GENELLEŞTİRİLMİŞ KUDRYASHOV METODU İLE (3+1)-BOYUTLU GARDNER-KP DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMLERİ, KARARLILIK ÖZELLİKLERİ

EXACT SOLUTIONS, STABILITY PROPERTIES OF THE (3+1)-DIMENSIONAL *GARDNER-KP EQUATION* WITH GENERALIZED KUDRYASHOV METHOD

Nisa ÇELİK

Department of Mathematics, Faculty of Arts and Sciences, Uludag University, 16059 Bursa, Türkiye

ORCID ID: 0000-0003-1209-991X

Duygu TETİK

Department of Mathematics, Faculty of Arts and Sciences, Uludag University, 16059 Bursa, Türkiye

ORCID ID: 0009-0002-9606-7607

ÖZET

Doğrusal olmayan evrim denklemleri (NLEE'ler), birçok fiziksel olgunun incelenmesi sonucunda elde edilen cebirsel modellerdir. Bu denklemlerin analitik ve bazı durumlarda sayısal çözümleri, somut matematiksel formülasyonları nedeniyle önemli bir yere sahiptir. Bu tür modeller, doğrusal olmayan optik, plazma fiziği, plazma dalgaları, biyofizik, atmosfer, finans, akışkanlar mekaniği, kuantum mekaniği, nükleer fizik, sığ su dalgası teorisi vb. gibi birçok lineer olmayan bilimde gözlemlenebilir. Yukarıda bahsedilen evrim tipi denklemlerden biri (3+1)-Gardner–Kadomtsov–Petviashvili (Gardner-KP) denklemidir. Bu çalışmada, belirli fiziksel sistemlerde dalgaların hareketini açıklayan doğrusal olmayan (3+1)-Gardner-KP denkleminin yayılan dalga çözümleri elde edilmiş ve dalga dinamiği incelenmiştir. (3+1)- Gardner-KP denklemine genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi uygulanmıştır. Elde edilen çözümlerin özel parametre değerlerinde 3D ve 2D kontür grafiklerinin nümerik simülasyonu yapılmıştır. Ortaya çıkan çözümlere kararlılık testi uygulanmıştır. Bu çalışmanın matematik, fizik ve okyanus mühendisliği alanlarında çalışanlar için bir yol gösterici ve fikir verici olacağı kanaatindeyiz.

Anahtar kelimeler: tam çözüm, Kudryashov metodu, (3+1)-Gardner-KP denklemi, stability özelliği

ABSTRACT

Nonlinear evolution equations (NLEEs) are models obtained as a result of the examination of many physical phenomena. Analytical and in some cases numerical solutions of these equations have an important place because of their concrete mathematical formulations. Such models can be observed in many nonlinear sciences such as nonlinear optics, plasma physics, plasma waves, biophysics, atmosphere, finance, fluid mechanics, quantum mechanics, nuclear physics, shallow water wave theory, etc. One of the evolution-type equations mentioned above is the (3+1)-Gardner–Kadomtsov–Petviashvili (Gardner-KP) equation. In this study, propagating wave solutions of the non-linear (3+1) Gardner-KP equation explaining the motion of waves in certain physical systems are obtained, and wave dynamics are investigated. Also, in this study, the (3+1) dimensional nonlinear Gardner–Kadomtsov–Petviashvili (Gardner-KP) equation showing the nonlinear modulation of periodic waves is solved by the Generalized Kudryashov method. The stability test was applied to the obtained results. In addition, 3D and contour drawings were made for some families. This study highlights the importance of mathematics and physics in ocean engineering.

Keywords: exact solutions, Kudryashov method, (3+1)- Gardner-KP equation, stability properties

1. GİRİŞ

Bazı fiziksel olayların matematiksel modellenmesiyle elde edilen kısmi diferansiyel denklemler 18. yüzyıldan beri çalışılmaktadır. Kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmada en önemli sonuçlar, 19. yüzyılın sonlarında Lie (1893) tarafından elde edildi. 20. yüzyıldan itibaren, bilgisayarların gelişmesiyle birlikte, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin yorumlanması, birçok farklı araştırma yönünü açan, bağımsız bir alan haline geldi. Bu yönlerden biri, bu denklemlerin çözümlerinin sembolik ve sayısal hesaplanmasıdır. Günümüzde bu hesaplamalar bilgisayar sistemleri (örneğin, Maple ve Matematica) kullanılarak yapılmaktadır. Bazı özel doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri için çeşitli yöntemler olmasına rağmen, genel durum için teori yoktur. Gerçek hayat problemlerini temsil eden doğrusal olmama, matematik, fizik, plazma fiziği, akışkanlar dinamiği, okyanus fiziği ve organizma bilimi gibi birçok araştırma alanında temel bir bileşendir. Bugüne kadar literatürde bu konuda birçok çalışma bulunmaktadır [1-13].

