GEOMETRİK-ARİTMETİK VE RANDİC İNDEKSLERİNİN EKSTREMAL DEĞERLERİ

Şeyma ÖZÖN YILDIRIM

T. C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GEOMETRİK-ARİTMETİK VE RANDİC İNDEKSLERİNİN EKSTREMAL DEĞERLERİ

Şeyma ÖZÖN YILDIRIM
0000-0003-3618-0931

Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2023
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

GEOMETRİK-ARİTMETİK VE RANDİC İNDEKSLERİNİN
EKSTREMAL DEĞERLERİ

Şeyma ÖZÖN YILDIRIM

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL

Grafların topolojik indeksleri, başta kimyasal graflar olmak üzere pek çok uygulamaya sahip olan matematiksel fonksiyonlardır. Graf teoride birçok topolojik graf indeksi tanımlanmıştır. Bu indeksler çoğunlukla köşe derecelerine, köşeler arasındaki uzaklıklara ya da grafların matrislerine bağlı olarak tanımlanmaktadır.

Bu çalışmada topolojik indeksler için ters problem diye adlandırılan GA_1 topolojik indeksinin hangi graf çeşitlerinde hangi tamsayı değerleri alabileceğini araştırdık. Dereceleri tam kare olan köşe ikilerinin GA_1 topolojik indekslerini excel programını kullanarak hesapladık. Bu köşelerden kaç tanesinin GA_1 topolojik indeks değerlerinin toplamının pozitif bir tamsayı olabileceğini lineer Diophant denklemlerini kullanarak bulduk. Bulunan bu sayılara karşılık gelen bir graf çizilip çizilemediğini, çizilebilme kurallarına göre belirlemeye çalıştık.

Bu çalışmada beş bölüm yer almaktadır. İlk bölüm olan giriş bölümünde grafların tarihçesinden, topolojik indeksler ve uygulamalarından, GA_1 indeksinden ve Randic indeksinin tarihçesinden bahsedilmiştir. Ayrıca literatür taraması ve tezin amacı olmak üzere giriş bölümü, beş alt bölüme ayrılmıştır.

İkinci bölüm Ön Bilgiler ile GA_1 ve Randic indekslerinin tanımları ve hesaplanması olmak üzere iki alt bölüme ayrılmıştır. Ön bilgiler alt bölümünde tezde kullanılan graflarla ilgili tanım ve kavramlar ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde ise tezde kullanılan materyal ve yöntemler anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde araştırma sonuçları ve bulgulardan bahsedilmiştir.

Son bölüm olan beşinci bölümde, tezdeki sonuçların tartışması yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Graf, Topolojik indeks, Geometrik-Aritmetik indeks, Randic indeksi.

2023, x + 155 sayfa

ABSTRACT

PhD Thesis

EXTREMAL VALUES OF
GEOMETRIC-ARITHMETIC AND RANDIC INDICES

Şeyma ÖZÖN YILDIRIM

Bursa Uludag University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ismail Naci CANGUL

Topological indices of graphs are mathematical functions that have many applications, especially for chemical graphs. Many topological graph indices have been defined in graph theory. These indices are mostly defined depending on the vertex degrees, the distances between the vertices or the matrices of the graphs.

In this study, we investigated the problem that which integer values the GA_1 topological index can take for some graph types, which is called the inverse problem for topological indices. We calculated the GA_1 topological indexes of graphs where the vertices have perfect square degrees using the excel program. Using linear Diophantine equations, we found that the sum of how many of these vertices make GA_1 a positive integer. We tried to determine whether a graph corresponding to these numbers can be drawn or not, according to the realizability rules.

There are five chapters in this study. In the first chapter, the introduction, the history of graphs, topological indexes and their applications, the GA_1 index and the history of the Randic index are mentioned. In addition, the introduction part, which contains the literature review and the aim of the thesis, is divided into five subsections.

The second part is divided into two subsections: Preliminaries and definitions and calculations of GA_1 and Randic indices. In the preliminaries, the definitions and concepts related to the graphs used in the thesis are expressed. In the third chapter, the materials and methods used in the thesis are explained.

In the fourth chapter, research results and findings are mentioned.

In the fifth chapter, which is the last chapter, the results of the thesis are discussed.

Key Words: Graph, Topologic index, Geometric–Arithmetic index, Randic index.

2023, x + 155 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Çalıma hayatım boyunca her zaman yanımda olan gerek akademik bilgisini gerekse manevi desteğini ve tecrübesini hiçbir zaman benden esirgemeyen, hem mesleki hem de hayata bakışıyla her zaman örnek almaya çalıştığım çok değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL'e gönülden teşekkürlerimi sunarım.

Bu günlere gelmemde en büyük payı olan sahip olan, bana verdikleri sevgi ve güvenle birçok zorluğu aşmama yardımcı olan, ne olursa olsun yanımda olup canım annem, babam ve kardeşlerime sonsuz teşekkürler.

Bu akademik çalışma döneminde hayatıma girip benim yanımda olan canım kızıma ve her zaman beni teşvik ve motive edip her zaman yanımda olan değerli eşime teşekkür ederim.

Son olarak projemizi destekleyen Bursa Uludağ Üniversitesi BAP birim koordinatörlüğüne en içten teşekkürlerimi sunmak isterim.

Şeyma ÖZÖN YILDIRIM
28/07/2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ABSTRACT ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR iii
SİMGELER DİZİNİ vi
ŞEKİLLER DİZİNİ vii
ÇİZELGELER DİZİNİ x
1.GİRİŞ 1
1.1. Tarihsel Gelişim 1
1.2. Grafların Topolojik İndekslerinin Uygulama Alanları 2
1.3. GA_1 İndeksi ve Randic İndeksi 3
1.4. Literatür Taraması 5
1.5. Tezin Amacı 5
2. KURAMSAL TEMELLER 7
2.1. Ön Bilgiler 7
2.2. GA_1 İndeksi ve Randic İndeksinin Tanımı ve Hesaplanması 21
3. MATERYAL ve YÖNTEM 1
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve BULGULAR 2
4.1. GA_1 İndeksi ve Ω İnvaryantı Arasındaki İlişki 2
4.2. GA_1 İndeksi İçin Ters Problem 6
4.3. Kenar Sayılarına Göre Grafların GA_1 İndeksleri 21
4.3.1. m Kenarlı Basit, Bağlantılı Grafların GA_1 İndekslerinin Alabildiği Değerler 21
4.3.2. *m* Kenarlı Tüm Bağlantılı Grafların GA_1 İndekslerinin Alabildiği Değerler 23
4.4. Köşe Sayılarına Göre Grafların GA_1 İndeksleri 26
4.4.1. *n* Köşeli Basit Bağlantılı Grafların GA_1 İndekslerinin Alabildiği Değerler 26
4.4.2. *n* Köşeli Tüm Bağlantılı Grafların GA_1 İndekslerinin Alabildiği Değerler 28
4.5. Bağlantılı Tek Devirli Graflarda GA_1 Değerinin Hesaplanması 30
4.6. $T_u(a_u)$ Tırtıl Graflarının GA_1 Topolojik İndeksinin Hesaplanması 34
4.7. $S_{k,t}$ Grafının GA_1 Topolojik İndeksinin Hesaplanması 38
4.8. $S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(m)$Graflarının GA_1 Topolojik İndeksinin Hesaplanması 39
4.9. Yeni Bir Kenar Eklemenin GA_1 İndeksine Etkisi 41
4.10. GA_1İndeksinin Lineer Diophant Denklemleriyle İlişkisi 45
4.11. GA_1 için Ters Problem 47
4.11.1. Bağlantılı Graflar 47

4.11.2. Bağlantılı Olmayan Graflar 49
4.11.3. Regüler Graflar 50
4.11.4. İrregüler Graflar 51
4.11.5. Basit Graflar 53
4.11.6. Basit Olmayan Graflar 54
4.11.7. Bağlantılı ve Regüler Graflar 56
4.11.8. Bağlantılı ve İrregüler Graflar 57
4.11.9. Bağlantılı ve Basit Graflar 62
4.11.10. Bağlantılı ve Basit Olmayan Graflar 64
4.11.11. Bağlantılı Olmayan ve Regüler Graflar 65
4.11.12. Bağlantılı Olmayan ve İrregüler Graflar 66
4.11.13. Bağlantılı Olmayan ve Basit Graflar 67
4.11.14. Bağlantılı Olmayan ve Basit Olmayan Graflar 69
4.11.15. Regüler ve Basit Graflar 70
4.11.16. Regüler ve Basit Olmayan Graflar 71
4.11.17. İrregüler ve Basit Graflar 73
4.11.18. İrregüler ve Basit Olmayan Graflar 74
4.11.19. Bağlantılı, Regüler ve Basit Graflar 76
4.11.20. Bağlantılı, İrregüler ve Basit Graflar 77
4.11.21. Bağlantılı, Regüler ve Basit Olmayan Graflar 79
4.11.22. Bağlantılı, İrregüler ve Basit Olmayan Graflar 80
4.11.23. Bağlantılı Olmayan, Regüler ve Basit Graflar 85
4.11.24. Bağlantılı Olmayan, İrregüler ve Basit Graflar 86
4.11.25. Bağlantılı, Regüler ve Basit Olmayan Graflar 87
4.11.26. Bağlantılı Olmayan, İrregüler ve Basit Olmayan Graflar 88
4.12. GA_1 ve Randic İndeksleri Arasındaki İlişkiler 89
4.13. GA_1 ve Randic Topolojik İndekslerinin Alabileceği Maksimum ve Minimum Değerler 92
4.14. Bazı Grafların Eş GA_1 ve Eş Randic İndeksleri 106
4.15. GA_1 ve Randic İndeks Değerleri Aynı Olan Grafların Dönüşümleri 114
5. TARTIŞMA VE SONUÇ 121
KAYNAKLAR 122
ÖZGEÇMİŞ 126

SİMGELER DİZİNİ

Simge	Açıklama
V	V köşe kümesi
E	E kenar kümesi
G	G Grafı
$d(v)$	*v* köşesinin derecesi
n	*G* grafının köşe sayısı
m	*G* grafının kenar sayısı
d_u, $d_G(u)$, $\deg(u)$	*u* köşesinin derecesi
P_v	*j* köşeli patika graf
C_v	*j* köşeli devir graf
K_v	*n* köşeli tam graf
S_v	*n* köşeli yıldız graf
T_v	*n* köşeli ağaç graf
$K_{r,s}$	iki parçalı tam graf
$T_{t,k}$	larva graf
$T_u(a_u)$	tırtıl graf
$S_{k,t}$	*k* tane asılı köşesi olan ve *t* tane düğümü olan graf
$S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(m)$	S_{k_1,t_1} ile S_{k_2,t_2} graflarının m kenar ile birleşimi
N_n	*n* köşeli boş graf
$\Delta(G)$	*G* grafının maksimum derecesi
$\delta(G)$	*G* grafının minimum derecesi
DS	derece dizisi
$G+e$	*e* kenarı eklenmiş *G* grafı
$GA_1(G)$	*G* grafının Geometrik-Aritmetik indeksi
R(G)	*G* grafının Randic birinci indeksi
$\Omega(G)$	*G* grafının Ω invaryantı
$c(G)$	*G* grafının bileşen sayısı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1. 3 Köşeli ve 3 kenarlı bir graf örneği 8
Şekil 2.2. Bir 2-regüler graf 9
Şekil 2.3. Bağlantılı ve bağlantılı olmayan (bağlantısız) graf 9
Şekil 2.4. Basit ve basit olmayan graflar 10
Şekil 2.5. N_4 boş grafı 14
Şekil 2.6. P_4 patika grafı 14
Şekil 2.7. S_7 yıldız grafı 15
Şekil 2.8. C_4 devir grafı 15
Şekil 2.9. $T_{4,2}$ larva grafı 16
Şekil 2.10. *$T_4(9)$* tırtıl grafı 16
Şekil 2.11. T_5 ağaç grafı 17
Şekil 2.12. K_5 tam grafı 18
Şekil 2.13. $S_{k,t}$ grafı 18
Şekil 2.14. $S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(m)$ grafı 19
Şekil 2.15. Bir *G* grafında kenar ekleme örnekleri 20
Şekil 2.16. P_6 patika grafının köşe dereceleri 22
Şekil 2.17. C_6 devir grafının köşe köşe dereceleri 23
Şekil 4.1. GA_1 indeksinin her pozitif tamsayıya eşit olabileceğini gösteren devirli graflar 13
Şekil 4.2. GA_1 indeksinin her pozitif tamsayıya eşit olabileceğini gösteren graflar 13
Şekil 4.3. P_3 grafı köşe dereceleri 17
Şekil 4.4. P_4 grafı köşe dereceleri 17
Şekil 4.5. S_4 grafı köşe dereceleri 18
Şekil 4.6. L grafı köşe dereceleri 18
Şekil 4.7. M grafı köşe dereceleri 18
Şekil 4.8. P_4 grafına yeni kenar ekleme 19
Şekil 4.9. S_5 grafı köşe dereceleri 20
Şekil 4.10. N grafı köşe dereceleri 20
Şekil 4.11. $T_4(2)$ grafı köşe dereceleri 21
Şekil 4.12. P_2 grafı köşe dereceleri 21
Şekil 4.13. P_4, C_3 ve S_4 grafların köşe dereceleri 22
Şekil 4.14. $m = 1$ için bağlantılı, basit olmayan grafların köşe dereceleri 23
Şekil 4.15. $m = 2$ için bağlantılı, basit olmayan grafların köşe dereceleri 24
Şekil 4.16. $m = 3$ için bağlantılı, basit olmayan grafların köşe dereceleri 24
Şekil 4.17. $m = 4$ için bağlantılı, basit grafların köşe dereceleri 25
Şekil 4.18. $m = 4$ için bağlantılı, basit olmayan regüler grafların köşe dereceleri 25
Şekil 4.19. N_1 tek köşeli grafı 26
Şekil 4.20. C_3 grafı köşe dereceleri 27
Şekil 4.21. $n = 4$ için basit, bağlantılı grafların köşe dereceleri 27
Şekil 4.22. P_3 patikasına l tane döngü eklenmesi ile oluşan graflar 28
Şekil 4.23. P_3 patikasına l_1, l_2, l_3 tane döngü eklenmesi ile oluşan graflar 29

Şekil 4.24. P_3 patikasına k_1, $k_2$tane katlı kenar eklenmesi ile oluşan graflar 29
Şekil 4.25. C_n grafı köşe dereceleri 30
Şekil 4.26. $T_{\mathrm{r,s}}$ grafı köşe dereceleri 31
Şekil 4.27. $C_{n,x}$ grafı köşe dereceleri 32
Şekil 4.28. Yarı-regüler bir $T_4(a_4)$ tırtıl grafı köşe dereceleri 34
Şekil 4.29. $S_{k,t}$ grafı köşe dereceleri 38
Şekil 4.30. $S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(1)$ grafı köşe dereceleri 39
Şekil 4.31. $S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(2)$ grafı köşe dereceleri 40
Şekil 4.32. $S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(m)$ grafı köşe dereceleri 41
Şekil 4.33. *G* ve *G+{e}* graflarının köşe dereceleri 42
Şekil 4.34. İki köşeli bağlantılı, regüler, basit olmayan bir grafın köşe dereceleri 48
Şekil 4.35. GA_1 indeksinin *3, 4, 5, …, n* değerlerini alabilen bağlantılı bir graf sınıfı 48
Şekil 4.36. $GA_1(G = 2$ olan bağlantısız (ve basit olmayan) bir graf 49
Şekil 4.37. $GA_1(G) =$ *3,4, …, n* değerlerini veren bağlantısız (ve basit olmayan) graflar 49
Şekil 4.38. $S_{5,2}$ grafı köşe dereceleri 51
Şekil 4.39. $S_{5,2}$ grafına bir tane döngü eklenmesi ile oluşan graf 52
Şekil 4.40. $S_{5,2}$ grafına bağlantısız *2, 3, …, n* tane döngü eklenmesi ile oluşan graflar 52
Şekil 4.41. İki tane P_2 grafından oluşan bağlantısız graf 53
Şekil 4.42. Basit, bağlantılı ve 2- regüler devir grafları (n > 3) 54
Şekil 4.43. $GA_1(G) = 2$ değerini veren 2 kenarlı bağlantılı, basit olmayan, regüler graf 55
Şekil 4.44. *3, 4, …, n/2* kenarlı bağlantılı, basit olmayan, regüler graflar 55
Şekil 4.45. Bağlantılı ve irregüler graflarda birinci tip dönüşüm 58
Şekil 4.46. Bağlantılı ve irregüler graflarda ikinci tip dönüşüm 58
Şekil 4.47. Bağlantılı ve irregüler graflarda üçüncü tip dönüşüm 58
Şekil 4.48. Bağlantılı ve irregüler graflarda dördüncü tip dönüşüm 59
Şekil 4.49. $Tf_3(S_{5,2})$ grafı köşe dereceleri 59
Şekil 4.50. $T_4(4)$ grafı köşe dereceleri 60
Şekil 4.51. $Tf_1(T_4(4))$ grafı köşe dereceleri 60
Şekil 4.52. $T_4(9)$ grafı köşe dereceleri 61
Şekil 4.53. $Tf_1(T_4(9))$ grafı köşe dereceleri 61
Şekil 4.54. $S_{25,0} \cup S_{2,23}$ grafı köşe dereceleri 62
Şekil 4.55. P_2 grafı ve bir tane basit olmayan bağlantısız graf eklenmesi ile oluşan graf 65
Şekil 4.56. P_2 grafına *1, 2, …, n* tane döngü eklenerek oluşan graf 66
Şekil 4.57. P_2 grafı ve iki tane basit olmayan bağlantısız graf eklenmesi ile oluşan graf 67
Şekil 4.58. P_2 grafı ve *3, 4, …, n* tane döngü eklenmesi ile oluşan graf 67
Şekil 4.59. Bağlantısız üç tane P_2 patika graflarının köşe dereceleri 68
Şekil 4.60. *4, …, n* tane P_2 patika grafından oluşan bağlantısız graflar 68
Şekil 4.61. Bağlantısız *3, 4, …, n* tane P_2 patika graflarının köşe dereceleri. 71
Şekil 4.62. $T_4(4)$ grafına bağlantısız bir tane P_2 grafı eklenmesi ile oluşan graf 73
Şekil 4.63. $\mathrm{T}_4(4)$ grafına bağlantısız 2, 3, …, n tane P_2 grafı eklenmesi ile oluşan graflar 74
Şekil 4.64. $T_4(n)$ grafı ve köşe dereceleri 78
Şekil 4.65. $\mathrm{S}_{0,4} \cup \mathrm{S}_{5,1} \cup \mathrm{S}_{0,4}$ grafı köşe dereceleri. 82

Şekil 4.66. $S_{0,4} \cup S_{5,1} \cup S_{5,1} \cup S_{0,4}$ grafı ve köşe dereceleri. 83
Şekil 4.67. $S_{0,4} \cup S_{5,1} \cup S_{5,1} \cup S_{5,1} \cup S_{0,4}$ grafı ve köşe dereceleri. 83
Şekil 4.68. $Tf_1\ \left(Tf_1(T_4(4))\right)$ grafı ve köşe dereceleri. 84
Şekil 4.69. $T_4(4)$ grafına bağlantısız *2, 3, …, n* tane P_2 grafı eklenmesi ile oluşan graflar 86
Şekil.4.70. $f_1(n)$ fonksiyonunun grafiği 96
Şekil 4.71. $f_2(n)$ fonksiyonunun grafiği 97
Şekil 4.72. S_n ve $S_n - \{e\}$ graflarının köşe dereceleri 99
Şekil 4.73. $(S_n - e) \cup \{e\}$birinci durum..... 100
Şekil 4.74. $f_3(n)$ fonksiyonunun grafiği 101
Şekil 4.75. $(S_n - e) \cup \{e\}$ ikinci durum 102
Şekil 4.76. $f_4(n)$ fonksiyonunun grafiği 103
Şekil 4.77. *m=4* için S_n Grafına kenar ekleme 104
Şekil 4.78. *m=5* için S_n Grafına kenar ekleme 104
Şekil 4.79. *m=6* için S_n Grafına kenar ekleme 105
Şekil 4.80. *m=7* için S_n Grafına kenar ekleme 105
Şekil 4.81. *m=8* için S_n Grafına kenar ekleme 105
Şekil 4.82. *m=9* için S_n Grafına kenar ekleme 106
Şekil 4.83. *m=10* için S_n Grafına kenar ekleme 106
Şekil 4.84. Birinci tip dönüşüm 114
Şekil 4.85. İkinci tip dönüşüm 114
Şekil 4.86. Üçüncü tip dönüşüm 115
Şekil 4.87. Üçüncü tip dönüşüme bir örnek 115
Şekil 4.88. Dördüncü tip dönüşüm 116
Şekil 4.89. Beşinci tip dönüşüm 116
Şekil 4.90. 100 ve 101 numaralı grafların dönüşümü 117
Şekil 4.91. 102 ve 103 numaralı grafların dönüşümü 117
Şekil 4.92. 123 ve 124 numaralı grafların dönüşümü 117
Şekil 4.93. 127, 128 ve 129 numaralı grafların dönüşümü 118
Şekil 4.94. 149 ve 150 numaralı grafların dönüşümü 118
Şekil 4.95. 152 ve 154 numaralı grafların dönüşümü 118
Şekil 4.96. 151 ve 154 numaralı grafların dönüşümü 119
Şekil 4.97. 166 ve 167 numaralı grafların dönüşümü 119
Şekil 4.98. 172 ve 173 numaralı grafların dönüşümü 119
Şekil 4.99. 189 ve 190 numaralı grafların dönüşümü 120

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Omega invaryantı ve *r* bölge sayısının alabilecekleri değerler 3
Çizelge 4.2. *m* kenarlı basit ve basit olmayan bağlantılı graf sayıları *(* $1 \leq m \leq 5$). 6
Çizelge 4.3. $C_{n,x}$ bağlantılı, basit ve x^2-regüler grafının kenar parçalanışı 32
Çizelge 4.4. $T_4(a_4)$ tırtıl grafının kenar parçalanışı 35
Çizelge 4.5. $T_u(a_u)$ graflarının GA_1 değerleri 36
Çizelge 4.6. $T_u(a_u)$ tırtıl grafının kenar parçalanışı 37
Çizelge 4.7. P_n grafının kenar parçalanışları 95
Çizelge 4.8. S_n grafında kenar parçalanışı 95
Çizelge 4.9. S_n grafının kenar parçalanışı 99
Çizelge 4.10. $(S_n - e) \cup \{e\}$ birinci durum grafının kenar parçalanışı 100
Çizelge 4.11. $(S_n - e) \cup \{e\}$ ikinci durum kenar parçalanışı 102
Çizelge 4.12. GA_1 ve Randic topolojik indeksleri aynı ve farklı olan bazı graflar 113

1.GİRİŞ

1.1. Tarihsel Gelişim

Graf teori bilindiği üzere Konigsberg köprü problemi ile başlar. Fakat bilinen ilk graf örnekleri Pisagor okuluna kadar geri gitmektedir. Pisagorcular regüler özelliğe sahip tüm 3 boyutlu cisimlerin sadece beş tane olduğunu gözlemlemişlerdir. Sezgisel olarak 3 boyutlu bir cismin regüler olması, tüm köşe ve yüzlerinin birbirine benzemesidir. Daha açık ifade etmek gerekirse regüler bir şeklin tüm köşelerin dereceleri birbirine eşittir.

Pisagorculardan sonra üzerinde sistematik olarak çalışılan ve yayınlanan ilk bilinen örnek İsveçli matematikçi Leonard Euler'in 1736'da yayınladığı 'Konigsberg Yedi Köprüsü' adlı çalışmaya adını veren köprü problemidir. Bu problem şu şekilde tanımlanır. Bugünkü Prusya (Beyaz Rusya)'daki Konigsberg (bugünkü Kaliningrad) kasabasından geçen Pregel nehri iki dala ayrılarak Kneiphof adasının iki tarafından geçmektedir. Nehir üzerinde 7 adet köprü bulunmaktadır. Problem, bir kişinin bir noktadan yürüyüşe başlayıp tüm köprülerden birer kez geçerek başladığı noktaya geri dönüp dönmeyeceğini bulmaktır. Bu kentin 4 kara parçası ve 7 Köprüsü graf dilinde ifade edilir. Konigsberg halkı için eğlenceli bir oyun olan bu problemi Euler genelleştirmiş ve hangi hallerde böyle bir yolun bulunabileceğini belirlemiştir. Özel olarak bir Konigsberg vatandaşı ne yaparsa yapsın her bir köprüden birer kez geçerek başladığı noktaya dönemez.

Grafların geçmiş ve iyi bilinen uygulamalarından bir diğeri dört renk problemidir. 1852 yılında Francis Guthrie, tüm haritaların komşu ülkeler aynı renkle boyanmayacak şekilde 4 renk ile boyanabileceğini iddia etmiştir.

Graf teoride benzer şekilde problemler vardır. Örneğin pazarlamacı problemi, labirent problemleri, tesisat problemleri, network problemleri ve daha fazlası araştırılmıştır.

Grafların uygulandığı alanlar arasında fen, sosyal, sağlık bilimlerinden çocuk oyunlarına örnekler yer almaktadır.

1.2. Grafların Topolojik İndekslerinin Uygulama Alanları

Kimyasal graf teorisi, moleküler topoloji ve matematiksel kimya alanlarında, bağlantı indeksi olarak da bilinen bir topolojik indeks, kimyasal bir bileşiğin moleküler grafına göre hesaplanan bir tür moleküler tanımlayıcıdır. Topolojik indeksler, bir grafın topolojisini karakterize eden ve genellikle graf değişmez olan sayısal parametreleridir. Topolojik indeksler, örneğin nicel yapı-aktivite ilişkilerinin geliştirilmesinde kullanılır. Moleküllerin biyolojik aktivitelerinin veya diğer özelliklerinin kimyasal yapılarıyla ilişkili olduğu yapılardır (QSAR'lar).

Topolojik indeksler başlıca 3 şekilde tanımlanır. Birincisi köşe derecelerine, ikincisi uzaklığa ve üçüncüsü graf parametrelerine göre ifade edilir. Sonuç olarak, topolojik indeksler kimyasal yapısından dolayı moleküler graflardan kolayca hesaplanabilen, grafların gösterilme veya etiketlenme şekline bağlı olmayan ve enerji minimizasyonu gerektirmeyen iki boyutlu tanımlayıcılar olarak tanımlanabilir.

En basit topolojik indeksler, çift bağları ve atom türlerini (C, N, O vb.) tanımaz ve hidrojen atomlarını ("hidrojen bastırılmış") göz ardı eder ve yalnızca bağlı yönsüz moleküler graflar için tanımlanır. Topolojik indeksler arasında başlıca indeksler Wiener indeksi, Randic'in moleküler bağlanabilirlik indeksi, Balaban'ın J indeksi ve TAU tanımlayıcıları yer alır. Genişletilmiş topokimyasal atom (ETA) indeksleri, TAU tanımlayıcılarının iyileştirilmesine dayalı olarak geliştirilmiştir. QSAR'lar, kimyasalların (ilaçlar/zehirleyiciler/çevresel kirleticiler) biyolojik aktivitesini (arzu edilen terapötik etki ve istenmeyen yan etkiler dahil) moleküler yapı ve/veya özellikleri temsil eden tanımlayıcılarla ilişkilendiren istatistiksel araçların uygulanmasından türetilen tahmine

dayalı modelleri temsil eder. QSAR'lar, ilaç keşfi ve lider optimizasyonuna ek olarak risk değerlendirmesi, toksisite tahmini ve düzenleyici kararlar gibi birçok disiplinde uygulanmaktadır. Örneğin, tahmini QSAR/QSPR/QSTR modellerinin geliştirilmesinde ETA endeksleri uygulanmıştır.

1.3. GA1 İndeksi ve Randic İndeksi

Ağ, bilgisayar, biyolojik ve elektrik ağları başta olmak üzere teknolojideki ilerleme, çok kısa sürede doğru veri aktarımını mümkün kıldı. İnternet, sosyal medya, biyolojik, ekolojik ve sinir ağları bu tür ağlara birkaç örnektir. Telekomünikasyon, veri dosyalarını paylaşmak için kullanılan ara bağlantı ağlarına dayanmaktadır. Benzer şekilde, bilgi işlem cihazları kullanılarak yapılan veri alışverişi de veri bağlantısı, fiber optik kablo (OFC) ve Wi-Fi gibi kablosuz medya aracılığıyla bilgisayar ağına dayalıdır. Sayısal hesaplamaları yönlendirmek, düzenlemek/belirlemek ve görüntü işlemek için farklı algoritmalar kullanılır. Çok işlemcili ara bağlantı ağları (MIN'ler), güçlü mikroişlemciler ve bellek yongaları tasarlamak için kullanılır.

Graf teorisi, bu tür ağları tasarlamak ve analiz etmek için temel bir araç sağlar. Doğal olarak, ara bağlantı sistemi, işlemci düğümlerinin (döngülerinin) köşe noktaları olduğu ve bu düğümler (döngüler) arasındaki bağlantıların bu grafın kenarları olduğu graf tarafından modellenir. Graf teorisi ve ara bağlantı ağları, topolojileri aracılığıyla bu birbiriyle ilişkili konuların kapsamlı bir şekilde anlaşılmasını sağlar. Bir grafın topolojisi, bir grafta köşelerin nasıl birleştiği hakkında bilgi sağlar. Topolojik indeksler, grafların topolojisini incelemek için kullanılan graf değişmezleridir. Bilgisayar ağları dışında, graf teorisi, kodlama teorisi, veri tabanı yönetim sistemi, devre tasarımı, gizli paylaşım şemaları ve teorik kimya gibi farklı araştırma alanlarında güçlü bir araç olarak kabul edilir. Birkaç ara bağlantı ağının topolojik tanımlayıcıları zaten hesaplanmıştır. Ara

bağlantı ağları ile birlikte, bu değişmezler, kimyasal bileşiklerin ilişkili grafları kullanarak kimyadaki problemlerle ilgilenen kimyasal graf teorisinde eşit derecede önemlidir.

Graf değişmezlerinin yardımıyla altta yatan maddenin incelenmesi, kimya-bilişim, farmasötik bilimler, malzeme bilimi, mühendislik ve benzerlerinde önemli bir rol oynar. Teorik moleküler tanımlayıcılar arasında, topolojik indeksler, altta yatan maddenin fiziko-kimyasal özelliklerinin tahmini nedeniyle kimyada bir etkiye sahiptir. Moleküllerin fiziksel ve kimyasal özelliklerini modellemek için QSPR/QSAR analizindeki rolü de dikkat çekicidir. Aslında topolojik indeksler, sayısal bir değeri topolojisini karakterize eden grafikle ilişkilendiren dönüşüm zemininde tasarlanır.

İlk kez, Milan Randic tarafından Randic bağlantı indeksi olarak adlandırılan uç köşelerin kenarların dereceleri temelinde bir indeks tanımlanmıştır. Bu Randic indeks değeri şu şekilde hesaplanır. Bir G grafında herhangi seçtiğimiz bir köşenin derecesi ile bu köşeye komşu olan köşelerin dereceleri çarpımının karekök alınır ve bulunan bu sonucun çarpma işlemine göre tersi alınır. Benzer şekilde G grafında aldığımız tüm köşelerin komşularıyla olan Randic indeks değeri alınıp en son toplamları bulunur. G grafımızın Randic indeksini hesaplamış oluruz. Bu graf indeksi Milan Randic tarafından 1975'te tanıtıldı. Genellikle organik bileşiklerin araştırılması için kemoinformatikte kullanılır.

2009'da Vukicevic ve Furtula geometrik-aritmetik indeksi tanıttı. Bu GA_1 indeks değeri şu şekilde hesaplanır. Bir G grafında herhangi seçtiğimiz bir köşenin derecesi ile bu köşeye komşu olan köşelerin dereceleri toplamının, köşe dereceleri çarpımının kareköküne bölünür. Benzer şekilde G grafında aldığımız tüm köşelerin komşularıyla olan GA_1 indeks değeri alınıp en son toplamları bulunur. G grafımızın GA_1 indeksini hesaplamış oluruz.

1.4. Literatür Taraması

Literatür tarandığında grafların GA_1 ve Randic topolojik indekslerine yönelik Türkiye'de çalışmanın çok az olduğu, yeterli kapsamda Türkçe kaynağın ise olmadığı görülmüştür. Biz bu çalışmada bu boşlukları tamamlayacağız ve GA_1 ve Randic topolojik indeksleriyle bulduğumuz sonuçları ifade edeceğiz.

1.5. Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı ise literatürde grafların GA_1 ve Randic topolojik indekslerine yönelik Türkçe bir çalışmanın kazandırılmasıdır.

Bu çalışmanın amacı GA_1 topolojik indeksinin hangi graf çeşitlerinde hangi tamsayı değerleri alabileceğini araştırdık. Öncelikle bir grafta GA_1 topolojik indeksinin alabileceği en küçük değerleri düşündük ve buna bağlı olarak çizilebilecek graf çeşidini araştırdık. GA_1 topolojik indeksinin tanımından köşe dereceleri tam kare alındığı takdirde toplamın bir rasyonel sayı ve bunun sonucunda pozitif bir tamsayıya eşit olacağını aksi takdirde bu toplamın irrasyonel sayı olduğunu ispatladık. Buradan hareketle köşe dereceleri tam kare olan köşe ikilerinin GA_1 topolojik indekslerini excel kullanarak hesapladık. Bu köşelerin GA_1 topolojik indeks değerlerinin toplamının pozitif bir tamsayı olacak şekilde kaç tane bu köşe ikililerinden alınacağını lineer Diophant denklemlerini kullanarak bulduk. Bulunan bu indeks değerlerine karşılık onlara özgü graf çizilip çizmediğini bir grafın hangi durumlarda çizildiği kuralına uyarak bu grafları bulmaya çalışılmıştır. Bunun sonucunda bu çalışmada bağlantılı, bağlantısız, regüler, regüler olmayan, basit ve basit olmayan graflara göre GA_1 ters problemi incelenmiştir.

