HEMEN HEMEN BALANSIRLAR VE KOBALANSIRLAR

Esra Zeynep TÜRKMEN

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN BALANSIRLAR VE KOBALANSIRLAR

Esra Zeynep TÜRKMEN
0009-0007-1899-9739

Prof. Dr. Ahmet TEKCAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2024
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HEMEN HEMEN BALANSIRLAR VE KOBALANSIRLAR

Esra Zeynep TÜRKMEN

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

Bu tezde birinci ve ikinci tip hemen hemen balansırların, hemen hemen Lucas-balansırların, hemen hemen kobalansırların ve hemen hemen Lucas-kobalansırların genel terimleri balans ve Lucas-balans sayılarına bağlı olarak elde edilmiştir.

Birinci bölümde balans, kobalans, Pell, üçgensel, kare üçgensel, hemen hemen balans ve hemen hemen kobalans sayıları ile ilgili genel bir bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde kurumsal temeller ve kaynak araştırması verilmiştir.

Üçüncü bölümde materyal ve yöntem belirtilmiştir.

Dördüncü bölüm tezin orijinal kısmı olup bu bölümde, birinci ve ikinci tip hemen hemen balansırların, hemen hemen Lucas-balansırların, hemen hemen kobalansırların ve hemen hemen Lucas-kobalansırların genel terimleri, balans ve Lucas-balans sayılarının genel terimlerine bağlı olarak elde edilmiştir. Ayrıca bu sayıların balans sayıların ve kendi aralarındaki ilişkisi elde edilmiştir. Son olarak tüm bu sayıların ilk n-terim toplamları elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ise sonuç verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Balans Sayıları, Kobalans Sayıları, Hemen Hemen Balans Sayıları, Hemen Hemen Kobalans Sayıları, Pell Denklemleri, Üçgensel Sayılar, Çözüm Sınıfı.

2024, xiii+52 sayfa

ABSTRACT

MSc Thesis

ALMOST BALANCERS AND COBALANCERS

Esra Zeynep TÜRKMEN

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

In this thesis, the general terms of almost balancers, almost Lucas-balancers, almost cobalancers and almost Lucas-cobalancers of first and second type are determined in terms of balancing and Lucas-balancing numbers.

In the first section, some notations and definitions on balancing numbers, cobalancing numbers, Pell numbers, triangular numbers, almost balancing numbers and almost cobalancing numbers are given.

In the second section, institutional foundations and resource research are given.

In the third section the material and method are given.

In the fourth section, which is the original part of the thesis, the general terms of almost balancers, almost Lucas-balancers, almost cobalancers and almost Lucas-cobalancers of first and second type are determined in terms of balancing and Lucas-balancing numbers. Also the relationship between these numbers and balancing numbers is determined. Finally, the sum of first n-terms of these numbers are formulated.

In the fifth section, the result is given.

Keywords: Balancing Numbers, Cobalancing Numbers, Almost Balancing Numbers, Almost Cobalancing Numbers, Pell Equations, Triangular Numbers, Set of Representatives.

2024, xiii+52 pages

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim sırasında, yaptığım çalışmalarımı destekleyen, yönlendiren ve araştırmalarımın her aşamasında öneri, bilgi ve yardımlarını esirgemeyerek gelişimime katkıda bulunan, çalışmalarım süresince her anlamda bana destek olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet TEKCAN'a saygı ve sevgilerimle teşekkür ederim.

Hayatımın her aşamasında maddi ve manevi hiçbir desteğini esirgemeyen değerli aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

Esra Zeynep TÜRKMEN

02/12/2024

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET viii
ABSTRACT ix
TEŞEKKÜR x
SİMGELER DİZİNİ xii
ÇİZELGELER DİZİNİ xiii
1. GİRİŞ 1
2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI 13
3. MATERYAL ve YÖNTEM 14
4. BULGULAR 19
4.1. Hemen Hemen Balansırlar ve Hemen Hemen Lucas-Balansırlar 29
4.2. Hemen Hemen Kobalansırlar ve Hemen Hemen Lucas-Kobalansırlar 33
4.3. Balans Sayıları ile Olan Bağıntılar 37
4.4. İlk *n*-Terim Toplamlar 44
5. SONUÇ 46
KAYNAKLAR 50
ÖZGEÇMİŞ 52

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
F_n	Fibonacci sayısı
L_n	Lucas sayısı
P_n	Pell sayısı
Q_n	Pell-Lucas sayısı
B_n	Balans sayısı
b_n	Kobalans sayısı
C_n	Lucas-balans sayısı
c_n	Lucas-kobalans sayısı
R_n	Balansır
r_n	Kobalansır
B_n^*	Birinci tip hemen hemen balans sayısı
B_n^{**}	İkinci tip hemen hemen balans sayısı
b_n^*	Birinci tip hemen hemen kobalans sayısı
b_n^{**}	İkinci tip hemen hemen kobalans sayısı
C_n^*	Birinci tip hemen hemen Lucas-balans sayısı
C_n^{**}	İkinci tip hemen hemen Lucas-balans sayısı
c_n^*	Birinci tip hemen hemen Lucas-kobalans sayısı
c_n^{**}	İkinci tip hemen hemen Lucas-kobalans sayısı
R_n^*	Birinci tip hemen hemen balansır
R_n^{**}	İkinci tip hemen hemen balansır
r_n^*	Birinci tip hemen hemen kobalansır
r_n^{**}	İkinci tip hemen hemen kobalansır
CR_n^*	Birinci tip hemen hemen Lucas-balansır
CR_n^{**}	İkinci tip hemen hemen Lucas-balansır
cr_n^*	Birinci tip hemen hemen Lucas-kobalansır
cr_n^{**}	İkinci tip hemen hemen Lucas-kobalansır
Rep	Çözüm temsilcileri kümesi
M	Çözüm matrisi
F	Kuadratik form

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 4.1. R_n^*, CR_n^*, R_n^{**} ve CR_n^{**} ın ilk on terimi …….. 33
Çizelge 4.2. r_n^*, cr_n^*, r_n^{**} ve cr_n^{**} ın ilk on terimi……..…….. 36

1. GİRİŞ

B ve R pozitif tam sayılar olmak üzere

$$1 + 2 + \cdots + B - 1 = (B + 1) + (B + 2) + \cdots + (B + R) \tag{1.1}$$

eşitliğini gerçekleyen B sayısına balans sayısı, R sayısına ise balansır denir (Behera ve Panda (1999)).