(2+1)-Gardner-KP denklemi, akışkan dinamiği, plazma fiziği ve optik lifler dâhil olmak üzere doğrusal olmayan bilimdeki çeşitli olayları incelemek için kullanılır. Solitonlar olarak bilinen soliter dalga çözümleri, ortam içinde hareket ederken şekillerini ve hızlarını koruyabildikleri için özellikle ilgi çekicidir. Araştırmacılar genellikle bu solitonların özelliklerini ve etkileşimlerini incelemek için sayısal yöntemleri ve ters saçılma dönüşümü gibi analitik yaklaşımları kullanır.

Bu çalışmada ele alınacak olan (3+1)-Gardner-KP denkleminin okyanus mühendisliği ile güçlü bir ilişkisi vardır, çünkü bunlar iki boyutlu örneklerde okyanus sahanlıklarında kuvvetli doğrusal olmayan iç dalgaları gösterir. Bu çalışmanın ana konusunu oluşturan (3+1) boyutlu Gardner-KP denklemi, $\Omega = \pm 1$ ve

$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\theta, \eta, \zeta, \tau)$ olmak üzere

$$(\mathfrak{B}_\tau + 6\mathfrak{B}\mathfrak{B}_\theta - 6\mathfrak{B}^2\mathfrak{B}_\theta + \nu^2\mathfrak{B}_{\theta\theta\theta})_\theta + \Omega(\mathfrak{B}_{\eta\eta} + \mathfrak{B}_{\zeta\zeta}) = 0 \quad (1)$$

biçimindedir ve (2+1) boyutlu Gardner-KP denkleminin bir uzantısı olarak türetilir. (3+1) Gardner-KP denklemi, belirli fiziksel sistemlerde dalgaların yayılmasını açıklayan doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir. Denklemin adındaki (3+1) notasyonu, üç uzamsal boyutta ve bir zaman boyutunda kısmi diferansiyel denklem olduğunu ifade eder. (1) denklemi literatürde Hussain ve arkadaşları tarafından Lie grup teorisi tekniği kullanılarak analiz edildi. Lie değişmezlik koşulunu göz önünde bulundurarak simetri üreteçleri buldular ve soliton çözümlerini elde etmek için yeni yardımcı denklem yöntemini kullandılar [14].

Bu çalışmada (3+1)-Gardner-KP denkleminin tam çözümleri Kudryashov yöntemi kullanılarak incelenecektir. Çalışmanın 2. bölümünde genelleştirilmiş Kudryashov yönteminin teorisi verildi, (1) denklemine genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi uygulanarak tam çözümleri elde edildi. Elde edilen çözümlere kararlılık özelliği uygulanarak çözümlerin kullanılabilirliği test edildi. Özel parametre değerleri için çözümlerden bazılarının grafik simülasyonu yapıldı. Son bölüm ise elde edilen sonuçlar yorumlanmasına ayrılmıştır.

2. ARAŞTIRMA VE BULGULAR

Bu bölümde genelleştirilmiş Kudryashov yönteminin teorisi verilecektir. Bu yöntem bazı araştırmacılar tarafından çeşitli evrim denklemlerine uygulanmıştır [15-17].

2.1 Genelleştirilmiş Kudryashov Yöntemi

$$\psi(\mathfrak{B}_\tau, \mathfrak{B}_\theta, \mathfrak{B}_\eta, \mathfrak{B}_\zeta, \mathfrak{B}_{\tau\theta}, \mathfrak{B}_{\theta\theta}, \mathfrak{B}_{\eta\eta}, \mathfrak{B}_{\zeta\zeta}, \mathfrak{B}_{\theta\theta\theta}, \dots) = 0 \quad (2)$$

lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklem

$\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ ve $\mathfrak{B}(\theta, \eta, \zeta, \tau) = \mathcal{F}(\xi)$ değişken dönüşümü yardımıyla

$$Q(\mathcal{F}, \mathcal{F}', \mathcal{F}'', \mathcal{F}''', \dots) = 0 \quad (3)$$

adi diferensiyel denklemine dönüşür. $a_i, b_j, (i = 0,1, \dots, n,\ j = 0,1, \dots, m)$ sabitler $a_n \neq 0,\ b_m \neq 0$ ve $\omega = \omega(\xi)$