GA_1 indeksi ile omega invaryantı arasındaki ilişkiyi belirledik. Omega invaryantı adı verilen sayı, verilen bir derece dizisine karşılık olarak 2018 yılında Delen ve Cangül

tarafından tanımlanmıştır. Omega invaryantı, derece dizisinden elde edilebilen tüm graflar için değişmeyen ve özellikle de grafın yüz sayısına bağlı olan özellikleri çalışmada oldukça faydalı olan bir sayıdır. Yapılan çalışmalarda omega invaryantının, basit bağlantılı bir G grafında m yani kenar sayısı verildiğinde n köşe sayısı maksimum değerini G bir ağaç iken alır. Bu durumda köşe sayısı, kenar sayısının bir fazlasına eşit olur.

G, n köşeli basit, bağlantılı bir graf olduğunda $-2 \leq \Omega(G) \leq n^2-3n$ sonucu elde edildi. Soldaki eşitsizlik *G* bir ağaç iken, sağdaki ise G bir tam graf iken elde edildiği gösterildi.

Randic ve GA_1 topolojik indekslerinin hangi graf çeşitlerinde maksimum ve minimum değerleri alacağını araştırılmıştır. Bu değerlere karşılık çizilebilecek grafları ve graf sayısını bulunmuştur.

Son olarak 208 tane graf kartlarının Randic ve GA_1 topolojik indeks hesaplamalarından yola çıkarak hangi grafların köşe derece dizileri aynı olup buna karşılık Randic ve GA_1 topolojik indeksleri de aynı çıkan grafları araştırdık. Randic ve GA_1 topolojik indeksleri eşit çıkan ancak birbirlerine izomorf olmayan graflar arasında nasıl bir ilişki olduğunu dönüşümler tanımlayarak ifade ettik.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Ön Bilgiler

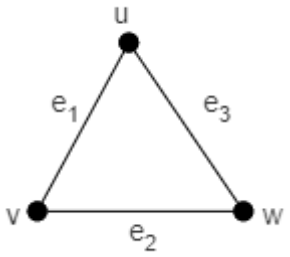
Aşağıdaki kısımda bu tezde kullanılacak olan bazı temel kavramları ele alacağız. Bu kavramlar hakkında daha kapsamlı bir bilgi istenirse şu kaynaklar yardımcı olabilir: Balakrishnan, Ranganathan, [A Textbook of Graph Theory, 2012], Berge, [The Theory of Graphs, 2001], Biggs, LLoyd, Bondy, Murty, [Graph Theory, 2008], Bollobas, [Modern Graph Theory, 1998], Chen, [Applied Graph Theory, 1976], Harary, [Graph Theory, 1994], Golumbic, Hartman, [Graph Theory, Combinatorics and Algorithms, 2005], Harris, Hirst, Mossinghoff, [Combinatorics and Graph Theory, 2008], West, Foulds, [Graph Theory Applications, 1992], Wilson, [Graph Theory 1736-1936, 1986], kaynaklarına başvurulabilir.

2.1.1. Tanım. Bir G grafı, elemanlarına köşeler denilen ve genelde $V=V(G)$ ile gösterilen bir noktalar kümesiyle bu köşelerden bazılarının oluşturduğu sıralanmamış köşe çiftleri arasındaki adına kenar denilen bağlantılardan oluşur. Kenarların kümesi $E=E(G)$ ile gösterilir ve grafın genel gösterimi de

$$G = (V, E)$$

şeklindedir.

Herhangi bir G grafında köşe ve kenar kümelerinin eleman sayıları sıralı olarak n ve m ile gösterilir. Dolayısıyla köşe kümesinin eleman sayısı genellikle $|V(G)| = n$ ile ve kenar kümesinin eleman sayısı da $|E(G)| = m$ ile gösterilir. Köşe sayısına grafın *mertebesi*, kenar sayısına ise grafın *boyutu* denilir.



Şekil 2.1. 3 Köşeli ve 3 kenarlı bir graf örneği

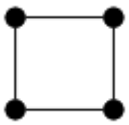
Şekil 1.3.'deki graf örneğinin köşe kümesi $V(G) = \{u, v, w\}$ ve kenar kümesi ise şu şekildedir: $E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$.

2.1.2. Tanım. Bir grafta rastgele seçilmiş olan bir *i* köşesini uç olarak kabul eden tüm kenarların sayısı *i* köşesinin *derecesi* olarak adlandırılır ve *d(i)* ile gösterilir.

Şekil 2.1.'deki grafın *u*, *v* ve *w* köşelerinin dereceleri $d(u) = 2$, $d(v) = 2$, $d(w) = 2$ olarak yazılır.

2.1.3. Tanım. Herhangi bir köşenin derecesi bir ise o köşeye asılı köşe ve bu köşeye bitişik olan kenara *asılı kenar* denir.

2.1.4. Tanım. Herhangi bir *G* grafındaki tüm köşelerin derecesinin aynı olması durumuna *regüler graf* denir ve *G* grafının tüm köşelerinin derecesi *n* ise grafın adına *n-regüler graf* adı verilir.



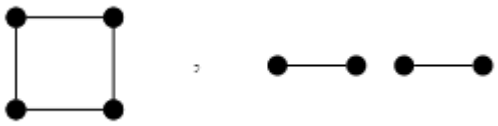
Şekil 2.2. Bir 2-regüler graf

2.1.5. Tanım. Herhangi bir G grafında rastgele seçilen iki köşe a ve b olsun. Eğer bu a ve b köşeleri arasında en az bir kenar mevcut ise a ve b köşelerine *komşu köşeler* denilir**.**

2.1.6. Tanım. Bir G grafında a ve b olmak üzere herhangi iki köşe alalım. Bu iki köşeyi birleştiren kenarın ismi e_3 olsun. Bu e_3 kenarına a ve b köşelerine *bitişiktir* denir.

Bitişiklik ve komşuluk graf teoride önemli rol oynar. Komşuluk ve bitişiklik ile ilgili matrisler graf teoride önemli çalışma alanı olmuştur.

2.1.7. Tanım. Bir graftan aldığımız her iki köşe arasında en az bir patika varsa bu grafa *bağlantılı graf* denir. Aksi takdirde *bağlantılı olmayan* veya *bağlantısız graf* olarak adlandırılır.



Şekil 2.3. Bağlantılı ve bağlantılı olmayan (bağlantısız) graf

Şekil 2.3. deki graflardan birinci graf, bağlantılı bir graftır. İkinci graf ise bağlantısız bir graftır. Çünkü bir *G* grafında seçtiğimiz her iki köşe arasında en az bir yol olmalıydı ancak bu grafta en az iki köşe arasında bir yol bulunamadığından bağlantısız graftır.

2.1.8. Tanım. Bir grafta seçilen herhangi iki köşe kendi arasında birden fazla kenarla birleşiyorsa bu kenarlara *katlı kenar* olarak isimlendirilir. Eğer herhangi bir köşe, bir kenarla kendisine birleştiriliyorsa bu kenara da *döngü veya düğüm* adı verilir (Trinajstic 1992). Döngü ve katlı kenar içermeyen graflara *basit graf* denilir. Aksi takdirde yani döngü veya katlı kenar içeren graflara *basit olmayan graf* isimlendirilir.



Şekil 2.4. Basit ve basit olmayan graflar

Şekil 2.4. deki graflardan birinci graf, döngü ya da katlı kenar bulundurmadığı için basit bir graftır. Fakat ikinci grafta e_1 kenarı katlı kenardır. Üçüncü grafta ise e_2 kenarı bir döngü olduğundan bu son iki graf basit olmayan graflardır.

2.1.9. Tanım. Herhangi bir *G* grafının köşelerinin dereceleri yazılır. Bulunan bu köşe dereceleri *DS* kümesinde $0 \leq k \leq \Delta$ için $a_k \geq 0$ olmak üzere

$$DS = \left\{0^{(a_0)}, 1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\right\}$$

ile gösterilir. Bu *DS* kümesine *G* grafının *derece dizisi* denir. Ancak bir *G* grafında derecesi 0 olan bir köşe yok ise

$$DS = \left\{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\right\}$$

olarak yazılır.

2.1.10. Tanım. Herhangi bir G grafında D kümesi negatif olmayan tamsayılardan oluşuyor ve bu küme derece dizisine eşit D kümesine *çizilebilir derece kümesi* denir.

Derece dizileri ifade edilirken ya küçükten büyüğe ya da büyükten küçüğe yazılmalıdır. Bir G grafında bir derece dizisinin çizilebilir olup olmadığını anlamak için kullanılan en önemli ve eski sonuçlardan birisi olan Havel-Hakimi yönteminde derece dizisinin büyükten küçüğe dizilmesi gereklidir. Bu yöntem dışındaki durumlarda çoğu kez derece dizileri küçükten büyüğe dizilmektedir.

2.1.11. Tanım. (Omega invaryantı). Herhangi bir G grafının omega invaryantı için öncelikle derece dizisi $DS = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \triangle^{(a_\triangle)}\}$ çizilebilir olsun. G grafının *omega invaryantı*

$$\Omega(G) = a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \cdots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1 = \sum_{i=1}^{\Delta} (i-2)a_i$$

biçiminde tanımlanır.

Herhangi bir G grafının omega invaryantının beraberinde D derece dizisinin de omega invaryantı olduğu anlamına gelir.

Aşağıdaki özellikler omega invaryantı çok önem arz etmektedir.

2.1.12. Teorem. Herhangi bir *G* grafında *n* köşe sayısı ve *m* kenar sayısı olmak üzere G grafının omega invaryantı

$$\Omega(G) = 2(m - n)$$

şeklinde hesaplanır.

İspat. Bir *G* grafında el sıkışma lemması gereği köşe derecelerinin toplamı kenar sayısının iki katına eşit olduğundan

$$\begin{aligned} 2m &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + \Delta a_\Delta \\ &= a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \cdots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1 + 2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_\Delta) \end{aligned}$$

yazılır. $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_\Delta = n$ bilindiğinden

$$2m = \Omega(G) + 2n$$

yazılır ve buradan da $\Omega(G) = 2(m - n)$ ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki sonuç çok kolay bir şekilde görülebilir:

2.1.13. Teorem. Herhangi bir *G* grafı için $\Omega(G)$ sayısal değeri çifttir.

Bu teorem şu şekilde yorumlanabilir:

2.1.14. Sonuç. Herhangi bir *G* grafında *DS* derece dizisinin çizilebilir olması için $\Omega(DS)$ sayısal değeri çift olmalıdır.

2.1.15. Tanım. Herhangi bir *G* grafından alınan bağlantılı olan grafların her bir alt grafına *G* grafının bir *bileşeni* adı verilir. *G* grafının bileşen sayısı $c(G)$ veya kısaca *c* harfi ile gösterilir.

Herhangi bir *G* grafı bağlantılı ve $c(G) = 1$ ise grafın tamamı bu tek bileşen ile oluşur. Ancak *G* grafının bağlantısız olması ancak ve ancak $c > 1$ ile mümkündür.

n köşe sayısı *m* kenar sayısı olmak üzere aşağıdaki sonuç herhangi bir grafın bileşen sayısı hakkında önemli bir alt sınır vermektedir.

2.1.16. Lemma. Herhangi bir *G* grafında bileşen sayısı c olsun.

$$c \geq n - m$$

eşitsizliği sağlanır.

Dolayısıyla herhangi bir *G* grafında köşe sayısı ile kenar sayısı arasındaki fark en az 2 ise bu grafın bağlantısız olacağı aşikardır.

2.1.17. Tanım. Herhangi bir *G* grafı $DS = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \triangle^{(a_\triangle)}\}$ DS derece dizisine sahip ve bağlantılı bir graf olsun. *r*, *G* grafının kapalı bölge veya devir sayısı

$$r = \frac{\Omega(G)}{2} + 1$$

biçimindedir.

Eğer *G* grafı bağlantılı değil ise ve grafın *c* tane bileşeni varsa kapalı bölge sayısı

$$r = \frac{\Omega(G)}{2} + c$$

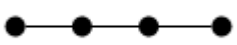
şeklindedir.

2.1.18. Tanım. Herhangi bir *G* grafında hiç kenar yok ise bu *G* grafına *boş graf* denir. Köşe sayısı *n* olmak üzere *n* köşeli bir boş graf N_n ile gösterilir.



Şekil 2.5. N_4 boş grafı

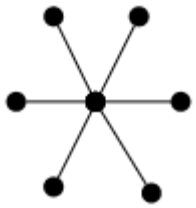
2.1.19. Tanım. Herhangi bir *G* grafında $a_1, a_2, \ldots, a_k$ köşelerine $i = 1, 2, \ldots, k$ olmak üzere $a_i a_{i+1} \in E$ biçiminde oluşan dizisine *G* grafının *yolu* adı verilir. Bir *G* grafında yolun tüm köşeleri farklı ise bu yola *patika* adı verilir. *n* köşeli patika P_n şeklinde gösterilir.



Şekil 2.6. P_4 patika grafı

Tez boyunca patika grafında *n* köşe sayısı olmak üzere $n \geq 2$ alınacaktır.

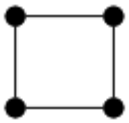
2.1.20. Tanım. Bir *G* grafının merkezinde bulunan bir köşenin diğer bütün köşelere bağlanarak oluşan grafa *yıldız grafı* adı verilir ve S_n şeklinde gösterilir. Yıldız grafında yani S_n grafında merkezde bulunan bir köşenin derecesi *n-1*, diğer köşelerin dereceleri ise 1 olur.



Şekil 2.7. S_7 yıldız grafı

Tez boyunca S_n yani yıldız grafı için *n* köşe sayısı olmak üzere $n \geq 4$ alınacaktır. Şu sebeple $n = 1, 2, 3$ için $S_n = P_n$ bulunur.

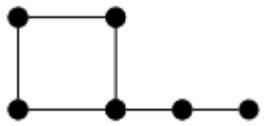
2.1.21. Tanım. Herhangi bir *G* basit grafı *n* köşeye sahip kapalı bir patikaysa bu *G* grafına *devir grafı* adı verilir ve gösterimi C_n şeklindedir.



Şekil 2.8. C_4 devir grafı

Tez boyunca devir grafı için *n* köşe sayısı olmak üzere $n \geq 3$ alınacaktır. Bunun sebebi ise $n = 1$ ve $n = 2$ için $C_n = P_n$ bulunur.

2.1.22. Tanım. C_t devir grafındaki bir köşeyle P_{k+1} patika grafındaki iki uç köşeden birisinin birleştirilmesiyle oluşturulan grafa *larva graf* denilir. Bu graf $T_{t,k}$ ile gösterilir.

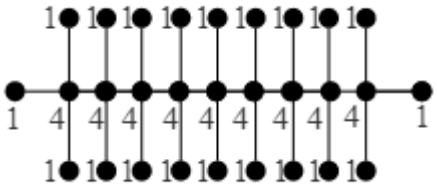


Şekil 2.9. $T_{4,2}$ larva grafı

Tez boyunca $t \geq 3$ ve $k \geq 1$ alınacaktır. Bunun sebebi, diğer durumlarda elde edilen basit graflar için $T_{t,k} = P_{t+k}$ olmasıdır.

2.1.23. Tanım. Bir patika graftan (tırtılın iskeleti) uzaklığı en fazla 1 birim olan köşelerden (tırtılın ayakları) ve bunları patika grafa birleştiren kenarlardan oluşan bir grafa *tırtıl graf* denir. Derece dizisi $\{1^{(a_1)}, u^{(a_u)}\}$ olan tırtıl grafın isimlendirilmesi $T_u(a_u)$ şeklindedir.

Aşağıdaki şekilde derecesi 4 olan köşelerden toplam 9 tane olduğu için bu tırtıl grafın ismi $T_4(9)$ olarak isimlendirilir.



Şekil 2.10. $T_4(9)$ tırtıl grafı

Literatürde $T_u(a_u)$ ile gösterilen tırtıl graflar dışında da tırtıl graflar mevcuttur. Bu graflarda iç köşe derecelerinin tümü eşit olmak zorunda değildir. Bu tırtıl graflar, konumuzun dışında kaldığından ve bir ortak gösterime sahip olmadıklarından burada bu graflara yer verilmeyecektir.

2.1.24. Tanım. *G* bir bağlantılı graf olsun. *G* grafında hiç devir bulunmuyorsa bu grafa *ağaç grafı* denilir. *n* köşe sayısı olmak üzere *n* köşeli bir ağaç T_n ile gösterilir. *G* grafında bağlantılılık şartı kaldırılırsa bu *G* grafına *orman* adı verilir. T_n ağaç grafının derece dizisi

$$T_n = \left\{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\right\}$$

şeklindedir.

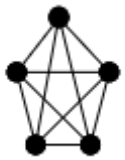


Şekil 2.11. T_5 ağaç grafı

Şekil 2.11'deki graf bir ağaçtır. Dikkat edilirse patika ve yıldız grafların tümü de aynı zamanda birer ağaçtır.

2.1.25. Tanım. Herhangi bir *G* grafı hiç devir bulundurmuyorsa bu grafa *hiç yüzü olmayan graf* denir. *G* grafı sırasıyla *tek devir*, *iki devir*, *üç devir* bulunduruyorsa bu grafa *tek devirli*, *iki devirli*, *üç devirli graf* adı verilir.

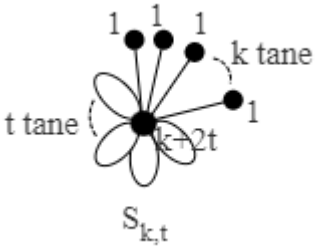
2.1.26. Tanım. Rastgele alınan bir *G* grafında bulunan her bir köşe, diğer köşeler ile birer kenar oluşturuyorsa bu *G* grafına *tam graf* denilir ve K_n şeklinde gösterilir.



Şekil 2.12. K_5 tam grafı

Tez boyunca K_n tam grafı için *n* köşe sayısı olmak üzere $n \geq 4$ alınacaktır. Zira $n = 1, 2$ için $K_n = P_n$ ve $n = 3$ için $K_n = C_n$ bulunur. Tanımına dikkat edilirse bir K_n tam grafı, *n* köşeli basit graflar içinde kenar sayısının maksimum olduğu graftır.

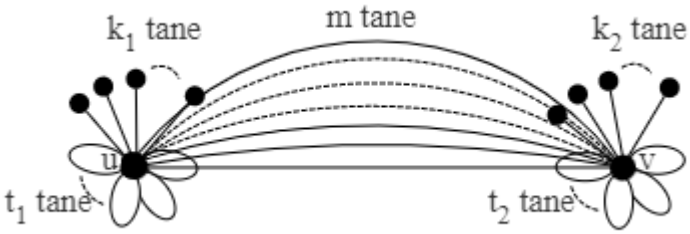
2.1.27. Tanım. *k* tane asılı köşesi olan ve *t* tane düğümü (döngüsü) olan grafa $S_{k,t}$ *grafı* denir.



Şekil 2.13. $S_{k,t}$ grafı

Bu grafta *k* tane asılı köşe ve bir tane de derecesi *k+2t* olan köşe bulunmaktadır.

2.1.28. Tanım. S_{k_1,t_1} grafı ile S_{k_2,t_2} grafının m tane kenar ile birleştirilmesiyle oluşan grafa $S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(m)$ *grafı* denir.



Şekil 2.14. $S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(m)$ grafı

Şimdi günümüzde graf teorinin en çok çalışılan alt alanlarından birisi olan ve bu tezin konusunu oluşturan topolojik graf indekslerini tanıyacağız. Adına graf indeksi, topolojik indeks, kimyasal tanımlayıcı gibi isimler de verilen topolojik graf indeksleri özellikle sahip oldukları uygulamalar nedeniyle çeşitli bilim dallarında sıklıkla kullanılmaktadırlar.

Topolojik indeksler genellikle 3 şekilde tanımlanmaktadır. Köşe derecelerine, uzaklığa ve son olarak da değişik graf parametrelerine göre. Sonuç olarak, topolojik indeksler kimyasal yapısından dolayı moleküler graflardan kolayca hesaplanabilen, grafların gösterilme veya etiketlenme şekline bağlı olmayan ve enerji minimizasyonu gerektirmeyen iki boyutlu tanımlayıcılar olarak tanımlanabilir. Genel olarak bir topolojik graf indeksi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

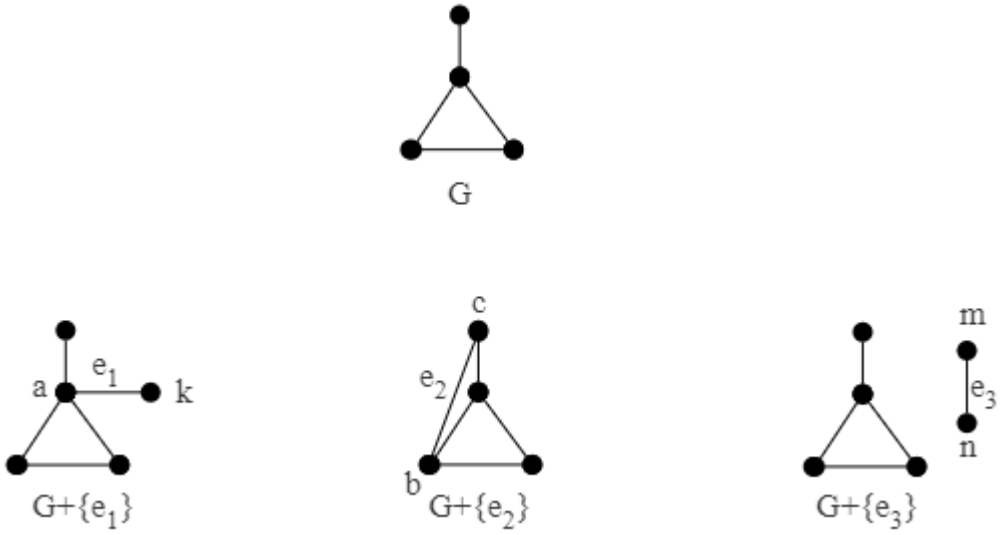
2.1.29. Tanım. *G* bir graf olsun. $TI : G \to \mathbb{R}$ şeklindeki herhangi bir fonksiyona *G* grafının bir topolojik graf indeksi denilir.

Oldukça genel bir kavram olan topolojik graf indeksleri; aslında grafın köşeleri, kenarları, bunların dereceleri, farklı graf elemanları ve parametreleri yardımıyla tanımlanabilen her türlü fonksiyon olabilir. Bu fonksiyonlar yardımıyla elde edilen reel sayı değerleri, farklı açılardan yorumlandıklarında graf ile modellenmiş olan herhangi bir günlük yaşam

problemi hakkında o alana özgü bilgiler verirler. Bu da grafların, sadece matematiksel yöntemlerle çalışılmasının ne kadar geniş bir alanda uygulamalarının olduğunu gösterir. Bu uygulamalar nedeniyle son yarım yüzyılda topolojik graf indeksleri ve uygulamaları, graf teorinin ve matematiğin en yoğun çalışılan dallarından biri olmuştur.

Son olarak belirtmeliyiz ki, bir topolojik graf indeksi, birbirine izomorfik olan tüm graflar için aynı değeri verecektir. Yani değişmezdir.

2.1.30. Tanım. Herhangi bir *G* grafında kenar kümesinde olmayan bir *s* kenarının eklenmesiyle oluşturulan yeni grafa *s kenarı eklenmiş G grafı* denilir ve bu yeni oluşan graf $G + \{s\}$ ya da kısaca $G + s$ ile gösterilir.



Şekil 2.15. Bir *G* grafında kenar ekleme örnekleri

Herhangi bir *G* grafına kenar ekleme üç şekilde yapılabilir. Birincisi *G* grafının bir *a* köşesine, *G* grafına ait olmayan bir *k* köşesini yeni bir $e_1 = ak$ kenarıyla birleştirebiliriz. İkincisi *G* grafının komşu olmayan iki *b* ve *c* köşesini, yeni bir $e_2 = bc$ kenarıyla

birleştirebiliriz. Üçüncüsü ise G grafına ait olmayan iki m ve n köşesini, yeni bir $e_3 = mn$ kenarıyla birleştirebiliriz. $G+\{e_3\}$ grafının bileşen sayısı 2 olurken ilk iki grafın bileşen sayısı 1 olarak kalacaktır.

2.1.31. Tanım. Birbirine izomorf olmayan en az iki grafın köşe derece dizileri ve kenar derece dizileri (kenar parçalanış sayıları) aynı olup, bu grafların GA_1 topolojik indeks değerleri eşit ise bu graflara *eş* GA_1 *graflar* denir.

2.1.32. Tanım. Birbirine izomorf olmayan en az iki grafın köşe derece dizileri ve kenar derece dizileri (kenar parçalanış sayıları) aynı olup, bu grafların *Randic* topolojik indeks değerleri eşit ise bu graflara *eş Randic graflar* denir.

2.2. GA_1 İndeksi ve Randic İndeksinin Tanımı ve Hesaplanması

Burada ele alacağımız topolojik graf indeksleri, (birinci) geometrik-aritmetik indeks ve Randic indeksidir.

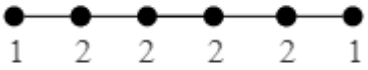
2.2.1. Tanım. Bir G grafında belirli bir i köşesinin derecesi d_i ve i köşesine komşu olan diğer belirli bir j köşenin derecesi d_j olmak üzere;

$$GA_1(G) = \sum_{v_i v_j \in E(G)} \frac{2\sqrt{d_i d_j}}{d_i + d_j}$$

dir. Buna *G grafının geometrik-aritmetik indeksi* denilir. (Vukičević ve Furtula 2009).
Bu tezde P_n, S_n, C_n, K_n, $T_{r,s}$, T_n, $T_u(a_u)$, $S_{k,t}$, $S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(m)$, $C_{n,x}$ grafları için GA_1 indekslerini hesaplayacağız.

İlk olarak patika grafı ile başlayalım.

2.2.2. Örnek. P_n patika grafında $n = 6$ için GA_1 indeksini hesaplayalım.



Şekil 2.16. P_6 patika grafının köşe dereceleri

$$GA_1(P_6) = \sum_{v_i,v_j \in E(G)} \frac{2\sqrt{d_i d_j}}{d_i + d_j}$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{1+2} + \frac{\sqrt{2\cdot 2}}{2+2} + \frac{\sqrt{2\cdot 2}}{2+2} + \frac{\sqrt{2\cdot 2}}{2+2} + \frac{\sqrt{2\cdot 1}}{2+1}\right)$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$
$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} + 3.$$

2.2.3 Tanım. *G* bir graf olmak üzere *G* grafının *Randic indeksi*

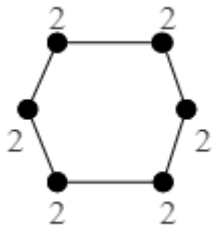
$$R(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{d_u . d_u}}$$

şeklinde tanımlıdır. (Randic 1975).

Bu tezde P_n, S_n, C_n, K_n, $T_{r,s}$, T_n, $T_u(a_u)$, $S_{k,t}$, $S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(m)$, $C_{n,x}$ grafları için Randic indekslerini hesaplayacağız.

İlk olarak devir grafı ile başlayalım.

2.2.4. Örnek. C_n patika grafında $n = 6$ için Randic indeksini hesaplayalım.



Şekil 2.17. C_6 devir grafının köşe köşe dereceleri

$$R(C_6) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{d_u \cdot d_v}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2}} = 3.$$

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Topolojik graf indeksleri, graf teorinin son zamanlarda fazlasıyla üzerinde çalışılmış bir bölümünü oluşturmaktadır. Topolojik indeksler başlıca 3 şekilde tanımlanır. Birincisi köşe derecelerine, ikincisi uzaklığa ve üçüncüsü graf parametrelerine göre ifade edilir. Graf teori literatüründe 3 bölüme ait özgün çalışmalar bulunmaktadır. Bu indeks türlerinde hesaplamaya dayalı yöntemler ortaya çıkmaktadır. Büyük hesaplamalar için bilgisayar programlarında yapılırken küçük hesaplamalar elle yapılır.

Bu çalışmada köşe derecelerine göre tanımlanan GA_1 indeksi ve Randic indeksleri kullanılmıştır. GA_1 indeksi ve Randic indekslerin bazı özel graf türleri için hesaplamaları yapılmıştır. Bu hesaplamalar için klasik lineer cebir, kombinatorik ve graf teorik yöntemlere de yeri geldikçe ihtiyaç duyulmuştur. Bunun dışında eldeki bazı problemlerle ilgili EXCEL programında hesaplamalar yapılmış ve problemlerin çözümünde ve teoremlerin oluşturulmasında önümüzdeki dönem içinde faydalanılacak çok sayıda ham veri elde edilmiştir. Bu verilerden faydalanarak sonuçlar elde edilmeye başlanmıştır.

Köşe dereceleri tam kare olan rastgele seçilen komşu iki köşenin GA_1 indeks değerlerini veren tablolardan sıklıkla faydalanılmıştır. Bu tablolar oluşturulduğunda kolayca hesaplanmak istenen indekse ulaşmak mümkün olmaktadır. Çalışmada bağlantılı, bağlantısız, regüler, regüler olmayan, basit ve basit olmayan graflara göre GA_1 mevcut özellikleri incelenmiştir.

Bazı graf karlarının GA_1 ve Randic değerleri hesaplanmış ve GA_1 ve Randic indekslerinin alabilecekleri maksimum ve minimum değerler belirlenmiştir. Bu değerlere karşılık çizilebilecek graf sayısı belirlenmeye çalışılırken fonksiyonların çiziminden faydalanmıştır. Bu çizimler internet üzerindeki Wolfram sitesinden yapılmıştır.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve BULGULAR

4.1. GA_1 İndeksi ve Ω İnvaryantı Arasındaki İlişki

Bu bölümde basit ve bağlantılı graflar için GA_1 indeksi ve Ω invaryantı arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz. Verilen kenar ve köşe sayılarına bağlı olarak Ω invaryantının alabileceği maksimum ve minimum değerleri elde edeceğiz.

Basit ve bağlantılı bir *G* grafının kenar sayısı olan m verildiğinde *G* grafının köşe sayısı olan *n*, maksimum değerini *G* bir ağaç iken alır. Bu durumda $n = m + 1$ yazılır. Yani genel durumda köşe sayısı $1 \leq n \leq m + 1$ eşitsizliğini sağlar. Burada $n = 1$ ise graf basit olacağından $m = 0$ olmalıdır. Aksi halde graf bir döngüye sahip olur ve basit olmazdı. Dolayısıyla

$$\Omega(G) = 2(m - n) = -2$$

olur. Burada elde edilen • grafı, tek köşeli bir graftır.

Şimdi genel bir basit bağlantılı grafın Ω invaryantının alabileceği maksimum değeri belirleyeceğiz. Basit ve bağlantılı bir grafta maksimum kenar sayısı bir tam grafta elde edilir ve grafın köşe sayısı n iken bu değer $\binom{n}{2}$ olur. Tanım gereği

$$\begin{aligned}\Omega(G) &= 2(m - n)\\ &\leq 2\left(\binom{n}{2} - n\right)\\ &= 2\left(\frac{n(n-1)}{2} - n\right)\\ &= n^2 - 3n\end{aligned}$$

olur ve bu değer Ω invaryantının alabileceği maksimum değerdir. (Delen ve Cangül 2018 ve Delen ve Cangül 2019)'da $\Omega(G) = -2$ olan tüm bağlantılı grafların birer ağaç olduğu gösterilmişti. Böylece şu sonuca ulaşılmış olur:

4.1.1. Teorem. *G* grafı *n* köşeli, basit, bağlantılı bir graf olsun.

$$-2 \leq \Omega(G) \leq n^2 - 3n$$

yazılır. Soldaki eşitsizlik *G* grafı bir ağaç iken, sağdaki eşitsizlik ise $G = K_n$ iken sağlanır.

4.1.1. Teorem gereği *n* = 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 iken mevcut olabilecek tüm graflar için omega invaryantının alabileceği tüm değerler ile bu grafların *r* ile gösterilen bölge sayılarının alabileceği değerler Çizelge 4.1.'de listelenmiştir.

$\boldsymbol{n}$	$\Omega(\boldsymbol{G})$	$\boldsymbol{r}$
1	-2	0
2	-2	0
3	-2, 0	0, 1
4	-2, 0, 2, 4	0, 1, 2, 3
5	-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10	0, 1, 2, …, 6
6	-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18	0, 1, 2, …, 10

Çizelge 4. 1. Omega invaryantı ve *r* bölge sayısının alabilecekleri değerler $(1 \leq n \leq 6)$.

Köşe ve kenar sayılarıyla ilgili bağıntılardan faydalanarak Teorem 4.1.1'in ikinci bir ispatını verebiliriz:

$$0 \leq m \leq \binom{n}{2}$$

$$-n \leq m - n \leq \binom{n}{2} - n$$

$$-2n \leq 2(m-n) \leq 2\left[\binom{n}{2} - n\right]$$

$$-2n \leq \Omega(G) \leq n(n-3)$$

olur. Ayrıca *G* bağlantılı olduğundan $\Omega(G) \geq -2$ olduğunu biliyoruz. Yani

$$-2 \leq \Omega(G) \leq n(n-3)$$

olur.

4.1.2. Teorem. *G*, *m* kenarlı, basit ve bağlantılı bir graf olsun.

$$-2 \leq \Omega(G) \leq 2\left(m - \left\lceil\left|\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}\right|\right\rceil\right)$$

eşitsizliği yazılır. Burada $\lceil|a|\rceil$, a sayısından küçük olmayan en küçük tamsayıdır.

İspat. $0 \leq m$ olduğundan $0 \leq 2m$ olduğu kullanılırsa $-2n \leq 2(m-n)$ elde edilir ve böylece $-2n \leq \Omega(G)$ yazılabilir. Ancak G bağlantılı olduğunda $\Omega(G) \geq -2$ olduğu bilindiğinden soldaki eşitsizliğin doğru olduğunu görmüş oluruz. İkinci olarak, basit bağlantılı bir grafta

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

sağlandığından $0 \leq n^2 - n - 2m$ ikinci derece eşitsizliği elde edilir ve buradaki ikinci dereceden ifadenin diskriminantı

$$\Delta = 1 + 8m$$

olduğundan kökleri $n_{1,2=} \frac{1 \pm \sqrt{8m+1}}{2}$ bulunur. Böylece sağ taraftaki eşitsizlik elde edilir.

