research in Mathematics, Scienceand Technology Education*, *11*(2), 67-84.

Güler, G. ve Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 20*(2), 571- 590.

Güneş, M., & Erdoğan, N. (2023). Matematiksel varsayımda bulunma ve analoji kullanımı: Öğrenci stratejilerinin analizi. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, *24*(3), 125-140.

Gürbüz, H. K., & Demir, Z. (2017). *Geometrik Problemler ve Özelleştirme: Matematiksel Düşünme Üzerindeki Etkiler*. Eğitim Araştırmaları Dergisi, 22(1), 89-104.

Hanna, G. ve Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatric, & C. Laborde, (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Kluwer Academic Publishers.

Hashemia, N., Abua, M. S., Kashefia, H. and Rahimib, K. (2013). Generalization in the learning of mathematics. In: The 2nd International Seminar on Quality and Affordable Education a Paper accepted to present at ISQAE2013.

Hacısalihoğlu, H., Mirasyedioğlu, Ş. ve Akpınar, A. (2003). *Matematik öğretimi: Matematikte yapılandırıcı öğrenme ve öğretme.* Asil Yayın Dağıtım.

Hayati, T. R., & Kamid, K. (2019). Analysis of mathematical literacy processes in high school students. *International Journal of Trends in Mathematics Education Research, 2*(3), 116-119.

Hazlitt, H. (1920). *Thinking as a science.* Button Company.

Heddens J. W. & Speer, W. R. (1997). *Today's mathematics*. Prentice Hall.

Henderson P. B.,Baldwin, D., Dasigi, V., Dupras, M., Fritz, J., Ginat, D., Goelman, D., Hamer, J., Hitchner, L., Lloyd, W., Jr., B.M., Riedesel, C. ve Walker, H.(2001). Striving for mathematical thinking. *ACM SIGCSE Bulletin*, *33*(4). 114- 124.

Henderson, P. B., Hitchner, L., Fritz, S. J., Marion, B., Scharff, C., Hamer, J., & Riedesel, C. (2002). Materials development in support of mathematical thinking. *ACM SIGCSE Bulletin, 35*(2), 185-190.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in contexts: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 195-222.

Hiller, S. E., Kitsantas, A., Cheema, J. E., & Poulou, M. (2022). Mathematics anxiety and self-efficacy as predictors of mathematics literacy. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(8), 2133-2151.

Hughes, E. K. (2006). *Lesson planning as a vehicle for developing pre-service secondary teachers' capacity to focus on students' mathematical thinking* [Unpublished Ph.D. Thesis]. University of Pittsburgh, Pittsburgh.

Hwang, J., & Ham, Y. (2021). Relationship between mathematical literacy and opportunity to learn with different types of mathematical Tasks. *Journal on Mathematics Education, 12*(2), 199-222.

Irmak, H. (2008). *Soyut matematik*. Pegem Akademi.

Isoda, M. and Katagiri, S. (2012). *Mathematical thinking: How to develop it in the classroom.* World Scientific.

Işık, E., & Semerci, Ç. (2019). Nitel araştırmalarda veri üçgenlemesi olarak odak grup görüşmesi, bireysel görüşme ve gözlem. *Turkish Journal of Educational Studies, 6*(3), 53-66.

Jankvist, U. T., & Kjeldsen, T. H. (2011). New avenues for history in mathematics education: Mathematical competencies and anchoring. *Science & Education*, *20*(9), 831-862.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*, 1-16.

Jitendra, A., & Jitendra, M. (2014). Promoting mathematical thinking in students with learning difficulties: A meta-analysis. *Exceptional Children*, *80*(4), 417-444.

Johnson, H., Watson, P. A., Delahunty, T., McSwiggen, P., & Smith, T. (2011). What it is they do: Differentiating knowledge and literacy practices across content disciplines. *Journal of Adolescent & Adult Literacy, 55*(2), 100-109.

Kalaycı, N. (2001). *Sosyal bilgilerde problem çözme ve uygulamalar*. Gazi Kitabevi.

Karasar, N. (2016). *Bilimsel araştırma yöntemi.* Nobel Yayın Dağıtım.

Karataş, İ. ve Güven, B.(2003). Problem çözme davranışlarının değerlendirilmesinde kullanılan yöntemler: Klinik mülakatın potansiyeli. *İlköğretim Online, 2*(2), 2-9.

Karataş, İ. ve Güven, B. (2004). 8. sınıf öğrencilerinin problem çözme becerilerinin belirlenmesi: Bir özel durum çalışması. *Milli Eğitim Dergisi*, *163*, 1-10.

Katipoğlu, M. (2016). *Matematik öğretiminde eğlence ve mizah içeren karikatürlerin kullanılmasının öğrencilerin matematik başarısına ve matematik kaygısına etkisi* [Yayınlanmamış yüksek lisans tezi]. Akdeniz Üniversitesi, Antalya.

Katipoğlu, S. N. (2019). *Hikaye yoluyla matematik öğretiminin öğrencilerin matematik başarısına etkisi* [Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi]. Akdeniz Üniversitesi, Antalya.

Kaya, E., & Demirtaş, H. (2021). Matematiksel düşünme süreçlerinde varsayımda bulunma stratejilerinin analizi. *Eğitim ve Bilim*, *46*(207), 95-110.

Kazancı, O. (1989). *Eğitimde eleştirel düşünme ve öğretimi.* Kazancı Hukuk Yayınları.

Keith, D. (2000). Finding your inner mathematician. *Chronicle of Higher Education, 47*(5), 5-6.

Keskin, M., Dağ, S. A. ve Altun, M. (2013). Comparison of 8th and 11th grade students behaviours at mathematical thinking. *Journal of Educational Science, 1*(1), 33- 50.

King, J. P. (1997). *Matematik sanatı.* Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu.

Knapp, J., & Zandieh, M. (2004). Examples as tools forunderstanding proof ın geometry. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education October 2004 Toronto, Ontario, Canada, 675.*

Koçak, S., & Yalçın, A. (2022). Matematiksel problem çözmede özelleştirmenin etkisi. *Uluslararası Eğitim Araştırmaları Dergisi*, *21*(4), 58-72.

Kozaklı Ülger, T. (2021). *Matematik okuryazarlık yeterliklerinin gelişimine dayalı bir modüler programın tasarlanması, uygulanması ve değerlendirilmesi* [Yayınlanmamış doktora tezi]. Bursa Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Köksal, G. (2019). *Matematiksel düşünmenin matematik kaygısı üzerine etkisinin çok değişkenli istatistiksel yöntemlerle incelenmesi* [Yüksek lisans tezi]. Çukurova Üniversitesi, Adana.

Krulik, S. & Rudnick, J. A. (1999). Innovative tasks to improve critical and creative thinking skills. *Developing Mathematical Reasoning İn Grades K-12*, *61*, 138.

Krummheuer, G. (1995). The ethnology of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in clasroom cultures* (pp.29-269). *Erlbaum.*

Küçük, H. (2014). Özelleştirme stratejilerinin matematiksel problem çözme üzerindeki etkileri. *Journal of Mathematics Education, 7*(2), 119-136.

Kükey, E. (2018). *Ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme biçimleri ile öğretmen ve öğretmen adaylarının bu konudaki görüşlerinin incelenmesi* [Doktora Tezi]. İnönü Üniversitesi, Malatya.

Lai, M.-L., & Liao, P.-J. (2022). The effects of problem customization strategies on mathematical problem-solving performance. *Journal of Mathematics Education Research, 15*(3), 213-230.

Lane, C. P. (2011). *Mathematical thinking and the process of specializing* [Doctoral Dissertation]. University of Cincinnati, Cincinnati.

Lane, C. P., & Harkness, S. S. (2012). Game show mathematics: Specializing, conjecturing, generalizing, and convincing. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(2), 163-173.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.

Legendre, R. (2005). *Dictionnaire actuel de l'éducation [Dictionary of education]* (3rd ed.). Guérin.

Lesh, R. E., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Liakos, I. E., Rogovchenko, S., & Rogovchenko, Y. (2018). A new tool for the assessment of the development of students' mathematical competencies. *The 19th SEFI Mathematics Working Group Seminar on Mathematics in Engineering Education, Portugal.*

Lim, C. S. and Hwa, T. Y. (2008). Implementing school-based assessment: The Mathematical Thinking Assessment (MATA) Framework. Buku Koleksi Bahan Seminar Inovasi Pedagogi IPBL, 73-88 Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry.* Sage.

Lipman, M. (2003). *Thinking in education* (Second edition). Cambridge University Press.

MacPhail, C., Khoza, N., Abler, L., & Ranganathan, M. (2016). Process guidelines for establishing intercoder reliability in qualitative studies. *Qualitative research, 16*(2), 198-212.

Marshall, C., & Rossman, G.B. (1999). *Designing qualitative research* (Third edition). Sage Publications.

Mason, J., Burton, L.& Stacey, K. (1985). *Thinking mathematically*. Addison-Wesley Publishers.

Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (Second Edition). Pearson Education Limited.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. W. H. Freeman and Company.

Mayring, P. (2011). *Nitel sosyal araştırmaya giriş*. (Çev. A. Gümüş ve M. S. Durgun), (1990).

Miller, L., & Rhoads, T. (2022). The use of conjecture in mathematical problem-solving: Strategies and implications. *Mathematics Education Research Journal*, *24*(3), 221-239.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2010). *PISA 2006 araştırması ulusal nihai raporu.*

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2011). *PISA Türkiye*. MEB Eğitek.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2011). *Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı*. Milli Eğitim Basımevi.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2023). *PISA 2022 Türkiye ön raporu.* Eğitim, Analiz ve Değerlendirme Raporları Serisi. Aralık 2023 No: 10

Merriam, S. B. (2016). *Qualitative research in practice: Strategies for expert sand beginners*. Jossey-Bass.

Merriam, S. B. (2009). *Qualitative Research: A guide to design and implementation.* Jossey-Bass.

Mubark, M. (2005). *Mathematical thinking and mathematical achievement of students in the year of 11 scientific stream in jordan* [Unpublished Ph.D. Thesis]. University of Newcastle, School of Education and Arts, Callaghan.

Miles, M. ve Huberman, A. (1994). *Qualitative data analysis*. Sage.

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 14*(1), 147-160.

Narimo, S., Anif, S., Prayitno, H. J., Sari, D. P., & Adnan, M. (2020, May). The development of student worksheets: questions of PISA model to analyze the ability of mathematical literacy in junior high school. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1538, No. 1, p. 012065). IOP Publishing.

Naser, T. (2008). *Problem çözme becerilerini değerlendirmede alternatif yöntemler ve ilköğretim matematikte örnek uygulama* [Yayınlanmamış yüksek lisans tezi]. Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Van.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

National Research Council. (2000). *How people learn: Brain, mind, experience, and school*. National Academies Press.