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \omega^2(\xi) - \omega(\xi) \tag{4}$$

denklemini sağlayan bir fonksiyon olmak üzere (3) denkleminin

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \omega^i(\xi)}{\sum_{j=0}^{m} b_j \omega^j(\xi)} \tag{5}$$

biçiminde çözümlere sahip olduğunu farz edelim. (4) adi diferensiyel denkleminin çözümü, kolayca görülebileceği gibi, χ integral sabiti olmak üzere

$$\omega(\xi) = \frac{1}{1+\chi e^{\xi}} \tag{6}$$

biçimindedir, Pozitif tam sayı olan n ve m sayıları, en yüksek mertebeden türev teriminin mertebesi ile en yüksek dereceli lineer olmayan terimin derecesi kullanılarak, homojen dengeleme prensibi ile hesaplanır. (5) ifadesi, (4) kullanılarak, (3) denkleminde yerine yazılır ve $\omega(\xi)^{i-j}$ $(i,j = 1,2,3,..)$ polinomu elde edilir. $\omega(\xi)$ ya bağlı bu polinomun tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel bir denklem sistemi bulunur. Bu cebirsel denklem sistemi $a_n, b_m, k_1, k_2, k_3, c$ katsayılarına göre çözülür ve (3) denkleminin çözümleri elde edilir. (3) denkleminin elde edilen bu çözümlerinde $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ yazılarak (2) denkleminin tam çözümleri bulunur.

2.2 Genelleştirilmiş Kudryashov Yönteminin (1) Denklemine Uygulanması

Bu kısımda Kısım 2.1 de teorisi verilen yöntem, (1) denklemine uygulanacaktır. (1) denkleminde

$$\mathfrak{B}(\theta,\eta,\zeta,\tau) = \mathcal{F}(\xi),\ \xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$$

değişken değişimi yapılırsa

$$k_1 cF + 3{k_1}^2F^2 - 2{k_1}^2F^3 + \Omega{k_2}^2F + \Omega{k_3}^2F + v^2{k_1}^4F'' = 0 \tag{7}$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir. (7) denkleminin en yüksek dereceli lineer olmayan terimi olan F^3 ile en yüksek mertebeli türev F'' terimi arasında dengeleme prensibi uygulanırsa $m = 1, n = 2$ elde edilir. Böylece (5) kullanılarak (7) denkleminin çözümü

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2}{b_0 + b_1\omega} \tag{8}$$

biçiminde ifade edilir. (8) ifadesi (4) kullanılarak (7) denkleminde yerine yazılır. Elde edilen ifade $\omega(\xi)$ nın kuvvetlerine göre düzenlenir. $\omega(\xi)$ tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Elde edilen denklem sistemi $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, k_1, k_2, k_3, c$ ye göre çözülerek aşağıdaki çözüm aileleri ve bunlar yardımıyla da (1) denkleminin tam çözümleri elde edilir:

Aile 1:

$$\left\{ c = -\frac{\Omega{k_3}^2v^2 + \Omega{k_2}^2v^2 + 1}{v}, a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = b_1, b_0 = 0, b_1 = b_1, k_1 = \frac{1}{v}, \right. \\ \left. k_2 = k_2, k_3 = k_3 \right\} \tag{9}$$

(9) da elde edilen değerler (8) ifadesinde yerine yazılarak, $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ olmak üzere (1) denkleminin

$$\mathfrak{B}_1(\xi) = \frac{1}{1+Ae^{\xi}} \tag{10}$$

çözümü elde edilir.

Aile 2:

$$\left\{c=-\frac{1+4\Omega {k_3}^2v^2+4\Omega {k_2}^2v^2}{2v},a_0=0,a_1=0,a_2=\frac{1}{2}b_1,b_0=-\frac{1}{2}b_1,b_1=b_1,k_1=\frac{1}{2v},\right.$$
$$\left.k_2=k_2,k_3=k_3\right\} \quad (11)$$

(11) de elde edilen değerler (8) ifadesinde yerine yazılarak, $\xi=k_1\theta+k_2\eta+k_3\zeta+c\tau$ olmak üzere (1) denkleminin

$$\mathfrak{B}_2(\xi)=\frac{1}{1-A^2e^{(2\xi)}} \quad (12)$$

çözümü elde edilir.