Buradan hareketle aşağıdaki sonuçlar yazılır:

4.1.3. Sonuç. *n* köşe sayısı, *m* kenar sayısı olmak üzere *G* basit, bağlantılı grafında *m* kenar sayısı verilsin. Bu durumda

$$\left\lceil \left| \frac{1 + \sqrt{8m+1}}{2} \right| \right\rceil \leq n \leq m + 1$$

eşitsizliği bulunur.

4.1.4. Sonuç. *G* basit olmayan ve bağlantılı grafında *m* kenar sayısı verilsin.

$$1 \leq n \leq m$$

eşitsizliği bulunur.

4.1.5. Sonuç. *G* bağlantılı grafında *m* kenar sayısı verilmiş olsun. *n* köşe sayısı olmak üzere Sonuç 4.1.3. ve Sonuç 4.1.4.'den dolayı

$$1 \leq n \leq m+1$$

eşitsizliği bulunur.

4.1.6. Sonuç. *G* grafı basit, bağlantılı grafında *n* köşe sayısı verilsin. Bu durumda *a* bir pozitif tamsayı olmak üzere $n_{min} = a$, $a \geq 2$ için

$$\binom{a}{2} - (a-2) \leq m \leq \binom{n}{2}$$

eşitsizliği bulunur.

m	*m* Kenarlı Basit ve Bağlantılı Graf Sayısı	*m* Kenarlı Basit Olmayan ve Bağlantılı Graf Sayısı
1	1	1
2	1	3
3	3	7
4	5	15
5	12	20

Çizelge 4.2. *m* kenarlı basit ve basit olmayan bağlantılı graf sayıları $(1 \leq m \leq 5)$.

4.2. GA_1 İndeksi İçin Ters Problem

Matematiğin birçok dalında adına ters problem denilen bir problem türü oldukça önemli bir yer tutmaktadır. Bir ters problem, adından da anlaşılacağı gibi var olan herhangi bir probleme ters yönden yaklaşımla ilgilidir. Örneğin, bir topolojik graf indeksi için ters problem, bu indeksin aldığı değerlere göre grafların sınıflandırılması ya da herhangi bir özelliğe göre çalışılmasını içerir. Bu değerler birçok meşhur ters problemde

tamsayılardan oluşsa da bazen tamsayı olmayan değerlere göre de çalışmalar yapılmaktadır. Bazı indeksler sadece tamsayı değerler aldığından bu indeksler için ters problemlerin yapısı tamsayılarla sınırlıdır. Ancak çalıştığımız Geometrik aritmetik indeksler, Randic tabanlı indeksler, toplam bağlantılılık indeksleri, geometrik-aritmetik indeksler ve daha birçok topolojik graf indeksi türünün tanımında karekök olduğundan bu indekslerin aldığı birçok değer tamsayı olmamaktadır. Bu bölümde *G bir bağlantılı irregüler graf* iken $GA_1(G)$'in alamadığı tamsayı değerleri nelerdir" sorusuna cevap aranacaktır. Bu sorunun değişik bir çeşidi de bu indeksin hangi reel sayı değerleri alabildiği şeklinde tanımlanabilir ve çalışılabilir. Ancak bu problemin çözümü doğal olarak daha karmaşıktır. Bu bölümde elde edeceğimiz sonuçlar bize geometrik-aritmetik indeksin alamayacağı tamsayı değerlerin sadece

1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 16, 18, 20

olduklarını göstermiştir.

Geometrik-aritmetik indeks ile ilgili ters problemi çözmek için ilk olarak

$$GA_1(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} \frac{2\sqrt{d_u d_v}}{d_u + d_v}$$

değerinin pozitif bir tamsayı olması gerektiğine dikkat edilmelidir. Bu ise ancak her uv kenarı için $\frac{2\sqrt{d_u d_v}}{d_u+d_v}$ değerinin pozitif bir rasyonel olması iken mümkündür. Bu durumda aşağıdaki ihtimaller söz konusudur:

1) r bir pozitif tamsayı olmak üzere $d_u = r^2$ bir tam kare ise d_v de bir tam kare olmalıdır. O halde s bir pozitif tamsayı olmak üzere $d_v = s^2$ dersek

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{d_u d_v}}{d_u + d_v} = \frac{2rs}{r^2 + s^2}$$

bulunur.

2) d_u bir tam kare değilse d_v de değildir. O halde $q = a^2$ ve $r = b^2$ birer tam kare, $p_1, \dots, p_k$ farklı asallar olmak üzere

$$d_u = p_1 \dots p_k \cdot q \text{ ve } d_u = p_1 \dots p_k \cdot r$$

yazılabilir. Böylece

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{d_u d_v}}{d_u + d_v}$$

$$= \frac{2\sqrt{p_1^2 \dots p_k^2 . q . r}}{p_1 \dots p_k \cdot q + p_1 \dots p_k \cdot r}$$

$$= \frac{2p_1 \dots p_k \cdot a \cdot b}{p_1 \dots p_k \cdot q + p_1 \dots p_k \cdot r}$$

değeri pozitif bir rasyonel sayı olur. Burada $(d_u, d_v) \neq 1$ olması durumunda d_u ve dv'yi sadeleştirerek $GA_1(G)$ indeksine aynı katkıyı elde ederiz. Dolayısıyla aşağıdaki lemma ifade edilebilir.

4.2.1. Lemma. Bir *G* grafında herhangi alınan komşu iki köşe *u* ve *v* olsun. Bu köşelere ait dereceler $d_{u,}\, d_v$ olmak üzere $\left(d_{u,} d_v\right) = d > 1$ olsun. O halde $\frac{d_u}{d} = d_{u'}$, $\frac{d_v}{d} = d_{v'}$ diyelim. Bu durumda

$$GA_1(\{d_{u'}, d_{v'}\}) = GA_1(\{d_u, d_v\})$$

eşitliği bulunur.

İspat. Bir *G* grafından aldığımız herhangi alınan *u* ve *v* komşu iki köşenin GA_1 indeks değeri

$$GA_1(\{d_u, d_v\}) = \frac{2\sqrt{d_u d_v}}{d_u + d_v}$$

$$= \frac{2\sqrt{dd_{u'}dd_{v'}}}{dd_{u'}+dd_{v'}}$$

$$= \frac{2d\sqrt{d_{u'}d_{v'}}}{d(d_{u'}+d_{v'})}$$

$$= \frac{2\sqrt{d_{u'}d_{v'}}}{d_{u'}+d_{v'}}$$

$$= GA_1(\{d_{u'}, d_{v'}\})$$

eşitliği bulunur. $(d_u\,, d_v) = 1$ ise $\{d_u\,, d_v\}$ ikilisine ilkel ikili; $e = uv$ kenarına da ilkel kenar diyeceğiz. 4.2.1. Lemma'ya göre ilkel olmayan ikililere bakmaya gerek kalmaz.

Buraya kadar yapılan işlemler sonucunda aşağıdakileri söyleyebiliriz.

4.2.2. Lemma. Bir $e = uv$ kenarının $GA_1(G)$ indeksine katkısını

$$C(u,v) = \frac{2\sqrt{d_u d_v}}{d_u + d_v}$$

ile gösterelim. $C(u,v) \leq 1$'dir. Ayrıca $GA_1(G) = uv$ için $d_u = d_v$ ise $C(u,v) = 1$ yazılır.

İspat. $d_u = d_v$ durumu aşikardır. $C(u,v) \leq 1$ olduğu ise geometrik-aritmetik eşitsizlikten görülür.

4.2.2. Lemma'yı yorumlarsak GA_1'in tamsayı değerlerini aradığımızda iki köşe derecesi aynı olan kenarların GA_1'e katkısı tamsayı olacağından iki köşe derecesi farklı olan kenarların katkı toplamının tamsayı olmasını isteyebiliriz. Ayrıca aşağıdaki sonuçlar aşikardır.

4.2.3. Sonuç. Bir $e = uv$ kenarının $GA_1(G)$ indeksine katkısı

$$C(u,v) = \frac{2\sqrt{d_u d_v}}{d_u + d_v}$$

olmak üzere ve *m* kenar sayısı için

$$C(u,v) \leq m$$

eşitsizliği yazılır.

4.2.4. Teorem. *m* kenar sayısı olmak üzere *G* grafı *r*-regüler ise

$$GA_1(G) = m$$

olduğu kolayca görülebilir.

Burada *n* köşe sayısı ve *r*-regüler bir grafta $m = \frac{nr}{2}$ olduğunu hatırlayınız. Yani *n* veya *r*'nin en az biri çift olmalıdır.

4.2.5. Sonuç. *n* köşe sayısı olmak üzere *G* grafı r-regüler ise

$$GA_1(G) = \frac{nr}{2}$$

olur. Yani G grafı r-regüler, m kenarlı ve n köşeli bir graf ise r değerleri n çift iken $2, 3, 4, \dots, n-1$; n tek iken $2, 4, 6, \dots, n-1$ olabilir. Sonuç olarak $GA_1(G)$ değerleri n çift iken $n, \frac{3n}{2}, 2n, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$; n tek iken de $n, 2n, 3n, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$ olabilir.

4.2.6. Sonuç. n köşe sayısı olmak üzere n-regüler C_n devir grafının GA_1 indeksi

$$GA_1(C_n) = n$$

şeklinde yazılır.

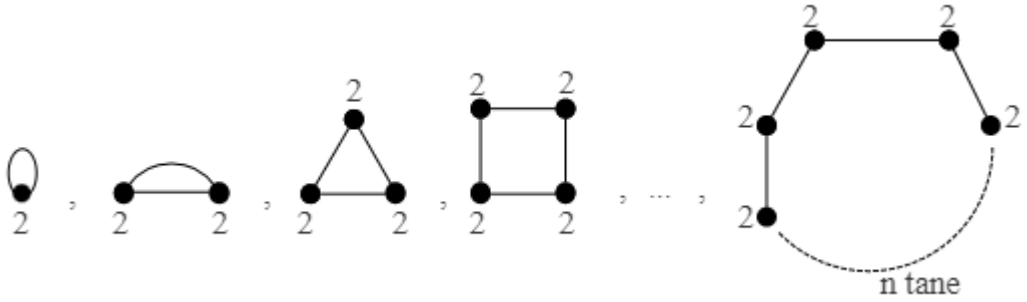
İspat. C_n için $m = n$' dir. C_n grafı 2-regüler olduğundan 4.2.3. Teorem gereği

$$GA_1(C_n) = m = n$$

bulunur.

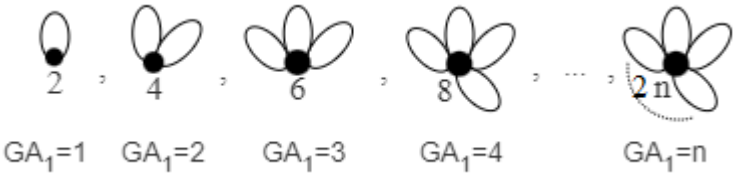
Buradan hareketle şu özellikler aşikârdır:

Şekil 4.1.'de verilen grafların GA_1 indeksleri sırasıyla 1, 2, 3, 4, …, n şeklindedir. Dolayısıyla bu tür grafların GA_1 indeksi her pozitif tamsayı değeri alır. Bir başka deyişle, devirli graflardan oluşan bu graf sınıfı, GA_1 indeksinin her bir pozitif tamsayı değeri alabileceğini göstermeye yeterlidir.



Şekil 4.1. GA_1 indeksinin her pozitif tamsayıya eşit olabileceğini gösteren devirli graflar

Şekil 4.2.'de verilen graflarda ise, bir döngünün geometrik-aritmetik indeksi 1 değerini alacağından n adet bağımsız döngüden oluşan bir grafın geometrik-aritmetik indeksi n pozitif tamsayı değerini alacaktır. Burada bağlantılılık şartını da kaldırırsak, n adet bağımsız döngüden oluşan bir graf için $GA_1(G) = n$ olacağından GA_1 indeksinin her pozitif tamsayı değerini alabildiği üçüncü bir graf sınıfı elde etmiş oluruz.



Şekil 4.2. GA_1 indeksinin her pozitif tamsayıya eşit olabileceğini gösteren graflar

4.2.7. Lemma. x ve y herhangi pozitif tamsayılar olmak üzere $(x, y) = 1$ ise $(2xy, x^2 + y^2) = 1$ veya 2 olur.

İspat. $d = (2xy, x^2 + y^2)$ olsun $d|2xy$ ve $d|(x^2 + y^2)$ olur. Eğer tersine $d \geq 3$ olsaydı, d'nin en az bir p tek asal böleni olurdu.

$p|2xy$ olacağından $p|x$ veya $p|y$ elde edilir. $p|x$ ise $(x,y)=1$ olduğundan p bölemez y olur. Yani p bölemez x^2+y^2 olur. Bu da d bölemez x^2+y^2 anlamına gelir. Bu da çelişkidir d'nin tek asal çarpanı yoktur. $d|2xy$ olduğundan $d|2$ ve $d|1$ veya 2 elde edilir.

$x^2=d_i,\ y^2=d_j,\ \left(d_i\ ,d_j\right)=1$ iken aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.2.8. Sonuç. Bir G grafında i, j komşu köşelerine ait dereceler d_i, d_j olmak üzere $d_i=x^2,\ d_j=y^2,\ \left(d_i\ ,d_j\right)=1$ olsun. Bu durumda bu komşu köşelerin GA_1indeks değeri

$$GA_1(\{d_i,d_j\})=\frac{2\sqrt{d_i d_j}}{d_i+d_j}$$

yazılır. Bu değerin sadeleşmiş hali $\frac{a}{b}$ ise $b\equiv 1(4)$ olur.

İspat. $d_i=x^2$ ve $d_j=y^2$, $\left(d_i\ ,d_j\right)=1$ iken $\frac{2\sqrt{d_i d_j}}{d_i+d_j}=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ kesrinin sadeleşmiş hali $\frac{a}{b}$ olsun. 4.2.7. Lemma gereği $d=(2xy,x^2+y^2)=1$ veya 2 olduğunu biliyoruz. $d=1$ ise sadeleştirme olmaz ve

$$b=d_i+d_j\ =x^2+y^2$$

toplamı tek olmalıdır. Genelliği bozmadan d_i tek, d_j çift kabul edebiliriz. Bu durumda $d_i=\ x^2\equiv 1(4)$ ve $d_j=\ y^2\equiv 0(4)$ ve böylece $b=d_i+d_j\ =x^2+y^2\equiv 1(4)$ elde edilir. Eğer $d=2$ ise $d_i=\ x^2$ ve $d_j=\ y^2$ aynı pariteye sahiptir. Yani bu sayıların her ikisi de tek ya da her ikisi de çifttir. İlk olarak d_i ve d_j çift ise bu $\left(d_i\ ,d_j\right)=1$ varsayımı

ile çelişir. O halde $d_i = x^2$ ve $d_j = y^2$ tek olmalıdır. $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ sayısının pay ve paydası çift olacağından ikileri sadeleştirirsek bu kesrin sadeleşmiş hali $\frac{xy}{\frac{x^2+y^2}{2}}$ olur. O halde

$$b = \frac{x^2+y^2}{2}\frac{1+1}{2} \equiv 1(4)$$

bulunur.

Bu kısımda GA_1için ters problem kısmında bahsettiğimiz *G bir bağlantılı irregüler graf* iken $GA_1(G)$ değerinin alamadığı tamsayı değerleri nelerdir" sorusuna karşılık geometrik-aritmetik indeksin alamayacağı tamsayı değerlerin sadece

1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 16, 18, 20

olduklarını söylemiştik. Burada G bağlantılı ve irregüler iken $GA_1(G)$ indeksinin alamadığını belirttiğimiz bu değerlerden 1, 2, 3 ve 4 değerlerinin alınamayacağının ispatları yapılacaktır. Diğer tamsayı değerlerin alınamadığı da benzer şekilde görülebilir.

4.2.9. Lemma. *G* bağlantılı ve irregüler iken $GA_1(G) = 1$ olamaz.

İspat. Bir *G* grafında *u* ve t komşu iki köşe olmak üzere $GA_1(G)$ indeks değeri $a \in Z$, $a > 1$ için

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{d_u d_v}}{d_u + d_v} = \frac{1}{a}$$

olsun. Bu eşitlikten

$$4a^2 d_u d_v = {d_u}^2 + {d_v}^2 + 2d_u d_v$$

$${d_u}^2 + {d_v}^2 + (2 - 4a^2) d_u d_v = 0$$

yazılır. Burada $a = 1$, $b = (2 - 4a^2)d_v$, $c = {d_v}^2$ için

$$\Delta = (4 - 16a^2 + 16a^4){d_v}^2 - 4.1.{d_v}^2$$

$$= (16a^4 - 16a^2){d_v}^2$$

$$= 16a^2 {d_v}^2 (a^2 - 1)$$

bulunur. $a^2 - 1$ tam kare olmalıdır. b bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$a^2 - 1 = b^2$$

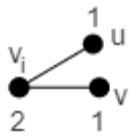
$$a^2 - b^2 = 1$$

yazılır. Bu durumda $a > 1$ ise çözümü yoktur. $GA_1(G) = \frac{p}{q}$ iken p, 1 olamaz. $\frac{p}{q}$ 'lardan en az q tanesi tamsayı olabileceğinden ve bu da $q.\frac{p}{q} = p$ olacağından $GA_1(G) = 1$ olamaz.

4.2.10. Lemma. *G* bağlantılı ve irregüler iken $GA_1(G) = 2$ olamaz.

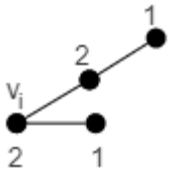
İspat. *G* grafı irregüler ise *G* grafında bulunan en az bir v_i köşesi için $d(v_i) = d_i \geq 2$ olsun.

$d_i = 2$ ise *G* grafında v_i köşesine komşu olan iki tane köşe vardır. Bu köşeler *u* ve *v* olmak üzere $d_u = d_v = 1$ ise oluşan grafın



Şekil 4.3. P_3 grafının köşe dereceleri

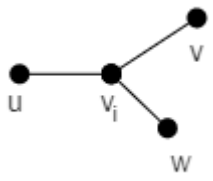
GA_1 indeksi hesaplanırsa $GA_1(P_3) = \frac{4\sqrt{2}}{3} = 1{,}885 < 2$ bulunur. Ancak *u* veya *v* köşesine bir kenar eklersek



Şekil 4.4. P_4 grafının köşe dereceleri

yeni oluşan grafın GA_1 indeksi hesaplanırsa $\mathrm{GA_1(P_4)} = 2{,}885 > 2$ bulunur ve eklenecek her bir yeni kenar GA_1 değerini arttırır.

$d_i = 3$ ise G grafında v_i köşesine komşu olan üç tane köşe vardır. Bu köşeler u, v, w olmak üzere $d_u = d_v = d_w = 1$ ise oluşan grafın



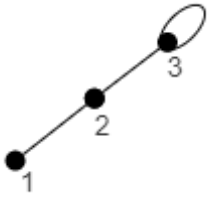
Şekil 4.5. S_4 grafının köşe dereceleri

GA_1 indeksi hesaplanırsa $GA_1(S_4) = \frac{3.3\sqrt{3}}{2} = 2{,}59 > 2$ bulunur ve eklenecek her bir kenar GA_1 değerini arttırır. Ayrıca $d_i = 3$ için aşağıdaki grafta çizilebilir. Bu durumda oluşan yeni grafın



Şekil 4.6. L grafının köşe dereceleri

GA_1 indeksi hesaplanırsa $GA_1(L) = 1{,}86 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}86 < 2$ bulunur ve eklenecek bir yeni kenar ile oluşan grafın



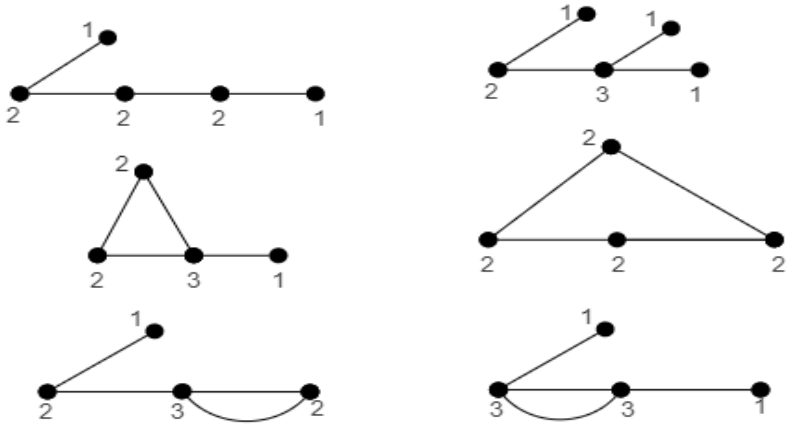
Şekil 4.7. M grafının köşe dereceleri

GA_1 indeksi hesaplanırsa $GA_1(M) > 2$ olur. Benzer şekilde eğer $d_i \geq 4$ ise çizilebilecek en basit graflar için $GA_1 \geq \frac{13}{5} > 2$ olur ve eklenecek her bir yeni kenar GA_1 değerini arttıracağından $GA_1(G) = 2$ olan bir bağlantılı irregüler graf mevcut olamaz.

4.2.11. Lemma. *G* bağlantılı ve irregüler iken $GA_1(G) = 3$ olamaz.

İspat. *G* grafı irregüler ise *G* grafında bulunan en az bir v_i köşesi için $d(v_i) = d_i \geq 2$ olsun. $d_i = 2$ ise *G* grafında v_i köşesine komşu olan iki tane köşe vardır. Şekil 4.2.3. grafı çizilir. $d_u = d_v = 1$ ise $GA_1(P_3) = \frac{4\sqrt{2}}{3} = 1{,}885 < 2$ bulunur. Ancak *u* veya *v* köşesine bir kenar eklersek Şekil 4.2.4. grafı elde edilir ve $GA_1(P_4) = 2{,}885 > 2$ yazılır.

O halde yeni eklenecek bir kenar ya 1 dereceli ya da 2 dereceli köşeye eklenebilir. Ancak eklenecek her bir yeni kenar GA_1 değerini arttıracağından aşağıdaki grafların GA_1 değerleri $GA_1 > 3$ olur.

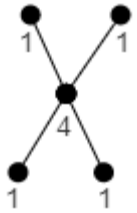


Şekil 4.8. P_4 grafına yeni kenar ekleme

Bu durumda $GA_1(G) = 3$ olan bağlantılı irregüler bir graf mevcut olamaz.

4.2.12. Lemma. *G* bağlantılı ve irregüler iken $GA_1(G) = 4$ olamaz.

İspat. *G* irregüler ise *G* grafında bulunan en az bir v_i köşesi için $d(v_i) = d_i \geq 4$ olsun. Oluşan grafın $d_i = 4$ ise *G* grafında v_i köşesine komşu olan dört tane (1,4) kenarı vardır.



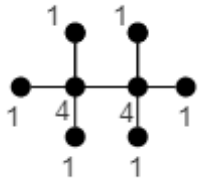
Şekil 4.9. S_5 grafının köşe dereceleri

GA_1 indeksi hesaplanırsa $GA_1(S_5) = 4 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 4}}{1+4} = \frac{16}{5} > 3$ olarak bulunur. $d_i = 4$ için bir başka graf çizimi aşağıdaki çizimdir. Aşağıdaki grafın



Şekil 4.10. N grafı köşe dereceleri

GA_1 indeksi hesaplanırsa $GA_1(N) = 2 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 4}}{1+4} + \frac{2\sqrt{4 \cdot 4}}{4+4} = \frac{8}{5} + 1 = \frac{13}{5} > 2$ olarak bulunur. Ayrıca ikinci bir 4 eklersek yeni oluşan grafın



Şekil 4.11. $T_4(2)$ grafı köşe dereceleri

GA_1 indeksi hesaplanırsa $GA_1(T_4(2)) = 6 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 4}}{1+4} + \frac{2\sqrt{4 \cdot 4}}{4+4} = \frac{24}{5} + 1 = \frac{29}{5} > 4$ olarak bulunur. Bu durumda $GA_1(G) = 4$ olan bir bağlantılı irregüler graf mevcut olamaz.

4.3. Kenar Sayılarına Göre Grafların GA_1 İndeksleri

Bu bölümde bazı özel grafların kenar sayısına göre GA_1 indeksinin alabildikleri değerler incelenmiştir.

4.3.1. m Kenarlı Basit, Bağlantılı Grafların GA_1 İndekslerinin Alabildiği Değerler

Şimdi basit, bağlantılı graf türlerinde *m* kenar sayısı olmak üzere *m* kenar sayılarının GA_1 indeksinin alabildikleri değerler incelenecektir. Öncelikle *m* kenar sayısının 1, 2 ve 3 değerleri incelenerek *m* kenar sayısı için genel sonuca varılacaktır.

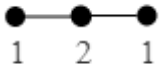
a) *m* kenar sayısı olmak üzere basit, bağlantılı bir *G* grafında $m = 1$ olsun. Bu durumda çizilebilecek tek bir graf söz konusudur.



Şekil 4.12. P_2 grafının köşe dereceleri

Bu P_2 patika grafının GA_1 değeri hesaplanırsa $GA_1(P_2) = 1$ bulunur.

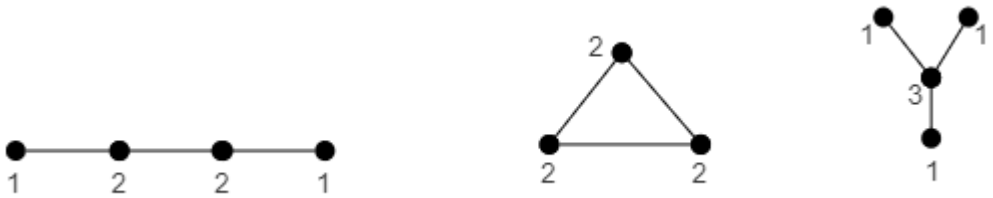
b) Basit, bağlantılı bir G grafında $m = 2$ olsun. Bu durumda çizilebilecek tek bir P_3 grafı söz konusudur.



Şekil 4.3. P_3 grafının köşe dereceleri

Burada P_3 patika grafının GA_1 değeri hesaplanırsa $GA_1(P_3) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ bulunur ve değer pozitif bir tamsayı değildir.

c) Basit, bağlantılı bir G grafında $m = 3$ olsun. Bu durumda P_4, C_3 ve S_4 graflarının çizimi söz konusudur.



Şekil 4.13. P_4, C_3 ve S_4 graflarının köşe dereceleri

Şekildeki P_4, C_3 ve S_4 graflarının GA_1 değerleri hesaplanırsa sırasıyla bu değerler $\frac{4\sqrt{2}}{3}$, 3, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ bulunur. Burada GA_1 değeri pozitif tamsayı olan sadece C_3 grafıdır.

Bu durumda sabit m değeri için bağlantılı basit bir grafın en büyük n değeri grafın ağaç olması durumunda elde edilir: Üç kenarlı bir ağaçta $n = m + 1 = 4$ kenar vardır. Ayrıca

$$3 = m \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

eşitsizliğinden $n \geq 3$ elde edilir. Yani üç kenarlı basit bağlantılı bir grafın üç veya dört kenarı olabilir. Yani tüm ihtimaller yukarıdaki üç grafla sınırlıdır.

4.3.2. *m* Kenarlı Tüm Bağlantılı Grafların GA_1 İndekslerinin Alabildiği Değerler

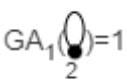
Burada basit şartını kaldırarak tüm bağlantılı graf türlerinde *m* kenar sayısı olmak üzere grafların m kenar sayılarına göre GA_1 indeksinin alabildikleri değer incelenecektir. Öncelikle *m* kenar sayısının 1, 2, 3 ve 4 değerleri incelenecektir ve sonrasında *m* kenar sayısı için genel sonuca varılacaktır.

a) Bağlantılı bir *G* grafında $m = 1$ olsun. 4.3.1. kısmındaki P_2 grafına ek olarak



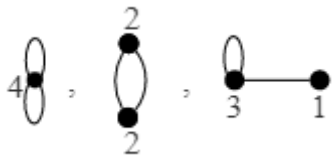
Şekil 4.14. $m = 1$ için bağlantılı, basit olmayan grafların köşe dereceleri

grafı elde edilir ve bu grafın GA_1 değeri



bulunur.

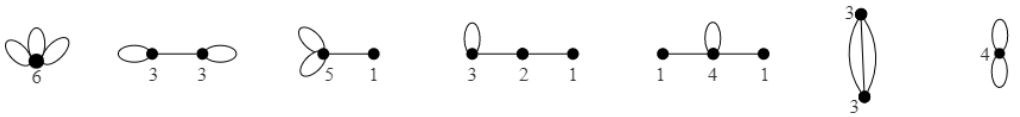
b) Bağlantılı bir G grafında $m = 2$ olsun. 4.3.1. kısmındaki P_3 grafına ek olarak



Şekil 4.15. $m = 2$ için bağlantılı, basit olmayan grafların köşe dereceleri

bağlantılı grafları elde edilebilir. Bu grafların GA_1 değerleri sırasıyla 2, 2, ve $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ olur. Burada GA_1 değeri pozitif tamsayı çıkan graflar bizim için önemlidir.

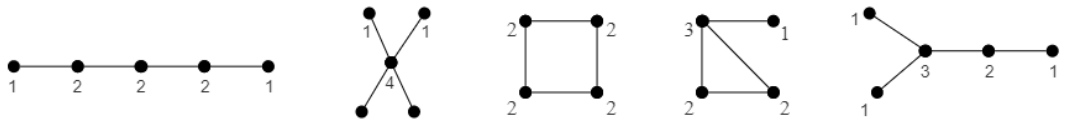
c) Bağlantılı bir G grafında $m = 3$ olsun. 4.3.1. kısmındakilere ek olarak



Şekil 4.16. $m = 3$ için bağlantılı, basit olmayan grafların köşe dereceleri

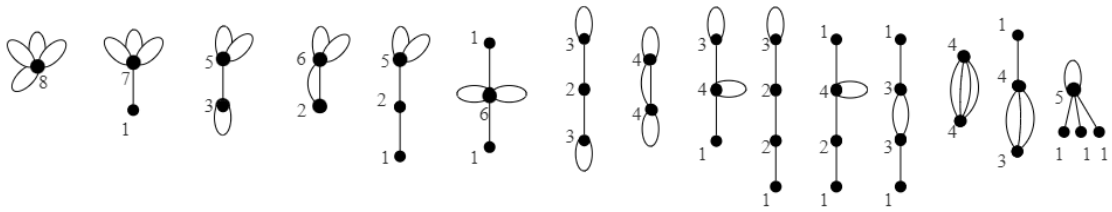
bağlantılı grafları elde edilebilir. Bunların GA_1 indeks değerleri sırasıyla 3, 3, $2 + \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{5} + 1$, $\frac{13}{5}$, 3, $\frac{4\sqrt{2}}{3} + 1$ bulunur. Burada GA_1 değeri pozitif tamsayı çıkan graflar bizim için önemlidir.

d) Bağlantılı bir G grafında $m = 4$ olsun. Bu durumda



Şekil 4.17. $m = 4$ için bağlantılı, basit grafların köşe dereceleri

bağlantılı grafları elde edilebilir. Bunların GA_1 değerleri sırasıyla $2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $\frac{16}{5}$, 4, $\frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{4\sqrt{6}}{5} + 1$, $\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{6}}{5} + \frac{2\sqrt{2}}{3}$ değerleri bulunur. Burada GA_1 değeri pozitif tamsayı çıkan graflar bizim için önemlidir.



Şekil 4.18. $m = 4$ için bağlantılı, basit olmayan regüler grafların köşe dereceleri

basit olmayan bağlantılı grafları elde edilebilir. Bunların GA_1 değerleri sırasıyla 4, $3 + \frac{2\sqrt{7}}{8}$, $3 + \frac{2\sqrt{15}}{8}$, $2 + \frac{2\sqrt{3}}{2}$, $2 + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{10}}{7}$, $2 + \frac{4\sqrt{6}}{7}$, $2 + \frac{4\sqrt{6}}{5}$, 4, $\frac{14}{5} + \frac{4\sqrt{3}}{7}$, $2 + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\frac{9}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $2 + \sqrt{3}$, 4, $\frac{4}{5} + \frac{12\sqrt{3}}{7}$, $1 + \sqrt{5}$ değerleri bulunur. Burada GA_1 değeri pozitif tamsayı çıkan graflar bizim için önemlidir.

Dolayısıyla maksimum köşe sayısı G grafının ağaç olması durumunda elde edildiğinden $n \leq 5$ olmalıdır. Yani tüm ihtimaller yukarıdakilerdir.

4.4. Köşe Sayılarına Göre Grafların GA_1 İndeksleri

Bu bölümde bazı özel grafların köşe sayısına göre GA_1 indeksinin alabildikleri değerler incelenmiştir.

4.4.1. n Köşeli Basit Bağlantılı Grafların GA_1 İndekslerinin Alabildiği Değerler

Şimdi basit, bağlantılı graf türlerinde n köşe sayılarına göre GA_1 topolojik indeksinin alabildiği değerler incelenecektir. Öncelikle n köşe sayısının 1, 2, 3 ve 4 değerleri incelenerek n köşe sayısı için genel sonuca varılacaktır.

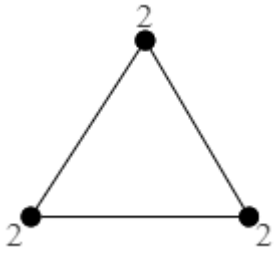
a) n köşe sayısı olmak üzere basit, bağlantılı bir G grafında $n = 1$ olsun. Bu durumda çizilebilecek tek bir N_1 tek köşeli grafı söz konusudur.