Neuman, W. L. (2014). *Social research methods: Qualitative and quantitive approaches* (7th Edition). Pearson Education Limited.

Niss, M. (2015). Mathematical competencies and PISA. In K. Stacey, & R. Turner (Eds.), *Assessing mathematical literacy: The PISA experience* (pp. 35-56). Springer.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115-124).

Niss, M. & Højgaard, T. (2011). *Competencies and mathematical learning*. Roskilde University.

Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics, 102*, 9-28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

Niss, M., & Jablonka, E. (2014). Mathematical literacy. In Lerman, S. (Ed.*) Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer.

Niss, M. (2015). Mathematical competencies and PISA. In K. Stacey, & R. Turner (Eds.), *Assessing mathematical literacy: The PISA experience* (pp. 35-56). Springer.

Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R., & Villa-Ochoa, J. A. (2017). Conceptualisation of the role of competencies, knowing and knowledge in mathematics education research. *In Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 235- 248). Springer.

O'Connor, C., & Joffe, H. (2020). Intercoder reliability in qualitative research: debates and practical guidelines. *International journal of qualitative methods, 19*, 1-13.

Organization for Economic Co-operation and Development (OECD) (2003). *The PISA 2003 assesment framework – mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills. OECD Publishing.*

Organization for Economic Co-operation and Development (OECD). (2013). *PISA 2012 results:* (Volume I). *OECD Publishing.*

Organization for Economic Co-operation and Development (OECD). (2016). *PISA 2015 Assessment and analytical framework. Science, reading, mathematics and financial literacy. OECD Publishing.*

Ojose, B. (2011). Mathematics literacy: Are we able to put the mathematics we learn into everyday use? *Journal of Mathematics Education, 4*(1), 89-100.

Olkun, S., Şahin, Ö., Akkurt, Z., Dikkartın, F. T. ve Gülbağcı, H. (2009). Modelleme yoluyla problem çözme ve genelleme: İlköğretim öğrencileriyle bir çalışma. *Eğitim ve Bilim, 34*(151), 65-73.

Öngel, B.O. (2023). *Ortaokul matematik ders kitaplarının PISA matematik okuryazarlığı çerçevesine göre incelenmesi* [Yayınlanmamış yüksek lisans tezi]. Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.

Ören, D. (2007). An investigation of 10th grade students' proof schemes in geometry with respect to their cognitive styles and gender [Yüksek lisans tezi]. Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Özdemir, N. K., & Kaya, S. A. (2011). *Geometri Problemlerinde Özelleştirmenin Öğrenci Başarısına Etkisi*. Eğitim ve Bilim, *36*(160), 134-146.

Özden, Y. (2002). *Eğitimde dönüşüm: Eğitimde yeni değerler* (4.Baskı). Pegem Akademi Yayıncılık.

Özden, Y. (2011). *Öğrenme ve öğretme.* Pegem Akademi Yayıncılık.

Özer, Ö. ve Arıkan, A. (2002). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapma düzeyleri. *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*. *Orta Doğu Teknik Üniversitesi.*

Özkaya, N. (2022). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarinin matematiksel eleştirel düşünme becerilerinin incelenmesi* [Yayınlanmamış yüksek lisans tezi]. Giresun Üniversitesi, Giresun.

Papert, S. (1972). Teaching children to be mathematicians versus teaching about mathematics. *International journal of mathematical education in science and technology, 3*(3), 249-262.

Patton, M. Q. (1980). *Qualitative evaluation methods.* Sage Publications..

Patton, M. Q. (1987). *How tousequalitativemethods in evaluation.* Sage Publications..

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods.* Sage Publications.

Patton, M. Q. (2001). *Qualitative research and evaluation methods.* Sage Publications..

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods (3. edition)*. Sage Publications.

Patton, M. Q. (2015). *Qualitative evaluation and research methods.* Sage Publications.

Peel, K. L. (2020). A beginner's guide to applied educational research using thematic analysis. *Practical Assessment, Research, and Evaluation, 25*(1), 1-15.

Pesen, C. (2003). *Eğitim fakülteleri ve sınıf öğretmenleri için matematik öğretimi.* Nobel Yayın Dağıtım.

Polya, G. (1957). *How to solve it (2nd ed.).* Princeton University Press.

Polya, G. (1973). *How to solve it: a new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.

Pritchard, R., & Thompson, J. (2021). The role of problem customization in mathematical problem-solving. *Journal of Mathematical Education, 14*(2), 103-118.

Radford, L. (2001). Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra. *In Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88).

Radford, L. (2002). Generalizing geometric-numeric patterns: Metaphors, indexes and other students' semiotic devices. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 63-72.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. and Peirce, C. S. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. *In Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (Vol. 1, pp. 2-21).

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM, 40*(1), 83-96.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical thinking and learning, 7*(1), 51-73.

Reys, R. E., Suydam, M. N., Lindquist, M. M., & Smith, N.L. (1995). *Helping children learn mathematics*. Allyn and Bacon.

Rico, L. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. In L. Puig, & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. I, pp. 87–102). Valencia: University of Valencia.

Rivera, F. D. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics*. Springer.

Robson, C. (1993). *Real world research*. Blackwells.

Rossi, R. J. (2006). *Theorems, corollaries, lemmas and lethods of proof.* Wiley-Interscience.

Ruggiero, V. R. (2004). *The art of thinking: A guide to critical and creative thought* (7. basım). Pearson Longman.

Sabancı, A. (2014). *Öğrenme öğretme süreci.* Nobel Akademik Yayıncılık

Sabena, C., Radford, L., and Bardini, C. (2005). Synchronizing Gestures, Words and Actions in Pattern Generalizations. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 129-136): University of Melbourne, Australia.

Sari, F. A., Yandari, I. A. V. & Fakhrudin (2017). The application of problem based learning model to improve mathematical literacy skill and the independent learning of student. *In Journal of physics: Conference series, 812*(1), 12-13. IOP Publishing.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. D.A. Grouws (Eds.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. *A project of thenationalcouncil of teachers of mathematics* (pp. 334-370).

Schoenfeld, A. H. (1992). *Mathematical thinking and problem solving*. Lawrence Erlbaum Associates.

Seidman, I. (2006). *Interviewing as qualitative research: A guide for researchers in education and the social sciences (3th edition).* Teachers College Press.

Sevgen, B. (2002). Matematiksel düşünce yapısı ve gelişimi. *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi.* Ortadoğu Teknik Üniversitesi.

Sezer, N. (2019). *Ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreç ve becerilerinin boylamsal incelenmesi* [Doktora tezi]. Bursa Uludağ Universitesi, Bursa.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge University Press.

Shanahan, T. (2018). Theimportance of reading comprehension. *The Reading Teacher*, *72*(4), 342-353.

Siebert, D., & Draper, R. J. (2012). Reconceptualizing literacy and instruction for mathematics classrooms. In T. L. Jetton, & C. Shanahan (Eds.), *Adolescent literacy in the academic disciplines* (pp. 172-198). Guilford Press.

Simon, M. A. and Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(1), 3-31.

Solso, S. (2010). Brain growth acrossthe life span in autism: Age-specificchanges in anatomical pathology. *Brain Res 1380,* 138-145.

Soysal, T., & Tavşanlı, Ö. F. (2023). Derinleştirerek yazma ve etkileşimli yazma stratejilerinin ilkokul üçüncü sınıf öğrencilerinin yazma başarısına etkisi. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *23*(3), 1418-1437.

Sönmez, D. (2022). PISA matematik okuryazarlığı sorularının farklı açılardan kritik edilmesi [Doktora Tezi]. Bursa Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Sözbilir, M., Sadi, S., Kutu, H.,Yıldırım, A. (2007). Kimya eğitiminde içeriğe/bağlama dayalı (context-based) Öğretim Yaklaşımı ve dünyadaki uygulamaları. *I. Ulusal Kimya Eğitimi Kongresi.*

Stacey, K. (2006). What Is Mathematıcal Thınkıng And Why Is It Important? *https://www.researchgate.net/publication/254408829* 09.03.2023 tarihinde erişilmiştir.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research.* Sage Publications.

Stake, R. E. (1998). Case studies. In N. K. Denzin and Y. S. Lincoln (Ed.) *Strategies of qualitative inquiry* (pp. 86- 104). Sage Publications.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical thinking and learning, 10*(4), 313-340.

Stenberg, K., & Maaranen, K. (2022). Promoting practical wisdom in teacher education: A qualitative descriptive study. *European Journal of Teacher Education*, *45*(5), 617-633.

Sternberg, R. J. ve Grigorenko, E. (2000). *Teaching thinking for successful intelligence*. Sky Light Professional Development, Arlington Heights.

Sternberg, RJ. & Ben-Zeev, T. (1996). *The nature of mathematical thinking*. Routledge.

Sternberg, R. J. (Ed.). (2000). *The nature and nurture of mathematical thinking*. Cambridge University Press.

Sultan, A. and Artzt, A. (2011). *The mathematics that every secondary math teacher needs to know.* Taylor and Francis Group.

Şahin, B. N. B. (2021). *Matematik öğretmenlerinin matematik okuryazarlığı ile ilgili mesleki gelişimlerinin dokümantal yaklaşım çerçevesinde incelenmesi* [Doktora Tezi]. Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Şahin, M., & Akbaba, E. (2016). Matematiksel problem çözme ve özelleştirmenin rolü. *Eğitim ve Bilim*, *41*(185), 30-45.

Şenol, S. V. (2022). İlkokul matematik öğretiminde matematik okuryazarlığı sorularının kullanılmasının matematik okuryazarlığı başarısı üzerine etkilerinin incelenmesi [Doktora Tezi]. Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking.* Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In Pme Conference (Vol. 1, Pp. 1-61). *The Program Commıttee Of The 18th Pme Conference.*

Tall, D. O. (2002). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.

Tanışlı, D. (2008). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntülere ilişkin anlama ve kavrama biçimlerinin belirlenmesi [Doktora tezi]. Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.

Tanışlı, D. (2013). Sınıf öğretmeni adaylarının genelleme sürecindeki bilişsel yapıları: Bir öğretim deneyi. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi, 12*(44), 255-283.

Taştepe, M. (2012). İspat kavramının kitap, öğretmen ve öğrenci boyutunda incelenmesi [Yüksek Lisans Tezi]. Marmara Üniversitesi, İstanbul.

Tavsanli, Ö. F., & Kaldirim, A. (2020). Critical discourse analysis of elementary school teachers' writership ıdentities. *International Electronic Journal of Elementary Education, 13*(1), 77-88.