Aile 3:

$$\left\{c=-\frac{\Omega {k_3}^2+\Omega {k_2}^2+{k_1}^4v^2}{k_1},a_0=0,a_1=a_1,a_2=-a_1,b_0=\frac{1}{2}\frac{a_1(1+vk_1)}{v^2{k_1}^2},b_1=-\frac{a_1}{vk_1},\right.$$
$$\left.k_1=k_1,k_2=k_2,k_3=k_3\right\} \quad (13)$$

(13) de elde edilen değerler (8) ifadesinde yerine yazılarak, $\xi=k_1\theta+k_2\eta+k_3\zeta+c\tau$ olmak üzere (1) denkleminin

$$\mathfrak{B}_3(\xi)=\frac{2{k_1}^2v^2Ae^{\xi}}{(1+Ae^{\xi}-vk_1+vk_1Ae^{\xi})(1+Ae^{\xi})} \quad (14)$$

çözümü elde edilir.

Aile 4:

$$\left\{c=-\frac{\Omega {k_3}^2+\Omega {k_2}^2+{k_1}^4v^2}{k_1},a_0=0,a_1=a_1,a_2=-a_1,b_0=-\frac{1}{2}\frac{a_1(vk_1-1)}{v^2{k_1}^2},b_1=\frac{a_1}{vk_1},\right.$$
$$\left.k_1=k_1,k_2=k_2,k_3=k_3\right\} \quad (15)$$

(15) de elde edilen değerler (8) ifadesinde yerine yazılarak, $\xi=k_1\theta+k_2\eta+k_3\zeta+c\tau$ olmak üzere (1) denkleminin

$$\mathfrak{B}_4(\xi)=-\frac{2{k_1}^2v^2Ae^{\xi}}{(-vk_1+vk_1Ae^{\xi}-1-Ae^{\xi})(1+Ae^{\xi})} \quad (16)$$

çözümü elde edilir.

Aile 5:

$$\left\{c=\frac{1+\Omega {k_3}^2v^2+\Omega {k_2}^2v^2}{v},a_0=b_0,a_1=b_1-b_0,a_2=-b_1,b_0=b_0,b_1=b_1,\right.$$
$$\left.k_1=-\frac{1}{v},k_2=k_2,k_3=k_3\right\} \quad (17)$$

(17) de elde edilen değerler (8) ifadesinde yerine yazılarak, $\xi=k_1\theta+k_2\eta+k_3\zeta+c\tau$ olmak üzere (1) denkleminin

çözümü elde edilir.

Aile 6:

$$\left\{c=\frac{1}{2}\frac{1+4\Omega {k_3}^2v^2+4\Omega {k_2}^2v^2}{v},a_0=-\frac{1}{2}b_1,a_1=b_1,a_2=-\frac{1}{2}b_1,b_0=-\frac{1}{2}b_1,b_1=b_1,\right.$$
$$\left.k_1=-\frac{1}{2v},k_2=k_2,k_3=k_3\right\} \quad (19)$$

(19) da elde edilen değerler (8) ifadesinde yerine yazılarak, $\xi=k_1\theta+k_2\eta+k_3\zeta+c\tau$ olmak üzere (1) denkleminin

$$\mathfrak{B}_6(\xi) = \frac{A^2 e^{(2\xi)}}{-1+A^2 e^{(2\xi)}} \tag{20}$$

çözümü elde edilir.

Aile 7:

$$\left\{ \begin{array}{c} c = \frac{\frac{1}{2}i(2\Omega {k_2}^2 v^2 + 2\Omega {k_3}^2 v^2 - 1)\sqrt{2}}{v}, a_0 = -\frac{1}{4}b_1, a_1 = -\frac{1}{2}b_1\left(-1+i\sqrt{2}\right), a_2 = \frac{b_1}{2}i\sqrt{2}, \\ b_0 = -\frac{1}{2}b_1, b_1 = b_1, k_1 = \frac{\frac{1}{2}i\sqrt{2}}{v}, k_2 = k_2, k_3 = k_3 \end{array} \right\} \tag{21}$$

(21) de elde edilen değerler (8) ifadesinde yerine yazılarak, $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ olmak üzere (1) denkleminin

$$\mathfrak{B}_7(\xi) = \frac{1}{2}\frac{-1+A^2 e^{(2\xi)}+2i\sqrt{2}Ae^{\xi}}{-1+A^2 e^{(2\xi)}} \tag{22}$$

çözümü elde edilir.