Şekil 4.19. N_1 tek köşeli grafı

Burada N_1 boş grafının GA_1 değeri sıfırdır.

b) Basit, bağlantılı bir G grafında $m = 2$ olsun. Bu durumda çizilebilecek tek bir P_2 grafı söz konusudur. Şekil.4.12.'den bu P_2 patika grafının GA_1 indeks değeri hesaplanırsa $GA_1(P_2) = 1$ bulunur.

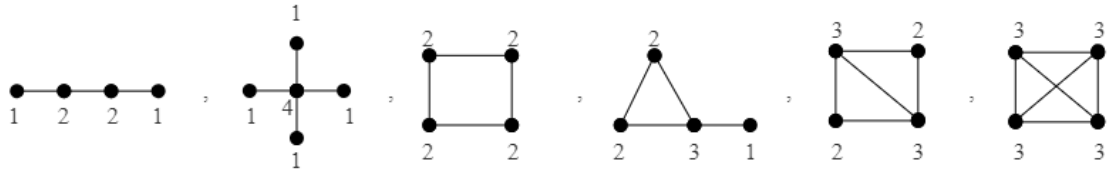
c) Basit, bağlantılı bir G grafında $n = 3$ olsun. Bu durumda çizilebilecek graflar P_3 patika ve C_3 devir graflarıdır. Şekil.4.3.'den P_3 patika grafının GA_1 değeri hesaplanırsa $GA_1(P_3) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ bulunur ve değeri pozitif bir tamsayı değildir. C_3 devir grafının



Şekil 4.20. C_3 grafı köşe dereceleri

GA_1 indeks değeri hesaplanırsa $GA_1(C_3) = 3$ bulunur.

d) Basit, bağlantılı bir G grafında $n = 4$ olsun. Bu durumda oluşan graflar aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.21. $n = 4$ için basit, bağlantılı grafların köşe dereceleri

Bu grafların GA_1 değerleri sırasıyla $2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $\frac{16}{5}$, 4, $\frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{4\sqrt{6}}{5} + 1$, $2\sqrt{6}$, 6 değerleri bulunur. Burada GA_1 değeri pozitif tamsayı çıkan graflar bizim için önemlidir.

Bu durumda sabit n değeri için bağlantılı basit bir grafın en büyük m değeri tam graf olması durumunda elde edilir: Dört kenarlı bir tam grafta $\binom{n}{2} = \binom{4}{2} = 6$ tane kenar vardır.

Ayrıca

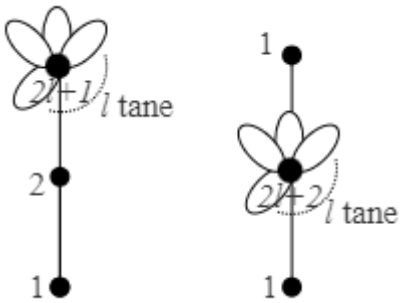
$$m \leq \binom{4}{2} = 6$$

eşitsizliğinden $m \leq 6$ elde edilir. Yani dört köşeli basit bağlantılı bir grafın 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 kenarı olabilir. Yani tüm ihtimaller yukarıdaki altı grafla sınırlıdır.

4.4.2. *n* Köşeli Tüm Bağlantılı Grafların GA_1 İndekslerinin Alabildiği Değerler

Burada basit şartını kaldırarak tüm bağlantılı graf türlerinde *n* köşe sayısı olmak üzere grafların *n* köşe sayılarına göre GA_1 indeksinin alabildikleri değer incelenecektir. Öncelikle *n* köşe sayısının 3 değeri incelenecek ve sonrasında *n* köşe sayısı için genel sonuca varılacaktır.

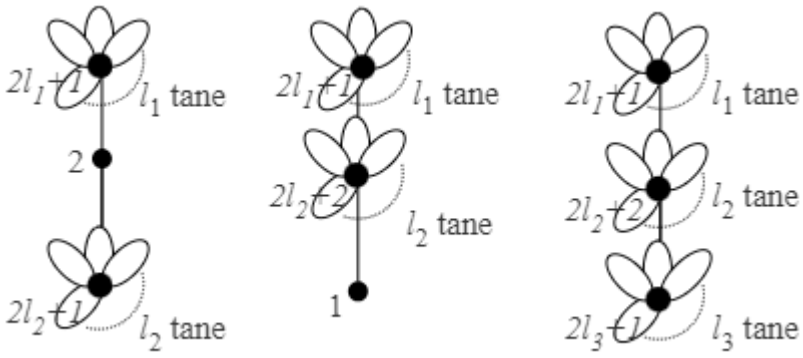
Bağlantılı bir G grafında $n = 3$ olsun. Bu durumda P_3 patikasını düşünelim. Bu patikaya döngü ve katlı kenar ekleyerek basit olmayan, bağlantılı graf yapmak istiyoruz. Bunu yaparken birçok durum mevcuttur. Örneğin asılı köşelerden birine l tane döngü eklenebilir. Ya da ortadaki köşeye l tane döngü eklenebilir.



Şekil 4.22. P_3 patikasına l tane döngü eklenmesi ile oluşan graflar

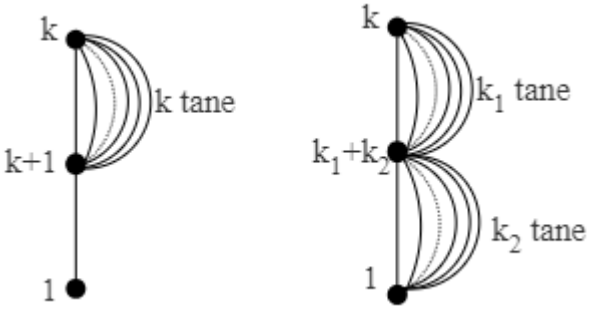
Bir başka ihtimal iki asılı köşeye $l_1 + l_2 = l$ olacak şekilde l_1 ve l_2 tane döngü eklenebilir. Ya da uç köşelerden birine l_1 tane, orta köşeye l_2 tane döngü eklenebilir veya

$l_1 + l_2 + l_3 = l$ olacak şekilde sırasıyla l_1, l_2, l_3 tane döngü eklenebilir. Bunlar sadece döngü eklenerek elde edilebilen basit olmayan ve bağlantılı graflardır.



Şekil 4.23. P_3 patikasına l_1, l_2, l_3 tane döngü eklenmesi ile oluşan graflar

Bunlar dışında sadece katlı kenar içermesini istediğimiz graflar 2 tür olabilir. Komşu 2 köşe arasına k tane katlı kenar eklenerek veya $k_1 + k_2 = k$ olmak üzere komşu kenar çiftlerinden birine k_1, diğerine k_2 tane katlı kenar eklenerek elde edilen graflardır.



Şekil 4.24. P_3 patikasına k_1, k_2 tane katlı kenar eklenmesi ile oluşan graflar

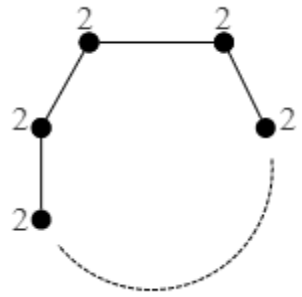
Son olarak 3 köşeli P_3 patika grafına hem döngü hem katlı kenar eklenerek elde edilebilecek 12 farklı graf türü daha mevcuttur.

Bunların tümü incelendiğinde tüm n köşeli basit olmayan ve bağlantılı grafların GA_1 değerinin hiçbir zaman tamsayı olamayacağı görülür.

4.5. Bağlantılı Tek Devirli Graflarda GA_1 Değerinin Hesaplanması

Yüksek lisans tezinde bağlantılı tek devirli graflardan C_n ve $T_{r,s}$ graflarının GA_1 değerleri ve en genel formülü bulunmuştur. Bu değerler aşağıda verilecektir.

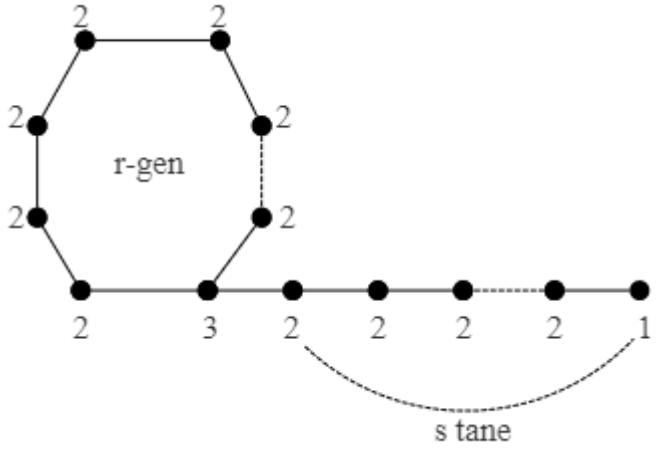
G grafı bağlantılı ve tek devirli olsun. Bu durumda $m = n$ olur ve omega invaryantı tanımı gereği $\Omega = 2(m - n) = 0$ olur.



Şekil 4.25. C_n grafının köşe dereceleri

Devir grafının GA_1 topolojik indeks değerinin en genel formülü yüksek lisans tezinde bulunmuştur. O halde $GA_1(C_n) = n$ yazılabilir.

Benzer şekilde $T_{r,s}$ larva grafının GA_1 topolojik indeks değeri en genel formülüyle bulunmuştur. O halde $GA_1(T_{r,s}) = 2\left[\frac{1}{2} \cdot (r + s - 4) + 3\frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right]$ yazılabilir.



Şekil 4.26. $T_{r,\,s}$ grafı köşe dereceleri

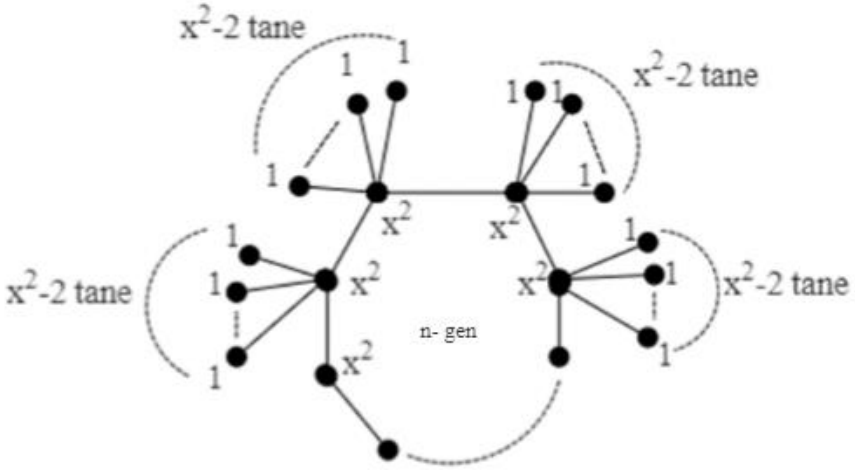
$T_{r,s}$ grafında *r* değeri sabit tutulup *s* değeri değiştirildiğinde oluşan grafların GA_1 topolojik indeks değerleri hesaplandığında aşağıdaki sonuç yazılabilir:

4.5.1. Sonuç. *a* ve *b* pozitif birer tamsayı olmak üzere $T_{r,s}$ larva grafının patika kısmının ucundaki asılı köşeye yeni bir asılı kenar eklendiğinde GA_1 değeri

$$GA_1(T_{r,s+1}) - GA_1(T_{r,s}) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{6}}{5} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{4} & ; \quad a \geq 3, b = 1 \\ 1 & ; \quad a \geq 3, b \geq 2 \end{cases}$$

kadar artar.

Şimdi yine tek devirli graflardan olan $x \geq 2$ olmak üzere $C_{n,x}$ bağlantılı, basit, x^2-regüler grafların GA_1 topolojik indeks değerini hesaplayalım.



Şekil 4.27. $C_{n,x}$ grafı köşe dereceleri

$C_{n,x}$ bağlantılı, basit ve x^2-regüler grafının kenar parçalanışları şu şekildedir:

***e* kenarının tipi**	***e* kenarının sayısı**
$\{x^2, x^2\}$	n tane
$\{1, x^2\}$	$n(x^2-2)$ tane

Çizelge 4.3. $C_{n,x}$ bağlantılı, basit ve x^2-regüler grafının kenar parçalanışı

Bu çizelgeden hareketle $C_{n,x}$ bağlantılı, basit ve x^2-regüler grafının GA_1 indeksi

$$GA_1(C_{n,x}) = n - 1 + n(x^2-2)\frac{2\sqrt{1.x^2}}{1+x^2}$$

$$= n + \frac{2n(x^2-2).x}{x^2+1}$$

$$= n\left(\frac{2x^3+x^2-4x+1}{x^2+1}\right)$$

$$= n\left(2x + 1 - \frac{6x}{x^2+1}\right)$$

bulunur. Buradan hareketle aşağıdaki teorem yazılır.

4.5.2. Teorem. Her *n* ve *x* pozitif tamsayıları için

$$GA_1(C_{n,x}) = n\left(2x + 1 - \frac{6x}{x^2+1}\right)$$

ifadesi yazılır. $GA_1(C_{n,x})$ değeri bir pozitif tamsayıdır ve $(x^2+1)|2nx(x^2-2)$ olur.

4.5.3. Lemma. Her *x* pozitif tamsayısı için $(x^2-2, x^2+1) = 1$ bulunur.

İspat. Her *x* pozitif tamsayısı için $d = (x^2-2, x^2+1)$ olsun. $d = 1$ olduğunu göstermeliyiz. $d = (3, x^2+1)$ olur. O zaman r pozitif bir tamsayı olmak üzere

$x = 3r$ ise $x^2+1 = 9r^2+1$ ve $(9r^2+1, 3) = 1;$

$x = 3r$ ise $x^2+1 = 9r^2+6r+2$ ve $(9r^2+6r+2, 3) = 1;$

$x = 3r$ ise $x^2+1 = 9r^2+12r+5$ ve $(9r^2+12r+5, 3) = 1$

yazabiliriz.

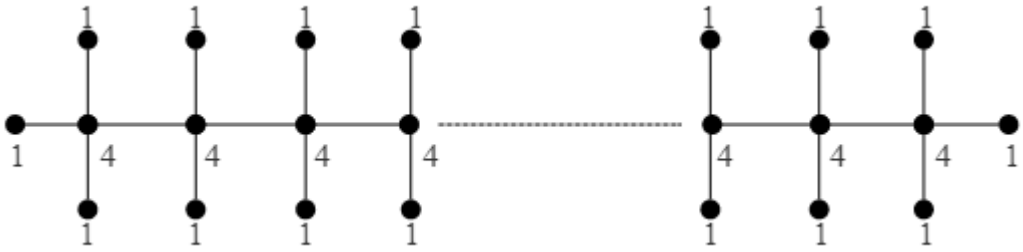
Her *x* için

$$(x^2 - 2, x^2 + 1) = 1$$

bulunur.

4.6. $T_u(a_u)$ Tırtıl Graflarının GA_1 Topolojik İndeksinin Hesaplanması

Bu bölümde yarı-regüler $T_u(a_u)$ tırtıl Graflarının GA_1 topolojik indekslerini hesaplayacağız. Böylelikle bağlantılı, yarı-regüler ve basit olan $T_u(a_u)$ tırtıl graflarının GA_1 topolojik indekslerinin hangi pozitif tamsayı değerleri aldığını en genel haliyle ifade edeceğiz.



Şekil 4.28. Yarı-regüler bir $T_4(a_4)$ tırtıl grafının köşe dereceleri

Şekil 4.8.1.'de verilen $T_4(a_4)$ tırtıl grafının derece dizisi $\{1^{(a_1)}, 4^{(a_4)}\} = \left\{1^{(a_1)}, 4^{(\frac{a_1-2}{2})}\right\}$ olduğundan üç tür kenar bulundurabilir: {1,1}, {1,4} veya {4,4} tipindeki kenarlar. {1,1} tipindeki bir kenara sahip olması durumunda bu tırtıl graf çok özel bir şekle sahip

olur ve K_2 grafından başka bir şey değildir. Dolayısıyla $T_4(a_4)$ tırtıl grafında iki tip kenar bulunmaktadır ve bu grafın kenar parçalanışı Çizelge 4.4.'de verilmiştir:

***e* kenarının tipi**	***e* kenarının sayısı**
$\{1,4\}$ kenarından	a_1 tane
$\{4,4\}$ kenarından	$a_4 - 1 = \frac{a_1-2}{2} - 1 = \frac{a_1-4}{2}$ tane

Çizelge 4.4. $T_4(a_4)$ tırtıl grafının kenar parçalanışı

Her bir $\{1,4\}$ tipindeki kenarın grafın GA_1 indeksine katkısı 4/5; her bir $\{4,4\}$ tipindeki kenarın grafın GA_1 indeksine katkısı ise 1 olduğundan $T_4(a_4)$ tırtıl grafının GA_1 indeksi

$$GA_1(T_4(a_4)) = a_1 \cdot \frac{4}{5} + \frac{a_1 - 4}{2} \cdot 1$$

$$= \frac{8a_1 + 5a_1 - 20}{10}$$

$$= \frac{13a_1 - 20}{10}$$

olarak elde edilir. Bu sayının tamsayı değerlerini araştırdığımızdan dolayı bu sayıyı *t* bir tamsayı olmak üzere *t* ile gösterirsek $\frac{13a_1-20}{10} = t$ eşitliği ve buradan $13a_1 - 10t = 20$ Diophant denklemi elde edilir. Bu denklem çözüldüğünde bir özel çözüm (-60,-80) şeklinde bulunur:

$$13(-60) - 10(-80) = 20$$

Buradan genel çözüm için a_1 değeri $a_1 = -60 - 10k \geq 0$ olacağından $-6 \geq k$ bulunu ve $k = -7$ değeri için $a_1 = 10$, $k = -8$ için $a_1 = 20$ elde edilir. Genelleştirecek olursak $k \in N$ olmak üzere $a_1 = 10 + 10r$ şeklinde ifade edilebilir. Böylece

$$GA_1(T_4(a_4)) = a_1 \cdot \frac{4}{5} + \frac{a_1 - 4}{2} \cdot 1$$

denkleminde $a_1 = 10 + 10r$ yerine yazıldığında $GA_1(T_4(a_4)) = 13r + 11$ bulunur. Yani GA_1 indeksi, sadece bu tırtıl graf sınıfında 11, 24, 37, 50, … tamsayı değerlerini almaktadır. Benzer şekilde kenar parçalanışları $\{1^{a_1}, 9^{a_9}\}$, $\{1^{a_1}, 16^{a_{16}}\}$, $\{1^{a_1}, 25^{a_{25}}\}$, … olan graflardan ilk birkaç tanesinin GA_1 değerlerinin alabilecekleri formüller şu şekildedir:

$T_u(a_u)$'nın derece dizisi	$GA_1(T_u(a_u))$'nin a_1 türünden ifadesi	a_1	$GA_1(T_u(a_u))$'nin r türünden ifadesi
$\{1^{a_1}, 4^{a_4}\}$	$GA_1 = \frac{13a_1 - 20}{10}$	$a_1 = 10 + 10r$	$GA_1 = 11 + 13r$
$\{1^{a_1}, 9^{a_9}\}$	$GA_1 = \frac{26a_1 - 45}{35}$	$a_1 = 30 + 35r$	$GA_1 = 21 + 26r$
$\{1^{a_1}, 16^{a_{16}}\}$	$GA_1 = \frac{129a_1 - 272}{238}$	$a_1 = 170 + 238r$	$GA_1 = 91 + 129r$
$\{1^{a_1}, 25^{a_{25}}\}$	$GA_1 = \frac{125a_1 - 325}{299}$	$a_1 = 182 + 299r$	$GA_1 = 75 + 125r$
$\{1^{a_1}, 36^{a_{36}}\}$	$GA_1 = \frac{445a_1 - 1332}{1258}$	$a_1 = 44 + 1258r$	$GA_1 = 156 + 445r$
$\{1^{a_1}, 49^{a_{49}}\}$	$GA_1 = \frac{354a_1 - 1225}{1175}$	$a_1 = 425 + 1175r$	$GA_1 = 127 + 354r$
$\{1^{a_1}, 64^{a_{64}}\}$	$GA_1 = \frac{1057a_1 - 4160}{4030}$	$a_1 = 2730 + 4030r$	$GA_1 = 715 + 1057r$
$\{1^{a_1}, 81^{a_{81}}\}$	$GA_1 = \frac{752a_1 - 3321}{3239}$	$a_1 = 2214 + 3239r$	$GA_1 = 513 + 752r$
$\{1^{a_1}, 100^{a_{100}}\}$	$GA_1 = \frac{2061a_1 - 10100}{9898}$	$a_1 = 6666 + 9898r$	$GA_1 = 1387 + 2061r$

Çizelge 4.5. $T_u(a_u)$ graflarının GA_1 değerleri

Buradan hareketle $T_u(a_u)$ grafının derece dizisi $\{1^{a_1}, u^{a_u}\}$ olmak üzere bu grafın kenar parçalanışı Çizelge 4.6.'da verilmiştir.

***e* kenarının tipi**	***e* kenarının sayısı**
$\{1, u\}$ kenarından	a_1 tane
$\{u, u\}$ kenarından	$a_u - 1 = \frac{a_1 - 2}{u-2} - 1 = \frac{a_1 - u}{u-2}$ tane

Çizelge 4.6. $T_u(a_u)$ tırtıl grafının kenar parçalanışı

Her bir $\{1, u\}$ tipindeki kenarın grafın GA_1 indeksine katkısı $\frac{2\sqrt{u}}{1+u}$; her bir $\{u, u\}$ tipindeki kenarın grafın GA_1 indeksine katkısı ise 1 olduğundan $T_u(a_u)$ tırtıl grafının GA_1 indeksi

$$GA_1(T_u(a_u)) = a_1 \cdot \frac{2\sqrt{u}}{1+u} + \frac{a_1 - u}{u-2} \cdot 1$$

olarak elde edilir. Burada $d = z^2$ olsun. Dolayısıyla

$$GA_1(T_u(a_u)) = a_1 \cdot \frac{2z}{1+z^2} + \frac{a_1 - z^2}{z^2 - 2}$$

$$= \frac{2a_1 z(z^2-2) + (a_1 - z^2)(1+z^2)}{(1+z^2)(z^2-2)}$$

$$= \frac{-z^4 + 2a_1 z^3 + (a_1 - 1)z^2 - 4a_1 z + a_1}{(1+z^2)(z^2-2)}$$

olarak elde edilir. Bu sayının tamsayı değerlerini araştırdığımızdan dolayı bu sayıyı *t* bir tamsayı olmak üzere *t* ile gösterirsek $\frac{-z^4 + 2a_1 z^3 + (a_1 - 1)z^2 - 4a_1 z + a_1}{(1+z^2)(z^2-2)} = t$ eşitliği ve buradan

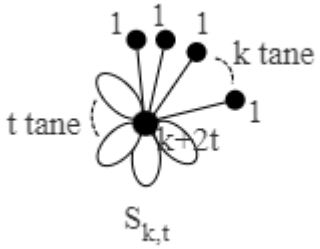
$$-z^4 + 2a_1 z^3 + (a_1 - 1)z^2 - 4a_1 z + a_1 = t(1+z^2)(z^2-2)$$

$$a_1(2z^3 + z^2 - 4z + 1) - t(z^4 - z^2 - 2) = z^4 + z^2$$

Diophant denklemi elde edilir.

4.7. $S_{k,t}$ Grafının GA_1 Topolojik İndeksinin Hesaplanması

$S_{k,t}$ grafı ile *k* tane asılı köşesi olan ve *t* tane düğümü (döngüsü) olan bir grafı ifade edelim.



Şekil 4.29. $S_{k,t}$ grafı köşe dereceleri

$S_{k,t}$ grafının derece dizisi $DS(S_{k,t}) = \{1^k, k+2t^1\}$ olmak üzere omega invaryantını hesaplarsak;

$$\Omega = k + 2t - 2 - k$$

$$= 2(t-1)$$

bulunur. Dolayısıyla r bölge sayısı

$$r = \frac{2(t-1)}{2} + 1 = t$$

olur. GA_1 değerini hesapladığımızda

$$GA_1(S_{k,t}) = \frac{k.2\sqrt{1.(k+2t)}}{k+2t+1} + t$$

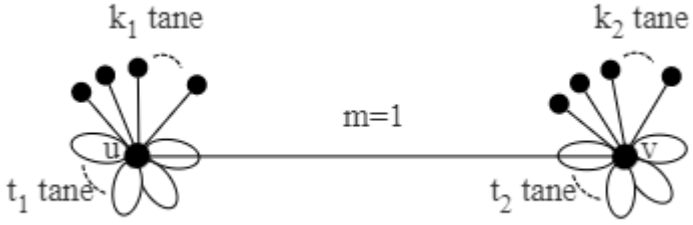
$$= \frac{2k\sqrt{k+2t}}{k+2t+1} + t$$

bulunur.

4.8. $S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(m)$ Graflarının GA_1 Topolojik İndeksinin Hesaplanması

Bu bölümde $S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(m)$ graflarının m=1, 2 ve m için GA_1 topolojik indekslerini hesaplayacağız. Böylelikle bağlantılı, regüler olmayan ve basit olmayan $S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(m)$ graflarının GA_1 topolojik indekslerinin hangi pozitif tamsayı değerleri aldığını en genel haliyle ifade edeceğiz.

$S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(m)$ *g*rafında *u, v* komşu köşeler olmak üzere bu köşelerin dereceleri tam kare olsun. *m=1* için



Şekil 4.30. $S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(1)$ grafı köşe dereceleri

grafı çizilir. Dolayısıyla $a^2 = d_u = k_1 + 1 + 2t_1$ tam kare ve $b^2 = d_u = k_2 + 1 + 2t_2$ tam kare olacak şekilde yazılır. $(1, d_u) = (1, a^2)$, $(1, d_v) = (1, b^2)$ eşitlikleri yazılır. O halde $S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(1)$ grafının GA_1 indeksi:

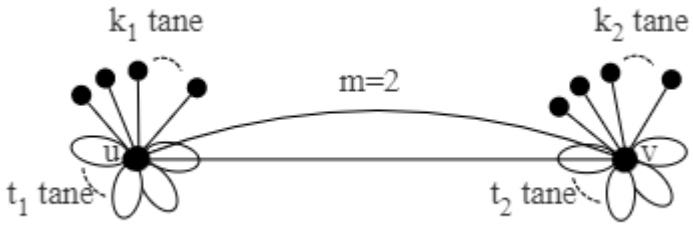
$$GA_1\left(S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(1)\right) = k_1\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + k_2\left(\frac{2b}{1+b^2}\right) + t_1 + t_2 + \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$GA_1\left(S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(1)\right) = 2\left(\frac{a\cdot k_1}{1+a^2} + \frac{b\cdot k_2}{1+b^2} + \frac{a\cdot b}{a^2+b^2}\right) + t_1 + t_2$$

$$GA_1\left(S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(1)\right) = 2\left(\frac{a\cdot(1+b^2)\cdot k_1 + b\cdot(1+a^2)\cdot k_2}{(1+a^2)\cdot(1+b^2)}\right) + \frac{2\cdot a\cdot b}{a^2+b^2} + t_1 + t_2$$

bulunur. Bu grafın GA_1 indeksinin pozitif tamsayı olması için $k_1$ve k_2 parametreleri belirlenmelidir.

$S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(m)$ grafında *u, v* komşu köşeler olmak üzere bu köşelerin dereceleri tam kare olsun. *m=2* için



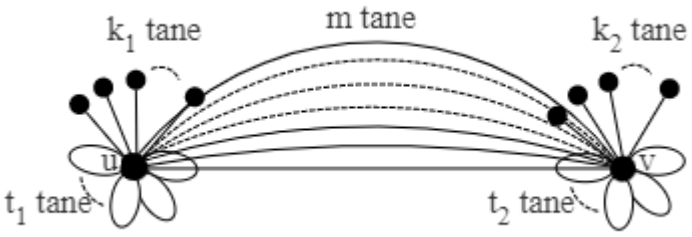
Şekil 4.31. $S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(2)$ grafının köşe dereceleri

grafı çizilir. Dolayısıyla $a^2 = d_u = k_1 + 2 + 2t_1$ tam kare ve $b^2 = d_u = k_2 + 2 + 2t_2$ tam kare olacak şekilde yazılır. O halde $S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(2)$ grafının GA_1 indeksi

$$GA_1\left(S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(2)\right) = k_1\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + k_2\left(\frac{2b}{1+b^2}\right) + t_1 + t_2 + 2\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$GA_1\left(S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(2)\right) = 2\left(\frac{a\cdot k_1}{1+a^2} + \frac{b\cdot k_2}{1+b^2} + \frac{2\cdot a\cdot b}{a^2+b^2}\right) + t_1 + t_2$$

bulunur. Bu grafın GA_1 indeksinin pozitif tamsayı olması için $k_1$ve k_2 parametreleri belirlenmelidir. $S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(m)$ grafında *u*, *v* komşu köşeler olmak üzere bu köşelerin dereceleri tam kare olsun. *m* değeri için



Şekil 4.32. $S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(m)$ grafının köşe dereceleri

grafı çizilir. Dolayısıyla $a^2 = d_u = k_1 + m + 2t_1$ tam kare $b^2 = d_u = k_2 + m + 2t_2$ tam kare olacak şekilde yazılır. O halde $S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(m)$ grafının GA_1 indeksi

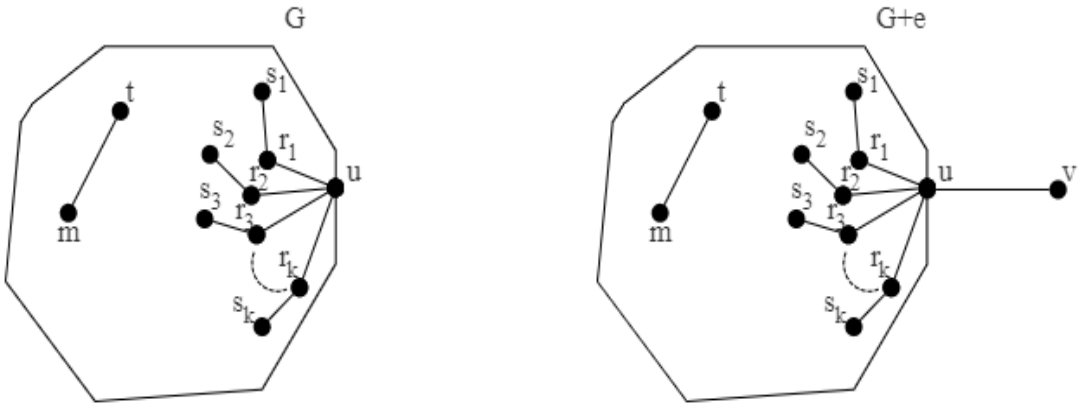
$$GA_1\left(S_{k_1,t_1} \cup S_{k_2,t_2}(m)\right) = k_1\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + k_2\left(\frac{2b}{1+b^2}\right) + t_1 + t_2 + m\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$= 2\left(\frac{a\cdot k_1}{1+a^2} + \frac{b\cdot k_2}{1+b^2} + \frac{m\cdot a\cdot b}{a^2+b^2}\right) + t_1 + t_2$$

bulunur. Bu grafın GA_1 indeksinin pozitif tamsayı olması için $k_1$ve k_2 parametreleri belirlenmelidir.

4.9. Yeni Bir Kenar Eklemenin GA_1 İndeksine Etkisi

Bu kısımda herhangi bir *G* grafına yeni bir kenar eklemenin sonucunda oluşan GA_1 topolojik indeks değerinin değişimi incelenmiştir.



d_G^u $\qquad\qquad$ $d_{G+e}^u = d_G^u + 1$

$d_{G+e}^v = 1$

Şekil 4.33. *G* ve *G+{e}* graflarının köşe dereceleri

Şekil 4.33'de verilen herhangi bir *G* grafı ile bu grafa eklenen yeni bir kenar sonucu oluşan *G+{e}* grafı verilmiştir.