Balans sayıları B_n ve balansırlar da R_n ile gösterilirse, bu sayıların başlangıç terimleri $B_0 = 0, B_1 = 1, B_2 = 6$ ve $R_0 = R_1 = 0, R_2 = 2$ olup genel terimleri $n \geq 1$ için

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1} \quad \text{ve} \quad R_{n+1} = 6R_n - R_{n-1} + 2$$

dir. Bu sayıların Binet formülleri $n \geq 1$ için

$$B_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}$$

ve

$$R_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n(-1 + \sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2})^n(1 + \sqrt{2})}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$$

dir.

(1.1) eşitliğinden

$$R_n = \frac{-2B_n - 1 + \sqrt{8B_n^2 + 1}}{2}$$

olarak elde edilir. Bu son eşitliğe göre B_n bir balans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8B_n^2 + 1$ tam kare olduğundan

$$C_n = \sqrt{8B_n^2 + 1}$$

bir tam sayı olup, bu tam sayıya Lucas-balans sayısı denir. Lucas-balans sayılarının Binet formülü $n \geq 1$ için

$$C_n = \frac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2}$$

dir.

b ve r pozitif tam sayılar olmak üzere

$$1 + 2 + \cdots + b = (b+1) + (b+2) + \cdots + (b+r) \tag{1.2}$$

eşitliğini gerçekleyen b sayısına kobalans, r sayısına ise kobalansır denir (Panda ve Ray (2005)).

Kobalans sayıları b_n ve kobalansırlar da r_n ile gösterilirse, bu sayıların başlangıç terimleri $b_0 = b_1 = 0, b_2 = 2$ ve $r_0 = r_1 = 0, r_2 = 1$ olup genel terimleri $n \geq 1$ için

$$b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2 \text{ ve } r_{n+1} = 6r_n - r_{n-1}$$

dir. Bu sayıların Binet formülleri $n \geq 1$ için

$$b_n = \frac{(3+2\sqrt{2})^n(-1+\sqrt{2}) + (3-2\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$$

ve

$$r_n = \frac{(3+2\sqrt{2})^{n-1} - (3-2\sqrt{2})^{n-1}}{4\sqrt{2}}$$

dir.

(1.2) eşitliğinden

$$r_n = \frac{-2b_n - 1 + \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}}{2}$$

elde edilir. Bu son eşitliğe göre b_n bir kobalans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8b_n^2 + 8b_n + 1$ tam kare olduğundan

$$c_n = \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}$$

bir tam sayı olup, bu tam sayıya Lucas-kobalans sayısı denir. Lucas-kobalans sayılarının Binet formülü ise $n \geq 1$ için

$$c_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n(-1 + \sqrt{2}) - (3 - 2\sqrt{2})^n(1 + \sqrt{2})}{2}$$

dir.

Yukarıda tanımlanan balans, balansır, kobalans ve kobalansır sayıları arasında

$$B_n = r_{n+1} \text{ ve } R_n = b_n$$

şeklinde bir ilişki vardır. Dolayısıyla

$$B_n = \frac{2b_n + 1 + \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}}{2}$$

ve

$$b_n = \frac{-2B_n - 1 + \sqrt{8B_n^2 + 1}}{2}$$

dir.

Pell sayıları P_n ve Pell-Lucas sayıları da Q_n ise gösterilirse, bu sayıların başlangıç terimleri $P_0 = 0, P_1 = 1$ ve $Q_0 = Q_1 = 2$ olup genel terimleri $n \geq 2$ için

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \text{ ve } Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

dir.

$\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere, bu sayıların Binet formülleri $n \geq 1$ için

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{ve} \quad Q_n = \alpha^n + \beta^n$$

olup

$$Q_n = P_{n-1} + P_{n+1}$$

dir.

Yukarıda tanımlanan tüm balans sayılarının Binet formülleri α ve β ya bağlı olarak

$$B_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}, b_n = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}, \; C_n = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2} \text{ ve } \; c_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{2}$$

şeklinde verilebilir. Diğer yandan

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

olduğu dikkate alınırsa, balans, kobalans, Lucas-balans ve Lucas-kobalans sayılarının genel terimleri, Pell sayılarına bağlı olarak

$$B_n = \frac{P_{2n}}{2}, \; b_n = \frac{P_{2n-1} - 1}{2}, \; C_n = P_{2n} + P_{2n-1} \quad \text{ve} \quad c_n = P_{2n-1} + P_{2n-2}$$

şeklinde elde edilir. (Ray (2009))

Gözeri ve ark. (2017) ise tüm bu balans sayıları arasındaki ilişkileri ele almışlar ve

$$B_n = P_n^2 + P_n P_{n-1}$$

$$b_n = \begin{cases} P_{n-1}^2 + P_n P_{n-1} & n \text{ tek} \\ P_{n-1}^2 + P_n P_{n-1} - 1 & n \text{ çift} \end{cases}$$

$$C_n = 2B_n + 2b_n + 1$$

$$c_n = 2B_n - 2b_n - 1$$

olduğunu göstererek

$$B_n + b_n = \begin{cases} (P_n + P_{n-1})^2 & n \text{ tek} \\ (P_n + P_{n-1})^2 - 1 & n \text{ çift} \end{cases}$$

$$P_n + P_{n+1} = \begin{cases} 1 + 2(B_{\frac{n+1}{2}} + b_{\frac{n+1}{2}}) & n \text{ tek} \\ B_{\frac{n+2}{2}} - b_{\frac{n+2}{2}} - 1 & n \text{ çift} \end{cases}$$

$$P_n^2 - P_{n-1}^2 = \begin{cases} B_{n-1} + b_n + 1 & n \text{ tek} \\ B_{n-1} + b_n & n \text{ çift} \end{cases}$$

eşitliklerini elde etmişlerdir.

Üçgensel sayılar T_n ile gösterilir ve $n \geq 1$ tam sayısı için

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

tipindeki sayılardır.