Aile 8:

$$\left\{ \begin{array}{c} c = \frac{\frac{1}{2}i(2\Omega {k_2}^2 v^2 + 2\Omega {k_3}^2 v^2 - 1)\sqrt{2}}{v}, a_0 = -\frac{1}{4}b_1, a_1 = \frac{1}{2}b_1\left(1+i\sqrt{2}\right), a_2 = \frac{-b_1}{2}i\sqrt{2}, \\ b_0 = -\frac{1}{2}b_1, b_1 = b_1, k_1 = \frac{\frac{1}{2}i\sqrt{2}}{v}, k_2 = k_2, k_3 = k_3 \end{array} \right\} \tag{23}$$

(23) de elde edilen değerler (8) ifadesinde yerine yazılarak, $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ olmak üzere (1) denkleminin

$$\mathfrak{B}_8(\xi) = \frac{1}{2}\frac{-1+A^2 e^{(2\xi)}-2i\sqrt{2}Ae^{\xi}}{-1+A^2 e^{(2\xi)}} \tag{24}$$

çözümü elde edilir.

2.3 Kararlılık Özelliği

Kararlılık analizi, doğrusal olmayan evrim denklemleri için önemli bir araştırma alanıdır. Bir sistemin dış etkilere nasıl tepki verdiğini ve zaman içinde nasıl davrandığını incelemeye yardımcı olur. Hamilton sisteminin özellikleri kullanılarak elde edilen kararlılık özelliği, modelin uygulamalarda kullanılabilirliğini göstermek için elde edilen bazı çözümler üzerinde test edilir. Çalışmanın bu kısmında, Aile 5 ve Aile 6 için elde edilen çözümlerin kararlılık özelliği Hamilton sisteminin özellikleri yardımıyla incelenmiştir

Hamilton sistemindeki momentum

$$M_H = \frac{1}{2}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} F^2(\xi)d\xi$$

biçiminde tanımlanabilir, burada F(ξ) modelin çözümüdür ve kararlılık için temel koşul, c_0 isteğe bağlı sabit olmak üzere

$$\left.\frac{\partial M}{\partial c}\right|_{c=c_0} > 0$$

biçiminde formüle edilir [18-19].

(18) çözümünde

$$\{A = 1, v = 1, \Omega = 1,\ k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = 1, \eta = 0, \theta = 0\}$$

özel parametre değerleri kullanılarak

$$\left.\frac{\partial M}{\partial c}\right|_{c=3} = 0.06528575373 > 0$$

elde edilir. Bu çözümün kararlı olduğunu gösterir.

(20) çözümünde

$$\left\{A = 1, v = 1, \Omega = 1,\ k_1 = \frac{-1}{2}, k_2 = 1, k_3 = 1,\ b_1 = 1, \eta = 0, \theta = 0\right\}$$

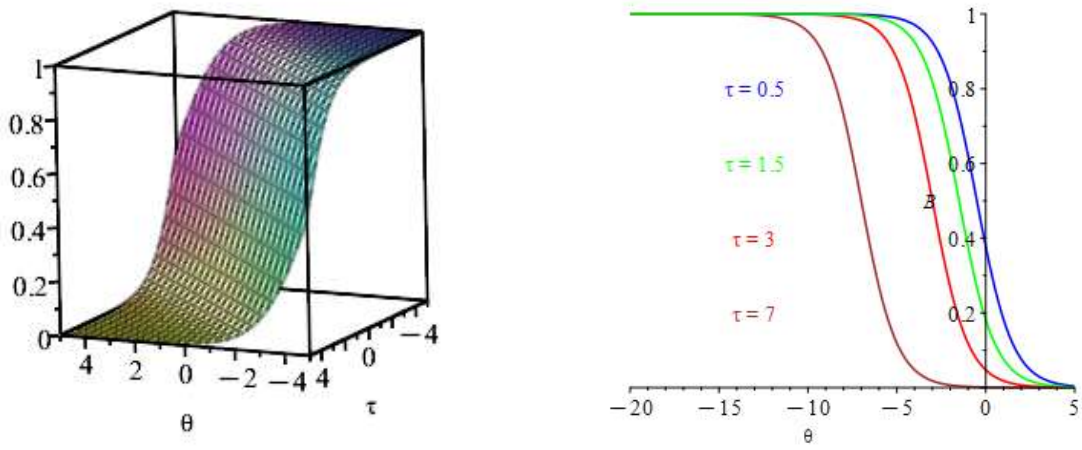
özel parametre değerleri kullanılarak

$$\left.\frac{\partial M}{\partial c}\right|_{c=\frac{9}{2}} = 0.02480197194 + 0.07757018907i > 0$$

elde edilir. Bu çözümün kararlı olduğunu gösterir. Bu çalışmada elde edilen çözümlerin her birinin kararlılık özellikleri aynı adımlar uygulanarak incelenebilir.