Tavşanlı, Ö. F. (2021). Sınıf öğretmeni adaylarının okuryazar pratiklerinin sosyal bağlamda incelenmesi. *Ana Dili Eğitimi Dergisi, 9*(3), 854-870.

Tavşanlı, Ö. F. (2019). *Süreç temelli yazma modüler programının ilkokul 2. sınıf öğrencilerinin yazmaya ilişkin tutum, yazılı anlatım becerisi ve yazar kimliği üzerine etki*si [Yayınlanmamış doktora tezi]. *Bursa Uludağ Üniversitesi, Bursa.*

Tavşanlı, Ö. F., Bilgin, A., &Yıldırım, K. (2021). Elementary school students' views on process-based writing modular program intervention and writer identity: Elementary school students' views on process-based writing. *International Journal of Curriculum and Instruction, 13*(3), 2072-2100.

Tavşanlı, Ö. F., Kozaklı Ülger, T., & Kaldırım, A. (2018). The effect of graphic organizers on the problem posing skills of 3rd grade elementary school students. *Pegem Journal of Education and Instruction, 8*(2), 377-406.

Tay, J., & Sim, J. (2023). Investigating the impact of generalization on mathematical problem-solving and learning outcomes. *Educational Studies in Mathematics, 114*(1), 45-62.

Thompson, D. R., & Chappell, M. F. (2007). Communication and representation as elements in mathematical literacy. *Reading & Writing Quarterly, 23*(2), 179-196.

Tosun, N. (2019). *Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin açıortay konusunda matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi* [Yüksek lisans tezi]. Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.

Tuncay H. A. (2015). *Matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi* [Yüksek lisans tezi]. Cumhuriyet Üniversitesi, Sivas.

Turan Beder, G. (2023). *Liselere geçiş sistemi (LGS) mamtematik sorularının matematik okuryazarlığı çerçevesineve öğretmen görüşlerine göre incelenmesi* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Kafkas Üniversitesi, Kars.

Turner, R., Blum, W., & Niss, M. (2015). Using competencies to explain mathematical item demand: A work in progress. *Assessing Mathematical Literacy* (pp. 85-115). Springer.

Türnüklü E. B., Yeşildere S., (2005). Problem, Problem Çözme ve Eleştirel Düşünme, *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 25*(3), 107-123.

Tüzün M. (2019). *Ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme aşamaları ile matematik öz yeterlilikleri arasındaki ilişkinin incelenmesi* [Yüksek Lisans Tezi.] Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya.

Uğurel, I. & Moralı, S. (2006). Karikatürler ve matematik öğretiminde kullanımı. *Milli Eğitim Dergisi, 34*(170), 1-10.

Ulusal Tez Merkezi. (2020). Türkiye'de yayınlanmış lisans üstü tezler. *27.12.2020 tarihli link: https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/tezSorguSonuc*

Umay, A. (1996). Matematik eğitimi ve ölçülmesi. *Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi Dergisi, 12(*1), 145-149.

Umay, A. (1997). Daha fazla matematik neden olmasın? *Öğretmen Dünyası, 18* (216), 2-5.

Umay, U. (1992). *Matematiksel düşünmede süreci ve sonucu yoklayan testler arasında bir karşılaştırma* [Yayımlanmamış Doktora Tezi]. Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Umay, A. (1993). Matematiksel düşünmede süreci ve sonucu yoklayan testler arasında bir karşılaştırma. *Eğitim ve Bilim*, *17*(90).

Umbara, U., & Suryadi, D. (2019). Re-Interpretation of mathematical literacy based on the teacher's perspective. *International Journal of Instruction*, *12*(4), 789-806.

Ülger, T. K. (2021). *Matematik okuryazarlik yeterliklerinin gelişimine dayali bir modüler programin tasarlanmasi, uygulanmasi ve değerlendirilmesi* [Doktora Tezi]. Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Vaismoradi, M., Turunen, H., & Bondas, T. (2013). Content analysis and thematic analysis: Implications for conducting a qualitative descriptive study. *Nursing & Health Sciences*, *15*(3), 398-405. http://dx.doi.org/10.1111/nhs.12048

Van De Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Pearson Education.

Varghese, T. (2011). Possible student justification of proofs. *School Science and Mathematics, 111*(8), 409-415.

Venkat, H., Graven, M., Lampen, E., Nalube, P., & Chitera, N. (2009). Reasoning and reflecting in mathematical literacy. *Learning and Teaching Mathematics, 7*, 47-53.

Vershaffel, L., De Corte, E., Lasure,s., Vaerenbergh, Bogaerts, H. & Ratinckx, E. (1999). Learning to solve mathematical application problems: A desing experiment with fifth graders. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(3), 195–229.

Villiers, M. (2006). *Mathematical proof: The mathematical association of America*. Mathematical Association of America.

Wang, Y., & Li, Z. (2023). The role of conjecturing in mathematical problem-solving: An empirical study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *54*(2), 98-112.

Widyatiningtyas, R., Kusumah, Y. S., Sumarmo, U., & Sabandar, J. (2015). The Impact of Problem-Based Learning Approach to Senior High School Students' Mathematics Critical Thinking Ability. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education, 6*(2), 30-38.

Wijayanti, R., & Waluya, S. B. (2018). Analysis of mathematical literacy ability based on goal orientation in model eliciting activities learning with murder strategy. *In Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 983, No. 1, p. 012141). IOP Publishing.

Xu, B., Cai, J., Liu, Q., & Hwang, S. (2020). Teachers' predictions of students' mathematical thinking related to problem posing. *International Journal of Educational Research, 102*, 1-14.

Yalçın, M., & Demirtaş, H. (2013). *Geometrik Problem Çözmede Özelleştirmenin Etkisi: Bir Deneysel Çalışma*. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, *28*(2), 55-70.

Yavuz, G. (2006). *Dokuzuncu sınıf matematik dersinde problem çözme strateji öğretiminin duyuşsal özellikler ve erişiye etkisi* [Doktora Tezi]. Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Yazgan, Y. ve Arslan, Ç. (2017). *Matematiksel sıradışı problem çözme stratejileri ve örnekleri* (2. Baskı). Pegem Akademi Yayıncılık.

Yenilmez, K. (2009). İlköğretim okullarında matematiğe karşı olumsuz önyargı oluşturan etkenler. *NWSA: Education Sciences*, *4*(1), 25-33.

Yenilmez, K.,& Ata, A. (2013). Matematik okuryazarlığı dersinin öğretmen adaylarının matematik okuryazarlığı özyeterliğine etkisi. *The Journal of Academic Social Science Studies*, *6*(2), 1803-1816.

Yenilmez, K., & Ata, A. (2013). Matematik okuryazarlığı dersinin öğretmen adaylarının matematik okuryazarlığı özyeterliğine etkisi. *The Journal of Academic Social Science Studies*, *6*(2), 1803-1816.

Yerushalmy, M. (1993). Generalization in geometry. In J. Schwartz, M. Yerushalmy, & B. Wilson (Eds.), *The geometric supposer: What it is a case of*? (pp. 57–84). Erlbaum Inc.

Yeşildere-İmre, S., Akkoç, H., & Baştürk-Şahin, B. N. (2017). Ortaokul öğrencilerinin farklı temsil biçimlerini kullanarak matematiksel genelleme yapma becerileri. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *8*(1), 103-129.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, K. (2010). Nitel araştırmalarda niteliği artırma. *İlköğretim Online*, *9*(1), 79-92.

Yıldırım, C. (2014). *Matematiksel düşünme.* Remzi Kitabevi.

Yıldırım, C. (2018). *Matematiksel düşünme*. Remzi Kitabevi.

Yıldırım, D. (2015). *Ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerindeki matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi* [Doktora Tezi]. Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.

Yıldız, A. (2019). *9. sınıf öğrencilerinin matematiksel ispatla ilgili öğrenme güçlüklerinin belirlenmesi* [Yüksek Lisans Tezi]. Mersin Üniversitesi, Mersin.

Yılmaz, S. ve Özdil, H. (2022). Matematiksel problem çözme süreçlerinde özelleştirme stratejilerinin rolü. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, *20*(1), 45-63.

Yiğit, A. (2019). *Matematik öğretmen adaylarinin matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi* [Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi]. Gazi Üniversitesi, Ankara.

Yin, R. K. (2014). *Case study research: Design and methods*. Sage Publications.

Zhang, Y., & Wildemuth, B.M. (2009). Qualitative Analysis of Content. In B. Wildemuth (Ed.), *Applications of Social Research Methods to Questions in Information and Library Science. Westport, CT: Libraries Unlimited.*

Zhang, W., & Liu, X. (2024). Proof techniques and their impact on student understanding of mathematical concepts. *Journal of Mathematical Behavior*, *69*, 101-115.

EKLER

EK 1: Matematik Okuryazarlığı Soruları

MATEMATİK OKURYAZARLIĞI SORULARI

NİCELİK (SAYILAR) SORULARI

SORU 1. TELEFON FATURASI



Matematik kongresi için Ağustos 2023'te Atina'ya giden Murat Öğretmen, telefonunun bağlı bulunduğu GSM şirketinden 250 TL ödeyerek 45 dakikalık aylık yurt dışı paketi satın alıyor. Yaptığı altı telefon görüşmesi sırasıyla 8.6 dk, 2.3 dk, 5.9 dk, 13.2 dk, 8.01 dk, 3.1 dk sürüyor ve ardından ilgili şirketten **"**Paket sınırının aşıldığı**"** mesajını alıyor.

Sınır nasıl aşılmış olabilir? Haklı bir gerekçe üretiniz.

Lütfen çözümünüzü bu alana yapınız.

Problemi nasıl çözdüğünüzü ve hangi yolu tercih ettiğinizi açıklayınız.

SORU 2 . TAVUK YUMURTASI

Bir tavuk yumurtası ortalama 60 gr ağırlığındadır. Tavuk yumurtasının akı bütün yumurtanın yaklaşık %70'lik bir kısmını oluşturmaktadır. %30'u yumurta akı olan 500 gr'lık bir tatlı için yaklaşık kaç adet tavuk yumurtasına ihtiyaç duyulur?



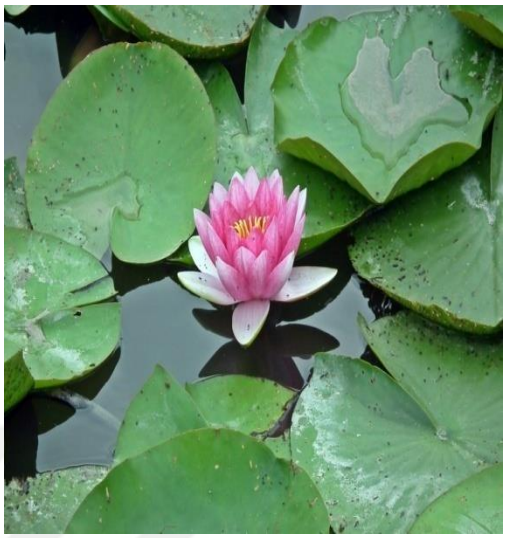
Cevabınızı matematiksel olarak açıklayınız.