Üçgensel sayılar ile balans sayıları ve kobalans sayıları arasında bir ilişki vardır. Gerçekten de (1.1) eşitliğinden

$$\frac{(B_n + R_n)(B_n + R_n + 1)}{2} = B_n^2$$

olduğu görülür. Şu halde

$$T_{B_n + R_n} = B_n^2$$

dir. Benzer şekilde (1.2) eşitliğinden de

$$\frac{(b_n + r_n)(b_n + r_n + 1)}{2} = b_n^2 + b_n$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$T_{b_n + r_n} = b_n^2 + b_n$$

dir.

Üçgensel sayılardan bazıları tam kare olup bu sayılara kare üçgensel sayılar denir. Kare üçgensel sayılar S_n ile gösterilirse bu sayıların genel terimleri $n \geq 1$ için

$$S_n = \frac{t_n(t_n+1)}{2} = s_n^2$$

dir. Burada

$$t_n = B_n + b_n \text{ ve } s_n = B_n$$

olup

$$S_n = B_n^2$$

dir, yani kare üçgensel sayılar esasında balans sayılarının kareleridir. Bu sayıların Binet formülleri ise $n \geq 1$ için

$$S_n = (\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}})^2,\ s_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}} \text{ ve } t_n = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2}{4}$$

olup genel terimleri, Pell sayılarına bağlı olarak

$$S_n = \frac{P_{2n}^2}{4},\ s_n = \frac{P_{2n}}{2} \text{ ve } t_n = \frac{P_{2n} + P_{2n-1} - 1}{2}$$

dir.

Gözeri ve ark. (2017) üçgensel, kare üçgensel, balans, Pell ve Pell-Lucas sayıları arasındaki ilişkiyi ele almışlar ve

$$T_{\frac{Q_{2n-1}-2}{4}} = \frac{P_{2n-1}^2 - 1}{4}$$

$$T_{\frac{14B_n - P_{n-1}Q_{n-1}-2}{4}} = \frac{P_{4n+2} + P_{4n+1} - 3}{16}$$

$$T_{\frac{s_n + s_{n+1}-1}{2}} = \frac{Q_{4n+2} - 6}{32}$$

$$T_{\frac{S_{n+}S_{n-1}-1}{2}} = \frac{P_{2n-1}^2 - 1}{4}$$

eşitliklerini elde etmişlerdir. Ayrıca

$$S_n = (\frac{P_{2n+1} - P_{2n-1}}{4})^2 \quad \text{veya} \quad S_n = (\frac{b_{n+1} - b_n}{2})^2$$

olduğunu belirtmişlerdir.

Fibonacci sayıları F_n ve Lucas sayıları da L_n ile gösterilirse, bu sayıların başlangıç terimleri $F_0 = 0, F_1 = 1$ ve $L_0 = 2, L_1 = 1$ olup genel terimleri $n \geq 1$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ ve } L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

dir.

$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olarak tanımlanırsa, Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet formülleri $n \geq 1$ için

$$F_n = \frac{\alpha_1^n - \beta_1^n}{\alpha_1 - \beta_1} \quad \text{ve} \quad L_n = \alpha_1^n + \beta_1^n$$

olup

$$L_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

dir.

Balans sayıları ve bu sayıların genelleştirilmişi olan balans sayıları günümüzde halen çalışılmaya devam edilmektedir. Liptai (2004), balans sayıları ile Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiyi ele almış ve sadece $B_1 = F_1 = 1$ eşitliğinin olduğunu göstermiştir. Daha sonra aynı problemi Lucas sayıları için inceleyerek bu sayılar ile balans sayıları arasında bir ilişkinin olmadığını göstermiştir. (Liptai (2006)).

Szalay (2007) ise Liptai (2004) ün ele aldığı problemi başka bir yöntem kullanarak incelemiştir.

Gözeri ve ark. (2017) ise balans, Pell, üçgensel ve kare üçgensel sayılar arasındaki bağıntıyı ele almışlar ve bununla ilgili sonuçlar elde etmişlerdir.

Kovacs ve ark. (2010), aralarında asal pozitif a, b doğal sayıları için

$$(a+b)+(2a+b)+\cdots+(a(n-1)+b)=(a(n+1)+b)+\cdots+(a(n+r)+b)$$

eşitliğini sağlayan $n>0$ doğal sayısı için $an+b$ sayısına (a,b)-balans, $r>0$ doğal sayısı için $ar+b$ sayısına (a,b)-balansır demişlerdir. Ayrıca $k, x>0$ tam sayılar olmak üzere $k=2,3,4$ için

$$B_m=\Pi_k(x)=x(x+1)\ldots(x+k-1)$$

denkleminin doğal sayı çözümlerinin sonsuz sayıda olacağını belirtmişlerdir.

Tengely (2013) ise $k=5$ için

$$B_m=\Pi_5(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

eşitliğinin tam sayı çözümlerinin olamayacağını göstermiştir.

Liptai ve ark. (2009) ise $y, k, l \geq 3$ doğal sayılar için

$$1^k+\cdots+(x-1)^k=(x+1)^l+\cdots+(y-1)^l$$

eşitliğini gerçekleyen $x \leq y-2$ özelliğindeki x doğal sayısına y nin (k,l)-kuvveti diyerek, bu denklemin k, l çözümlerini araştırmışlardır.

Panda ve Panda (2015) ise hemen hemen balans sayılarını tanımlamışlar. Şöyle ki

$$| [(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+r)]-[1+2+\cdots+(n-1)] | = 1$$

eşitliğini sağlayan pozitif n tam sayısına hemen hemen balans, pozitif r tam sayısına ise hemen hemen balansır demişlerdir. Mutlak değerin içerisi 1 e eşit ise n ye birinci tip hemen hemen balans (bu sayılar B_n^* ile gösterilir), -1 e eşit ise n ye ikinci tip hemen hemen balans sayısı (bu sayılar B_n^{**} ile gösterilir) demişlerdir.

Panda (2017) ise

$$| [(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+r)]-[1+2+\cdots+n] | = 1$$

eşitliğini sağlayan pozitif n tam sayısına hemen hemen kobalans, pozitif r tam sayısına ise hemen hemen kobalansır demiştir. Mutlak değerin içerisi 1 e eşit ise n ye birinci tip hemen hemen kobalans (bu sayılar b_n^* ile gösterilir), -1 e eşit ise n ye ikinci tip hemen hemen kobalans sayısı (bu sayılar b_n^{**} ile gösterilir) demiştir.