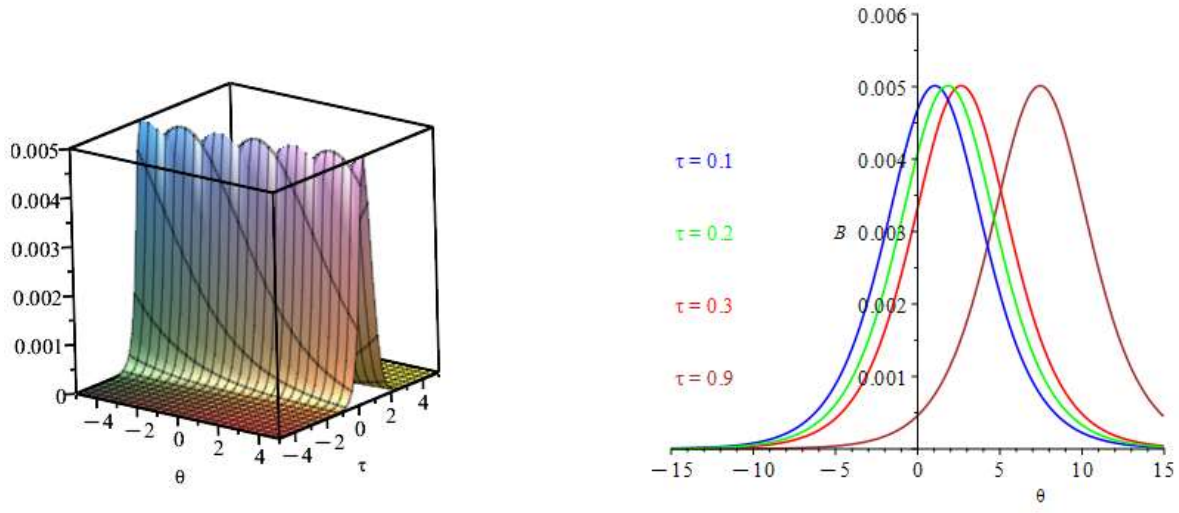
2.4 Grafik Simülasyonlar

Bu kısımda farklı iki çözümün grafik simülasyonu incelenmiştir. Şekil 1 (a) da $\eta = 0, \zeta = 0$ için $\mathfrak{B}_1(\theta, \eta, \zeta, \tau)$ nın 3D grafik simülasyonu ve Şekil 1 (b) de $\tau = 0.5, \tau = 1.5, \tau = 3, \tau = 7$ değerlerinde dalganın nasıl hareket ettiğini gözlemlemek için $\mathfrak{B}_1(\theta, 0, 0, \tau)$ nun 2D grafik simülasyonu verilmiştir. Şekil 2 (a) da $\eta = 0, \zeta = 0$ için $\mathfrak{B}_3(\theta, \eta, \zeta, \tau)$ nın 3D grafik simülasyonu ve Şekil 2 (b) de $\tau = 0.1, \tau = 0.2, \tau = 0.3, \tau = 0.9$ değerlerinde dalganın nasıl hareket ettiğini gözlemlemek için $\mathfrak{B}_3(\theta, 0, 0, \tau)$ nun 2D grafik simülasyonu verilmiştir. Şekil 3 (a) da $\zeta = 0, \tau = 0$ için $\mathfrak{B}_2(\theta, \eta, \zeta, \tau)$ nın 3D grafik simülasyonu ve Şekil 3 (b) de $\theta = 0.5, \theta = 1.5, \theta = 2.5, \theta = 7.5$ değerlerinde dalganın nasıl hareket ettiğini gözlemlemek için $\mathfrak{B}_2(\theta, \eta, 0, 0)$ nun 2D grafik simülasyonu verilmiştir.