Lütfen çözümünüzü bu alana yapınız.

Problemi nasıl çözdüğünüzü ve hangi yolu tercih ettiğinizi açıklayınız.

SORU 3 . NİLÜFER ÇİÇEĞİNİN YAPRAKLARI

Bir tür nilüfer çiçeği, her gün bir önceki gün yapraklarının göl yüzeyini kapladığı alanın iki katı kadar alanı kaplamaktadır. Bu çiçeğin yapraklarının bir göl yüzeyini 15 günde tamamen kapattığını varsayalım. Bu duruma göre bu çiçeğin yaprakları 12. günün sonunda **gölün ne kadarını** kaplamıştır?



Lütfen çözümünüzü bu alana yapınız

Problemi nasıl çözdüğünüzü ve hangi yolu tercih ettiğinizi açıklayınız

SORU 4. BADANA-BOYA

Bir boya türü 2 ve 5 litrelik plastik kovalarda piyasaya sürülmüştür. 2 litrelik ambalajın fiyatı 8 lira, 5 litrelik ambalajın fiyatı 15 liradır. Evini badana ettirmek için 16 litre boyaya ihtiyacı olan bir kimse bu ihtiyacını, en az kaç lira harcayarak karşılayabilir?

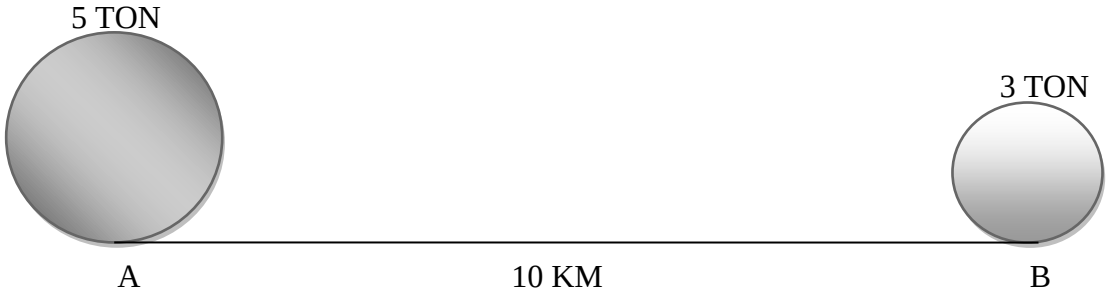


Lütfen çözümünüzü bu alana yapınız

Problemi nasıl çözdüğünüzü ve hangi yolu tercih ettiğinizi açıklayınız

DEĞİŞİM VE İLİŞKİLER SORULARI

SORU 5. YÜK TAŞIMA



A noktasındaki 5 ton yük ile B noktasındaki 3 ton yük AB hattı üzerinde bir noktaya taşınacaktır. A'daki yükün tonunun km başına taşınma fiyatı 17 lira, B'deki yükün tonunun km başına taşınma fiyatı 13 liradır. En ucuz maliyet için yükler **AB hattı üzerinde nereye** taşınmalıdır?

Cevabınızı matematiksel olarak açıklayınız.

Lütfen çözümünüzü bu alana yapınız

Problemi nasıl çözdüğünüzü ve hangi yolu tercih ettiğinizi açıklayınız

SORU 6. MEKİK



Bir spor bölümü giriş sınavında adayların dayanıklılık dereceleri mekik sayısı ile ölçülüyor. 60 mekiğin altına mekik yapanlara puan verilmeyen bu yarışmada en çok 109 mekik yapan çıkıyor. Değerlendirme kuralına göre sonuçlar hesaplanırken en çok mekik sayısına 100 puan verilecek ve puanlar mekik sayısı ile orantılı olacak şekilde hesaplanacaktır.

A.) Buna göre 70 mekik yapan sporcu 100 üzerinden kaç puan alır?

B.) Dayanıklılık puanlarını mekik sayısına bağlı olarak belirleyen bir formül yazılabilir mi?

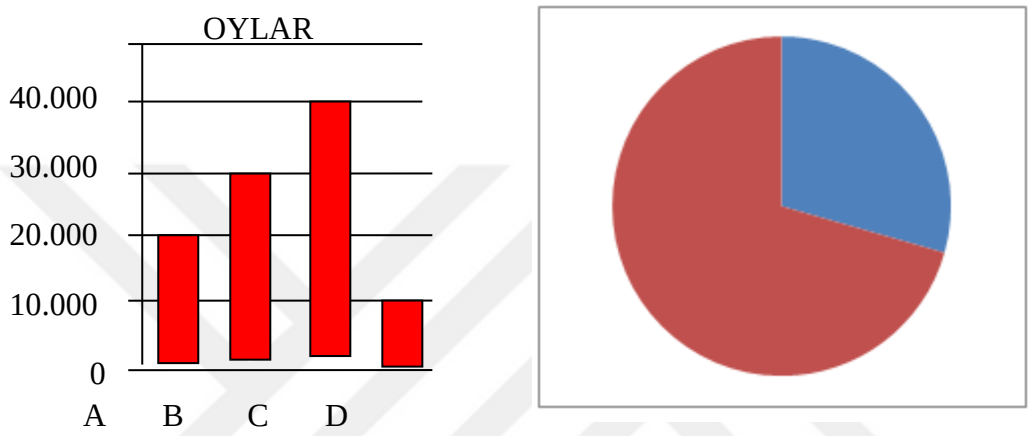
Lütfen çözümünüzü bu alana yapınız

Problemi nasıl çözdüğünüzü ve hangi yolu tercih ettiğinizi açıklayınız

BELİRSİZLİK VE VERİ SORULARI

SORU 7. SEÇİM

Bir seçime giren 4 partinin aldıkları oylar sütun grafiğinde aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Aynı partiler dairesel grafikte gösterilecek olur ise mavi gölgeli kısım hangi partiyi temsil eder? Cevabınızı nasıl karşılaştırdığınızı açıklayınız.

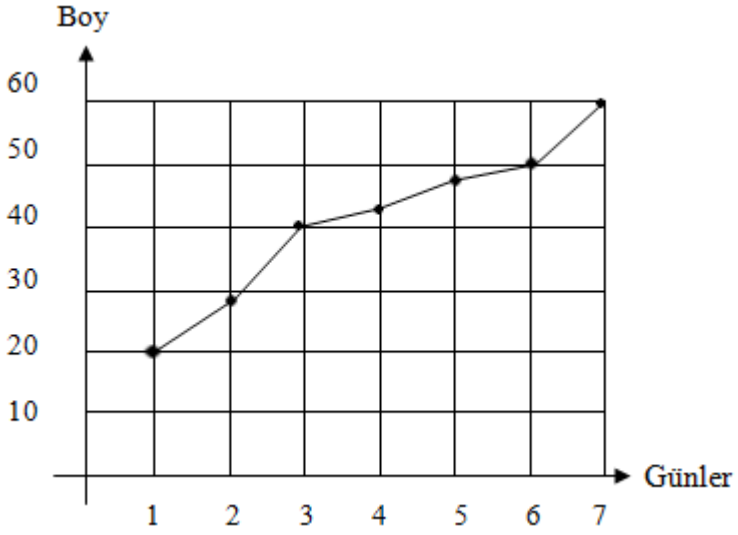


Lütfen çözümünüzü bu alana yapınız

Problemi nasıl çözdüğünüzü ve hangi yolu tercih ettiğinizi açıklayınız

SORU 8. FASULYE

Bir sınıftaki her öğrenci Fen Bilgisi Dersi kapsamında çimlendirilmiş bir bitkinin boy uzamasını 10 gün boyunca izlemek ve gözlemlerini çizgi grafiğe aktarmakla görevlendirilmiştir. Aşağıdaki grafik Kemal'in gözlediği fasulyenin bir haftadaki boy değişimini göstermektedir. Buna göre;



A. Bitkinin boyu bir haftada yüzde kaç artmıştır?

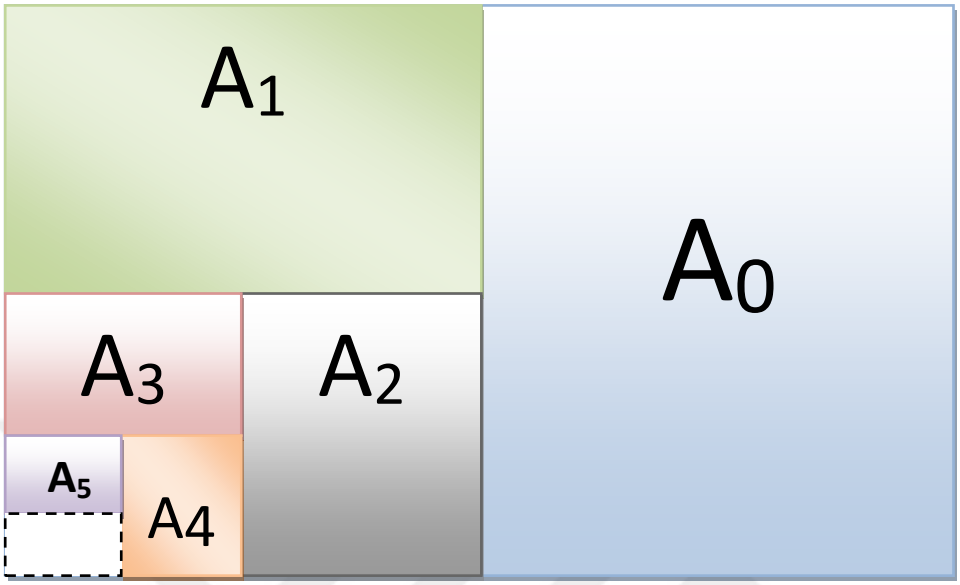
B. Fasulyenin uzaması aynı düzende devam ederse Kemal'in ödevini teslim edeceği zaman yani 10. Gün bitkinin boyunun yaklaşık kaç cm olması beklenir?