Özkoç ve ark. (2017), $k \geq 1$ tam sayısı için

$$\begin{aligned} B_{n+1}^k &= 6kB_n^k - B_{n-1}^k \\ b_{n+1}^k &= 6kb_n^k - b_{n-1}^k + 2 \\ C_{n+1}^k &= 6kC_n^k - C_{n-1}^k \\ c_{n+1}^k &= 6kc_n^k - c_{n-1}^k \end{aligned}$$

k-balans sayılarını ele almışlar ve bu sayılar ile ilgili cebirsel bağıntılar elde etmişlerdir.

Pozitif t tam sayısı için

$$1+2+\cdots+b = (b+t+1)+(b+t+2)+\cdots+(b+t+r)$$

eşitliğini sağlayan pozitif b tam sayısına t-kobalans, eşitlikteki pozitif r tam sayısına ise t-kobalansır denir. Tekcan ve Erdem (2020) bu sayıları ele almışlar ve bu sayıların genel terimlerini elde etmişlerdir.

Yine pozitif t tam sayısı için

$$1 + 2 + \cdots + B - 1 = (B + t + 1) + (B + t + 2) + \cdots + (B + t + R)$$

eşitliğini sağlayan pozitif B tam sayısına t-balans, eşitlikteki pozitif R tam sayısına ise t-balansır denir. Tekcan ve Aydın (2021) ise, bu sayıları incelemişlerdir ve bu sayıların genel terimlerini elde etmişlerdir.

Tekcan ve Yıldız (2021) ise

$$\frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n+1)n}{2} = 2\left[nr + \frac{(r+1)r}{2}\right]$$

denklemini sağlayan pozitif n tam sayısını balkobalans, eşitlikteki pozitif r tam sayısını ise balkobalansır olarak adlandırmışlar ve balkobalans sayılarını B_n^{bc}, Lucas-balkobalans sayılarını C_n^{bc} ve balkobalansırları da R_n^{bc} ile göstererek, bu sayıların genel terimlerini

$$B_n^{bc} = \frac{B_{2n} + b_{2n+1}}{4}\ ,\ C_n^{bc} = 2b_{2n+1} + 1,\ R_n^{bc} = \frac{-B_{2n} + b_{2n+1}}{4}$$

olarak elde etmişlerdir.

Chailangka ve Pakapongpun (2021) ise

$$1 + 2 + \cdots + (B-1) = (B-1) + (B-0) + (B+1) + (B+2) + \cdots + (B+R)$$

eşitliğindeki pozitif B tam sayısına neo balans, eşitlikteki pozitif R tam sayısına ise neo balansır demişlerdir.

Tekcan ve Yıldız (2024) ise neo kobalans sayılarını tanımlamışlardır. Şöyle ki

$$1 + 2 + \cdots + b = (b-1) + (b-0) + (b+1) + (b+2) + \cdots + (b+r)$$

eşitliğini gerçekleyen pozitif b tam sayısına neo kobalans, eşitlikteki pozitif r tam sayısına ise neo kobalansır demişlerdir. Yukarıdaki eşitlikten

$$r = \frac{-2b - 1 + \sqrt{8b^2 - 8b + 9}}{2}$$

ve

$$b = \frac{-2r + 3 + \sqrt{8r^2 + 16r + 1}}{2}$$

olarak elde etmişlerdir. Neo kobalans sayılarını b_n^{neo} ile neo kobalansırları da r_n^{neo} ile göstererek, yukarıdaki son eşitliklerden

"b_n^{neo} bir neo kobalans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8(b_n^{neo})^2 - 8b_n^{neo} + 9$ bir tam kare"

ve

"r_n^{neo} bir neo kobalansırdır $\Leftrightarrow$ $8(r_n^{neo})^2 + 16r_n^{neo} + 1$ bir tam kare"

olduğunu belirtmişlerdir. Dolayısıyla

$$c_n^{neo} = \sqrt{8(b_n^{neo})^2 - 8b_n^{neo} + 9}$$

ve

$$cr_n^{neo} = \sqrt{8(r_n^{neo})^2 + 16r_n^{neo} + 1}$$

nin birer tam sayı olduğunu belirterek, bu tam sayılara sırasıyla neo Lucas-kobalans ve neo Lucas-kobalansır demişlerdir. Elde ettikleri tüm bu neo kobalans sayılarının genel terimlerinin $n \geq 1$ için

$$b_{2n-1}^{neo} = \frac{6B_{n-1} + C_{n-1} + 1}{2}$$

$$b_{2n}^{neo} = \frac{6B_n - C_n + 1}{2}$$

$$c_{2n-1}^{neo} = 4B_{n-1} + 3C_{n-1}$$

$$c_{2n}^{neo} = -4B_n + 3C_n$$

$$r_{2n-1}^{neo} = -B_{n-1} + C_{n-1} - 1$$

$$r_{2n}^{neo} = -5B_n + 2C_n - 1$$

$$cr_{2n}^{neo} = 16B_n - 5C_n$$

ve $n \geq 2$ için

$$cr_{2n-1}^{neo} = 8B_{n-1} - C_{n-1}$$

şeklinde olduğunu veya $n \geq 1$ için

$$b_{2n-1}^{neo} = -b_n + c_n$$

$$b_{2n}^{neo} = b_n + c_n + 1$$

$$c_{2n-1}^{neo} = 8b_n - c_n + 4$$

$$c_{2n}^{neo} = 8b_n + c_n + 4$$

$$r_{2n-1}^{neo} = \frac{10b_n - 3c_n + 3}{2}$$

$$r_{2n}^{neo} = \frac{6b_n - c_n + 1}{2}$$

$$cr_{2n}^{neo} = -4b_n + 3c_n - 2$$

ve $n \geq 2$ için

$$cr_{2n-1}^{neo} = -12b_n + 5c_n - 6$$

şeklinde olduğunu göstermişlerdir.

2. KURUMSAL TEMELLER VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Tezde balans, kobalans, balansır, kobalansır, hemen hemen balans, hemen hemen kobalans, t-balans, t-kobalans ve k-balans sayıları ile ilgili kaynak araştırması yapılarak, bunlarla ilgili bazı temel kavramlar ve eşitlikler verilmiştir.