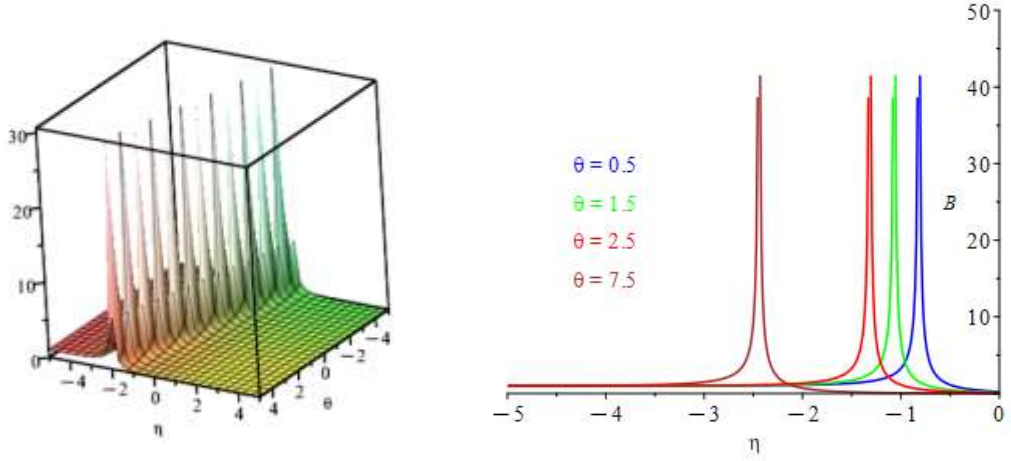
(a) (b)

Şekil 1. $\{A = 1, \Omega = -1, c = 1, v = 1, b_1 = 1, k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1\}$ için $\mathfrak{B}_1(\theta, 0, 0, \tau)$ nun 3D ve 2D grafikleri



(a) (b)

Şekil 2. $\{A = 0.8,\ \Omega = 1, c = -4.005,\ v = 0.2,\ a_1 = 1,\ k_1 = 0.5,\ k_2 = 1, k_3 = 1\}$ için $\mathfrak{B}_3(\theta, 0, 0, \tau)$ nın 3D ve 2D grafikleri



(a) (b)

Şekil 3. $\{A = 2,\ \Omega = 1, c = -33/4,\ v = 2,\ b_1 = 1,\ k_1 = 1/4,\ k_2 = 1, k_3 = 1\}$ için $\mathfrak{B}_2(\theta, \eta, 0, 0)$ nın 3D ve 2D grafikleri

3. SONUÇ

Bu çalışmada (3+1)-Gardner-KP denkleminin tam çözümleri genelleştirilmiş Kudryashov yöntemiyle elde edilmiştir. Araştırmalarımıza göre, bu çalışmada ortaya çıkan çözümler literatürde varolan çözümlerden farklıdır. Araştırmacıların bu modelin fiziksel hareketlerini anlamalarına yardımcı olmak için, elde edilen çözümlerin özel parametre değerlerinde grafik simülasyonları $\mathfrak{B}_1(\theta, \eta, \zeta, \tau)$, $\mathfrak{B}_2(\theta, \eta, \zeta, \tau)$ve $\mathfrak{B}_3(\theta, \eta, \zeta, \tau)$ çözümleri için Şekil 1 (a), Şekil 3 (a) ve Şekil 2 (a) da yapılmıştır. 3D çizimlerde kink soliton, çan kink soliton ve parlak soliton çözümler görülmüştür. $\mathfrak{B}_1(\theta, \eta, \zeta, \tau)$ ve $\mathfrak{B}_3(\theta, \eta, \zeta, \tau)$ çözümleri için Şekil 1 (b), Şekil 2 (b) de yapılan 2D çizimler ise τ nun değeri değişirken, zaman içinde, soliton dalganın nasıl hareket edeceğinin görülmesi açısından son derece önemlidir. $\mathfrak{B}_2(\theta, \eta, \zeta, \tau)$ çözümü için ise Şekil 3 (b), θ nın değişen değerlerinde dalga hareketini göstermektedir. Kudryashov yönteminin bu denklem için çok sayıda çözüm üreten uygun bir yöntem olduğu görülmüştür. Ortaya çıkan çözümlerden bazılarına kararlılık testi uygulanmıştır. Farklı alanlarda pek

çok uygulamaya sahip olan (3+1)-Gardner-KP denkleminin Kudryashov metodu ile elde edilen tam çözümleri, matematik, fizik ve mühendislik alanında çalışan araştırmacılara doğrusal olmayan modeller üzerinde çalışma konusunda fikir verecektir.