G grafının GA_1 topolojik indeks değeri *u* köşesine komşu olan köşeler ile *u* köşesi *G* grafında bitişik kenarları olan köşelerin GA_1 değerlerinin toplamıdır. O halde

$$GA_1(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} \frac{2\sqrt{d_u d_v}}{d_u + d_v}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{2\sqrt{d_G^u d_G^{r_i}}}{d_G^u + d_G^{r_i}} + \sum_{\substack{pq=e \in E \in (G) \\ p,q \neq u}} \frac{2\sqrt{d_p d_q}}{d_p + d_q}$$

yazılır. Benzer şekilde *G+{e}* grafının GA_1 topolojik indeks değerini hesaplayalım.

$$GA_1(G+e)=\frac{2\sqrt{d^u_{G+e}d^v_{G+e}}}{d^u_{G+e}+d^v_{G+e}}+\sum_{i=1}^{k}\frac{2\sqrt{d^u_{G+e}d^{r_i}_{G+e}}}{d^u_{G+e}+d^{r_i}_{G+e}}+\sum_{\substack{pq=e\in E\in(G+e)\\ p,q\neq u}}\frac{2\sqrt{d_pd_q}}{d_{p+}d_q}$$

Şimdi G ve $G+\{e\}$ graflarının topolojik indeks değerleri arasındaki artış miktarının alt ve üst sınırını bulalım.

$$GA_1(G+e)-GA_1(G)=\frac{2\sqrt{(d^u_G+1).1}}{(d^u_G+1)+1}+\sum_{i=1}^{k}\frac{2\sqrt{(d^u_G+1)d^{r_i}_G}}{(d^u_G+1)+d^{r_i}_G}-\sum_{i=1}^{k}\frac{2\sqrt{d^u_Gd^{r_i}_G}}{d^u_G+d^{r_i}_G}$$

$$=\frac{2\sqrt{d^u_G+1}}{d^u_G+2}+2\sum_{i=1}^{k}\frac{2\sqrt{d^u_Gd^{r_i}_G+d^{r_i}_G}}{d^u_G+d^{r_i}_G+1}-\frac{\sqrt{d^u_Gd^{r_i}_G}}{d^u_G+d^{r_i}_G}$$

$$=\frac{2\sqrt{d^u_G+1}}{d^u_G+2}+2\sum_{i=1}^{k}\frac{(d^u_G+d^{r_i}_G)\sqrt{d^u_Gd^{r_i}_G+d^{r_i}_G}-\left(d^u_G+d^{r_i}_G+1\right)\sqrt{d^u_Gd^{r_i}_G}}{(d^u_G+d^{r_i}_G)(d^u_G+d^{r_i}_G+1)}$$

$$\geq\frac{2\sqrt{d^u_G+1}}{d^u_G+2}+2\frac{\sum\sqrt{d^u_Gd^{r_i}_G}.(-1)}{(d^u_G+d^{r_i}_G+1)^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{d^u_G+1}}{d^u_G+2}-2\frac{\sum\sqrt{d^u_Gd^{r_i}_G}}{(d^u_G+d^{r_i}_G+1)^2}$$

alt sınırı bulunur. Benzer şekilde üst sınırını bulalım.

$$GA_1(G+e)-GA_1(G)=\frac{2\sqrt{d^u_G+1}}{d^u_G+2}+2\sum_{i=1}^{k}\frac{(d^u_G+d^{r_i}_G)\sqrt{d^u_Gd^{r_i}_G+d^{r_i}_G}-\left(d^u_G+d^{r_i}_G+1\right)\sqrt{d^u_Gd^{r_i}_G}}{(d^u_G+d^{r_i}_G)(d^u_G+d^{r_i}_G+1)}$$

$$\leq\frac{2\sqrt{d^u_G+1}}{d^u_G+2}2\sum_{i=1}^{k}\frac{\sqrt{d^u_Gd^{r_i}_G+d^{r_i}_G}-\sqrt{d^u_Gd^{r_i}_G}}{d^u_G+d^{r_i}_G}$$

ve burada her $a, b \geq 1$ için $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq a - b$ olduğundan

$$GA_1(G+e) - GA_1(G) \leq \frac{2\sqrt{d_G^u + 1}}{d_G^u + 2} 2 \sum_{i=1}^{k} \frac{d_G^u d_G^{r_i} + d_G^{r_i} - d_G^u d_G^{r_i}}{d_G^u + d_G^{r_i}}$$

yazılır ve

$$GA_1(G+e) - GA_1(G) \leq \frac{2\sqrt{d_G^u + 1}}{d_G^u + 1} 2 \sum_{i=1}^{k} \frac{d_G^{r_i}}{d_G^u + d_G^{r_i}}$$

olur. $\sqrt{a} \leq a$ olduğundan

$$GA_1(G+e) - GA_1(G) \leq \frac{2(d_G^u + 1)}{d_G^u + 1} 2 \sum_{i=1}^{k} \frac{d_G^{r_i}}{d_G^u + d_G^{r_i}}$$

yazılır ve

$$\begin{aligned} GA_1(G+e) - GA_1(G) &= 2\left(1 + \textstyle\sum_{i=1}^{k} \frac{d_G^{r_i}}{d_G^u + d_G^{r_i}}\right) \\ &= 2\left(1 + \textstyle\sum_{i=1}^{k} \frac{d_G^{r_i} + d_G^u - d_G^u}{d_G^u + d_G^{r_i}}\right) \\ &= 2\left[1 + \textstyle\sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{d_G^u}{d_G^u + d_G^{r_i}}\right)\right] \end{aligned}$$

$$= 2\left[k + 1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{d_G^u}{d_G^u + d_G^{r_i}}\right]$$

$$= 2\left[k + 1 - d_G^u \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{d_G^u + d_G^{r_i}}\right]$$

üst sınırı bulunur.

4.10. GA_1 İndeksinin Lineer Diophant Denklemleriyle İlişkisi

a ve *b* pozitif tamsayılar olmak üzere uç köşe dereceleri *a* ve *b* olan bir grafın kenarına *(a,b)* kenarı diyeceğiz. Bir *(a,b)* kenarı için eğer *a* ve *b* köşe dereceleri asal tam kareler ise, bu kenarın GA_1 indeksi bir rasyonel sayı olacaktır. *i=1,2* için (c_i, d_i) kenarının GA_1 indeksi $\frac{a_i}{b_i}$ değeri pozitif bir rasyonel sayı ve $b_1 \leq b_2$ olsun.

n, *x* ve *y* nin pozitif tamsayı değerleri için

$$n = \frac{a_1}{b_1}x + \frac{a_2}{b_2}y$$

lineer diophant denkleminin çözümünü uygun *x* ve *y* çiftlerini belirleyerek arıyoruz. $\frac{a_1}{b_1}$ ve $\frac{a_2}{b_2}$ lineer bir kombinasyonu olarak hangi *n* tamsayılarını alabileceğini göstermek istiyoruz. Bu pozitif tamsayı GA_1 indeksi ile tüm köşe dereceleri c_1, c_2, d_1, d_2'ye eşit olan grafları belirleme problemine eşdeğerdir. Bu aşamada aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız var:

4.10.1. Lemma. $(m,n)=1$ ise $(mn,m+n)=1$'dir.

İspat: $(m,n)=1$ olsun. O zaman $x>y$ genelliğini kaybetmeden öyle $x,y\in Z$ vardır ki *mx+ny=1*'dir. x=y eşitliği mümkün değildir, $(m+n)|1$ durumunda olduğu gibi bu bir çelişkidir. *mx+ny=1* eşitliğinden *my+m(x-y)+ny=1* yazılabilir ve böylece *m(x-y)+(m+n)y=1* yazılır. Bu nedenle *(m,m+n)=1* dir. Benzer şekilde *(n,m+n)=1* olduğu görülür. Dolayısıyla *(mn,m+n)=1* yazılır. *i=1,2* için (c_i,d_i) kenarının GA_1 indeksinin değeri $\frac{a_i}{b_i}\in Q^+$, $b_1\le b_2$ olsun. (c_i,d_i) çiftlerini düşündüğümüzde

$$\frac{a_i}{b_i}=\begin{cases}\frac{\sqrt{c_id_i}}{\frac{c_i+d_i}{2}} & \mathrm{c_i},\ \mathrm{d_i}\text{'nin her ikisi de çift}\\ \\ \frac{2\sqrt{c_id_i}}{c_i+d_i} & \text{aksi takdirde}\end{cases}$$

yazılır. Yani $\frac{a_i}{b_i}$ her zaman sadeleştirilmiş biçimindedir.

4.10.2. Teorem. *G* bir graf olmak üzere $\mathrm{c_1}=\mathrm{c_2}=1$ ise *G* grafı bağlantılı değildir.

İspat. *G* grafında $\mathrm{c_1}=\mathrm{c_2}=1$ olsun. *d* dereceli bir *v* tepe köşesi için, *v* köşesine eklenen herhangi bir döngü *d* köşe derecesine sahiptir. *v* köşesindeki herhangi bir asılı kenarın köşe derecesi 1'dir. Bu nedenle d_1, d_2 derecelerine sahip kenarlar yoktur. Tüm kenarların tipi *(1, d_1)* ve *(1, d_2)* kenarları olduğundan, graf aynı en az iki yıldız grafiğinden oluşur ve bu nedenle bağlantılı değildir.

4.11. GA_1 için Ters Problem

Ters problemler genelde topolojik graf indekslerinin alabildikleri genelde tamsayı olan değerlerin belirlenmesi problemidir. Bu problem, birçok graf indeksi için çözülmüş olup literatürde yer almıştır ve çalışılmaya devam edilmektedir. Biz bu bölümde GA_1 indeksi için ters problemi ele alacak ve cevaplandıracağız.

Genel olarak düşünüldüğünde bir G grafının bağlantılı, regüler ve basit olmak üzere 3 özelliğini ele alabiliriz. Bunların olumsuzları olarak da bağlantısız, irregüler ve basit olmayan şeklindeki özellikleri inceleyebiliriz. Olumlu veya olumsuz bu 6 özellikten en çok 3 tanesinin seçilebileceği açıktır. Şimdi sırasıyla tek özelliğin, iki özelliğin ve son olarak da üç özelliğin (olumlu veya olumsuz) seçildiği tüm durumları ele alacağız.

İlk olarak bağlantılı, bağlantısız, regüler, irregüler, basit ve basit olmayan olmak üzere belirlediğimiz 6 durumdan 1 tanesini seçebiliriz. Bunu da

$$\binom{6}{1} = 6$$

şekilde yapabiliriz. Bu 6 durum aşağıdaki ilk 6 maddede incelenmiştir:

4.11.1. Bağlantılı Graflar

İlk olarak G grafının bağlantılı bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 1$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.12. P_2 grafının köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1\cdot 1}}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

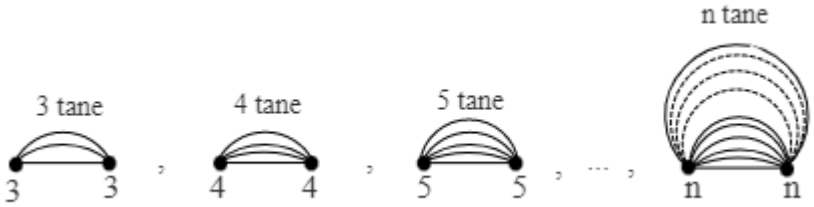
$GA_1(G) = 2$ değeri ise aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.34. İki köşeli bağlantılı, regüler, basit olmayan bir grafın köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{2\cdot 2}}{2+2} = \frac{2\cdot 2}{2} = 2.$$

Benzer şekilde



Şekil 4.35. GA_1 indeksinin *3, 4, 5, ..., n* değerlerini alabilen bağlantılı bir graf sınıfı

graflarının GA_1 değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *3, 4, 5, ..., n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.1.1. Teorem. *G* bir bağlantılı graf ise $GA_1(G)$ tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.2. Bağlantılı Olmayan Graflar

İkinci olarak G grafının bağlantılı olmayan bir graf olması durumunda GA_1 indeksinin alabileceği pozitif tamsayı değerlere bakacağız. $GA_1(G) = 1$ değeri bağlantısız hiçbir graftan elde edilemez.

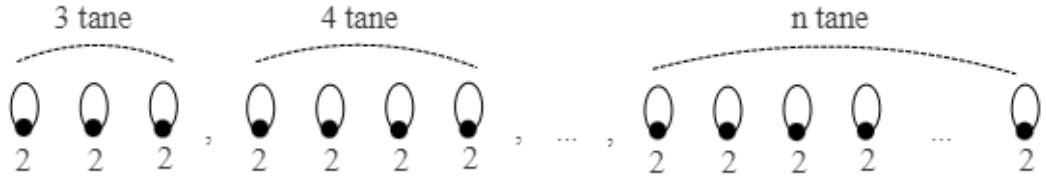
$GA_1 = 2$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.36. $GA_1(G) = 2$ olan bağlantısız (ve basit olmayan) bir graf

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{2\cdot 2}}{2+2} + \frac{2\sqrt{2\cdot 2}}{2+2} = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 1 + 1 = 2.$$

Benzer şekilde



Şekil 4.37. $GA_1(G) = 3,4, \ldots, n$ değerlerini veren bağlantısız (ve basit olmayan) graflar

graflarının GA_1 değeri hesaplandığında n pozitif bir tamsayı olmak üzere *3, 4, 5, ..., n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.2.1. Teorem. *G* bir bağlantısız graf ise $GA_1(G)$, 1 hariç tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.3. Regüler Graflar

Üçüncü olarak *G* grafının regüler bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1 = 1$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.12. P_2 grafının köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1\cdot 1}}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

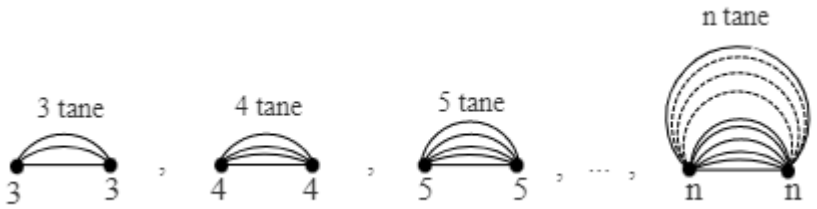
$GA_1(G) = 2$ değeri ise aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.34. İki köşeli bağlantılı, regüler, basit olmayan bir grafın köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{2\cdot 2}}{2+2} = \frac{2\cdot 2}{2} = 2.$$

Benzer şekilde



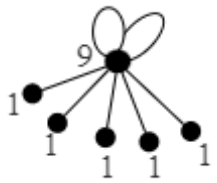
Şekil 4.35. GA_1 indeksinin *3, 4, 5, ..., n* değerlerini alabilen bağlantılı bir graf sınıfı

graflarının GA_1 değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *3, 4, 5, ..., n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.3.1. Teorem. *G* bir regüler graf ise $GA_1(G)$ tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.4. İrregüler Graflar

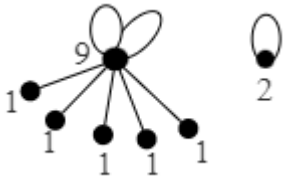
Şimdi G grafının irregüler bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 5$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.38. $S_{5,2}$ grafının köşe dereceleri

$$GA_1(S_{5,2}) = 5 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 9}}{1+9} + 2 \cdot \frac{2\sqrt{9 \cdot 9}}{9+9} = 5 \cdot \frac{2 \cdot 3}{10} + 2 \cdot \frac{2 \cdot 9}{18} = 3 + 2 = 5.$$

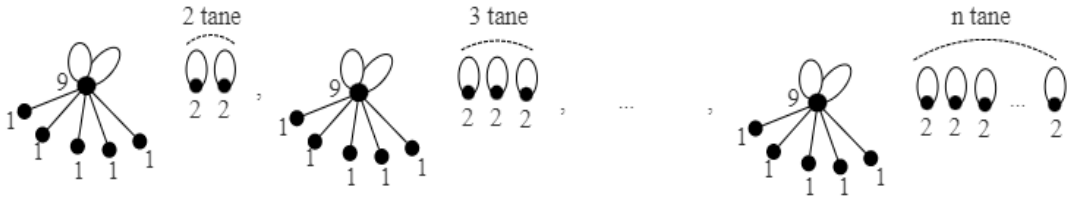
$GA_1(G) = 6$ değeri ise aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.39. $S_{5,2}$ grafına bir tane döngü eklenmesi ile oluşan graf

$$GA_1(G) = 5 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 9}}{1+9} + 2 \cdot \frac{2\sqrt{9 \cdot 9}}{9+9} + \frac{2\sqrt{2 \cdot 2}}{2+2} = 3 + 2 + 1 = 6.$$

Benzer şekilde



Şekil 4.40. $S_{5,2}$ grafına bağlantısız *2, 3, …, n* tane döngü eklenmesi ile oluşan graflar

graflarının GA_1 değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere 7, 8, 9, …, *n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.4.1 Teorem. *G* bir irregüler graf ise $GA_1(G)$ değeri *[5, ∞)* aralığındaki tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.5. Basit Graflar

Şimdi G grafının basit bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 1$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.12. P_2 grafının köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1\cdot 1}}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

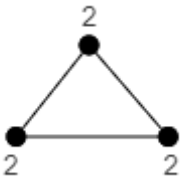
$GA_1(G) = 2$ değeri ise aşağıdaki bağlantısız grafından elde edilebilir:



Şekil 4.41. İki tane P_2 patika grafından oluşan bağlantısız graf

$$GA_1(G) = 2\cdot\frac{2\sqrt{1\cdot 1}}{1+1} = \frac{4}{2} = 2.$$

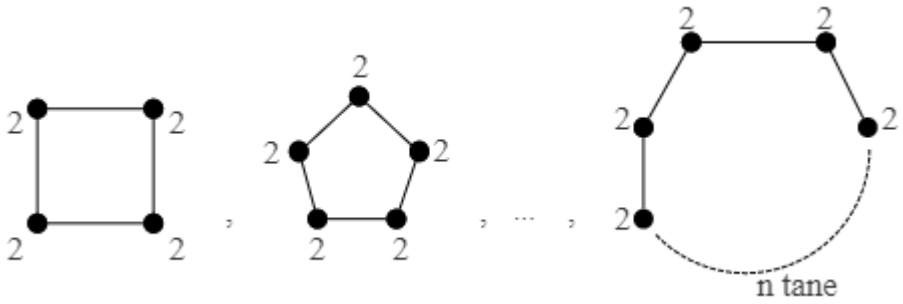
$GA_1(G) = 3$ değeri ise aşağıdaki C_3 devir grafından elde edilebilir:



Şekil 4.20. C_3 grafının köşe dereceleri

$$GA_1(G) = 3 \cdot \frac{2\sqrt{2 \cdot 2}}{2+2} = 3 \cdot \frac{4}{4} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Benzer şekilde



Şekil 4.42. Basit, bağlantılı ve 2- regüler devir grafları (n > 3)

graflarının GA_1 değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *4, 5, 6, ..., n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.5.1. Teorem. *G* bir basit graf ise $GA_1(G)$ tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.6. Basit Olmayan Graflar

Şimdi *G* grafının basit olmayan bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 1$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.14. $m = 1$ için bağlantılı, basit olmayan grafın köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1\cdot 1}}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

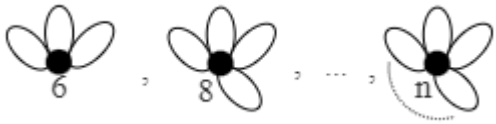
$GA_1(G) = 2$ değeri ise aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.43. $GA_1(G) = 2$ değerini veren 2 kenarlı bağlantılı, basit olmayan, regüler graf

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{2\cdot 2}}{2+2} = \frac{2\cdot 2}{2} = 2.$$

Benzer şekilde



Şekil 4.44. *3, 4, ..., n/2* kenarlı bağlantılı, basit olmayan, regüler graflar

graflarının GA_1 değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere 3, 4, 5, …, *n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.6.1. Teorem. *G* bir basit olmayan graf ise $GA_1(G)$ tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

İkinci olarak iki özelliğin seçilmesi durumlarına bakalım. Tüm ikili seçimlerden aynı özelliğin olumlu ve olumsuzunu (bağlantılı-bağlantısız, regüler-irregüler ve basit-basit olmayan) aynı anda alamayız. Dolayısıyla

$$\binom{6}{2} - \binom{3}{1} = 15 - 3 = 12$$

tane durum söz konusudur. Bunlar aşağıda ele alınmıştır:

4.11.7. Bağlantılı ve Regüler Graflar

Şimdi G grafının bağlantılı ve regüler bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 1$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.12. P_2 grafı köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1 \cdot 1}}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

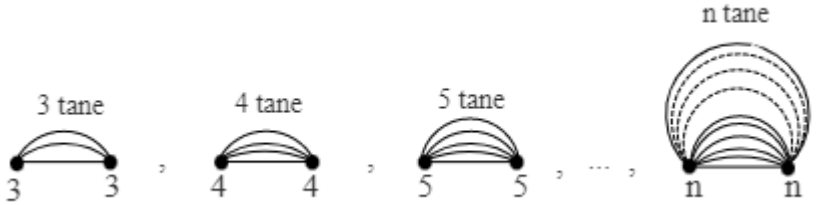
$GA_1(G) = 2$ değeri ise aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.34. İki köşeli bağlantılı, regüler, basit olmayan bir grafın köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{2\cdot 2}}{2+2} = \frac{2\cdot 2}{2} = 2.$$

Benzer şekilde



Şekil 4.35. GA_1 indeksinin *3, 4, 5, ..., n* değerlerini alabilen bağlantılı bir graf sınıfı

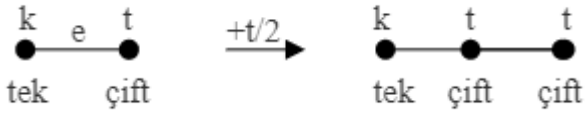
graflarının GA_1 değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *3, 4, 5, ..., n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.7.1. Teorem. *G* bir bağlantılı ve regüler graf ise $GA_1(G)$ tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.8. Bağlantılı ve İrregüler Graflar

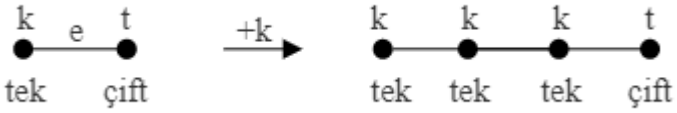
Bu bölümde bazı dönüşümler tanımlanarak grafların GA_1 topolojik indeks değerleri hesaplanacaktır.

4.11.8.1. Dönüşüm. *k* tek ve *t* çift pozitif tamsayılar olsun. *e=uv* ve *du=k*, *dv=t* olmak üzere *e* kenarına derecesi *t* olan bir köşeyi şekildeki gibi eklemek GA_1 değerini *t/2* kadar arttırır.



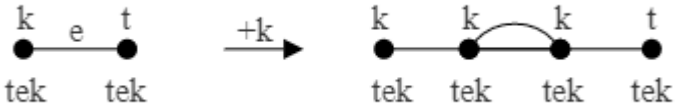
Şekil 4.45. Bağlantılı ve irregüler graflarda birinci tip dönüşüm

4.11.8.2. Dönüşüm. *k* birden büyük tek ve *t* çift tamsayı olsun. *e=uv* ve *du=k, dv=t* olmak üzere *e* kenarına dereceleri *k* olan iki köşeyi şekildeki gibi eklemek GA_1 değerini *k* kadar arttırır.



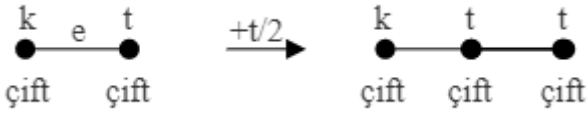
Şekil 4.46. Bağlantılı ve irregüler graflarda ikinci tip dönüşüm

4.11.8.3. Dönüşüm. *k* ve *t* birden büyük tek tamsayılar olsun. *e=uv* ve *du=k, dv=t* olmak üzere *e* kenarına dereceleri *k* (veya *t*) olan iki köşeyi şekildeki gibi eklemek GA_1 değerini *k* (veya *t*) kadar arttırır.



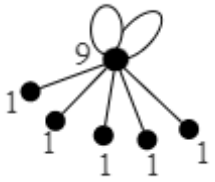
Şekil 4.47. Bağlantılı ve irregüler graflarda üçüncü tip dönüşüm

4.11.8.4. Dönüşüm. *k, t* tek çift tamsayılar olsun. *e=uv* ve *du=k, dv=t* olmak üzere *e* kenarına dereceleri *k* (veya *t*) olan iki köşeyi şekildeki gibi eklemek GA_1 değerini *k/2* (veya *t/2*) kadar arttırır.



Şekil 4.48. Bağlantılı ve irregüler graflarda dördüncü tip dönüşüm

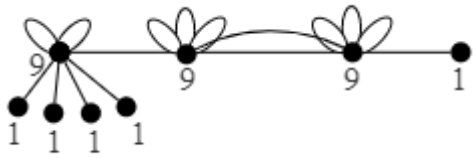
$GA_1(G) = 5$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.38. $S_{5,2}$ grafı köşe dereceleri

$$GA_1(S_{5,2}) = 5 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 9}}{1+9} + 2 \cdot \frac{2\sqrt{9 \cdot 9}}{9+9} = 5 \cdot \frac{6}{10} + 2 = 3 + 2 = 5.$$

$GA_1(G) = 14$ değeri ise Tf_3 dönüşümünün $S_{5,2}$ grafına uygulandığında elde edilebilir:

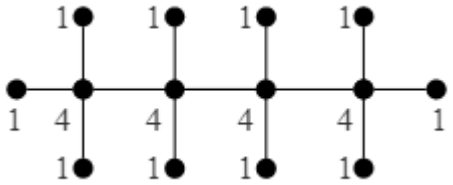


Şekil 4.49. $Tf_3(S_{5,2})$ grafı köşe dereceleri

$$GA_1(Tf_3(S_{5,2})) = 5 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 9}}{1+9} + 11 \cdot \frac{2\sqrt{9 \cdot 9}}{9+9} = 5 \cdot \frac{6}{10} + 11 = 3 + 11 = 14.$$

Benzer şekilde Tf_3 dönüşümünü $Tf_3(S_{5,2})$ grafına uygulamaya devam edildiğinde GA_1 değeri *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *9n+5* değerlerini alır.

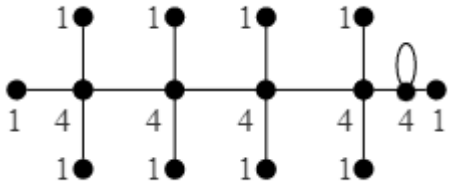
Şimdi $T_4(4)$ tırtıl grafını ele alalım. $GA_1(G) = 11$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.50. $T_4(4)$ grafının köşe dereceleri

$$GA_1(T_4(4)) = 10 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 4}}{1+4} + 3 \cdot \frac{2\sqrt{4 \cdot 4}}{4+4} = 10 \cdot \frac{4}{5} + 3 = 8 + 3 = 11.$$

$GA_1(G) = 13$ değeri ise Tf_1 dönüşümünün yukarıdaki tırtıl grafına uygulandığında elde edilebilir:

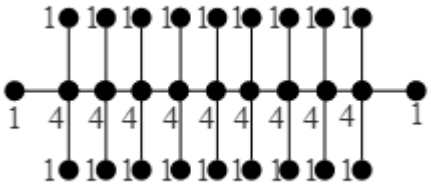


Şekil 4.51. $Tf_1(T_4(4))$ grafının köşe dereceleri

$$GA_1(Tf_1(T_4(4))) = 10 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 4}}{1+4} + 3 \cdot \frac{2\sqrt{4 \cdot 4}}{4+4} + 2 \cdot \frac{2\sqrt{4 \cdot 4}}{4+4} = 10 \cdot \frac{4}{5} + 3 + 2 = 8 + 3 + 2 = 13.$$

Benzer şekilde Tf_1 dönüşümü $Tf_1(T_4(4))$ grafına uygulamaya devam edildiğinde GA_1 değeri *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere 2.n+11 değerlerini alır.

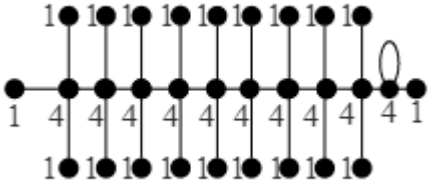
Şimdi $T_4(9)$ tırtıl grafını ele alalım. $GA_1 = 24$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.52. $T_4(9)$ grafının köşe dereceleri

$$GA_1(T_4(9)) = 20 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 4}}{1+4} + 8 \cdot \frac{2\sqrt{4 \cdot 4}}{4+4} = 20 \cdot \frac{4}{5} + 8 = 16 + 8 = 24.$$

$GA_1(G) = 26$ değeri ise Tf_1 dönüşümünün yukarıdaki tırtıl grafına uygulandığında elde edilebilir:

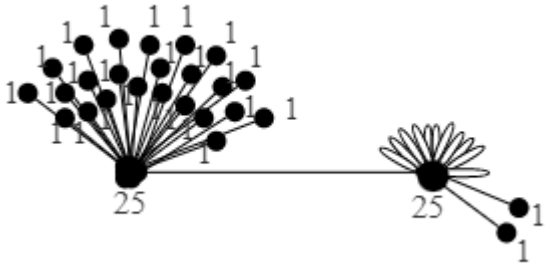


Şekil 4.53. $Tf_1(T_4(9))$ grafının köşe dereceleri

$$GA_1(Tf_1(\mathrm{T}(4))) = 20 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 4}}{1+4} + 8 \cdot \frac{2\sqrt{4 \cdot 4}}{4+4} + 2 \cdot \frac{2\sqrt{4 \cdot 4}}{4+4} = 20 \cdot \frac{4}{5} + 8 + 2 = 16 + 8 + 2 = 26.$$

Benzer şekilde Tf_1 dönüşümü $Tf_1(\mathrm{T}(9))$ grafına uygulamaya devam edildiğinde GA_1 değeri *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *2n+24* değerlerini alır.

Şimdi aşağıdaki grafı ele alalım.



Şekil 4.54. $S_{25,0} \cup S_{2,23}$ grafının köşe dereceleri

$$GA_1(G) = 26 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 25}}{1+25} + 11 \cdot \frac{2\sqrt{25 \cdot 25}}{25+25} + \frac{2\sqrt{25 \cdot 25}}{25+25} = 26 \cdot \frac{5}{13} + 11 + 1 = 10 + 11 + 1 = 22$$

değeri bu şekilde elde edilir. Sonuç olarak

4.11.8.5. Teorem. *G* bir bağlantılı ve irregüler graf ise $GA_1(G)$ indeksi 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 16, 18, 20 sayıları dışındaki tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.9. Bağlantılı ve Basit Graflar

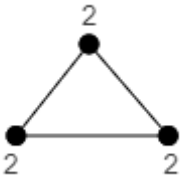
Şimdi *G* grafının bağlantılı ve basit bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 1$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.12. P_2 grafının köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1 \cdot 1}}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

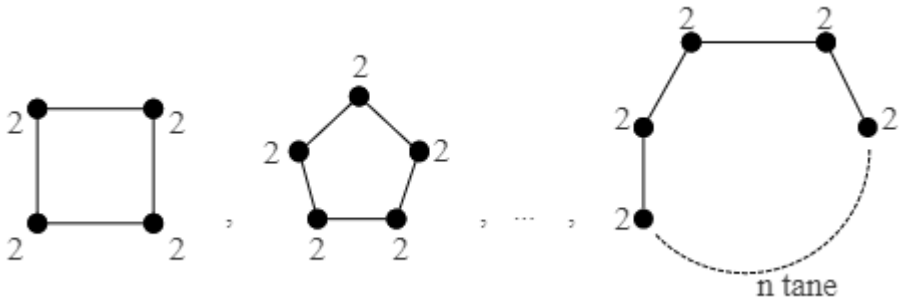
$GA_1(G) = 3$ değeri ise aşağıdaki C_3 tam grafından elde edilebilir:



Şekil 4.20. C_3 grafının köşe dereceleri

$$GA_1(G) = 3 \cdot \frac{2\sqrt{2 \cdot 2}}{2+2} = 3 \cdot \frac{4}{4} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Benzer şekilde



Şekil 4.42. Basit, bağlantılı ve 2- regüler devir graflarının köşe dereceleri

graflarının GA_1 değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *4, 5, 6, …, n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.9.1. Teorem. *G* bir bağlantılı ve basit graf ise $GA_1(G)$ indeksi *[1, ∞)-{2}* aralığındaki tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.10. Bağlantılı ve Basit Olmayan Graflar

Şimdi G grafının basit olmayan bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 1$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.14. $m = 1$ için bağlantılı, basit olmayan grafın köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1 \cdot 1}}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

$GA_1(G) = 2$ değeri ise aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.43. $m = 2$ için bağlantılı, basit olmayan, regüler grafın köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{2 \cdot 2}}{2+2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2.$$

Benzer şekilde



Şekil 4.44. *3, 4, …, n/2* kenarlı bağlantılı, basit olmayan, regüler grafların köşe dereceleri

graflarının GA_1 değeri hesaplandığında n pozitif bir tamsayı olmak üzere 3, 4, 5, …, n değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.10.1. Teorem. *G* bir bağlantılı ve basit olmayan graf ise $GA_1(G)$ tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.11. Bağlantılı Olmayan ve Regüler Graflar

Şimdi *G* grafının bağlantılı ve regüler bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 1$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.12. P_2 grafı ve köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1\cdot 1}}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

$GA_1(G) = 2$ değeri ise aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.55. P_2 grafı ve bir tane basit olmayan bağlantısız graf eklenmesi ile oluşan graf

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1\cdot 1}}{1+1} + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Benzer şekilde



Şekil 4.56. P_2 grafına *1, 2, ..., n* tane döngü eklenerek oluşan graf

graflarının GA_1 değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *3, 4, 5, ..., n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.11.1. Teorem. *G* bir bağlantılı olmayan ve regüler graf ise $GA_1(G)$ tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.12. Bağlantılı Olmayan ve İrregüler Graflar

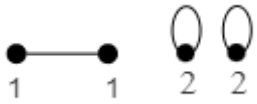
Şimdi *G* grafının bağlantılı olmayan ve irregüler bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 2$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.54. P_2 grafı ve bir tane basit olmayan bağlantısız graf eklenmesi ile oluşan grafın köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1 \cdot 1}}{1+1} + 1 = 1 + 1 = 2.$$

$GA_1(G) = 3$ değeri ise aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.57. P_2 grafı ve iki tane basit olmayan bağlantısız graf eklenmesi ile oluşan graf

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1 \cdot 1}}{1+1} + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Benzer şekilde



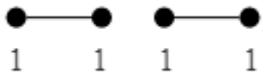
Şekil 4.58. P_2 grafı ve *3, 4, ..., n* tane döngü eklenmesi ile oluşan graf

graflarının GA_1 değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *4, 5, 6, ..., n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.12.1. Teorem. *G* bir bağlantılı olmayan ve irregüler graf ise $GA_1(G)$ indeksinin alabileceği değerler *(1, ∞)* aralığındaki tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.13. Bağlantılı Olmayan ve Basit Graflar

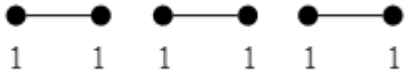
Şimdi *G* grafının bağlantılı olmayan ve irregüler bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 2$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.41. Bağlantısız iki tane P_2 patika graflarının köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1\cdot 1}}{1+1} + \frac{2\sqrt{1\cdot 1}}{1+1} = 1 + 1 = 2.$$

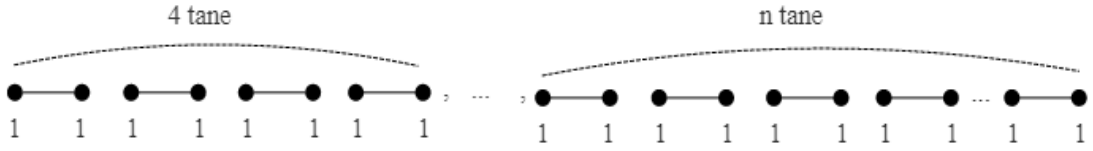
$GA_1(G) = 3$ değeri ise aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.59. Bağlantısız üç tane P_2 patika graflarının köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1\cdot 1}}{1+1} + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Benzer şekilde



Şekil 4.60. *4, ..., n* tane P_2 patika grafından oluşan bağlantısız graflar

graflarının GA_1 değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *4, 5, 6, ..., n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.13.1. Teorem. *G* bir bağlantılı olmayan ve basit graf ise $GA_1(G)$ indeksi (1, ∞) aralığındaki tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.14. Bağlantılı Olmayan ve Basit Olmayan Graflar

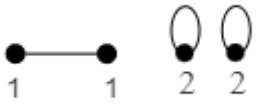
Şimdi *G* grafının bağlantılı olmayan ve basit olmayan bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 2$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.55. P_2 grafı ve bir tane basit olmayan bağlantısız graf eklenmesi ile oluşan grafın köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1 \cdot 1}}{1+1} + 1 = 1 + 1 = 2.$$

$GA_1(G) = 3$ değeri ise aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.57. P_2 grafı ve iki tane basit olmayan bağlantısız graf eklenmesi ile oluşan grafın köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1 \cdot 1}}{1+1} + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Benzer şekilde



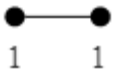
Şekil 4.58. P_2 grafı ve *3, 4, …, n* tane basit olmayan bağlantısız graf eklenmesi ile oluşan grafın köşe dereceleri

graflarının $GA_1(G)$ değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *4, 5, 6, …, n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.14.1. Teorem. *G* bir bağlantılı olmayan ve irregüler graf ise $GA_1(G)$ indeksinin alabileceği değerler *(1, ∞)* aralığındaki tüm pozitif tamsayı değerlerini alır.