Balans sayılarının genelleştirilmişi olan hemen hemen balans ve hemen hemen kobalans sayıları ele alınmış ve hemen hemen balansırlar, hemen hemen Lucas-balansırlar, hemen hemen kobalansırlar ve hemen hemen Lucas-kobalansır sayılarının genel terimleri balans ve Lucas-balans sayılarına bağlı olarak elde edilmiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Hemen hemen balans sayısı

$$|\,[(B+1)+(B+2)+\cdots+(B+R)]-[1+2+\cdots+(B-1)]\,|=1$$

eşitliğini gerçekleyen pozitif B tam sayısına denir. Eşitlikteki pozitif R tam sayısına ise hemen hemen balansır denir.

Burada iki durum söz konusudur: Eğer

$$[(B+1)+(B+2)+\cdots+(B+R)]-[1+2+\cdots+(B-1)]=1$$

ise, B ye birinci tip hemen hemen balans sayısı, R ye ise birinci tip hemen hemen balansır denir. Bu eşitlikten

$$R=\frac{-2B-1+\sqrt{8B^2+9}}{2}$$

ve

$$B=\frac{2R+1+\sqrt{8R^2+8R-7}}{2}$$

olarak elde edilir. Birinci tip hemen hemen balans sayıları B_n^* ve birinci tip hemen hemen balansırlar da R_n^* ile gösterilirse yukarıdaki denklemlerden sırasıyla

"B_n^* birinci tip hemen hemen balans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8(B_n^*)^2+9$ bir tam kare"

ve

"R_n^* birinci tip hemen hemen balansırdır $\Leftrightarrow$ $8(R_n^*)^2+8R_n^*-7$ bir tam kare"

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$C_n^*=\sqrt{8(B_n^*)^2+9}\quad\text{ve}\quad CR_n^*=\sqrt{8(R_n^*)^2+8R_n^*-7}$$

birer tam sayı olup, bu tam sayılara sırasıyla birinci tip hemen hemen Lucas-balans sayısı ve birinci tip hemen hemen Lucas-balansır denir.

Eğer

$$[(B+1)+(B+2)+\cdots+(B+R)]-[1+2+\cdots+(B-1)]=-1$$

ise, B ye ikinci tip hemen hemen balans sayısı, R ye ise ikinci tip hemen hemen balansır denir. Bu eşitlikten

$$R=\frac{-2B-1+\sqrt{8B^2-7}}{2}$$

ve

$$B=\frac{2R+1+\sqrt{8R^2+8R+9}}{2}$$

olarak elde edilir. İkinci tip hemen hemen balans sayıları B_n^{**} ve ikinci tip hemen hemen balansırlar da R_n^{**} ile gösterilirse yukarıdaki denklemlerden sırasıyla

"B_n^{**} ikinci tip hemen hemen balans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8(B_n^{**})^2-7$ bir tam kare"

ve

"R_n^{**} ikinci tip hemen hemen balansırdır $\Leftrightarrow$ $8(R_n^{**})^2+8R_n^{**}+9$ bir tam kare"

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$C_n^{**}=\sqrt{8(B_n^{**})^2-7} \quad \text{ve} \quad CR_n^{**}=\sqrt{8(R_n^{**})^2+8R_n^{**}+9}$$

birer tam sayı olup, bu tam sayılara sırasıyla ikinci tip hemen hemen Lucas-balans sayısı ve ikinci tip hemen hemen Lucas-balansır denir.

Hemen hemen kobalans sayısı

$$|\,[(b+1)+(b+2)+\cdots+(b+r)]-[1+2+\cdots+b]\,|=1$$

eşitliğini gerçekleyen pozitif b tam sayısına denir. Eşitlikteki pozitif r tam sayısına ise hemen hemen kobalansır denir.

Yine burada da iki durum söz konusudur: Eğer

$$[(b+1)+(b+2)+\cdots+(b+r)]-[1+2+\cdots+b]=1$$

ise, b ye birinci tip hemen hemen kobalans sayısı, r ye ise birinci tip hemen hemen kobalansır denir. Bu eşitlikten

$$r=\frac{-2b-1+\sqrt{8b^2+8b+9}}{2}$$

ve

$$b=\frac{2r-1+\sqrt{8r^2-7}}{2}$$

olarak elde edilir. Birinci tip hemen hemen kobalans sayıları b_n^* ve birinci tip hemen hemen kobalansırlar da r_n^* ile gösterilirse yukarıdaki denklemlerden sırasıyla

"b_n^* birinci tip hemen hemen kobalans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8(b_n^*)^2+8b_n^*+9$ bir tam kare"

ve

"r_n^* birinci tip hemen hemen kobalansırdır $\Leftrightarrow$ $8(r_n^*)^2-7$ bir tam kare"

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$c_n^*=\sqrt{8(b_n^*)^2+8b_n^*+9} \quad \text{ve} \quad cr_n^*=\sqrt{8(r_n^*)^2-7}$$

birer tam sayı olup, bu tam sayılara sırasıyla birinci tip hemen hemen Lucas-kobalans sayısı ve birinci tip hemen hemen Lucas-kobalansır denir.

Eğer

$$[(b+1)+(b+2)+\cdots+(b+r)]-[1+2+\cdots+b]=-1$$

ise, b ye ikinci tip hemen hemen kobalans sayısı, r ye ise ikinci tip hemen hemen kobalansır denir. Bu eşitlikten

$$r=\frac{-2b-1+\sqrt{8b^2+8b-7}}{2}$$

ve

$$b=\frac{2r-1+\sqrt{8r^2+9}}{2}$$

olarak elde edilir. İkinci tip hemen hemen kobalans sayıları b_n^{**} ve ikinci tip hemen hemen kobalansırlar da r_n^{**} ile gösterilirse yukarıdaki denklemlerden sırasıyla

"b_n^{**} ikinci tip hemen hemen kobalans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8(b_n^{**})^2+8b_n^{**}-7$ bir tam kare"

ve

"r_n^{**} ikinci tip hemen hemen kobalansırdır $\Leftrightarrow$ $8(r_n^{**})^2+9$ bir tam kare"

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$c_n^{**}=\sqrt{8(b_n^{**})^2+8b_n^{**}-7} \quad \text{ve} \quad cr_n^{**}=\sqrt{8(r_n^{**})^2+9}$$

birer tam sayı olup, bu tam sayılara sırasıyla ikinci tip hemen hemen Lucas-kobalans sayısı ve ikinci tip hemen hemen Lucas-kobalansır denir.