KAYNAKLAR

[1] Patel YF, Dhodiya JM, Pandit D. Exact solution of nonlinear Newell–Whitehead–Segel

equation using semi-analytical approach. Math Meth Appl Sci. 2022;1–17. DOI: 10.1002/mma.8843.

[2] Zeidan D, Chau CK, Lu TT, Zheng WQ. Mathematical studies of the solution of Burgers' equations by Adomian decomposition method. Math Meth Appl Sci. 2019;43:2171–2188. DOI: 10.1002/mma.5982.

[3] Çelik N, Seadawy AR, Sağlam Y, Yaşar E. A model of solitary waves in a nonlinear elastic circular rod: Abundant different type exact solutions and conservation laws, Choas. Solitons and Fractals. 2021;143 110486, 1-19.

[4] Çelik N. Exact Solutions of Magneto-Electro-Elastic Rod Model with F Expansion Method. BEU Journal of Science. 2021;10(2), 375-392.

[5] Yaşar E, Yıldırım Y. On the Lie symmetry analysis and travelling wave of time fractional fifth-order modified Sawada-Kotera equation. Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi. 2018;8(2):411-416. DOI: 10.7212%2Fzkufbd.v8i2.625.

[6] Bira B, Sekhar TR, Zeidan D. Exact solutions for some time-fractional evolution

equations using Lie group theory. Math Meth Appl Sci. 2018;41:6717–6725. DOI: 10.1002/mma.5186.

[7] Yıldırım Y, Biswas A, Moraru L, Alghamdi AA. Quiescent Optical Solitons for the Concatenation Model with Nonlinear Chromatic Dispersion. Mathematics. 2023;11, 1709.

[8] Hashemi MS, Mirzazadeh M. Optical solitons of the perturbed nonlinear Schrödinger equation using Lie symmetry method. Optik - International Journal for Light and Electron Optics. 2023;281 170816.

[9] Ay NG, Yaşar E. Multi wave, kink, breather, interaction solutions and modulation instability to a conformable third order nonlinear Schrödinger equation. Optical and Quantum Electronics. 2023;55:360.

[10] Seadawy AR, Rizvi STR, Ahmed S. Solitons collision and multi-peak solutions for a new (3 + 1)-dimensional NLSE describing pulse propagation in optical fibers. Optical and Quantum Electronics. 2023;55:467.

[11] Kudryashov NA. One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 17 (2012) 2248-2253.

[12] Kudryashov NA. First integrals and general solution of the complex Ginzburg-Landau equation. Applied Mathematics and Computation. 386 (2020) 125407.

[13] Kudryashov NA. Optical solitons of the perturbation Fokas–Lenells equation by two

different integration procedures. Optik - International Journal for Light and Electron Optics, 273 (2023) 170382.

[14] Hussain A, Anjum A, Rehman MJU, Khan İ, Sameh MA, Al-Johani AS. Symmetries, optimal system, exact and soliton solutions of (3 + 1)-dimensional Gardner-KP equation. Journal of Ocean Engineering and Science. [m5G; June 27, 2022;23:31].

[15] Akbulut A. Obtaining the Soliton Type Solutions of the Conformable Time Fractional Complex Ginzburg-Landau Equation with Kerr Law Nonlinearity by Using Two Kinds of Kudryashov Methods. Hindawi, Journal of Mathematics, Article ID 4741219, 6 pages. https://doi.org/10.1155/2023/4741219.

[16] Akbar MA, Akinyemi L, Yao SW, Jhangeer A, Rezazadeh H, Khater MMA, Ahmad H, Inc M. Soliton solutions to the Boussinesq equation through sine-Gordon method and Kudryashov method. Results in Physics. 25 (2021) 104228.

[17] Akbulut A, Kaplan M. The analysis of the soliton-type solutions of con-formable equations by using generalized Kudryashov method. Optical and Quantum Electronics. (2021) 53:498. https://doi.org/10.1007/s11082-021-03144-y.

[18] Yue C, Khater MMA, Attia RAM, Lu D. The plethora of explicit solutions of the fractional KS equation through liquid.gas bubbles mix under the thermodynamic conditions via Atangana.Baleanu derivative operator. Advances in Di¤erence Equations (2020) 2020:62.

https://doi.org/10.1186/s13662-020-2540-3.

[19] Yue C, Elmoasry A, Khater MMA, Osman MS, Attia RAM, Lu D, Elazab NS. On complex wave structures related to the nonlinear long.short wave interaction system: Analytical and numerical techniques. AIP Advances 10, 045212 (2020). https://doi.org/10.1063/5.0002879.