4.11.15. Regüler ve Basit Graflar

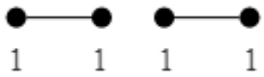
Şimdi *G* grafının regüler ve bağlantılı bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 1$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.12. P_2 grafının köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1 \cdot 1}}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

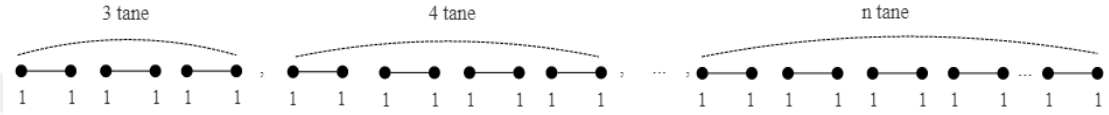
$GA_1(G) = 2$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.41. Bağlantısız iki tane P_2 patika graflarının köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1 \cdot 1}}{1+1} + \frac{2\sqrt{1 \cdot 1}}{1+1} = 1 + 1 = 2.$$

Benzer şekilde



Şekil 4.61. Bağlantısız *3, 4, ..., n* tane P_2 patika graflarının köşe dereceleri

graflarının $GA_1(G)$ değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *3, 4, 5, ..., n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.15.1. Teorem. *G* bir regüler ve basit graf ise $GA_1(G)$ indeksi tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.16. Regüler ve Basit Olmayan Graflar

Şimdi *G* grafının regüler ve basit olmayan bir graf olduğu duruma bakacağız. O halde $GA_1(G) = 1$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil. 4.14. $m = 1$ için bağlantılı, basit olmayan grafların köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1\cdot 1}}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

$GA_1(G) = 2$ değeri ise aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.43. $m = 2$ için bağlantılı, basit olmayan, regüler grafın köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{2\cdot 2}}{2+2} = \frac{2\cdot 2}{2} = 2.$$

Benzer şekilde



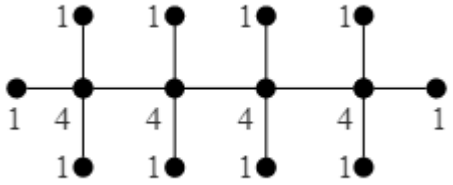
Şekil 4.44. *3, 4, …, n/2* kenarlı bağlantılı, basit olmayan, regüler grafların köşe dereceleri.

graflarının GA_1 değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *3, 4, 5, …, n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.16.1. Teorem. *G* bir regüler ve basit olmayan graf ise $GA_1(G)$ indeksi tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.17. İrregüler ve Basit Graflar

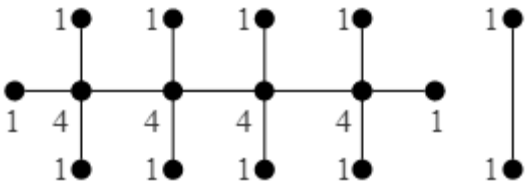
Şimdi *G* grafının irregüler ve basit bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 11$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.50. $T_4(4)$ grafının köşe dereceleri

$$GA_1(G) = 10 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 4}}{1+4} + 3 \cdot \frac{2\sqrt{4 \cdot 4}}{4+4} = 10 \cdot \frac{4}{5} + 3 = 8 + 3 = 11.$$

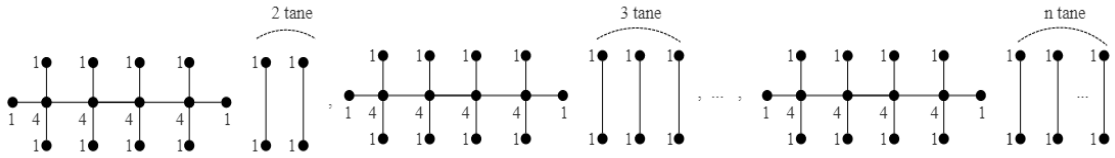
$GA_1(G) = 12$ değeri ise aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.62. $T_4(4)$ grafına bağlantısız bir tane P_2 grafı eklenmesi ile oluşan graf

$$GA_1(G) = 10 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 4}}{1+4} + 3 \cdot \frac{2\sqrt{4 \cdot 4}}{4+4} + \frac{2\sqrt{1 \cdot 1}}{1+1} = 10 \cdot \frac{4}{5} + 3 + 1 = 8 + 3 + 1 = 12.$$

Benzer şekilde



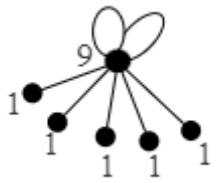
Şekil 4.63. $T_4(4)$ grafına bağlantısız *2, 3, ..., n* tane P_2 grafı eklenmesi ile oluşan graflar

graflarının GA_1 değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *13, 14, 15, ..., n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.17.1. Teorem. *G* bir irregüler ve basit graf ise $GA_1(G)$ indeksi *(12, ∞)* aralığındaki tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.18. İrregüler ve Basit Olmayan Graflar

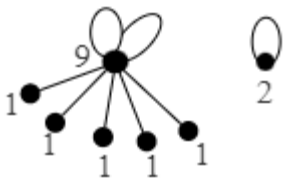
Şimdi *G* grafının irregüler ve basit olmayan bir graf olduğu duruma bakacağız. O halde $GA_1(G) = 5$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.38. $S_{5,2}$ grafının köşe dereceleri

$$GA_1(G) = 5 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 9}}{1+9} + 2 \cdot \frac{2\sqrt{9 \cdot 9}}{9+9} = 5 \cdot \frac{6}{10} + 2 = 3 + 2 = 5.$$

$GA_1(G) = 6$ değeri ise aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.39. $S_{5,2}$ grafına bir tane döngü eklenmesi ile oluşan graf

$$GA_1(G) = 5 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 9}}{1+9} + 2 \cdot \frac{2\sqrt{9 \cdot 9}}{9+9} + \frac{2\sqrt{2 \cdot 2}}{2+2} = 3 + 2 + 1 = 6.$$

Benzer şekilde



Şekil 4.40. $S_{5,2}$ grafı ve *2, 3, ..., n* tane basit olmayan bağlantısız graf eklenmesi ile oluşan grafın köşe dereceleri

graflarının GA_1 değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *7, 8, 9, ..., n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.18.1. Teorem. *G* bir irregüler ve basit olmayan graf ise $GA_1(G)$ indeksi [5, ∞) aralığındaki tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

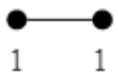
Son olarak üç özelliğin de olumlu veya olumsuz olarak (bağlantılı-bağlantısız, regüler-irregüler ve basit-basit olmayan) işin içinde olduğu durumları ele alacağız. Bu olumlu-olumsuz özelliklerden herhangi birisinden bir tane özellik seçtiğimizde diğer iki özellikten de olumlu veya olumsuz olmak üzere birer tanesini seçebiliriz. Bu durumda

$$\binom{6}{3} - \binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1} = 20 - 2 \cdot 2 \cdot 3 = 20 - 12 = 8$$

tane durum söz konusudur. Şimdi bu durumları ele alalım:

4.11.19. Bağlantılı, Regüler ve Basit Graflar

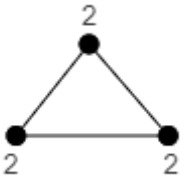
Şimdi *G* grafının bağlantılı, regüler ve basit bir graf olduğu duruma bakacağız. O halde $GA_1(G) = 1$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.12. P_2 grafının köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1 \cdot 1}}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

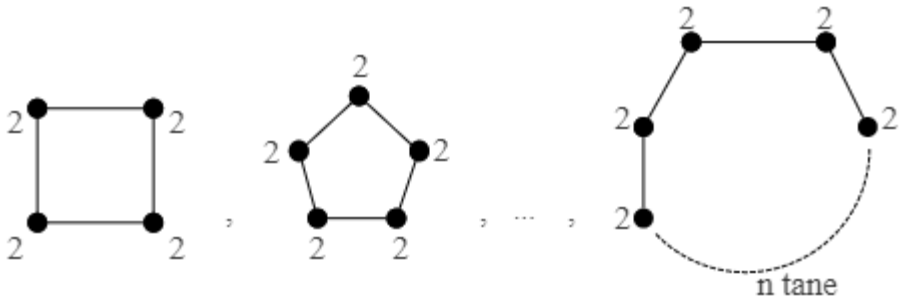
$GA_1(G) = 3$ değeri ise aşağıdaki ise aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.20. C_3 grafı köşe dereceleri

$$GA_1(G) = 3 \cdot \frac{2\sqrt{2 \cdot 2}}{2+2} = 3 \cdot \frac{4}{4} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Benzer şekilde



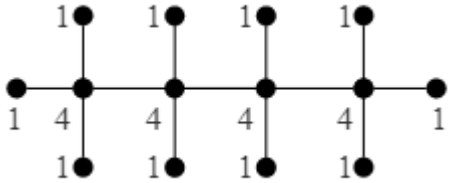
Şekil 4.42. Basit, bağlantılı ve 2- regüler devir graflarının köşe dereceleri

graflarının GA_1 değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *4, 5, 6, ..., n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.19.1. Teorem. *G* bir bağlantılı, regüler ve basit bir graf ise $GA_1(G)$ indeksi alabileceği değerler *[1, ∞) -{2}* aralığındaki tüm pozitif tamsayı değerlerini alır.

4.11.20. Bağlantılı, İrregüler ve Basit Graflar

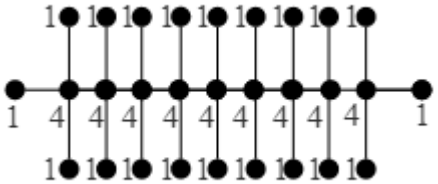
Şimdi *G* grafının bağlantılı, irregüler ve basit bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 11$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.50. $T_4(4)$ grafının köşe dereceleri

$$GA_1(G) = 10 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 4}}{1+4} + 3 \cdot \frac{2\sqrt{4 \cdot 4}}{4+4} = 10 \cdot \frac{4}{5} + 3 = 8 + 3 = 11.$$

$GA_1(G) = 24$ değeri ise aşağıdaki $T_4(9)$ tam grafından elde edilebilir:

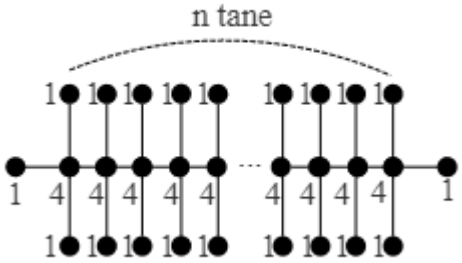


Şekil 4.52. $T_4(9)$ grafının köşe dereceleri

$$GA_1(T_4(9)) = 20 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 4}}{1+4} + 8 \cdot \frac{2\sqrt{4 \cdot 4}}{4+4} = 20 \cdot \frac{4}{5} + 8 = 24.$$

.

Benzer şekilde



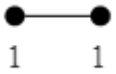
Şekil 4.64. $T_4(n)$ grafı ve köşe dereceleri

grafının $GA_1(G)$ değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *13n-2* değerlerini aldığı açıktır. Sonuç olarak

4.11.20.1. Teorem. *G* bir bağlantılı, irregüler ve basit bir graf ise $GA_1(G)$ indeksi *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *13n-2* değerlerini alır.

4.11.21. Bağlantılı, Regüler ve Basit Olmayan Graflar

Şimdi *G* grafının bağlantılı, regüler ve basit olmayan bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 1$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.12. P_2 patika grafının köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1 \cdot 1}}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

$GA_1(G) = 2$ değeri ise aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.43. $m = 2$ için bağlantılı, basit olmayan, regüler grafın köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{2 \cdot 2}}{2+2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2.$$

Benzer şekilde



Şekil 4.44. *3, 4, …, n/2* kenarlı bağlantılı, basit olmayan, regüler grafların köşe dereceleri

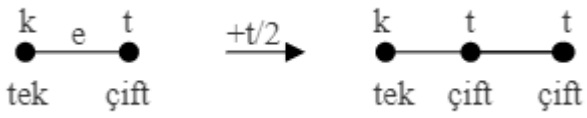
graflarının GA_1 değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *3, 4, 5, …, n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.21.1. Teorem. *G* bir bağlantılı, regüler ve basit olmayan graf ise $GA_1(G)$ indeksi tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.22. Bağlantılı, İrregüler ve Basit Olmayan Graflar

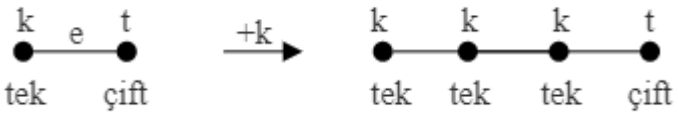
Bu bölümde GA_1 indeksinin hangi tamsayı değerleri aldığının belirlenmesinde kullanılmak üzere bazı dönüşümler tanımlayacağız.

4.11.22.1. Dönüşüm. *k* tek ve *t* çift pozitif tamsayılar olsun. *e=uv* ve *du=k*, *dv=t* olmak üzere *e* kenarına derecesi *t* olan bir köşeyi şekildeki gibi eklemek GA_1 değerini *t/2* kadar arttırır.



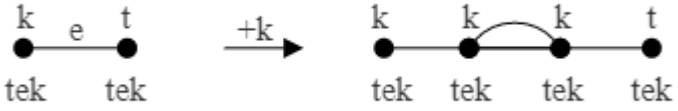
Şekil 4.45. Bağlantılı ve irregüler graflarda birinci tip dönüşüm

4.11.22.2. Dönüşüm. *k* birden büyük tek ve ve *t* çift tamsayı olsun. *e=uv* ve *du=k, dv=t* olmak üzere *e* kenarına dereceleri *k* olan iki köşeyi şekildeki gibi eklemek GA_1 değerini *k* kadar arttırır.



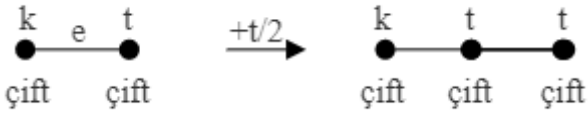
Şekil 4.46. Bağlantılı ve irregüler graflarda ikinci tip dönüşüm

4.11.22.3. Dönüşüm. *k* ve *t* birden büyük tek tamsayılar olsun. *e=uv* ve du=k, dv=t olmak üzere e kenarına dereceleri *k* (veya *t*) olan iki köşeyi şekildeki gibi eklemek GA_1 değerini *k* (veya *t*) kadar arttırır.



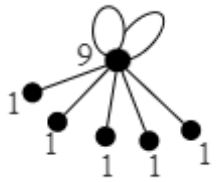
Şekil 4.47. Bağlantılı ve irregüler graflarda üçüncü tip dönüşüm

4.11.22.4. Dönüşüm. *k, t* tek çift tamsayılar olsun. *e=uv* ve *du=k, dv=t* olmak üzere *e* kenarına dereceleri *k* (veya *t*) olan iki köşeyi şekildeki gibi eklemek GA_1 değerini *k/2* (veya *t/2*) kadar arttırır.



Şekil 4.48. Bağlantılı ve irregüler graflarda dördüncü tip dönüşüm

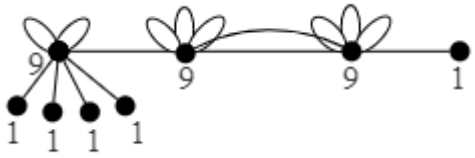
Şimdi *G* grafının bağlantılı, irregüler ve basit olmayan bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 5$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.38. $S_{5,2}$ grafının köşe dereceleri

$$GA_1(S_{5,2}) = 5 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 9}}{1+9} + 2 \cdot \frac{2\sqrt{9 \cdot 9}}{9+9} = 5 \cdot \frac{6}{10} + 2 = 3 + 2 = 5.$$

$GA_1(G) = 14$ değeri ise Tf_3 dönüşümü $S_{5,2}$ grafına uygulandığında elde edilebilir:

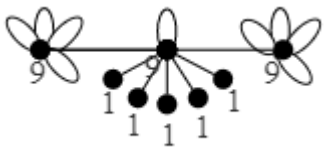


Şekil 4.49. $Tf_3(S_{5,2})$ grafı ve köşe dereceleri

$$GA_1(Tf_3(S_{5,2})) = 5 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 9}}{1+9} + 11 \cdot \frac{2\sqrt{9 \cdot 9}}{9+9} = 5 \cdot \frac{6}{10} + 11 = 3 + 11 = 14.$$

Benzer şekilde Tf_3 dönüşümü $Tf_3(S_{5,1})$ grafına uygulamaya devam edildiğinde GA_1 değeri *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *9n+5* değerlerini alır.

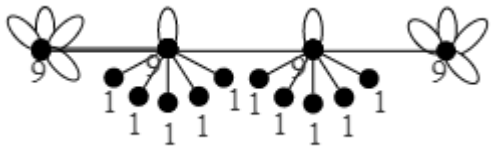
$GA_1(G) = 14$ değeri bir diğer türlü ise aşağıdaki şekilde elde edilebilir:



Şekil 4.65. $S_{0,4} \cup S_{5,1} \cup S_{0,4}$ grafının köşe dereceleri

$$GA_1(S_{0,4} \cup S_{5,1} \cup S_{0,4}) = 5 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 9}}{1+9} + 11 \cdot \frac{2\sqrt{9 \cdot 9}}{9+9} = 5 \cdot \frac{6}{10} + 11 = 3 + 11 = 14.$$

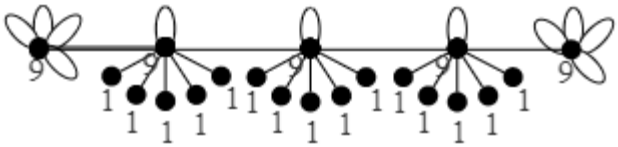
$GA_1(G) = 19$ değeri ise aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.66. $S_{0,4} \cup S_{5,1} \cup S_{5,1} \cup S_{0,4}$ grafının köşe dereceleri

$$GA_1(S_{0,4} \cup S_{5,1} \cup S_{5,1} \cup S_{0,4}) = 10 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 9}}{1+9} + 13 \cdot \frac{2\sqrt{9 \cdot 9}}{9+9} = 10 \cdot \frac{6}{10} + 13 = 6 + 13 = 19.$$

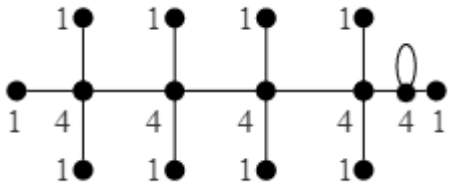
$GA_1(G) = 24$ değeri ise aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.67. $S_{0,4} \cup S_{5,1} \cup S_{5,1} \cup S_{5,1} \cup S_{0,4}$ grafının köşe dereceleri

$$GA_1(S_{0,4} \cup S_{5,1} \cup S_{5,1} \cup S_{5,1} \cup S_{0,4}) = 15 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 9}}{1+9} + 15 \cdot \frac{2\sqrt{9 \cdot 9}}{9+9} = 15 \cdot \frac{6}{10} + 15 = 24.$$

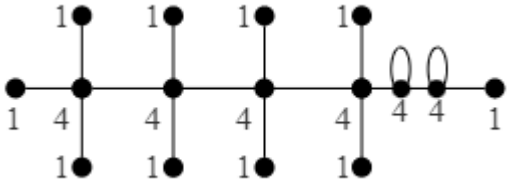
$GA_1(G) = 13$ değeri ise Tf_1 dönüşümünün yukarıdaki tırtıl grafına uygulandığında elde edilebilir:



Şekil 4.51. $Tf_1(T_4(4))$ grafının köşe dereceleri

$$GA_1(Tf_1(T_4(4))) = 10 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 4}}{1+4} + 5 \cdot \frac{2\sqrt{4 \cdot 4}}{4+4} = 10 \cdot \frac{4}{5} + 5 = 8 + 5 = 13.$$

$GA_1(G) = 15$ değeri ise Tf_1 dönüşümünün yukarıdaki $Tf_1(T_4(4))$ tırtıl grafına uygulandığında elde edilebilir:



Şekil 4.68. $Tf_1\left(Tf_1(T_4(4))\right)$ grafının köşe dereceleri

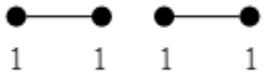
$$GA_1\left(Tf_1\left(Tf_1(T_4(4))\right)\right) = 10 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 4}}{1+4} + 7 \cdot \frac{2\sqrt{4 \cdot 4}}{4+4} = 10 \cdot \frac{4}{5} + 7 = 8 + 7 = 15.$$

Benzer şekilde Tf_1 dönüşümü uygulamaya devam edildiğinde GA_1 değeri *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *2·n+11* değerlerini alır. Sonuç olarak

4.11.22.5. Teorem. *G* bir bağlantılı ve irregüler graf ise $GA_1(G)$ indeksi 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 16, 18, 20, 22 sayıları dışındaki tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.23. Bağlantılı Olmayan, Regüler ve Basit Graflar

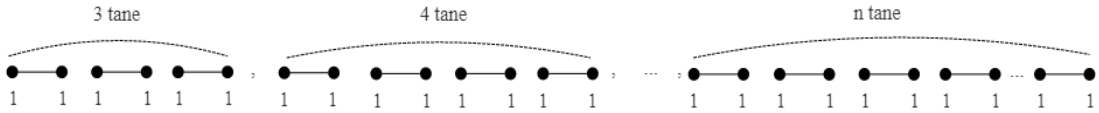
Şimdi *G* grafının bağlantılı, regüler ve basit olmayan bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 2$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.41. Bağlantısız iki tane P_2 patika graflarının köşe dereceleri

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1\cdot 1}}{1+1} + \frac{2\sqrt{1\cdot 1}}{1+1} = 1 + 1 = 2.$$

Benzer şekilde



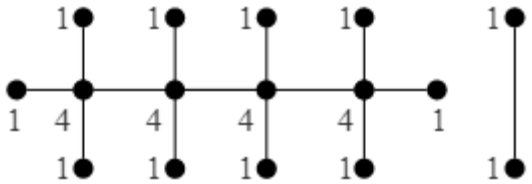
Şekil 4.61. Bağlantısız *3, 4, ..., n* tane P_2 patika graflarının köşe dereceleri.

graflarının GA_1 değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *3, 4, 5, ..., n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.23.1. Teorem. *G* bir bağlantılı, regüler ve basit olmayan graf ise $GA_1(G)$ indeksinin alabileceği değerler $(1, \infty)$ aralığındaki tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.24. Bağlantılı Olmayan, İrregüler ve Basit Graflar

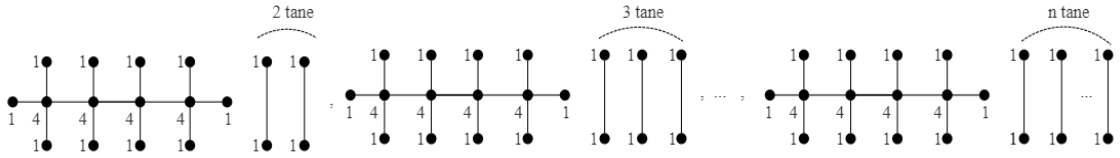
Şimdi G grafının bağlantılı olmayan, irregüler ve basit graflar bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 12$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.62. $T_4(4)$ grafına bağlantısız bir tane P_2 grafı eklenmesi ile oluşan graf

$$GA_1(G) = 10 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 4}}{1+4} + 3 \cdot \frac{2\sqrt{4 \cdot 4}}{4+4} + \frac{2\sqrt{1 \cdot 1}}{1+1} = 10 \cdot \frac{4}{5} + 3 + 1 = 8 + 3 + 1 = 12.$$

Benzer şekilde



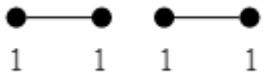
Şekil 4.69. $T_4(4)$ grafına bağlantısız *2, 3, ..., n* tane P_2 grafı eklenmesi ile oluşan graflar

graflarının $GA_1(G)$ topolojik indeks değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere 13, 14, 15, …, *n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.24. Teorem. *G* bağlantılı olmayan, irregüler ve basit graf ise $GA_1(G)$ indeksinin alabileceği değerler *(11, ∞)* aralığındaki tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.25. Bağlantılı, Regüler ve Basit Olmayan Graflar

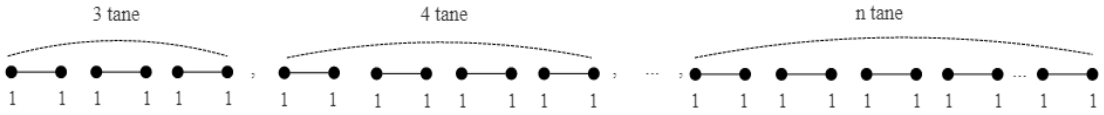
Şimdi G grafının bağlantılı, regüler ve basit olmayan graflar bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 2$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.41. İki tane P_2 patika grafından oluşan bağlantısız graf

$$GA_1(G) = \frac{2\sqrt{1\cdot 1}}{1+1} + \frac{2\sqrt{1\cdot 1}}{1+1} = 1 + 1 = 2.$$

Benzer şekilde



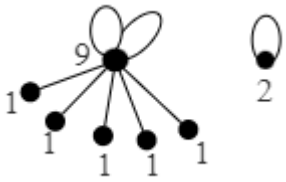
Şekil 4.61. Bağlantısız *3, 4, ..., n* tane P_2 patika graflarının köşe dereceleri

graflarının $GA_1(G)$ değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *3, 4, 5, ..., n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.25. Teorem. *G* bir bağlantılı, regüler ve basit olmayan graf ise $GA_1(G)$ indeksi *(1, ∞)* aralığındaki tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

4.11.26. Bağlantılı Olmayan, İrregüler ve Basit Olmayan Graflar

Şimdi G grafının bağlantılı olmayan, irregüler ve basit olmayan bir graf olduğu duruma bakacağız. $GA_1(G) = 6$ değeri aşağıdaki graftan elde edilebilir:



Şekil 4.39. $S_{5,2}$ grafına bir tane döngü eklenmesi ile oluşan graf

$$GA_1(G) = 5 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 9}}{1+9} + 2 \cdot \frac{2\sqrt{9 \cdot 9}}{9+9} + \frac{2\sqrt{2 \cdot 2}}{2+2} = 3 + 2 + 1 = 6.$$

Benzer şekilde



Şekil 4.40. $S_{5,2}$ grafı ve *2, 3, ..., n* tane basit olmayan bağlantısız graf eklenmesi ile oluşan grafın köşe dereceleri

graflarının GA_1 değeri hesaplandığında *n* pozitif bir tamsayı olmak üzere *7, 8, 9, ..., n* değerlerini aldıkları açıktır. Sonuç olarak

4.11.26. Teorem. *G* bir bağlantılı olmayan, irregüler ve basit olmayan graf ise $GA_1(G)$ indeksinin değeri *(5, ∞)* aralığındaki tüm pozitif tamsayı değerleri alır.

O halde $GA_1(G)$ indeksi için bu üç özellik söz konusu olduğunda toplam 6+12+8 = 26 tane durumun mevcut olduğunu görmüş olduk.

4.12. GA_1 ve Randic İndeksleri Arasındaki İlişkiler

Bu bölümde G grafı regüler veya regüler olmayan bir graf ise bu grafın Randic ve GA_1 indeksleri hesaplanacaktır. Buna göre aşağıdaki teorem ifade edilir.

4.12.1 Teorem. *G* grafı *r*-regüler ise $GA_1(G) = r \cdot R(G)$'dir.

İspat. Herhangi bir $e = v_i v_j$ kenarı için $d_i = \deg(v_i)$ ve $d_j = \deg(v_j)$ olmak üzere *G* *r*-regüler grafı için

$$\mathrm{GA_1(G)} = \frac{2\sqrt{\mathrm{d_i d_j}}}{\mathrm{d_i + d_j}} = \frac{2\sqrt{\mathrm{r \cdot r}}}{\mathrm{r + r}} = 1$$

ve

$$\mathrm{R(G)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{d_i d_j}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{r \cdot r}}} = \frac{1}{\mathrm{r}}$$

olduğundan ispat tamamlanmış olur.

4.12.2. Teorem. Yukarıdaki teorem regüler olmayan graflarda da geçerlidir.

İspat. *G* grafı regüler ise aşağıdaki eşitliğin Teorem 4.12.1 gereği geçerli olduğunu biliyoruz. O halde

$$GA_1(G) = r.R(G)$$

$$\frac{2\sqrt{d_i d_j}}{d_i+d_j} = r \cdot \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}$$

$$2d_i d_j = r(d_i + d_j)$$

$$(2d_i - r)(d_j - \frac{r}{2}) = \frac{r^2}{2}$$

$$(2d_i - r)(2d_j - r) = r^2$$

Burada özel olarak $d_i = d_j = r$ ise $r \cdot r = r^2$ eşitliği elde edilir. "Fakat $d_i \neq d_j$ ise $(2d_i - r)(2d_j - r) = r^2$ ise çözümü var mıdır?" sorusuna yanıt arayalım: r çift ise $(2d_i - r)$ ve $(2d_j - r)$ çift olur. Biz r^2'nin her ikisi çift olan $a \neq b$ için a, b çarpanlarını arıyoruz. $r = 2^{a_1}p_2{}^{a_2}p_3{}^{a_3} \dots p_k{}^{a_k}$ olsun. $r^2 = 2^{2a_1}p_2{}^{2a_2}p_3{}^{2a_3} \dots p_k{}^{2a_k}$ yazılır. r^2'nin tek sayı çarpanlarının sayısı $\prod_{i=2}^{k}(1 + 2a_i)$'dir. r^2 çift sayı olduğundan her bir c tek sayı çarpanı için bir d çift sayı çarpanı mevcuttur. Yani bu $2\prod_{i=2}^{k}(1 + 2a_i)$ tane çarpan dışında kalan tüm çarpanları ikişer ikişer her ikisi de çift sayı olan ikililer olarak düşünebiliriz. Tüm çarpanların sayısı $\prod_{i=1}^{k}(1 + 2a_i)$ olacağından geriye $\prod_{i=1}^{k}(1 + 2a_i) - 2\prod_{i=2}^{k}(1 + 2a_i)$ tane çift çarpan kalır. r^2'nin $r \cdot r$ şeklinde ikisi de çift sayı olan bir çarpan ikilisi de her zaman olacağından aranan çiftlerin sayısı $k \geq 2$ iken

$$N = \frac{\prod_{i=1}^{k}(1+2a_i) - 2\prod_{i=2}^{k}(1+2a_i) - 1}{2} + 1$$

olur. Bu da düzenlenirse

$$N = \frac{(2a_1 - 1)\cdot \prod_{i=2}^{k}(1+2a_i) + 1}{2}$$

tane çift sayı ikilisi mevcuttur. $r = 2^{a_1}{p_2}^{a_2}{p_3}^{a_3} \dots {p_k}^{a_k}$ olsun. $r^2 = 2^{2a_1}{p_2}^{2a_2}{p_3}^{2a_3} \dots {p_k}^{2a_k}$ yazılır. r^2'nin *r*'den küçük her bir *c* tek böleni için bir *d* çift böleni vardır.

k=1 iken yani *r*, 2'nin bir kuvveti iken

$$N = \frac{2a_1 - 1 + 1}{2} = a_1$$

olur.

4.12.3. Örnek. *r=8* ise $r=2^3$ olup $r^2=64=2^6$ olarak yazılır. Burada $a_1=3$, *k=1* olur ve $N = \frac{5+1}{2} = 3$ adet her ikisi de çift sayı olan $e \leq f$ olacak şekilde (e,f) bölen ikilisi vardır. Bu bölenler (2,32), (4,16) ve (8,8) olarak ifade edilir.

4.12.4. Örnek. *r=12* ise $r=2^2\cdot3^1$ olup $r^2=144=2^4\cdot3^2$ olarak yazılır. Burada $a_1=2$, $a_2=1$, *k=2* olur ve $N = \frac{3\cdot3+1}{2} = 5$ adet her ikisi de çift sayı olan $e \leq f$ olacak şekilde (e,f) bölen ikilisi vardır. Bu bölenler (2,72), (4,36), (6,24), (8,18) ve (12,12) olarak ifade edilir.

4.12.5. Örnek. *r=30* ise $r=2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ olup $r^2=900=2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ olarak yazılır. Burada $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=1$, $k=3$ olur ve $N = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3+1}{2} = 5$ adet her ikisi de çift sayı olan $e \leq f$ olacak şekilde (e,f) bölen ikilisi vardır. Bu bölenler (2,450), (6,150), (10,90), (18,50) ve (30,30) olarak ifade edilir.

4.13. GA_1ve Randic Topolojik İndekslerinin Alabileceği Maksimum ve Minimum Değerler

Bu bölümde 208 tane graf kartlarının GA_1 ve Randic topolojik indeks değerleri hesaplanmıştır. Bunun sonucunda maksimum ve minimum alabilecekleri değerlere karşılık gelen graflar belirlenmiştir. Bu değerler için şu sonuçlar bulunmuştur.