Lütfen çözümünüzü bu alana yapınız

Problemi nasıl çözdüğünüzü ve hangi yolu tercih ettiğinizi açıklayınız

UZAY VE ŞEKİL SORULARI

SORU 9. DOSYA KAĞIDI



Standart kağıt boyutları olarak bilinen baskı ve yazışmalarda kullanılan kağıtlar büyükten küçüğe doğrı A_0,A_1,$A_{2,.....,}A_8$ olmak üzere 9 tanedir. Her farklı boyuttaki kağıt diğerinin benzeri olan bir dikdörtgendir. Dosya kağıdı olarak ta bilinen A_4 kağıdının ölçüleri 21 cm x 29.7 cm' dir. Bir büyük boyutu olanını elde etmek için aynı ebatlı iki kağıdı uzun kenarı boyunca yan yana getirmek gerekir. Buna göre A_3'ün boyutlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 10,5 B) 14,7 C) 42 D) 59,4

Lütfen çözümünüzü bu alana yapınız

Problemi nasıl çözdüğünüzü ve hangi yolu tercih ettiğinizi açıklayınız

SORU 10. ÇAM AĞACI GÖVDESİNİN ÇAPI



Bir piknik alanında gezen Buğra, karşılaştığı bir çam ağacının gövde çapının kaç cm olduğunu merak ediyor, fakat ölçüm yapmak için gerekli araç gereci yok. Kendi boyunun 165 cm olduğunu ve bir insanda kulaç uzunluğunun kendi boyuna eşit olduğunu biliyor. Ağaca sarıldığında parmak uçlarının birbirine değdiğini fark ediyor. Bunun üzerine Buğra, ağacın çapının yaklaşık 55 cm olduğuna karar veriyor. Buğra bu bilgiye nasıl ulaşmış olabilir? Cevabınızı matematiksel olarak açıklayınız.

Lütfen çözümünüzü bu alana yapınız

Problemi nasıl çözdüğünüzü ve hangi yolu tercih ettiğinizi açıklayınız

EK 2: Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları

GÖRÜŞME SORULARI

Ana Soru:

Bu problemi nasıl çözdün? Niçin böyle bir yol tercih ettin?

Yardımcı Sorular:

1. Bu problemde ne hedeflenmektedir?

2. Bu problem, farklı olarak nasıl çözülebilir?

3. Öğrenci problemi çözmeye nasıl başlar?

4. Öğrenci bu şekilde çözerken nasıl düşünür? Bunu nasıl belirler?

5. Öğrenci problemde hedeflenen matematiksel kavramları ne şekilde anlar?

6. Problemleri çözmek için öğrencilerin neler yapabileceğini düşünüyorsunuz?

7. Problemin kolaylığı ya da zorluğu hakkında ne düşünüyorsun? Niçin böyle düşünüyorsun?

EK 3: Matematiksel Düşünmeyi Değerlendirme Rubriği

Düşünme Boyutları Alt Kategorileri	Yeterlilikler
Özelleştirme Boyutu	
Yeterli Özelleştirme	*Problemi doğru anlar. *Örnekler verir. *Verilen örnekler doğru, eksiksiz ve genel durumu temsil eder. *Soruyla ilgili çizimler yapar, modeller kurar. *Çözüm yolunu belirlemeye yönelik bilinçli hareketler yapar.
Kısmi Özelleştirme	*Soruda anlatılanın tamamını değil**,** bir kısmını göz önünde tutar. *İstenen büyük oranda anlaşılmıştır fakat hamlelerde eksiklikler vardır. *Unutulan, gözden kaçan küçük ama sonucu etkileyen durumlar vardır. *Verilen örnekler genel durumu büyük ölçüde kapsıyor, ancak bazı detaylar eksik.
Hatalı Özelleştirme	*Soruda istenen durum tam olarak anlaşılamamıştır. *Çözüm için ilk akla gelen yöntem uygulanmıştır. *Örnekler yanıltıcı ve yanlış bilgiler içeriyor, doğru bilgiler çok az. *Çözümde istenenden büyük ölçüde sapmalar görülmektedir.
Genelleme Boyutu	
Cebirsel Genelleme	*Var olan sayısal şemalar çerçevesinde yeni sayısal ilişkiler oluşturur. *Verilenler arası ilişkiyi harfler, rakamlar yani cebir ile açıklar. *Sayı veya şekiller arası ilişkiye ek olarak bu ilişkinin yapısını ortaya çıkarır
Saf Genelleme	*Verilen bilgileri sınıflandırır, sıralar, eşleştirir, karşılaştırır. *Verilenlerin benzerlik ve farklılıklarını ortaya koyor. *İki değişken arasındaki ilişkiyi sözel veya matematiksel olarak ifade eder. *Ortaya çıkabilecek tüm olasılıkları açıklar

Aritmetik Genelleme	*Terimler arasında ortak bir ilişki genellenir. *Genel kavramları oluşturur ve bunları organize eder.
Olgunlaşmamış Tümevarım	*Deneme yanılma yöntemini kullanır. * Birkaç örneğe dayanarak genel bir kural veya formül çıkarır. *Bir örneği göstererek kuralın tüm benzer durumlar için geçerli olduğunu varsayar. *Örüntüler üzerinden genel kurala yönelik tahminlerde bulunur.
Varsayımda Bulunma Boyutu	
Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	* Sınırlı sayıda ayrık durumu gözler ve eleştirel inceler. *Gözlemlenen verilere dayanarak yapılan tahminleri içerir. *Sonlu sayıdaki örneklere dayanarak genel bir kural, ilişki veya eğilim ortaya koymayı amaçlar
Dinamik Durumlardan Empirik Tümevarım	*Bir durumun değişmeyen bir özelliğini algılar. *Algılanan özelliğin diğer durumlarda geçerli olacağı bir tahmin tasarlar. *Tahmini formülize eder ve uygular.
Analoji	* Bilinen başka bir pratik kurala dayanarak tahmin yapar. *Farklı alanlardan veya bağlamlardan gelen bilgileri matematiksel bir problemi çözme sürecinde kullanır. *Benzerlikler kurarak, soyut matematiksel kavramları somut örneklerle ilişkilendirir.
Abdüksiyon	*Açıklanması zor olan bir olayı genel bir kural çerçevesinde tahmin ederek açıklar. *Mevcut matematiksel ilkelerden yola çıkarak olası bir hipotez üretir ve bu hipotezi daha sonra doğrulamaya veya yanlışlamaya çalışır. *Eksik ve yanlış bilgi durumlarında bir tahminde bulunma ve olası bir çözüm yolu belirleme yeteneği sağlar.
Algıya Dayalı Tahmin	*Sözel olarak verilen bir problemini çizimler yoluyla görselleştirerek kuralla ilgili tahminde bulunur. * Soruyu algısal bir gösterime çevirir. * Matematiksel modeller ve simülasyonlar kullanır.

İspat Boyutu	
Saf Deneycilik	*İspat edilmek istenen bir teorem veya iddia için belirli durumlar ve örnekler üzerinden doğrudan gözlem yapar. * Sadece birkaç örneğe bakarak ifadenin doğru olduğu sonucuna varır ve genelleme yapar. *İspatlanmak istenen teorem veya iddia, genellikle belirli koşullar altında geçerli olur.
Kritik Deney	* Tek bir örneğe bakar ve o (istisnai) örnek için doğruysa ortaya çıkan ifadenin doğru olduğuna karar verir. *Eğer burada doğru ise her yerde doğrudur" iddiasını kullanır. *Kritik deney iddiayı çürütürse, iddiayı genellikle geçersiz kabul eder.
Genel Örnek	*İddianın veya teoremin tüm durumlar için geçerli olduğunu göstermek veya göstermemek için soruda verilen ifadenin özelliklerini ve yapısını temsil eden genel bir örnek seçer. *Eğer iddia genel örnek için doğru ise, teoremi doğru kabul eder.
Düşünce Deneyi	*Matematiksel teoremleri, sonuçları veya önermeleri test etmek veya anlamak için hayal edilen durumları kullanır. *Mantıksal sonuçlar çıkararak iddiayı ispatlamaya çalışır.
Doğrudan İspat	*Verilen önerme veya teoremin şartlarını aynen alıp istenen sonuca ulaşmaya çalışır. *İspat edilen teorem veya iddia, mantıksal süreçlerle kesinlikle ve açıkça doğrulanır veya çürütülür.

EK 4: Tez Çoğaltma Ve Elektronik Yayımlama İzin Formu

BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

TEZ ÇOĞALTMA VE ELEKTRONİK YAYIMLAMA İZİN FORMU

Yazar Adı Soyadı	Muhammet KATİPOĞLU
Tez Adı	Matematiksel Düşünmeyi Geliştirmesi Bakımından Okuryazarlık Problemlerinin Değerlendirilmesi
Enstitü	Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi
Bilim Dalı	Matematik Eğitimi
Tez Türü	Doktora Tezi
Tez Danışman(lar)ı	Prof. Dr. Gül KALELİ YILMAZ
Çoğaltma (Fotokopi Çekim) İzni Kısıtlama	☐ Patent Kısıt (2 yıl) ☒ Genel Kısıt (6 ay) ☐ Tezimin elektronik ortamda yayımlanmasına izin veriyorum.

Hazırlamış olduğum tezimin belirttiğim hususlar dikkate alınarak, fikri mülkiyet haklarım saklı kalmak üzere Bursa Uludağ Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı tarafından hizmete sunulmasına izin verdiğimi beyan ederim.

Tarih : . ./… /2024 Muhammet KATİPOĞLU

EK 5: Etik Kurul Raporu

BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
ARAŞTIRMA VE YAYIN ETİK KURULLARI
(Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırma ve Yayın Etik Kurulu)
TOPLANTI TUTANAĞI

OTURUM TARİHİ
27 EKİM 2023

OTURUM SAYISI
2023-09

KARAR NO 21: Eğitim Fakültesi Dekanlığından alınan Matematik ve Fen Bilimleri Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı öğretim üyesi Prof. Dr. Gül KALELİ YILMAZ'ın sorumluluğunda doktora programı öğrencisi Muhammet KATİPOĞLU ile birlikte yürütecekleri "Matematiksel Düşünmeyi Geliştirmesi Bakımından Okuryazarlık Problemlerinin Değerlendirilmesi" konulu araştırma çalışması kapsamında uygulanacak yarı yapılandırılmış görüşme sorularının değerlendirilmesine geçildi.

Yapılan görüşmeler sonunda; Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı öğretim üyesi Prof. Dr. Gül KALELİ YILMAZ'ın sorumluluğunda doktora programı öğrencisi Muhammet KATİPOĞLU ile birlikte yürütecekleri "Matematiksel Düşünmeyi Geliştirmesi Bakımından Okuryazarlık Problemlerinin Değerlendirilmesi" konulu araştırma çalışması kapsamında uygulanacak yarı yapılandırılmış görüşme sorularının fikri, hukuki ve telif hakları bakımından metot ve ölçeğine ilişkin sorumluluğu başvurucuya ait olmak üzere uygun olduğuna oybirliği ile karar verildi.