Birinci ve ikinci tip hemen hemen Lucas-balans, Lucas-balansır, Lucas-kobalans ve Lucas-kobalansır sayılarının genel terimlerinin belirlenebilmesi için belli bir Pell denkleminin (Barbeau (2003) ve Mollin (1996)) tüm tam sayı çözümleri kümesinin belirlenmesi gereklidir. Şöyle ki,

1. birinci tip hemen hemen balansır ve birinci tip hemen hemen Lucas-balansır sayılarının genel terimlerinin belirlenebilmesi için

$$2x^2 - y^2 = 9$$

Pell denkleminin

2. ikinci tip hemen hemen balansır ve ikinci tip hemen hemen Lucas-balansır sayılarının genel terimlerinin belirlenebilmesi için

$$2x^2 - y^2 = -7$$

Pell denkleminin

3. birinci tip hemen hemen kobalansır ve birinci tip hemen hemen Lucas-kobalansır sayılarının genel terimlerinin belirlenebilmesi için

$$8x^2 - y^2 = 7$$

Pell denkleminin

4. ikinci tip hemen hemen kobalansır ve ikinci tip hemen hemen Lucas-kobalansır sayılarının genel terimlerinin belirlenebilmesi için de

$$8x^2 - y^2 = -9$$

Pell denkleminin

tüm (x_n, y_n) tam sayı çözümlerinin belirlenmesi gerekir. Bu tam sayı çözümlerinden faydalanarak, birinci ve ikinci tip tüm bu hemen hemen balans sayıların genel terimleri elde edilebilir.

4. BULGULAR

Bu bölümde birinci ve ikinci tip hemen hemen balansırlar, hemen hemen Lucas-balansırlar, hemen hemen kobalansırlar ve hemen hemen Lucas-kobalansırların genel terimleri elde edilecektir.

Bir önceki bölümde de bahsedildiği üzere, hemen hemen balans sayısı

$$|\,[(B+1)+(B+2)+\cdots+(B+R)]-[1+2+\cdots+(B-1)]\,|=1$$

eşitliğini gerçekleyen pozitif B tam sayısına denir. Eşitlikteki pozitif R tam sayısına ise hemen hemen balansır denir.

Eğer

$$[(B+1)+(B+2)+\cdots+(B+R)]-[1+2+\cdots+(B-1)]=1$$

ise, B ye birinci tip hemen hemen balans sayısı, R ye ise birinci tip hemen hemen balansır denir. Bu denklemden

$$R=\frac{-2B-1+\sqrt{8B^2+9}}{2} \quad \text{ve} \quad B=\frac{2R+1+\sqrt{8R^2+8R-7}}{2} \qquad (4.1)$$

olarak elde edilir.

Birinci tip hemen hemen balans sayıları B_n^* ve birinci tip hemen hemen balansırlar da R_n^* ile gösterilirse (4.1) den

"B_n^* birinci tip hemen hemen balans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8(B_n^*)^2+9$ bir tam kare"

ve

"R_n^* birinci tip hemen hemen balansırdır $\Leftrightarrow$ $8(R_n^*)^2+8R_n^*-7$ bir tam kare"

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$C_n^* = \sqrt{8(B_n^*)^2 + 9} \quad \text{ve} \quad CR_n^* = \sqrt{8(R_n^*)^2 + 8R_n^* - 7} \tag{4.2}$$

birer tam sayı olup, bu tam sayılara sırasıyla birinci tip hemen hemen Lucas-balans sayısı ve birinci tip hemen hemen Lucas-balansır denir.

Eğer

$$[(B+1) + (B+2) + \cdots + (B+R)] - [1 + 2 + \cdots + (B-1)] = -1$$

ise, B ye ikinci tip hemen hemen balans sayısı, R ye ise ikinci tip hemen hemen balansır denir. Bu denklemden

$$R = \frac{-2B - 1 + \sqrt{8B^2 - 7}}{2} \quad \text{ve} \quad B = \frac{2R + 1 + \sqrt{8R^2 + 8R + 9}}{2} \tag{4.3}$$

olarak elde edilir.

İkinci tip hemen hemen balans sayıları B_n^{**} ve ikinci tip hemen hemen balansırlar da R_n^{**} ile gösterilirse (4.3) den

"B_n^{**} ikinci tip hemen hemen balans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8(B_n^{**})^2 - 7$ bir tam kare"

ve

"R_n^{**} ikinci tip hemen hemen balansırdır $\Leftrightarrow$ $8(R_n^{**})^2 + 8R_n^{**} + 9$ bir tam kare"

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$C_n^{**} = \sqrt{8(B_n^{**})^2 - 7} \quad \text{ve} \quad CR_n^{**} = \sqrt{8(R_n^{**})^2 + 8R_n^{**} + 9} \tag{4.4}$$

birer tam sayı olup, bu tam sayılara sırasıyla ikinci tip hemen hemen Lucas-balans sayısı ve ikinci tip hemen hemen Lucas-balansır denir.

Hemen hemen kobalans sayısı

$$|\ [(b+1)+(b+2)+\cdots+(b+r)]-[1+2+\cdots+b]\ |=1$$

eşitliğini gerçekleyen pozitif b tam sayısına, eşitlikteki pozitif r tam sayısına ise hemen hemen kobalansır denir.

Eğer

$$[(b+1)+(b+2)+\cdots+(b+r)]-[1+2+\cdots+b]=1$$

ise, b ye birinci tip hemen hemen kobalans sayısı, r ye ise birinci tip hemen hemen kobalansır denir. Bu denklemden

$$r=\frac{-2b-1+\sqrt{8b^2+8b+9}}{2} \quad \text{ve} \quad b=\frac{2r-1+\sqrt{8r^2-7}}{2} \tag{4.5}$$

olarak elde edilir.