4.13.1. Teorem. *G* grafı, *n* köşeli, basit, bağlantılı bir graf olmak üzere en küçük ve en büyük Randic indeks değerleri

$$R(S_n) \leq R(G) \leq R(K_n) = R(C_n)$$

şeklindedir.

4.13.2. Teorem. *G* grafı *n* köşeli, basit, bağlantılı ve regüler graflardan en küçük ve en büyük Randic değerleri aşağıdaki şekildedir.

$$R_{max}(G) = R_{min}(G) = \frac{n}{2} = R(K_n) = R(C_n)$$

4.13.3. Teorem. *G* grafı *n* köşeli, basit, bağlantılı ve irregüler graflardan en küçük ve en büyük Randic değerleri

$$R(S_n) \leq R(G) \leq R(K_n - \{e\})$$

bulunur.

4.13.4. Sonuç. *G* grafı *n* köşeli, basit, bağlantılı ve regüler bir graf olsun. O halde

$$GA_1(S_n) = \begin{cases} n + n \cdot t \ (t \in N, 0 \leq t \leq \frac{n-3}{2}); & \text{n tek} \\ n + \frac{n}{2} \cdot k \ \ (k \in N, 0 \leq k \leq n-3); & \text{n çift} \end{cases}$$

bulunur.

4.13.5. Sonuç. *G* grafı *n* köşeli, basit, bağlantılı ve irregüler bir graf olsun. O halde

$$GA_1(G)_{max} = \frac{(n-2)\left[8\sqrt{(n-2)(n-1)}+(n-2)(n-3)(2n-3)\right]}{2(2n-3)}$$

bulunur.

4.13.6. Teorem. *G* grafı *n* köşeli, basit, bağlantılı bir graf olsun. O halde

$$GA_1(S_n) \leq GA_1(G) \leq GA_1(K_n)$$

yazılır.

4.13.7. Teorem. *G* grafı *n* köşeli, basit, bağlantılı ve regüler bir graf olsun. O halde

$$GA_1(C_n) \leq GA_1(G) \leq GA_1(K_n)$$

yazılır.

İspat. Maksimum değeri için: *G* grafı *n* köşeli basit bağlantılı ve regüler bir graf olmak GA_1 en büyük değerini K_n'de alır. K_n'nin diğer tüm regüler alt grafları için, K_n'den bazı kenarları silmemiz gerekir, bu da GA_1'nin daha düşük bir değeriyle sonuçlanır.

Minimum değeri için: *G* grafı *n* köşeli basit bağlantılı ve regüler bir graf olmak üzere GA_1 en küçük değerini C_n'de alır. Diğer *G* grafı *n* köşeli basit bağlantılı ve regüler grafları elde etmek için kenar eklememiz gerekir ancak her kenar eklemek GA_1'in değerini arttırır.

4.13.8. Sonuç. *G* grafı *n* köşeli, basit, bağlantılı ve irregüler bir graf olsun. O halde

$$GA_1(S_n) \leq GA_1(G) \leq GA_1(K_n - \{e\})$$

yazılır.

4.13.9. Teorem. *n* köşeli her *G* grafı için

$$GA_1(S_n) \leq GA_1(P_n)$$

bulunur.

İspat. *n* köşeli her *G* grafı için P_n grafının kenar parçalanışları şu şekildedir.

***e* kenarının tipi**	***e* kenarının sayısı**
{1,2} kenarından	2 tane
{1,2} kenarından	*(n-3)* tane

Çizelge 4.7. P_n grafının kenar parçalanışları

olduğundan $GA_1(P_n) = 2 \cdot \frac{2\sqrt{1 \cdot 2}}{1+2} + 1 \cdot (n-3) = \frac{4\sqrt{2}}{3} + n - 3$ bulunur.

S_n grafında kenar parçalanışları şu şekildedir.

***e* kenarının tipi**	***e* kenarının sayısı**
{1,n-1} kenarından	*n-1* tane

Çizelge 4.8. S_n grafında kenar parçalanışı

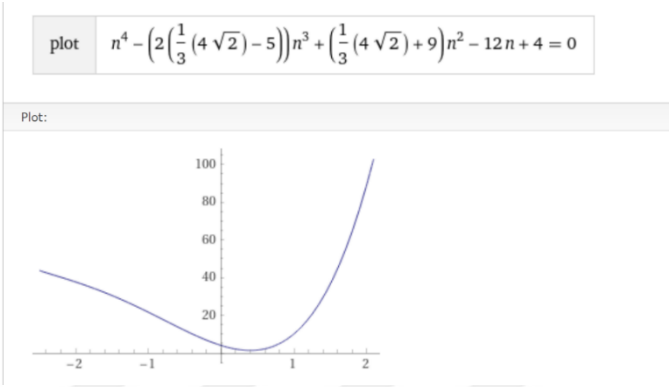
olduğundan $GA_1(S_n) = (n-1) \cdot \frac{2\sqrt{(n-1)}}{n}$ bulunur. Buradan $\frac{4\sqrt{2}}{3} + n - 3 \geq \frac{2(n-1)\sqrt{(n-1)}}{n}$ eşitsizliği gerçekleşir mi diye bakmamız gerekir.

$$(n^2 + \frac{4\sqrt{2}n}{3} - 3n)^2 \geq \left[2(n-1)^{\frac{3}{2}}\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^4 - 2\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - 3\right)n^3 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - 3\right)n^2 \geq 4(n-1)^3$$

$$\Leftrightarrow n^4 - 2\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - 5\right)n^3 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} + 9\right)n^2 - 12n + 4 \geq 0$$

bulunur. $f_1(n) = n^4 - 2\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - 5\right)n^3 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} + 9\right)n^2 - 12n + 4 = 0$ olmak üzere $f_1(n)$ fonksiyonunun grafiğini çizersek;



Şekil.4.70. $f_1(n)$ fonksiyonunun grafiği

Görüldüğü üzere bu grafiğin gerçek kökü yoktur. Dolayısıyla her *n* için

$$GA_1(S_n) \leq GA_1(P_n)$$

bulunur.

4.13.10. Teorem. *n* köşeli her *G* grafı için $n \geq 3$ olmak üzere

$$GA_1(S_n) \leq GA_1(C_n)$$

bulunur.

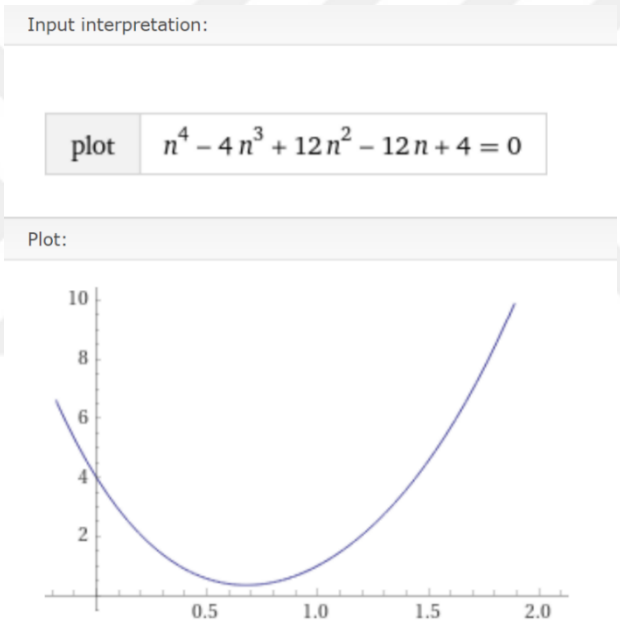
İspat. *n* köşeli her *G* grafı için $n \geq 3$ olmak üzere

$n > GA_1(S_n) \Leftrightarrow n > \frac{2\sqrt{(n-1)^3}}{n} \Leftrightarrow n^2 > 2\sqrt{(n-1)^3} \Leftrightarrow n^4 > 4(n-1)^3$

$\Leftrightarrow n^4 - 4n^3 + 12n^2 - 12n + 4 > 0$ olduğu açıktır. Burada

$$f_2(n) = n^4 - 4n^3 + 12n^2 - 12n + 4 = 0$$

olmak üzere $f_2(n)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekildedir:



Şekil 4.71. $f_2(n)$ fonksiyonunun grafiği

Görüldüğü üzere bu $f_2(n)$ grafiğinin gerçek kökü yoktur. Dolayısıyla her *n* için

$$GA_1(S_n) \leq GA_1(C_n)$$

bulunur.

4.13.11. Teorem. *G* grafı *n* köşeli, basit, bağlantılı irregüler bir graf ve *e* kenarı K_n üzerinde herhangi bir kenar olsun. O halde

$$GA_1(G) \leq GA_1(K_n - \{e\})$$

yazılır.

İspat. Her kenar GA_1 indeksine pozitif bir katkı sağlar. En büyük GA_1 değeri $K_n - \{e\}$ irregüler grafı için elde edilir. Bütün diğer irregüler grafların GA_1 değerleri daha küçüktür. Bu da ispatı tamamlar.

4.13.12. Teorem. *G* grafı *n* köşeli, basit, bağlantılı ve irregüler bir graf olsun. O halde

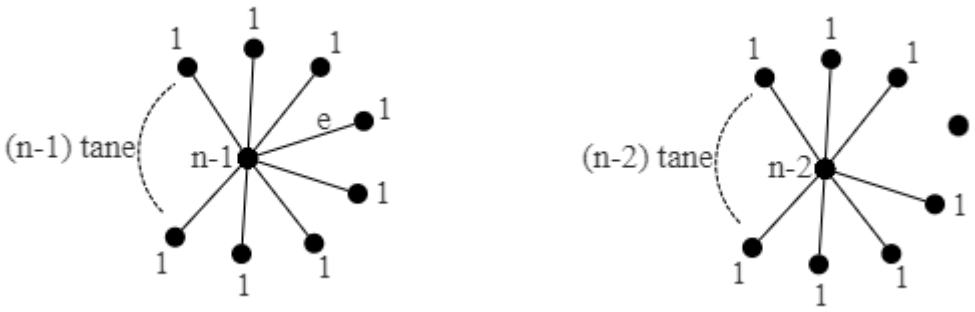
$$GA_1(S_n) \leq GA_1(G)$$

şeklindedir.

İspat. *G* irregüler bir graf olduğundan d_1 ve d_2 olmak üzere iki farklı köşe derecesi vardır. Genelliği bozmaksızın $d_1 < d_2$ varsayımını kabul edelim. v_2 köşesinin derecesi d_2 olsun. S_n yıldız grafının *n* köşeli tüm basit irregüler bağlantılı graflar arasında en küçük GA_1 indeksine sahip olduğunu göstermeliyiz. Burada birçok durum söz konusudur. Hatırlanacağı gibi S_n, *n* köşeli ve $n - 1$ kenarlı bir graftır. O halde

(i) S_n'in var olan köşelerinin arasına yeni bazı **kenarlar** ekleyebiliriz. Eklenen bu kenarların sayısı 1 ve $\binom{n}{2} - (n-1) = M_{K_n} - M_{S_n} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \binom{n-1}{2}$ arasında değişkenlik gösterir. Böylece yeni eklenen her bir e kenarı S_n'nin GA_1 değerini arttırırken iki yol vardır. Birincisi $GA_1(S_n)$'e $GA_1(e)$ pozitif değeri eklenir. İkincisi, e köşesinin eklenmesiyle uç köşelerinin dereceleri 1 artacağından, e köşesine bitişik tüm kenarların GA_1 değerleri artacaktır. Bu nedenle bu tür kenarların eklenmesi GA_1 değerini açıkça artırır.

(ii) S_n'den bir ***e* kenarını** silin ve bunu kalan grafın iki köşesi arasına yapıştırın. S_n grafının kenar parçalanışı Çizelge 4.9.'de verilmiştir.



Şekil 4.72. S_n ve $S_n - \{e\}$ graflarının köşe dereceleri

S_n grafının kenar parçalanışı şu şekildedir:

***e* kenarının tipi**	***e* kenarının sayısı**
{1,n-1}	*n-1* tane

Çizelge 4.9. S_n grafının kenar parçalanışı

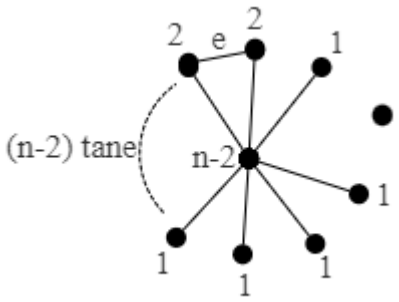
Böylece GA_1 değerini hesaplarsak

$$GA_1(S_n) = (n-1)\frac{2\sqrt{n-1}}{n}$$

$$= \frac{2(n-1)^{\frac{3}{2}}}{n}$$

bulunur. $(S_n - e) \cup \{e\}$ için aşağıdaki iki çeşit durum söz konusudur.

a) **e kenarı**, $S_n - e$ grafındaki dereceleri 1 olan *n-2* adet köşeden herhangi ikisi arasına yerleştirilebilir. Böylece $(S_n - e) \cup \{e\}$ grafı üzerinde bir üçgen oluşturulur. Bu durumda $(S_n - e) \cup \{e\}$ grafının kenar parçalanışı Çizelge 4.10.'daki gibi olacaktır.



Şekil 4.73. $(S_n - e) \cup \{e\}$ birinci durum

$(S_n - e) \cup \{e\}$ birinci durumdaki grafın kenar parçalanışı şu şekildedir:

***e* kenarının tipi**	***e* kenarının sayısı**
{1,n-2} kenarından	*n-4* tane
{2,n-2} kenarından	2 tane
{2,2} kenarından	1 tane

Çizelge 4.10. $(S_n - e) \cup \{e\}$ birinci durum grafının kenar parçalanışı

O halde GA_1 değerini hesaplarsak;

$$GA_1\big((S_n - e) \cup \{e\}\big) = (n-4)\frac{2\sqrt{1 \cdot (n-2)}}{n-1} + 2\frac{2\sqrt{2 \cdot (n-2)}}{n} + 1$$

$$= 2\sqrt{n-2}\left(\frac{n-4}{n-1}+\frac{2\sqrt{2}}{n}\right)+1$$

$$= 2\sqrt{n-2}\left[\frac{n^2-4n+2\sqrt{2}n-2\sqrt{2}}{n(n-1)}\right]+1$$

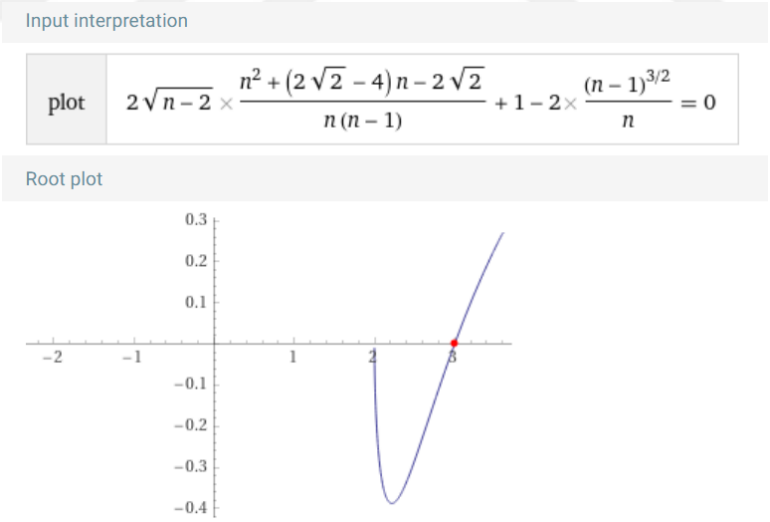
$$= 2\sqrt{n-2}\left[\frac{n^2+(2\sqrt{2}-4)n-2\sqrt{2}}{n(n-1)}\right]+1$$

bulunur. Şimdi $(S_n - e) \cup \{e\}$ grafı ile S_n grafının GA_1 değerlerinin farkları

$$f_1(n) = GA_1\big((S_n - e) \cup \{e\}\big) - GA_1(S_n)$$

$$= 2\sqrt{n-2}\left[\frac{n^2+(2\sqrt{2}-4)n-2\sqrt{2}}{n(n-1)}\right]+1-\frac{2(n-1)^{\frac{3}{2}}}{n}$$

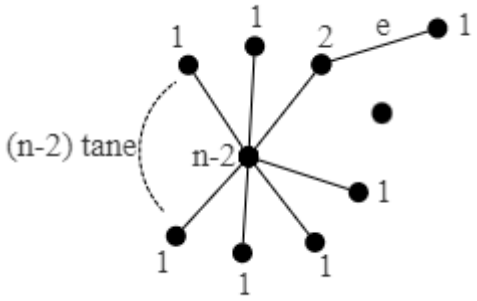
bulunur. Bu $f_3(n)$ fonksiyonun grafiği Şekil 4.74.'de gösterilmiştir.



Şekil 4.74. $f_3(n)$ fonksiyonunun grafiği

Şekil 4.74.'e göre $f_3(n)$ fonksiyonunun $GA_1\big((S_n - e) \cup \{e\}\big) \geq GA_1(S_n)$'i gösteren grafiğinde *n* bir pozitif tamsayı ve *n≥2* değerleri için negatif olmadığını görüyoruz.

b) $k<n$ olmak üzere *e* kenarı, S_n grafının herhangi iki köşesi arasına yerleştirilebilir.



Şekil 4.75. $(S_n - e) \cup \{e\}$ ikinci durum

$(S_n - e) \cup \{e\}$ ikinci durum grafının kenar parçalanışı şu şekildedir:

***e* kenarının tipi**	***e* kenarının sayısı**
{1,n-2} kenarından	*n-3* tane
{1,2} kenarından	1 tane
{2,2} kenarından	1 tane

Çizelge 4.11. $(S_n - e) \cup \{e\}$ ikinci durumdaki grafın kenar parçalanışı

O halde GA_1 değerini hesaplarsak

$$GA_1\big((S_n - e) \cup \{e\}\big) = (n-3)\frac{2\sqrt{1\cdot(n-2)}}{n-1} + \frac{2\sqrt{1\cdot 2}}{3} + 1$$

$$= (n-3)\frac{2\sqrt{n-2}}{n-1} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1$$

ve böylece

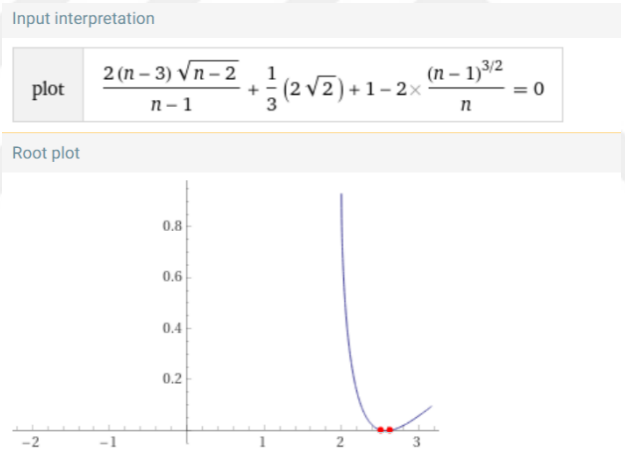
$$GA_1\big((S_n - e) \cup \{e\}\big) - GA_1(S_n) = \frac{2(n-3)\sqrt{n-2}}{n-1} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1 - \frac{2(n-1)^{\frac{3}{2}}}{n}$$

bulunur. Şimdi $(S_n - e) \cup \{e\}$ grafı ile S_n grafının GA_1 değerlerinin farkları

$$f_4(n) = GA_1\big((S_n - e) \cup \{e\}\big) - GA_1(S_n)$$

$$= \frac{2(n-3)\sqrt{n-2}}{n-1} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1 - \frac{2(n-1)^{\frac{3}{2}}}{n}$$

bulunur. Bu $f_4(n)$ fonksiyonun grafiği aşağıda gösterilmiştir.

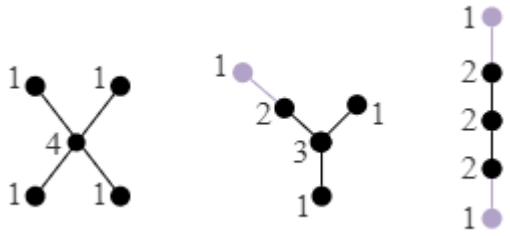


Şekil 4.76. $f_4(n)$ fonksiyonunun grafiği

Şekil 4.76.'ya göre $f_4(n)$ fonksiyonunun $GA_1\big((S_n - e) \cup \{e\}\big) - GA_1(S_n) \geq 0$ eşitsizliğini gösteren grafiğinde tüm pozitif tamsayı değerleri için negatif olmadığını görüyoruz.

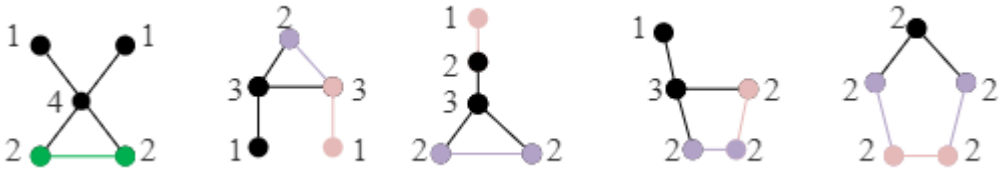
(iii) $k<n$ olmak üzere ***e* kenarı**, S_n grafının herhangi iki köşesi arasına yerleştirilebilir. Bu durumda (ii) a) veya (ii) b) durumlarındaki grafların birine yeni bir kenar ekliyoruz. Açıkçası bu, GA_1 indeksine pozitif bir değer katacaktır. Dolayısıyla sonuç bulunur. Şimdi m=4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 grafları çizelim.

$m=4$ için aşağıdaki graflar çizilir.



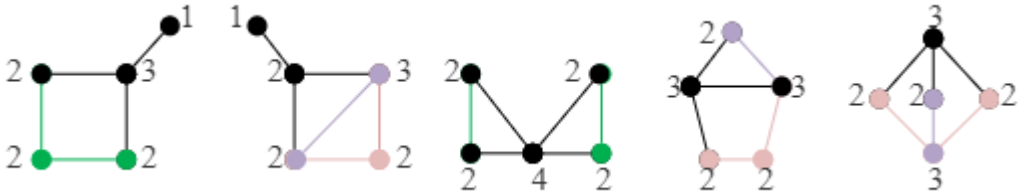
Şekil 4.77. $m=4$ için S_n grafına kenar ekleme

$m=5$ için aşağıdaki graflar çizilir.



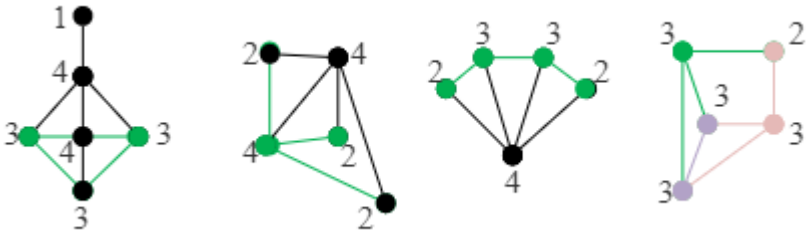
Şekil 4.78. $m=5$ için S_n grafına kenar ekleme

m=6 için aşağıdaki graflar çizilir.



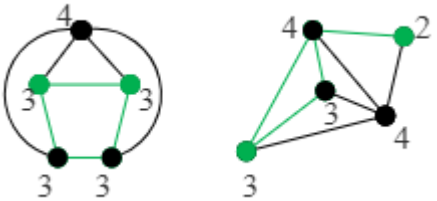
Şekil 4.79. *m=6* için S_n grafına kenar ekleme

m=7 için aşağıdaki graflar çizilir.



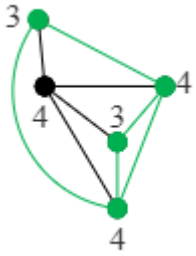
Şekil 4.80. *m=7* için S_n grafına kenar ekleme

m=8 için aşağıdaki graflar çizilir.



Şekil 4.81. *m=8* için S_n grafına kenar ekleme

m=9 için aşağıdaki graf çizilir.



Şekil 4.82. m=9 için S_n grafına kenar ekleme

m=10 için aşağıdaki graf çizilir.

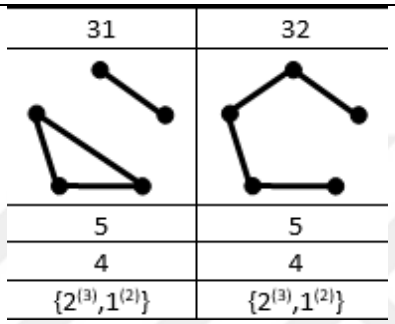
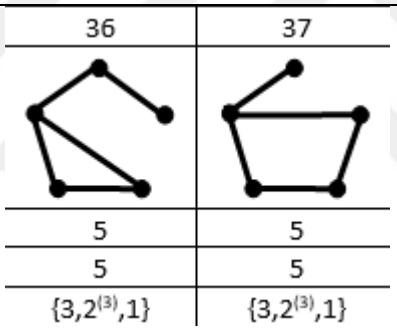
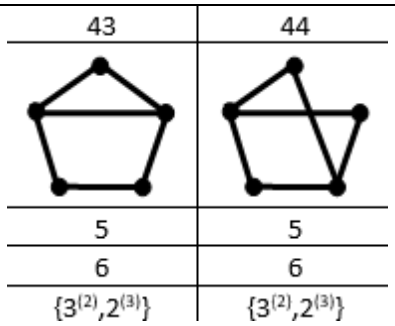


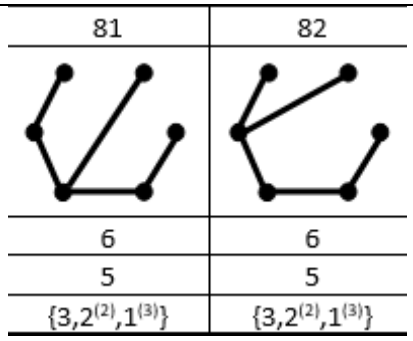
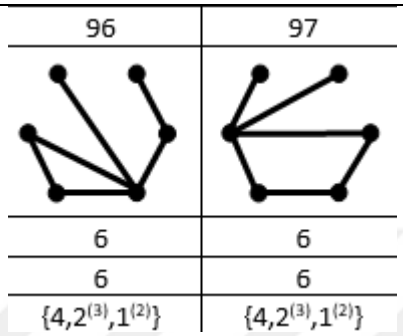
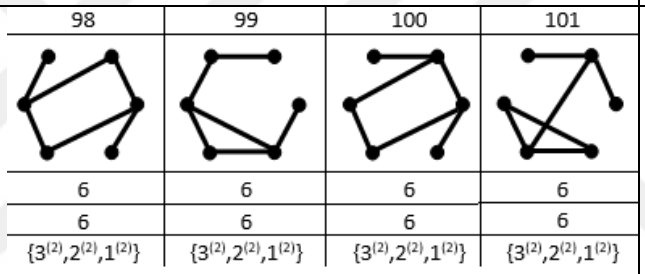
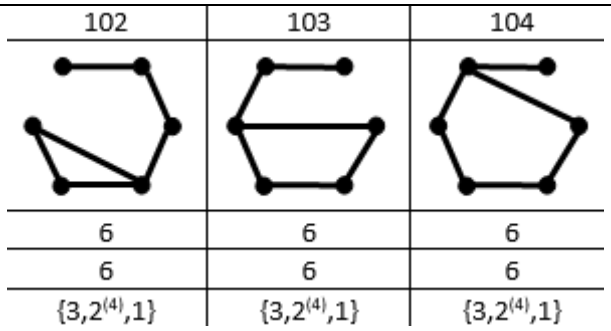
Şekil 4.83. m=10 için S_n grafına kenar ekleme

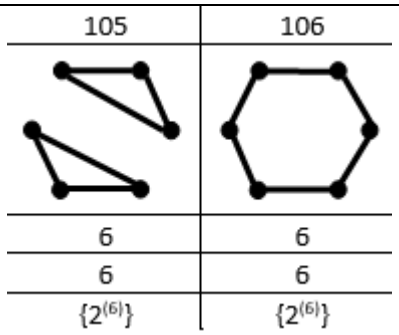
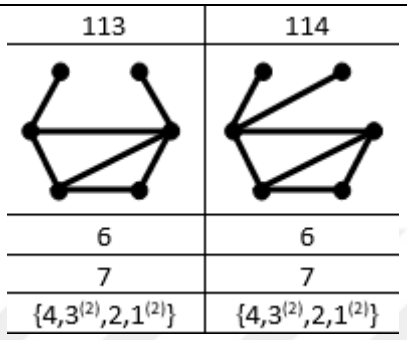
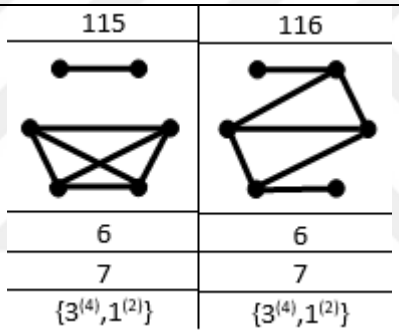
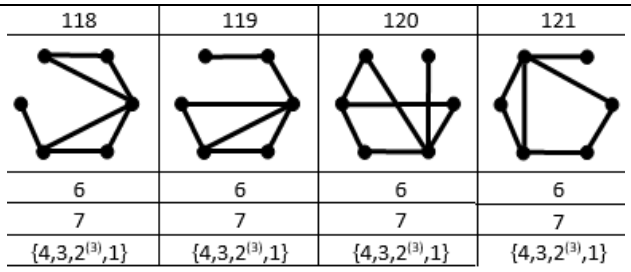
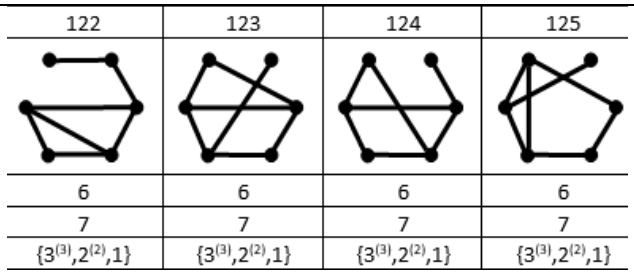
grafı elde edilir.

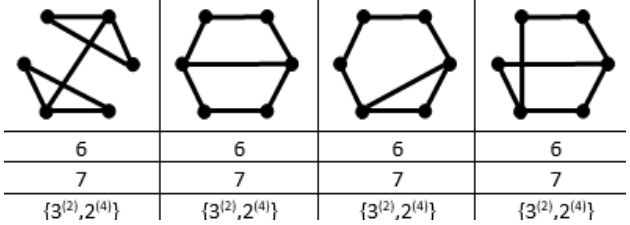
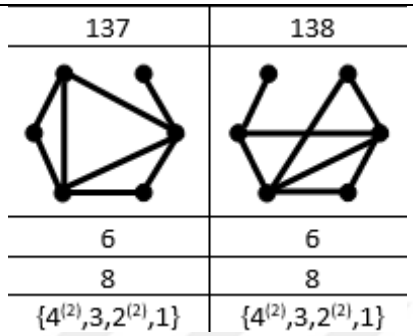
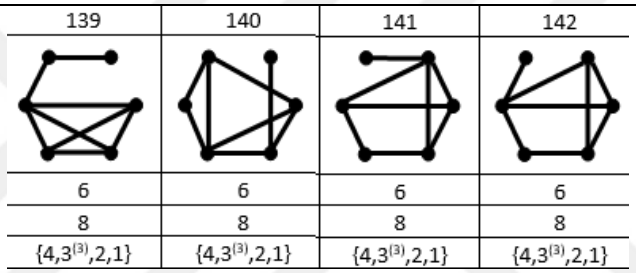
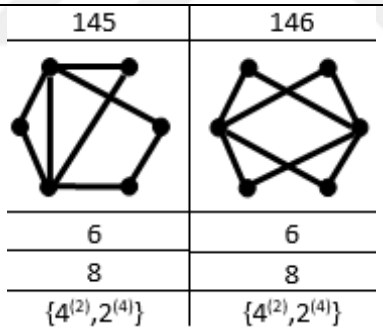
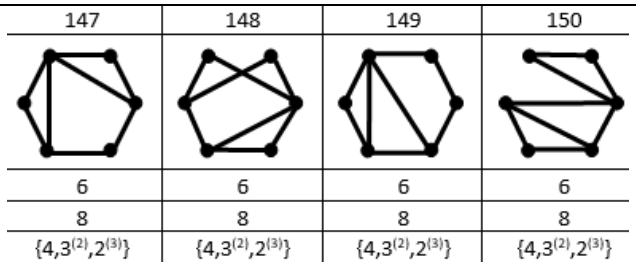
4.14. Bazı Grafların Eş GA_1 ve Eş Randic İndeksleri

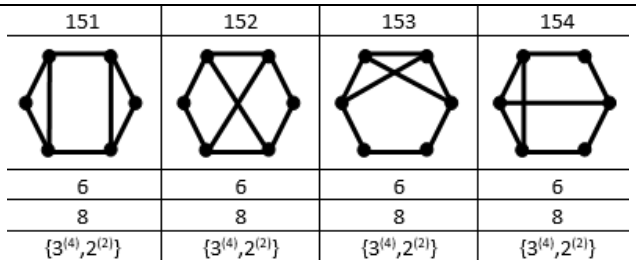
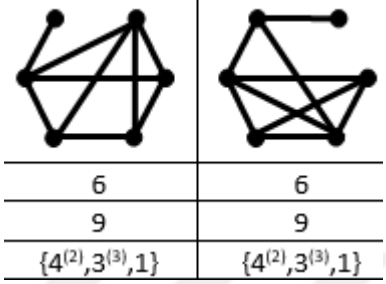
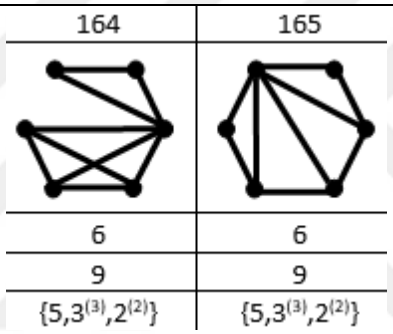
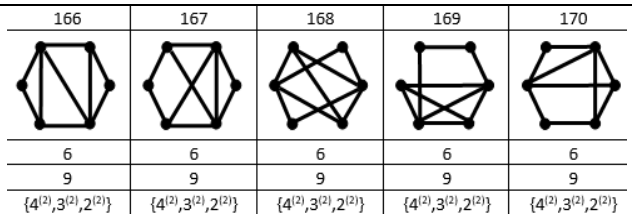
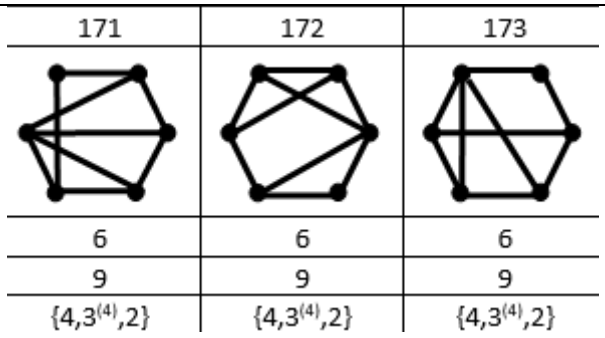
Bu bölümde köşe sayısı 6 ya da daha küçük olan 208 tane basit grafın GA_1 ve Randic indeksleri hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar sonucunda derece dizileri ve kenar parçalanışları aynı olan grafların hem GA_1 hem de Randic indeks değerleri aynı çıkarken bazılarında ise farklı çıkmıştır.