Prof. Dr. Zekeriyya ARI
Kurul Başkanı

Prof. Dr. Abamüslim AKDEMİR
Üye

Prof. Dr. Atila ERKAL
Üye

Prof. Dr. Nuran BAYRAM ARLI
Üye

Prof. Dr. Vejdi BİLGİN
Üye

Prof. Dr. Yusuf ALPER
Üye

Prof. Dr. Alev SINAR UĞURLU
Üye

EK 6: Katılım Kabul Formu

Sayın Katılımcımız,

Katılacağınız bu çalışma"**MATEMATİKSEL DÜŞÜNMEYİ GELİŞTİRMESİ BAKIMINDAN OKURYAZARLIK PROBLEMLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ**" adıyla **01.12.2023 - 30.12.2023** tarihleri arasında yapılacak bir araştırma uygulamasıdır.

Araştırmanın Hedefi: **Bu araştırmanın hedefi ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin matematik okuryazarlık sorularını çözerken matematiksel düşünme süreçlerini kullanıp kullanmadığını ve kullanıyor ise matematiksel düşünmenin hangi aşamasına yönelik süreçleri kullandığını ortaya çıkarmaktır.**

Araştırmanın Nedeni: O Bilimsel araştırma **O *Tez çalışması***

Araştırmanın Yapılacağı Yer(ler): **İMAM HATİP ORTAOKULU**

Araştırma Uygulaması: ***O Anket O Görüşme*** *O Gözlem*

Araştırma T.C. Milli Eğitim Bakanlığı'nın ve okul/kurum yönetiminin izni ile gerçekleşmektedir. Araştırma uygulamasına katılım tamamıyla gönüllülük esasına dayalı olmaktadır. Çalışmada sizden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Cevaplar tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir. Veriler sadece araştırmada kullanılacak ve üçüncü kişilerle paylaşılmayacaktır.

Uygulamalar, kişisel rahatsızlık verecek sorular ve durumlar içermemektedir. Ancak, katılım sırasında sorulardan ya da herhangi başka bir nedenden rahatsız hissederseniz cevaplama işini yarıda bırakabilirsiniz.

Katılımı onaylamadan önce sormak istediğiniz herhangi bir konu varsa sormaktan çekinmeyiniz. Çalışma bittikten sonra bizlere telefon veya e-posta ile ulaşarak soru sorabilir, sonuçlar hakkında bilgi isteyebilirsiniz. Saygılarımızla,

Araştırmacı : **Muhammet Katipoğlu**

İletişim bilgileri :

Yukarıda bilgileri bulunan araştırmaya katılmayı kabul ediyorum.

…./…../……

İsim-Soyisim İmza:

Katılımcı Adı-Soyadı :

Telefon Numarası :

EK 7: Veli Onam Formu

Sayın Veli;
Çocuğunuzun katılacağı bu çalışma, "**MATEMATİKSEL DÜŞÜNMEYİ GELİŞTİRMESİ BAKIMINDAN OKURYAZARLIK PROBLEMLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ**" adıyla **01.12.2023 - 30.12.2023** tarihleri arasında yapılacak bir araştırma uygulamasıdır.

Araştırmanın Hedefi: Bu araştırmanın hedefi ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin matematik okuryazarlık sorularını çözerken matematiksel düşünme süreçlerini kullanıp kullanmadığını ve kullanıyor ise matematiksel düşünmenin hangi aşamasına yönelik süreçleri kullandığını ortaya çıkarmaktır. Araştırma Uygulaması: ***Anket*** / ***Görüşme*** / ***Gözlem*** şeklindedir.

Araştırma T.C. Milli Eğitim Bakanlığı'nın ve okul yönetiminin de izni ile gerçekleşmektedir. Araştırma uygulamasına katılım tamamıyla gönüllülük esasına dayalı olmaktadır. Çocuğunuz çalışmaya katılıp katılmamakta özgürdür. Araştırma çocuğunuz için herhangi bir istenmeyen etki ya da risk taşımamaktadır. Çocuğunuzun katılımı **tamamen sizin isteğinize bağlıdır**, reddedebilir ya da herhangi bir aşamasında ayrılabilirsiniz. Araştırmaya katılmamama veya araştırmadan ayrılma durumunda öğrencilerin akademik başarıları, okul ve öğretmenleriyle olan ilişkileri etkilemeyecektir.

Çalışmada öğrencilerden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Cevaplar tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir.

Uygulamalar, genel olarak kişisel rahatsızlık verecek sorular ve durumlar içermemektedir. Ancak, katılım sırasında sorulardan ya da herhangi başka bir nedenden çocuğunuz kendisini rahatsız hissederse cevaplama işini yarıda bırakıp çıkmakta özgürdür. Bu durumda rahatsızlığın giderilmesi için gereken yardım sağlanacaktır. Çocuğunuz çalışmaya katıldıktan sonra istediği an vazgeçebilir. Böyle bir durumda veri toplama aracını uygulayan kişiye, çalışmayı tamamlamayacağını söylemesi yeterli olacaktır. Anket çalışmasına katılmamak ya da katıldıktan sonra vazgeçmek çocuğunuza hiçbir sorumluluk getirmeyecektir.

Onay vermeden önce sormak istediğiniz herhangi bir konu varsa sormaktan çekinmeyiniz. Çalışma bittikten sonra bizlere telefon veya e-posta ile ulaşarak soru sorabilir, sonuçlar hakkında bilgi isteyebilirsiniz. Saygılarımızla..

Araştırmacı : **Muhammet Katipoğlu**

İletişim bilgileri **:**

Velisi bulunduğum ..... sınıfı ..... numaralı öğrencisi ..... ……..'in yukarıda açıklanan araştırmaya katılmasına izin veriyorum.
(Lütfen formu imzaladıktan sonra çocuğunuzla okula geri gönderiniz*).

…./…../……

İsim-Soyisim İmza:

Veli Adı-Soyadı :

Telefon Numarası :

EK 8: Araştırma İzni Başvuru Taahhütnamesi

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞINA BAĞLI OKUL VE KURUMLARDA GERÇEKLEŞTİRİLECEK ARAŞTIRMA UYGULAMALARINA İLİŞKİN

ARAŞTIRMA iZNİ BAŞVURU TAAHHÜTNAMESİ

1. Araştırmam boyunca anayasa/kanun ve yönetmeliklere uygun davranacağımı,
2. Araştırmayı yürüteceğim okulun/kurumun kurallarına uyacağımı,
3. Araştırmanl boyunca hiç kimseyi araştırmama/çalışnıanıa katılmaya zorlamayacağımı,
4. Araştırmayı/çalışmayı bana tahsis edilen ınekân/sınıf ve zamanda gerçekleştireceğiini,
5. Araştırnıanın olası fiziksel/ruhsal zararları konusunda katılımcıları bilgilendireceğimi,
6. Araştırmam/ çalışmam sırasında topladığım kişisel bilgileri koruyacağımı,
7. Araştırmam/çalışmam için gerektiği kadar veri toplayacağımı,
8. Araştırma/çalışma sırasında öğrencilerin derslerinde/çalışmalarında herhangi bir kayıplarının olmayacağını,
9. AraştHmam/çalışmam sırasında herhangi bir ticari faaliyette bulunmayacağımı, katılımcıları herhangi bir ürün/eser/tedaviye yönlendirmeyeceğimi,
10. Araştırma izin evraklarını okul yönetimine teslim edeceğimi,
11. Araştırma/çalışma sırasında izni olan evrakları kullanacağımı,
12. Tıbbi araştırmalarda araştırma/çalışmanın uygulama sırasında etik kurallara uyacağımı,
13. Araştırma/çalışma sırasında topladığım ses ve görüntü kayıtlarını güvenilir ortamlarda saklayacağımı ve araştırma/çalışma sonrasında imha edeceğimi,
14. Genelge hükümlerine aykırı davranmanı ve herhangi bir yanlış ifade, beyan ve maddi gerçeği gizleme gibi durumlarda adlî ve idarî işleınlerin yürütülmesini kabul edeceğimi,
15. İzin alınmış araştırınalarda/projelerde insanlarla ilgili yapılacak anket, görüşme, gözlem, alan araştırması, uygulama ve incelemelerde sağlık, güvenlik, insan hakları, mevcut mevzuat hükümleri, hukukun genel ilkelerini ihlal etmeyeceğimi ve etik ilkelere uyacağHnı,
16. Araştırma ile ilgili sonuç raporlarını çalışmanın bitiş tarihinden itibaren 30 gün içinde izin aldığım birime ulaştıracağımı,

Kabul ettiğimi beyan ederim.

Araştırmanın Adı

Matematiksel Düşünmeyi Geliştirmesi Bakımından Okuryazarlık Problemlerinin Değerlendirilmesi