Birinci tip hemen hemen kobalans sayıları b_n^* ve birinci tip hemen hemen kobalansırlar da r_n^* ile gösterilirse (4.5) den

"b_n^* birinci tip hemen hemen kobalans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8(b_n^*)^2+8b_n^*+9$ bir tam kare"

ve

"r_n^* birinci tip hemen hemen kobalansırdır $\Leftrightarrow$ $8(r_n^*)^2-7$ bir tam kare"

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$c_n^*=\sqrt{8(b_n^*)^2+8b_n^*+9} \quad \text{ve} \quad cr_n^*=\sqrt{8(r_n^*)^2-7} \tag{4.6}$$

birer tam sayı olup, bu tam sayılara sırasıyla birinci tip hemen hemen Lucas-kobalans sayısı ve birinci tip hemen hemen Lucas-kobalansır denir.

Eğer

$$[(b+1)+(b+2)+\cdots+(b+r)]-[1+2+\cdots+b]=-1$$

ise, b ye ikinci tip hemen hemen kobalans sayısı, r ye ise ikinci tip hemen hemen kobalansır denir. Bu denklemden

$$r=\frac{-2b-1+\sqrt{8b^2+8b-7}}{2} \quad \text{ve} \quad n=\frac{2r-1+\sqrt{8r^2+9}}{2} \tag{4.7}$$

olarak elde edilir.

İkinci tip hemen hemen kobalans sayıları b_n^{**} ve ikinci tip hemen hemen kobalansırlar da r_n^{**} ile gösterilirse (4.7) den

"b_n^{**} ikinci tip hemen hemen kobalans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8(b_n^{**})^2+8b_n^{**}-7$ bir tam kare"

ve

"r_n^{**} ikinci tip hemen hemen kobalansırdır $\Leftrightarrow$ $8(r_n^{**})^2+9$ bir tam kare"

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$c_n^{**}=\sqrt{8(b_n^{**})^2+8b_n^{**}-7} \quad \text{ve} \quad cr_n^{**}=\sqrt{8(r_n^{**})^2+9} \tag{4.8}$$

birer tam sayı olup, bu tam sayılara sırasıyla ikinci tip hemen hemen Lucas-kobalans sayısı ve ikinci tip hemen hemen Lucas-kobalansır denir.

Tekcan (2019), hemen hemen balans sayıları ve üçgensel sayılar arasındaki ilişkiyi ele almış ve

$$T_{\frac{B_n^*+B_{n-1}^*-3}{6}}=\frac{(b_{2n-1}^*-b_{2n-2}^*-1)(b_{2n-1}^*-b_{2n-2}^*+1)}{4}$$

$$T_{\frac{7B_n^*-B_{n-1}^*-3}{6}}=\frac{2B_{2n+1}^*+3b_{4n+1}^*-3b_{4n}^*-9}{48}$$

$$T_{\frac{B^{**}_{2n+1}-B^{**}_{2n}+B^{**}_{2n-1}-B^{**}_{2n-2}-2}{4}} = \frac{(b^{**}_n - 1)(b^{**}_n + 2)}{9}$$

$$T_{\frac{7B^{**}_{2n+1}-7B^{**}_{2n}-B^{**}_{2n-1}+B^{**}_{2n-2}-2}{4}} = \frac{3B^{**}_{4n+3} - 3B^{**}_{4n+2} + 2b^{**}_{2n+1} - 8}{48}$$

olduğunu göstermiştir. Ayrıca kare üçgensel sayılar için

$$S_n = \left(\frac{b^*_{2n+1} - b^*_{2n} - b^*_{2n-1} + b^*_{2n-2}}{4}\right)^2, s_n = \frac{B^*_n}{3} \text{ ve } t_n = \frac{C^*_n - 3}{6}$$

veya

$$S_n = \left(\frac{b^{**}_{n+1} - b^{**}_n}{6}\right)^2, s_n = \frac{B^*_{2n+1} - B^{**}_{2n}}{2} \text{ ve } t_n = \frac{C^{**}_{2n+1} - C^{**}_{2n} - 2}{4}$$

olduğunu ve bunlardan farklı olarak S_n nin genel teriminin

$$S_n = \left(\frac{-2B^*_{n-1} + C^*_n - C^*_{n-1}}{6}\right)^2$$

$$S_n = \frac{(2B^*_{n-1} + C^*_{n-1} - 3)(4B^*_n + 2B^*_{n-1} + C^*_{n-1} + 3) + 12B^*_n}{36}$$

$$S_n = \left(\frac{-2B^{**}_{2n-1} + 2B^{**}_{2n-2} + C^{**}_{2n+1} - C^{**}_{2n} - C^{**}_{2n-1} + C^{**}_{2n-2}}{4}\right)^2$$

olduğunu göstermiştir. Daha sonra problemi tersten ele almış ve

$$B^*_n = 3s_n$$
$$b^*_{2n} = -2s_{n+1} + s_n + 2t_{n+1} - t_n$$
$$b^*_{2n-1} = -4s_n + s_{n-1} + 4t_n - t_{n-1} + 1$$
$$C^*_n = 6t_n + 3$$
$$c^*_{2n} = 3s_{n+1} - 5s_n$$
$$c^*_{2n-1} = 5s_n - 3s_{n-1}$$

ve

$$B^{**}_{2n} = -s_n + 2t_n + 1$$

$$B_{2n-1}^{**} = s_{n-1} + 2t_{n-1} + 1$$
$$b_n^{**} = -3s_n + 3t_n + 1$$
$$C_{2n}^{**} = 8s_n - 2t_n - 1$$
$$C_{2n-1}^{*} = 8s_{n-1} + 2t_{n-1} + 1$$
$$c_n^{**} = 3s_n + 3s_{n-1}$$

şeklinde olduğunu belirtmiştir. S_n, s_n ve t_n nin ilk n-terim toplamlarının

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = \frac{33(B_n^*)^2 - (B_{n-1}^*)^2 - 18n + 9}{288}$$
$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \frac{5B_n^* - B_{n-1}^* - 3}{12}$$
$$\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{7B_n^* - B_{n-1}^* - 6n - 3}{12}$$

veya

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = \frac{824(b_n^{**})^2 - 328b_n^{**}b_{n-1}^{**} + 660b_n^{**} + 32(b_{n-1}^{**})^2 - 132b_{n-1}^{**} - 72n + 168}{1152}$$
$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \frac{5B_{2n+1}^{**} - 5B_{2n}^{**} - B_{2n-1}^{**} + B_{2n-2}^{**} - 2}{8}$$
$$\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{7B_{2n+1}^{**} - 7B_{2n}^{**} - B_{2n-1}^{**} + B_{2n-2}^{**} - 4n - 2}{8}$$

şeklinde olduğunu göstermiştir.