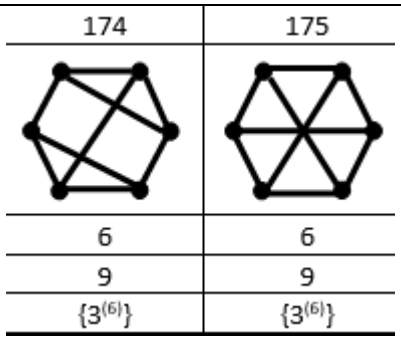
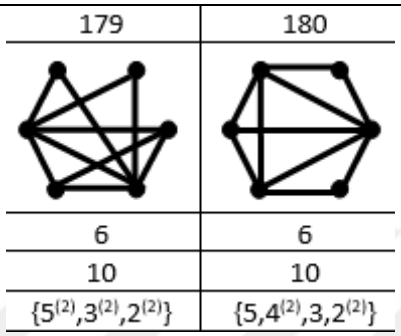
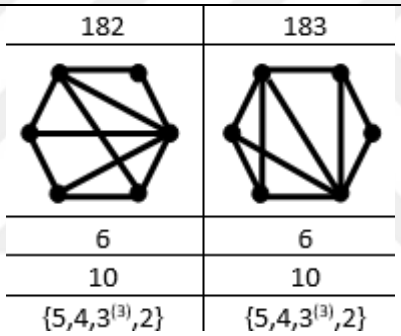
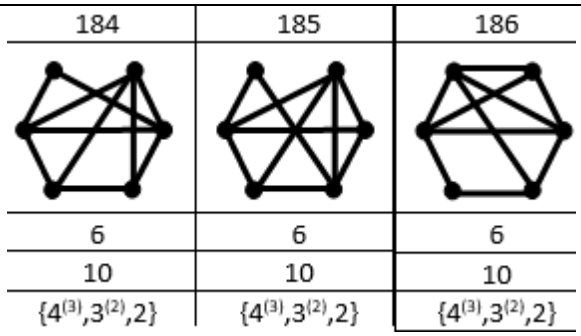
No	Köşe Derece Dizileri Aynı Olan Grafların Kart Numaraları	Graflar	GA_1 İndeksleri	Randic İndeksleri
1	31, 32		Farklı	Farklı
2	36, 37		Farklı	Farklı
3	43, 44		Farklı	Farklı

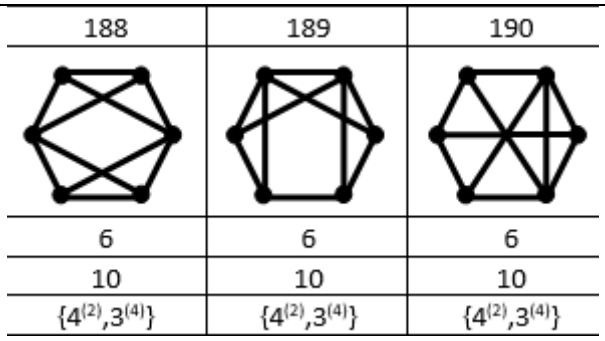
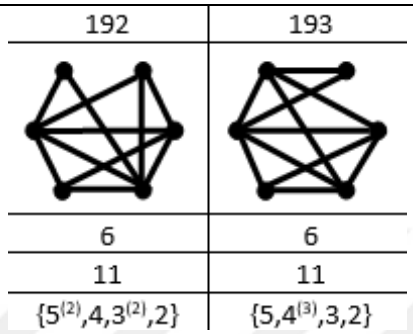
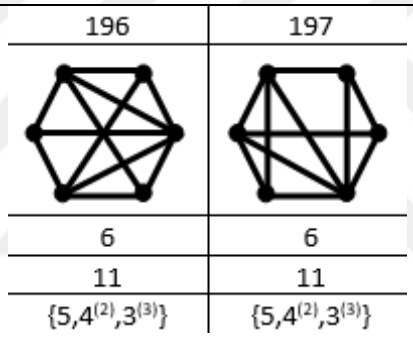
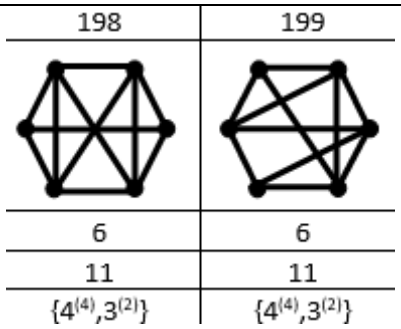
4	81, 82		Farklı	Farklı
5	96, 97		Farklı	Farklı
6	98, 99, 100, 101		100, 101 aynı	100, 101 aynı
7	102, 103, 104		102, 103 aynı	102, 103 aynı

8	105, 106		Farklı	Farklı
9	113, 114		Farklı	Farklı
10	115, 116		Farklı	Farklı
11	118, 119, 120, 121		Farklı	Farklı
12	122, 123, 124, 125		123, 124 aynı	123, 124 aynı

13	127, 128, 129, 130		127, 128, 129 aynı	127, 128, 129 aynı
14	137, 138		Farklı	Farklı
15	139, 140, 141, 142		Farklı	Farklı
16	145, 146		Farklı	Farklı
17	147, 148, 149, 150		149, 150 aynı	149, 150 aynı

18	151, 152, 153, 154		151, 152, 154 aynı	151, 152, 154 aynı
19	159, 160		Farklı	Farklı
20	164, 165		Farklı	Farklı
21	166, 167, 168, 169, 170		166, 167 aynı	166, 167 aynı
22	171, 172, 173		172, 173 aynı	172, 173 aynı

23	174, 175		174, 175 aynı	174, 175 aynı
24	179, 180		Farklı	Farklı
25	182, 183		Farklı	Farklı
26	184, 185, 186		Farklı	Farklı

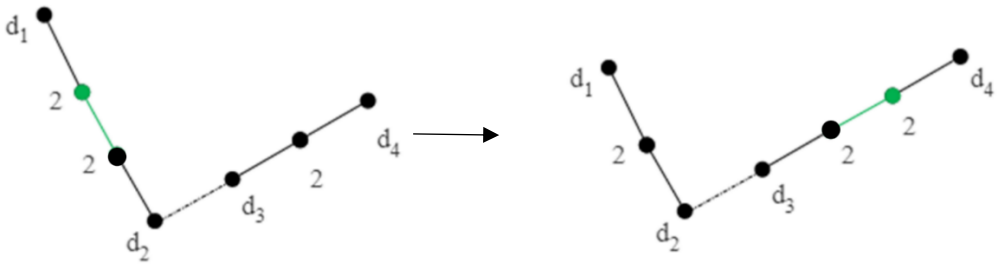
27	188, 189, 190		189, 190 aynı	189, 190 aynı
28	192, 193		Farklı	Farklı
29	196, 197		Farklı	Farklı
30	198, 199		Farklı	Farklı

Çizelge 4.12. GA_1 ve Randic topolojik indeksleri aynı ve farklı olan bazı graflar

4.15. GA_1 ve Randic İndeks Değerleri Aynı Olan Grafların Dönüşümleri

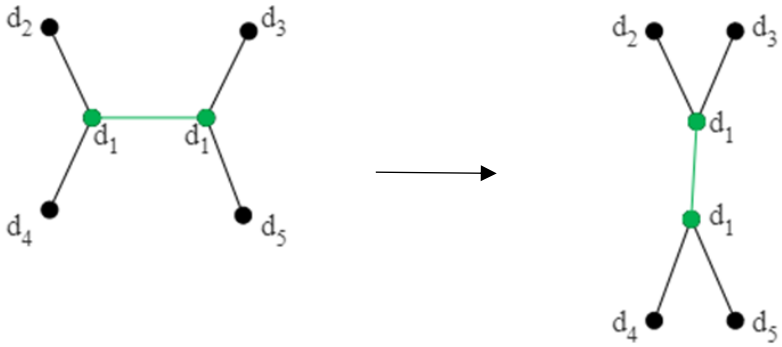
Bu bölümde GA_1 ve Randic indeks değerleri aynı olan graflar arasında dönüşümler tanımlayarak bu grafların birbirine nasıl dönüştüğünü ifade edeceğiz.

4.15.1. Dönüşüm. Bir G grafında en az 3 tane ikisi birbirine komşu olan eşit dereceli köşe varsa bu komşu köşelerden birini tek başına duran aynı dereceli köşenin yanına komşu olacak şekilde taşıdığımızda derece dizileri ve kenar parçalanışları değişmez dolayısıyla Randic ve GA_1 indeks değerleri değişmez.



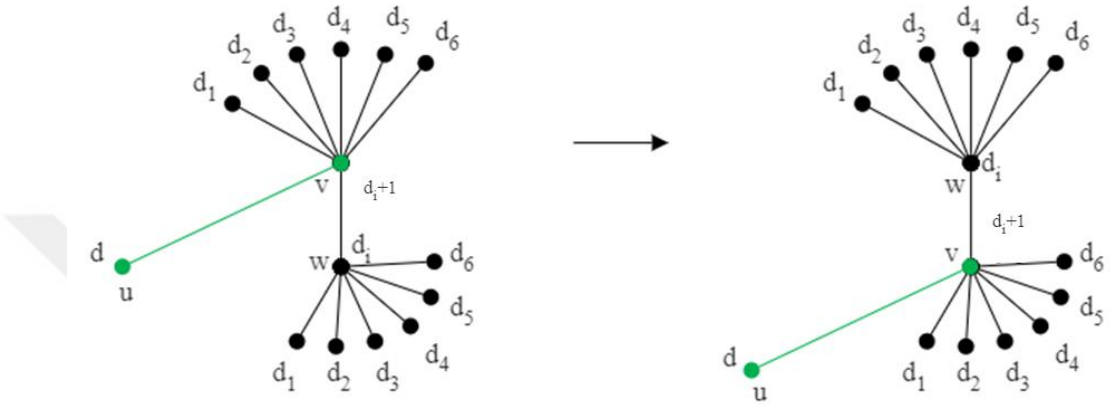
Şekil 4.84. Birinci tip dönüşüm

4.15.2. Dönüşüm. Eşit dereceli iki komşu köşesi bulunan bir G grafında Şekil 4.85'deki gibi uygulanan bir dönüşüme bir ikinci tip dönüşüm denir.

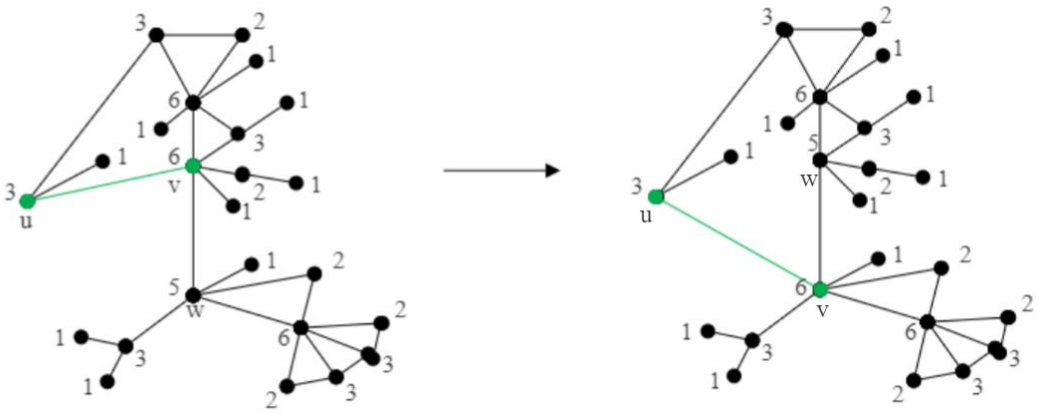


Şekil 4.85. İkinci tip dönüşüm

4.15.3. Dönüşüm. *u, v, w∈V(G)* için $d_u=d$, $d_v=d_i+1$, $d_w=d_i$ ve $d(u,v)=1$, $d(v,w)=1$ olmak üzere v köşesinin u ve w köşeleri dışındaki tüm komşu köşelerinin dereceleri; w köşesinin v köşesi dışındaki tüm komşu köşelerinin dereceleri ile aynı olsun. *G* grafından *uv* kenarını silip *G* grafına yeni bir *uw* kenarı eklediğimizde derece dizileri ve kenar parçalanışları değişmez dolayısıyla Randic ve GA_1 indeks değerleri değişmez.

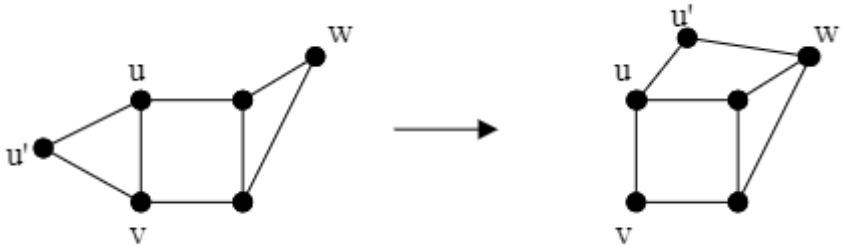


Şekil 4.86. Üçüncü tip dönüşüm



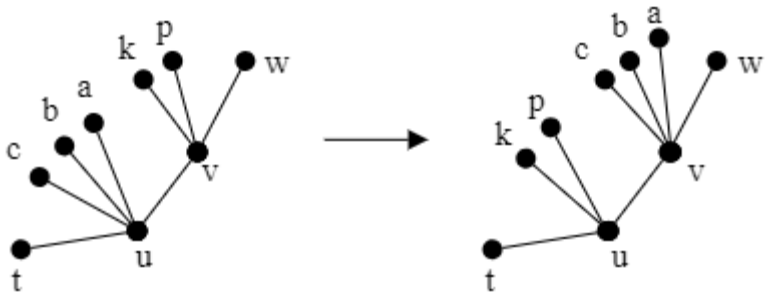
Şekil 4.87. Üçüncü tip dönüşüme bir örnek

4.15.4. Dönüşüm. u, u', v, w∈V(G) için *u* köşesinde başlayıp *v* köşesinde biten bir patikayı v köşesinden koparıp *v* köşesinin derecesinden 1 eksik olan bir *w* köşesine yapıştırılır. Burada *v* köşesinin patikanın iç noktası olmayan tüm köşe derecelerinin kümesi, *w* köşesinin tüm köşe derecelerinin kümesi ile aynı olmalıdır.



Şekil 4.88. Dördüncü tip dönüşüm

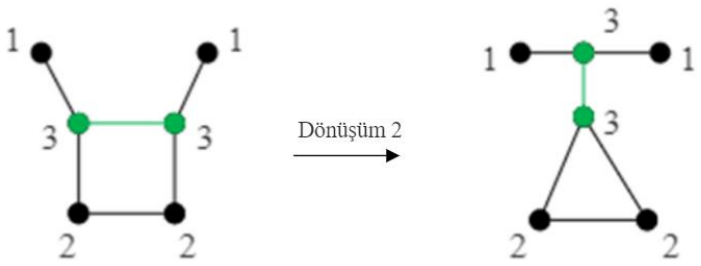
4.15.5. Dönüşüm. *t, u, v, w∈V(G)* için *tuvw* bir patika ve $d_u=d_v$ olsun. *u* köşesini *t* ve *v* köşeleri dışındaki komşularıyla beraber *uw* kenarı üzerine taşınır.



Şekil 4.89. Beşinci tip dönüşüm

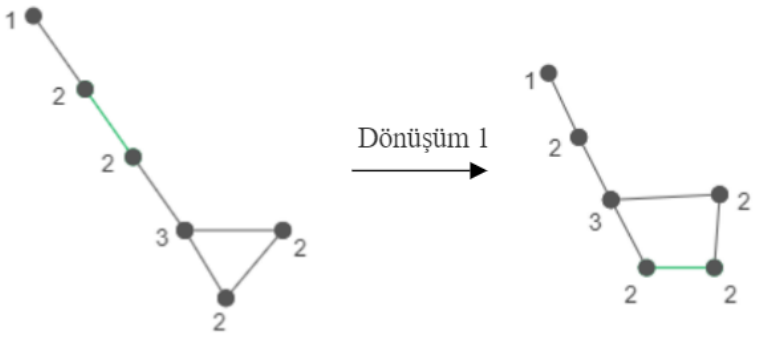
Şimdi GA_1 ve Randic indeks değerleri aynı olan grafları yukarıdaki beş dönüşüm yardımıyla gösterelim.

100 101

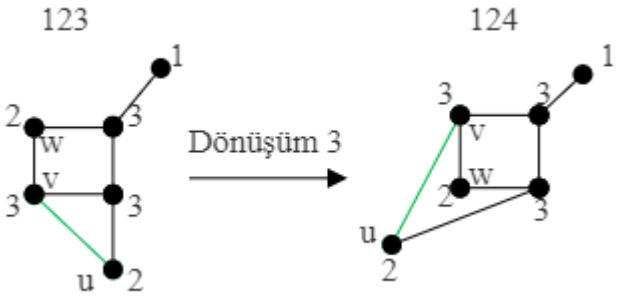


Şekil 4.90. 100 ve 101 numaralı grafların dönüşümü

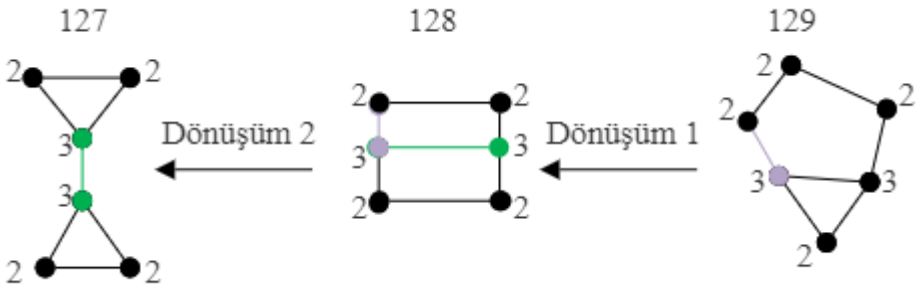
102 103



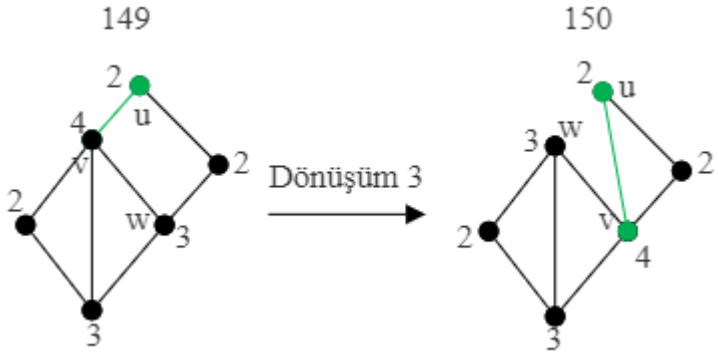
Şekil 4.91. 102 ve 103 numaralı grafların dönüşümü



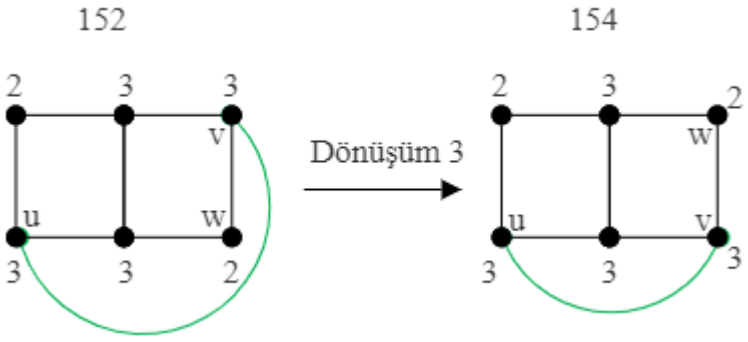
Şekil 4.92. 123 ve 124 numaralı grafların dönüşümü



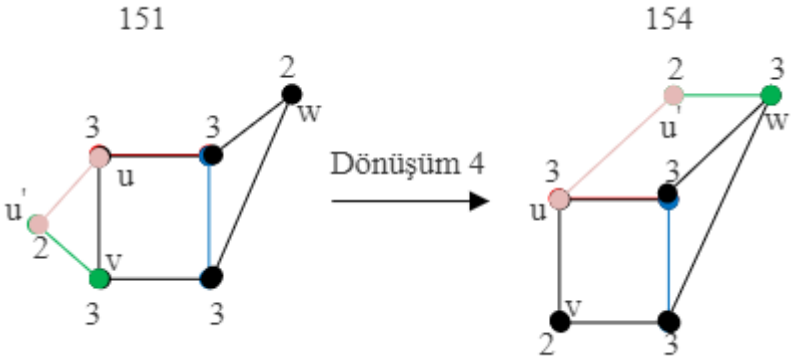
Şekil 4.93. 127, 128 ve 129 numaralı grafların dönüşümü



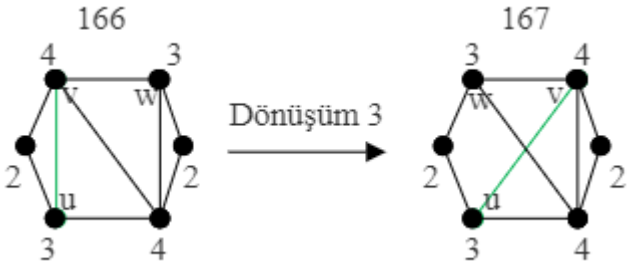
Şekil 4.94. 149 ve 150 numaralı grafların dönüşümü



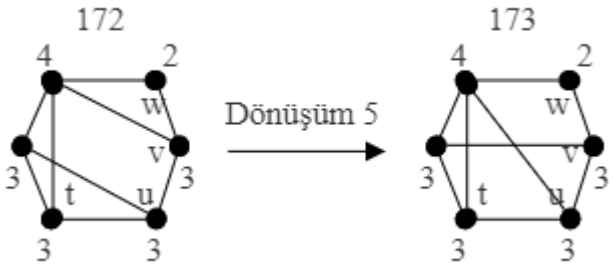
Şekil 4.95. 152 ve 154 numaralı grafların dönüşümü



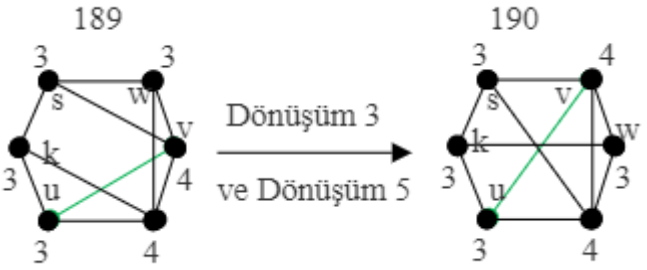
Şekil 4.96. 151 ve 154 numaralı grafların dönüşümü



Şekil 4.97. 166 ve 167 numaralı grafların dönüşümü



Şekil 4.98. 172 ve 173 numaralı grafların dönüşümü



Şekil 4.99. 189 ve 190 numaralı grafların dönüşümü

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada GA_1 topolojik indeksinin hangi graf çeşitlerinde hangi tamsayı değerleri alabileceğini araştırdık. Bunun yanı sıra tamsayı olmayan değerleri de elde ettik. GA_1 topolojik indeks değerlerinin toplamının pozitif bir tamsayı olacak şekilde kaç tane köşe ikililerinden alınacağını lineer Diophant denklemlerini kullanarak bulduk. Bulunan bu indeks değerlerine karşılık gelen grafların çizilip çizilemediğini, bir grafın hangi durumlarda çizildiği kuralına uyarak bulmaya çalıştık. Bunun sonucunda bu çalışmada bağlantılı, bağlantısız, regüler, regüler olmayan, basit ve basit olmayan graflara göre GA_1 ters problemi incelenmiştir.

Randic ve GA_1 topolojik indekslerinin hangi graf çeşitlerinde maksimum ve minimum değerleri alacağı araştırılmıştır. Bu değerlere karşılık çizilebilecek graflar ve graf sayısı bulunmuştur.

En fazla 6 köşeye sahip olan 208 tane basit grafın Randic ve GA_1 topolojik indeks hesaplamalarından yola çıkarak hangi grafların köşe ve kenar parçalanışlarının aynı olduğunu belirledik. Bu durumlarda doğal olarak Randic ve GA_1 topolojik indeksleri de aynı olmaktadır. Ayrıca, Randic ve GA_1 topolojik indeksleri eşit çıkan ancak birbirlerine izomorf olmayan graflar arasında nasıl bir ilişki olduğunu bazı dönüşümler tanımlayarak ifade ettik.

Benzer şekilde grafların diğer topolojik indeksleri için bu problem araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Balaban, A. T., Alexandru, T., James, D. 2000. Topological Indices and Related Descriptors in QSAR and QSPAR. Boca Raton: CRC. ISBN 90-5699-239-2.

Balaban, A. T. 1976. Chemical applications of graph theory. Academic Press, London, 389 pp.

Bollobás, B., Erdos, P. 1999. Extremal graphs for weights, Discrete Math. 200: 5–19.

Bollobás, B., Erdos, P. 1998. Graphs of extremal weights, Ars Combin. 50: 225–233.

Bonchev, D. 1983. Information Theoretic Indices for Characterization of Chemical Structures, Research Studies Press, Chichester.

Bondy, J. A., Murty, U. S. R. 1982. Graph Theory with Applications. North Holland, NY.

Bondy, J. A., Murty, U. S. R. 2008. Graph Theory. Springer NY.

Bozovic, V., Kovijani, Z., Vukicevi, C., G. P. 2016. Chemical trees with extreme values of a few types of multiplicative Zagreb indices, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., s. 207–220.

Cao, Y., Zhang, F. 2008. Extremal polygonal chains on k-matchings. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 60(1): 217-235.

Cavers, M., Fallat, S., S. K. 2010. On the normalized Laplacian energy and general Randic index ´ R−1 of graphs, Linear Algebra Appl. 433: 172–190.

Chartrand, G. 1985. Introductory Graph Theory. New York, Dover.

Chartrand, G., Zhang, P. 2012. A First Course in Graph Theory. New York, Dover. Clark, J., Holton, D. A. 1995. A First Look at Graph Theory. World Scientific, Singapour

Chen, A. 2015. Merrifield-Simmons index in random phenylene chains and random hexagon chains. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2015: 1-7.

Christofides, N. 1975. Graph theory: An algorithmic approach (Computer science and applied mathematics). Academic Press, London, 400 pp.

Das, K.C., I. G. 2016. On Wiener and multiplicative Wiener indices of graphs, Discrete Appl. Math. 206: 9–14.

Das, K.C., Sun, S., I. G. 2017. Normalized Laplacian eigenvalues and Randic energy of graphs, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 77: 45–59.

Das, K.C., S. S. 2017. Extremal graphs for Randic energy, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 77: 77–84.

Deo, N. 1974. Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science. Prentice-Hall, NJ.

Diestel, R. 2005. Graph Theory 3rd ed. Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag Heidelberg, New York, 422 pp.

Diestel, R. 2010. Graph Theory. Springer GTM.

Eliasi, M., A. G. 2016. Ordering of trees by multiplicative second Zagreb index, Trans. Combin. 5: 49–55.

Foulds, L. R. 1992. Graph Theory Applications. Springer, New York.

García-Domenech, R., Gálvez, J., Julián-Ortiz, J.V., L. P. 2008. Some new trends in chemical graph theory. Chem. Rev. 108: 1127–1169.

Gross, J. L., Yellen, J. 2003. Handbook of Graph Theory, CRC Press, Boca Raton, 1192 pp.

Gross, J. L., Yellen J. 2006. Graph Theory and Its Applications (Second Edition). CRC Press, USA.

Gutman, I. 1986. Mathematical Concepts in Organic Chemistry, Springer, Berlin.

Gutman, I., Polansky, O. E. 1986. Mathematical Concepts in Organic Chemistry. *Springer,* Berlin, 212 pp.

Gutman, I., Miljkovic, O., Caporossi, G. 1999. Alkanes with small and large Randi´c connectivity indices. Chem. Phys. Lett. 306: 366–372.

Gutman, I., Linert, W., Lukovits, I. 2000. On the multiplicative Wiener index and its possible chemical applications, Monatsh. Chem. 131: 421–427.

Gutman, I., Linert, W., Lukovits, I. 2000. The multiplicative version of the Wiener index, J. Chem. Inf. Comput. Sci. 40: 113–116.

Gutman, I., Miljkovic, O. 2000. Molecules with smallest connectivity indices. MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 41: 57–70.

Gutman, I. 2011. Multiplicative Zagreb indices of trees. Bull. Soc. Math. Banja Luka, 18: 17-23.

Gutman, I. 2013. Degree–based topological indices, Croat. Chem. Acta 86: 351–361.

Kamran, M., Farman, M., Ozon Yildirim, S., Delen, S., Cangul, I. N., Akram, M., Pandit, M. K. 2023. Novel Degree-Based Topological Descriptors of Fenofibrate using M-Polynomial, Journal of Mathematics, Article ID: 2037061, 13 pages, https://doi.org/10.1155/2023/2037061

Kamran, M., Ismail, R., Ashraf, S., Salamat, N., Ozon Yildirim, S., Cangul, I. N. 2023. Decision Support Algorithm under SV-Neutrosophic Hesitant Fuzzy Rough Information with Confidence Level Aggregation Operators, AIMS Mathematics, 8 (5), 11973-12008, https://doi.org//10.3934/math.2023605.

Kazemi, R., 2016. Note on the multiplicative Zagreb indices, Discrete Appl. Math. 198: 147–154.

Kazemi, R., 2017. On the multiplicative Zagreb indices of bucket recursive trees, Iranian J. Math. Chem. 8: 37–45.

Kier, L.B., L.H. 1976. Hall, Molecular Connectivity in Chemistry and Drug Research, Academic Press, New York.

Kier, L.B., L.H. 1986. Hall, Molecular Connectivity in Structure–Activity Analysis, Wiley, New York.

Li, X., Gutman, I. 2006. Mathematical Aspects of Randic Type Molecular Structure Descriptors, Univ. Kragujevac, Kragujevac.

Li, X., Shi., Y. 2008. A survey on the Randic index, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., s.127–156.

Mahalank, P., Ozon Yildirim, S., Ersoy Zihni, F., Majhi, B. K., Cangul, I. N. 2022. Some Topological Indices of Pentagonal Double Chains, , ITM Web of Conferences 49, 01004, Fourth ICAMNM https://doi.org/10.1051/itmconf/20224901004, 8 pages.

Nordhaus, E. A. 1956. On complementary graphs. Am. Math. Mon. 63: 175–177.

O'Boyle, N.M., Banck, M., James, C.A., Morley, C., Vandermeersch, T., G.R. H. 2011. Open Babel: An open chemical toolbox, J. Cheminformatics 3: 33.

Peironcely, J.E., Rojas-Cherto, M., Fichera, D., Reijmers, T., Coulier, L., Faulon, J.L., T. H,. 2012. OMG: Open molecule generator, J. Cheminformatics 4: 21.

Pogliani, L., 2000. From molecular connectivity indices to semiempirical connectivity terms: Recent trends in graph theoretical descriptors. Chem. Rev. 100: 3827–3858.

Randic, M., 1975. On characterization of molecular branching. J. Am. Chem. Soc. 97: 6609–6615.

Randic, M., 2001. The connectivity index 25 years after, J. Mol. Graph. Model. 20: 19–35.

Randic, M., 2008. On history of the Randic index and emerging hostility toward chemical graph theory, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 59: 5–124.

Randic, M., Novi, M., D. P. 2016. Solved and Unsolved Problems in Structural Chemistry, CRC Press, Boca Raton.

Shannon, C.E. 1948. A mathematical theory of communication, Bell Syst. Tech. J. 27: (379–423) 623–656.

Todeschini, R., V. C. 2000. Handbook of Molecular Descriptors, Wiley–VCH, Weinheim.

Todeschini, R., Consonni, V. 2008. Handbook of Molecular Descriptors, Wiley-VCH, Weinheim, s. 688.

Todeschini, R., Consonni, V. 2009. Molecular Descriptors for Chemoinformatics, Wiley-VCH, ISBN 978-3-527-31852-0.

Todeschini, R., V. C. 2010. New local vertex invariants and molecular descriptors based on functions of the vertex degrees, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 64: 359–372.

Trinajstic, N., 1983. Chemical Graph Theory, CRC Press, Boca Raton.
Randic, M. 1975. Characterisation of molecular branching, Journal of the American Chemical Society.

Trinajstic, N. 1992. Chemical graph theory. CRC Press, USA, 352 pp.

Zhou, B. 2009. A note on general Randic index. MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 62: 155–162.