Araştırmacı

MUHAMMET KATİPOĞLU

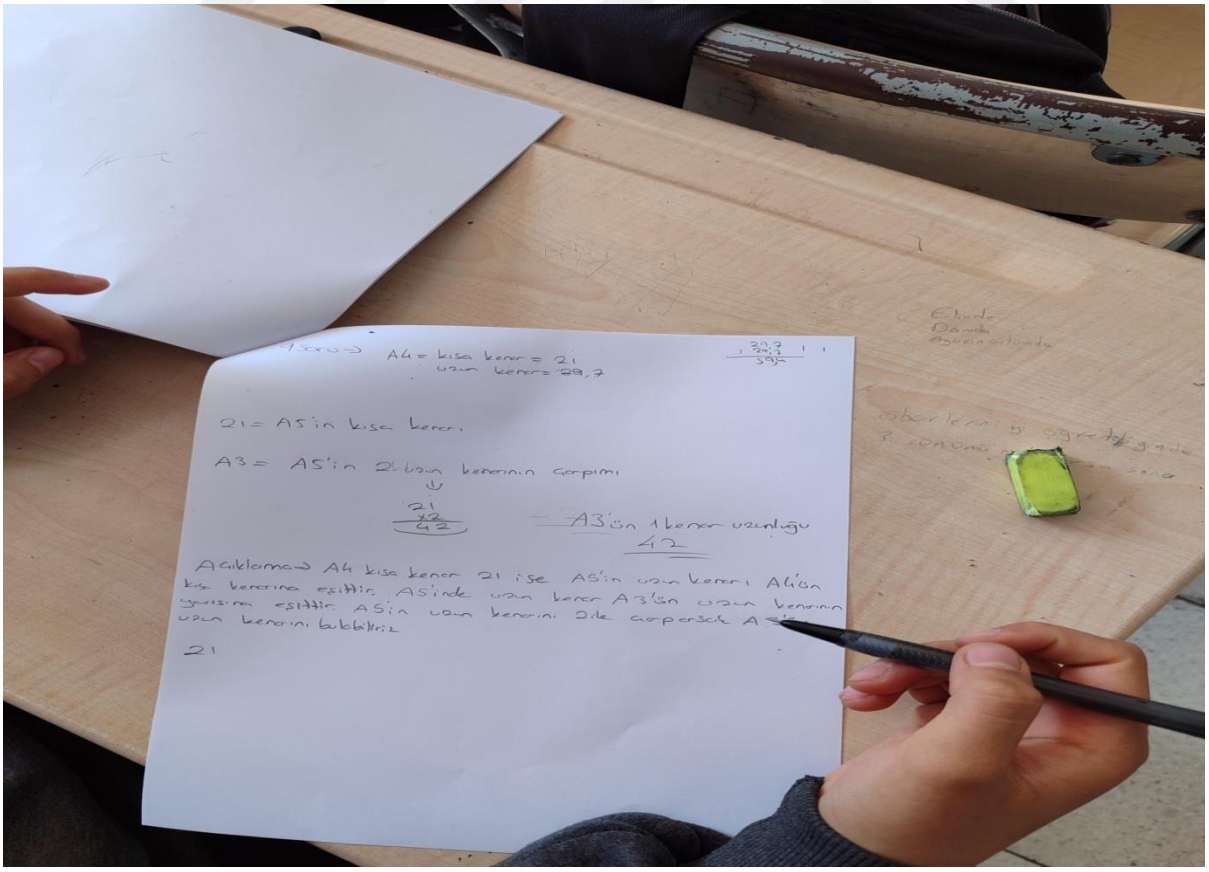
…./…../……

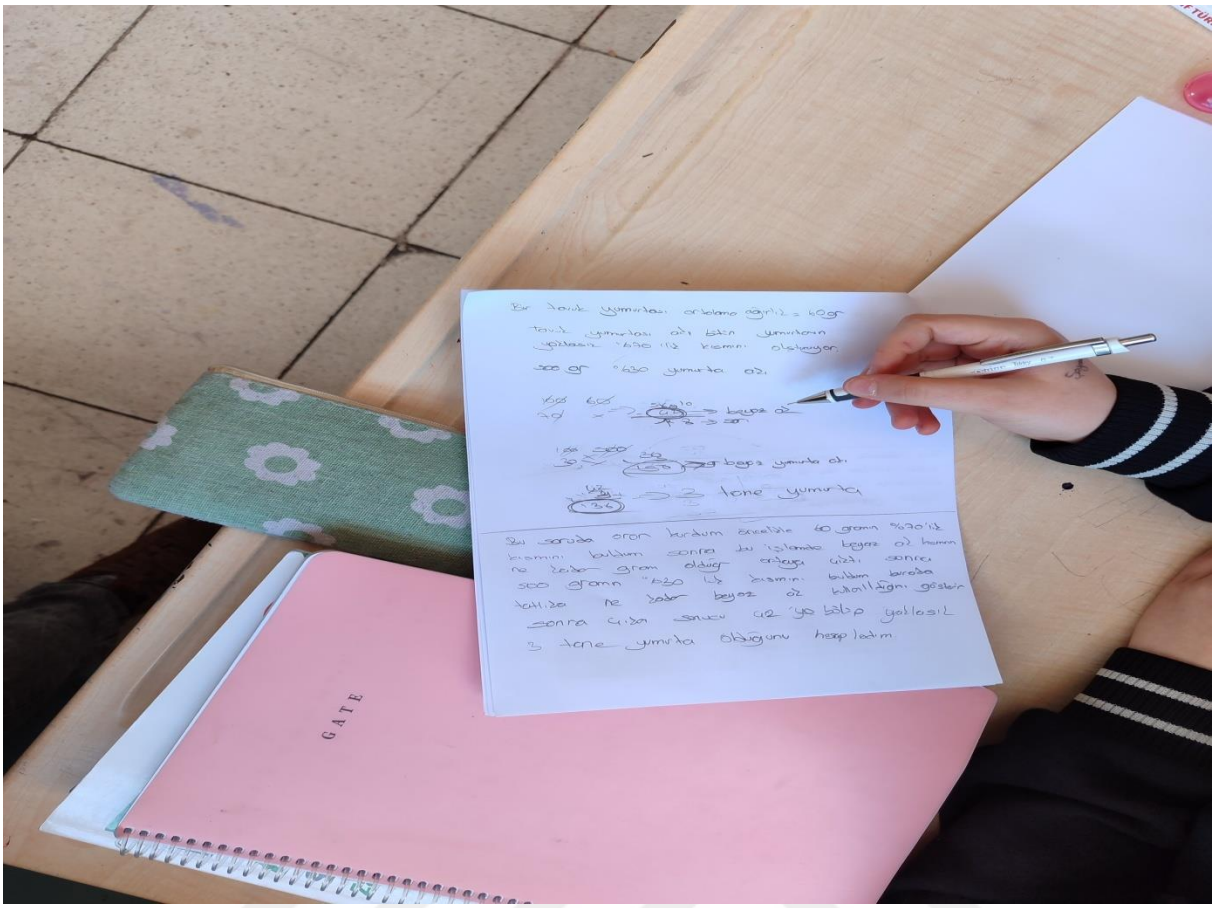
EK 8: Uygulama Resimleri

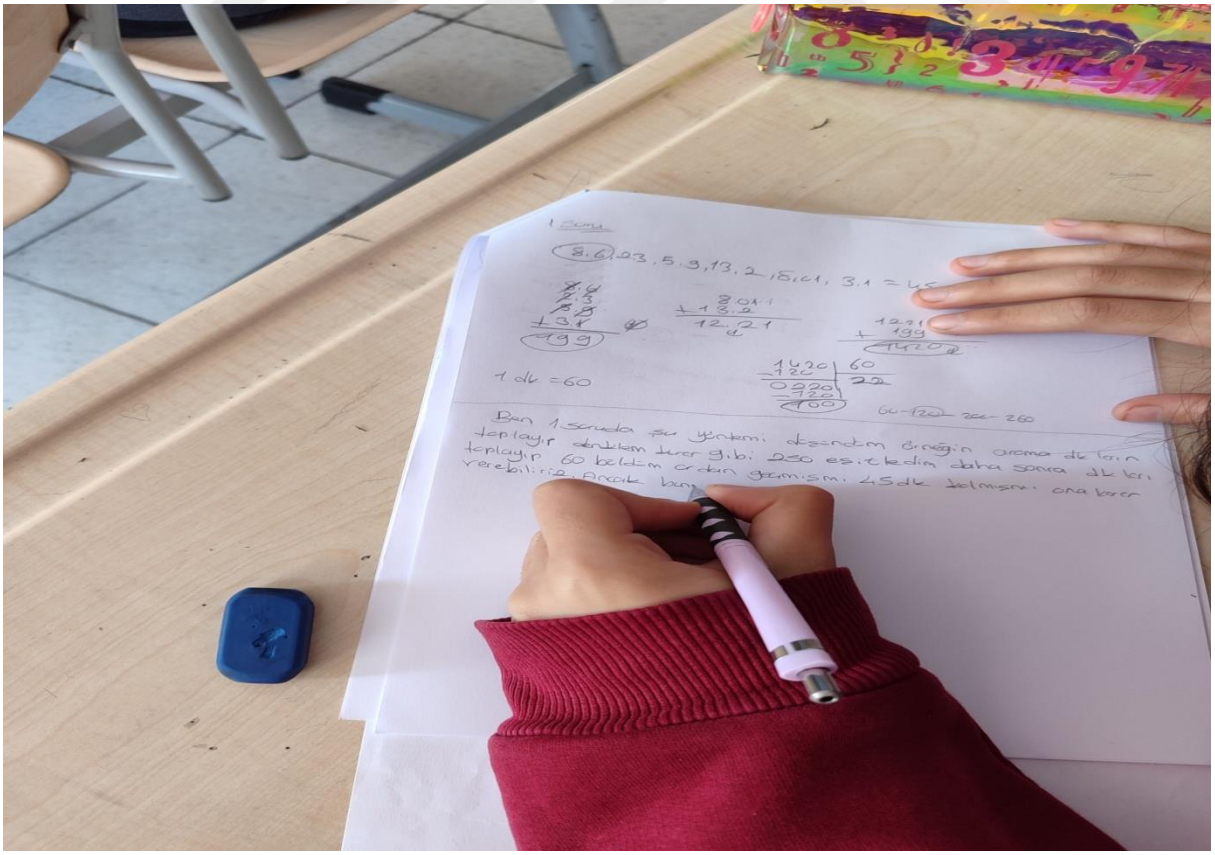




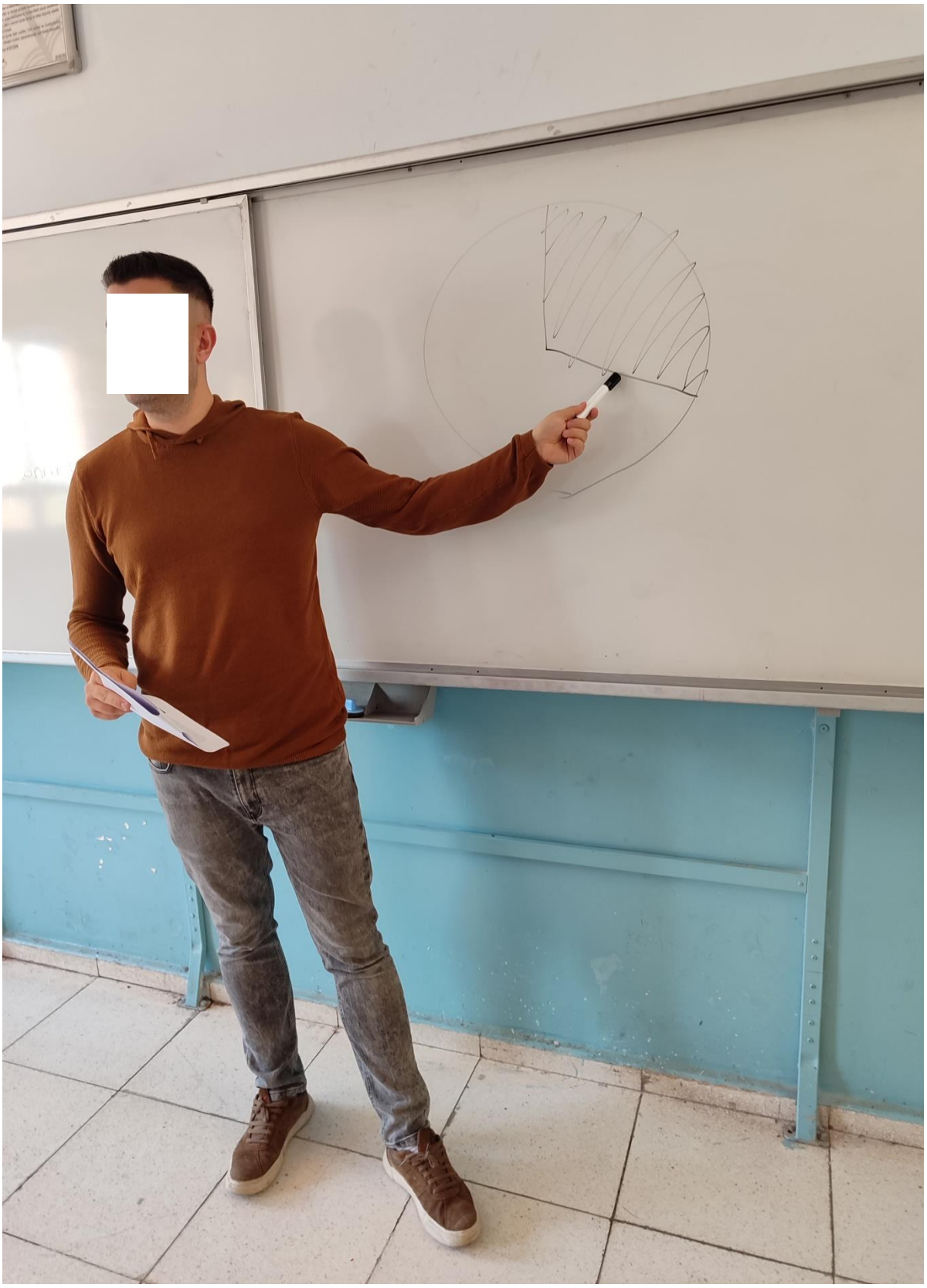



4. Soru ⇒ A4 = kısa kenar = 21
uzun kenar = 29,7
21 = A5'in kısa kenarı
A3 = A5'in 2. uzun kenarının çarpımı
21
x2
42
A3'ün 1 kenar uzunluğu
42
Açıklama: A4 kısa kenar 21 ise A5'in uzun kenarı A4'ün
kısa kenarına eşittir. A5'inde uzun kenar A3'ün uzun kenarının
yarısına eşittir. A5'in uzun kenarını 2 ile çarpersek A
uzun kenarını bulabiliriz.
21


GATE




MUSTAFA KEMAL ATATÜRK
1881 - 1938
TELEFON FATURASI
8.6
2.3
5.9
13.2
8.01
3.1
Bundan sonra paket sınırı
ulaşıyor.

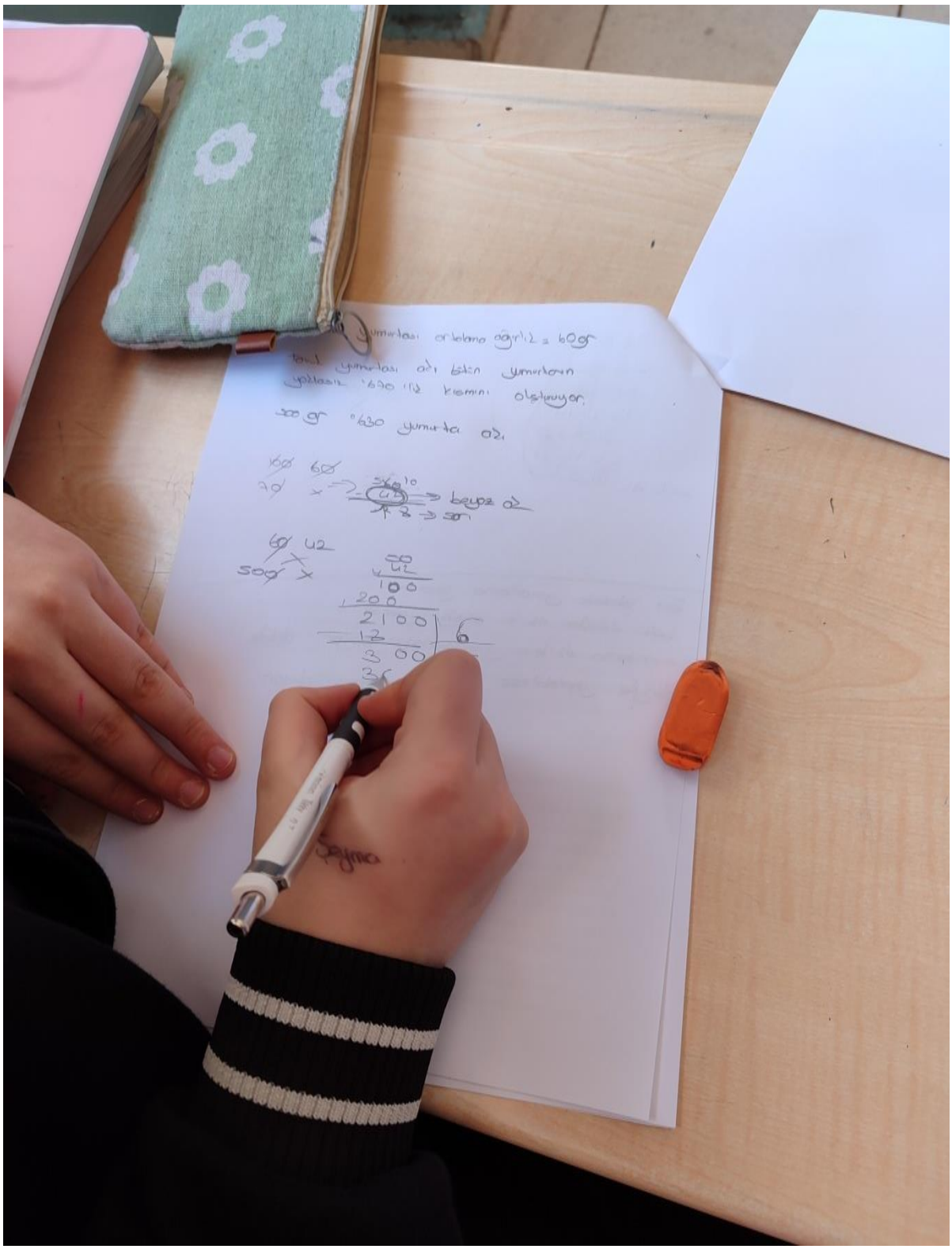







İSTİKLAL MARŞI
GENÇLİĞE HİTABE




yumurtası ortalama ağırlık = 60gr
yumurtası adı bütün yumurtanın
yüzdesiz %30 'luk kısmını oluşturuyor.
100 gr %30 yumurta adı.
60
60
20
10
beyaz adı
30
60 42
50gr
50
42
100
200
2100
12
6
300
36



ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	Muhammet Katipoğlu		
Eğitim Durumu	**Başlama - Bitirme**		**Kurum**
Lise	2003	2007	İzmir Anadolu Öğretmen Lisesi
Lisans	2008	2012	Balıkesir Üniversitesi, Necatibey Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Yüksek Lisans	2013	2016	Akdeniz Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı
Doktora	2017	2024	Uludağ Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Çalıştığı Kurum	**Başlama-Ayrılma**		**Çalışılan Kurumun Adı**

1.	**2013-2017**	**Akdeniz Üniversitesi -Araştırma Görevlisi**
2.	**2018-2019**	**İzmir – M.E.B. Uzun Hasan İlköğretim Okulu- Matematik Öğretmeni**
Yayınlar ve Çalışmalar	**Katipoğlu, M**., & Öncü, B. (2015). Students' views towards the reason why Mathematics ıs hardly being perceived according to Social Studies teacher candidates. *International Journal of Social Sciences and Education Research, 1*(4), 1120-1131. **Katipoğlu, M**., & Katipoğlu, S. N. (2016). Matematik Öğretmenlerinin Öğrenci Ders Kitabı Hakkındaki Görüşleri. *Uluslararası Eğitim Bilim ve Teknoloji Dergisi, 2*(3), 156-165. Sargın, S.A., Baltacı, F., **Katipoğlu, M.**, Erdik, C., Arbatlı, M.S., Karaardıç, H., Yumuşak, A. ve Büyükcengiz, M. (2016). Exploring Of Prospective Teachers' Level In Information, Behaviors, And Attitudes Toward The Environment *Education Sciences (NWSAES), 1C0650; 11(1): 1-22.* **Katipoğlu, M**., Katipoğlu B. (2016) Research Of Teacher Candidates' Opinions About Academic Profession. *Uluslararası Sosyal Araştırmalar Dergisi* 9 (46), 572-580. **Katipoğlu, M**., Eken Z., & Körbay, M. (2017). Matematik Öğretiminde Eğlence ve Mizah İçeren Karikatürlerin Kullanılmasının Öğrencilerin Matematik Başarısına ve Matematik Kaygısına Etkisi. *Uluslararası Eğitim Bilim ve Teknoloji Dergisi, 3*(1), 32-45. Katipoğlu, B., **Katipoğlu, M**., (2017). Psychoanalyses Of Praying. *The Journal of International Social Research 10 (49), 753-759* Katipoğlu, S., **Katipoğlu, M**., Sezer, S. (2021). The effect of teaching math's through storytelling on students' math's achievement. *Academy Journal of Educational Sciences, 5*(1).	
Diğer	1.) Akdeniz Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Anabilim Dalı Eğitim-Öğretim koordinatörü (2013-2016) 2.)Akdeniz Üniversitesi Uluslar arası İlişkiler Ofisi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Farabi koordinatörü (2014-2016) 3.) Antalya Büyükşehir Belediyesi-Akdeniz Üniversitesi ortaklığında	

	düzenlenen “Antalya Bilim Festivali” Eğitim Fakültesi Bilim-Sanat Şenliği koordinatörü (9-14 Haziran 2015) 4.) Kongre Sözlü Sunum: Students’ views towards the reason why mathematics ıs hardly being perceived according to social studies teacher candidates. **ICSER** (International Conference on Social Science and Education Research) 29 Ekim 2015, Rixos DownTown, Antalya, Turkey 5.) Kongre Sözlü Sunum:The effect of teaching math’s through storytelling on students' math’s achievement. **EJER** (VIII. International Eurasian Educational Research Congress) 07 Ekim 2021, Aksaray, Turkey 6.) Konuşmacı. Akademisyenlik Kariyer Süreci Hakkında Bilgilendirme Paneli (22 Nisan 2015, Akdeniz Üniversitesi, Kongre Merkezi)
Tarih **İmza** **Adı-Soyadı**	Muhammet Katipoğlu.