Daha sonra ise üçgensel ve kare üçgensel sayılar arasındaki ilişkiyi ele almış ve

$$T_{\frac{B_{n+1}^* - B_{n-1}^* - 6}{12}} = S_n$$
$$T_{\frac{B_{2n+3}^{**} - B_{2n+2}^{**} - B_{2n-1}^{**} + B_{2n-2}^{**} - 4}{8}} = S_n$$

bağıntılarını elde etmiştir. Son olarak tam kareler ile ilgilenmiş ve B_n nin bir balans sayısı olması durumunda $\sqrt{8B_n^2+1}$ nin bir tam sayı (ki esasında bu tam sayı C_n dir) olması gerçeğine benzer şekilde aşağıdaki sonuçları elde etmiştir:

$$\sqrt{8(s_{n-1}+t_{n-1})^2+8(s_{n-1}+t_{n-1})+1}=\frac{B_n^*+B_{n-1}^*}{3}$$

$$\sqrt{8(s_{n-1}+t_{n-1})^2+8(s_{n-1}+t_{n-1})+1}=\frac{B_{2n+1}^{**}-B_{2n}^{**}+B_{2n-1}^{**}-B_{2n-2}^{**}}{2}$$

$$\sqrt{S_n-t_n-2s_n(s_{n-1}+t_{n-1})}=\frac{b_{2n-1}^{**}-b_{2n-2}^{**}-1}{2}$$

$$\sqrt{(s_{n-1}+t_{n-1})^2+t_n+2s_n(s_{n-1}+t_{n-1})}=\frac{2C_n^*-6b_{2n-1}^*+6b_{2n-2}^*}{12}$$

$$\sqrt{(s_{n-1}+t_{n-1})^2+t_n+2s_n(s_{n-1}+t_{n-1})}=\frac{3C_{2n+1}^{**}-3C_{2n}^{**}-4b_n^{**}-2}{12}$$

$$\sqrt{\frac{s_{2n}+s_{2n-1}+t_{2n-1}}{2}}=\frac{2B_n^*}{3}$$

$$\sqrt{\frac{s_{2n}+s_{2n-1}+t_{2n-1}}{2}}=B_{2n+1}^{**}-B_{2n}^{**}.$$

Bunlardan farklı olarak n tek iken

$$\sqrt{t_n}=\frac{c_n^*-c_{n-1}^*}{2} \quad \text{veya} \quad \sqrt{t_n}=\frac{\frac{c_{n+1}^{**}}{2}}{3}$$

ve n çift iken

$$\sqrt{t_n+1}=\frac{\frac{C_n^*}{2}}{3} \quad \text{veya} \quad \sqrt{t_n+1}=\frac{C_{n+1}^{**}-C_n^{**}}{2}$$

olduğunu göstermiştir.

Tekcan (2019a) ise bu sayıların ilk n-terim toplamlarının

$$\sum_{i=1}^{n}B_i^*=\frac{5B_n^*-B_{n-1}^*-3}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^* = \begin{cases} \dfrac{b_{n+2}^* - b_{n+1}^* + b_n^* - b_{n-1}^* - n - 3}{2}, n \geq 1 \text{ tek} \\ \dfrac{3b_{n+1}^* - 3b_n^* - n - 3}{2}, n \geq 2 \text{ çift} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^* = \frac{7B_n^* - B_{n-1}^* - 3}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^* = \begin{cases} \dfrac{6c_{n+2}^* - 6c_{n+1}^* - 12B_{\frac{n+1}{2}}^* + 4B_{\frac{n-1}{2}}^* - 18}{6}, n \geq 1 \text{ tek} \\ \dfrac{3c_{n+3}^* - 3c_{n+2}^* - 6c_{n+1}^* + 6c_n^* - 12B_{\frac{n}{2}}^* + 4B_{\frac{n-2}{2}}^* - 18}{6}, n \geq 2 \text{ çift} \end{cases}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} B_i^{**} = \begin{cases} \dfrac{7B_n^{**} - 7B_{n-1}^{**} - B_{n-2}^{**} + B_{n-3}^{**}}{2}, n \geq 3 \text{ tek} \\ \dfrac{B_{n-1}^{**} - B_{n-2}^{**} + C_{n+1}^{**} - C_n^{**}}{2}, n \geq 2 \text{ çift} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^{**} = \frac{3B_{2n+1}^{**} - 3B_{2n}^{**} - 2n}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{**} = \begin{cases} 10B_n^{**} - 10B_{n-1}^{**} - 2B_{n-2}^{**} + 2B_{n-3}^{**} - 3, n \geq 3 \text{ tek} \\ \dfrac{68B_{n-1}^{**} - 68B_{n-2}^{**} - 12B_{n-3}^{**} + 12B_{n-4}^{**} - C_{n+1}^{**} + C_n^{**} - 6}{2}, n \geq 4 \text{ çift} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^{**} = \frac{9B_{2n+1}^{**} - 9B_{2n}^{**} - 3B_{2n-1}^{**} + 3B_{2n-2}^{**} - 6}{4}$$

şeklinde olduğunu göstermiştir.

Pell sayılarının ilk $4n+1$ teriminin toplamı bir tam kare olup bu toplam

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{2i} 2^i \right]^2$$

dir (Santana ve ark. (2006)).

Gözeri ve ark. (2017) ise ilk $4n+1$ Pell sayılarının toplamını, kare üçgensel sayılara bağlı olarak

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = (4s_n + 2t_n + 1)^2$$

şeklinde elde etmişlerdir.

Tekcan (2019a) ise ilk $4n+1$ Pell sayılarının toplamını hemen hemen balans sayılarına bağlı olarak

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = \left(\frac{4B_n^* + C_n^*}{3}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = \left(\frac{4B_{2n+1}^{**} - 4B_{2n}^{**} + C_{2n+1}^{**} - C_{2n}^{**}}{2}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = \left(\frac{c_{2n+1}^* - c_{2n}^*}{2}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = \left(\frac{c_{n+1}^{**}}{3}\right)^2$$

şeklinde olduğunu göstermiştir. Bu toplamlardan farklı olarak Pell sayılarının bazı özel toplamlarının yine tam kare olduğunu belirterek aşağıdaki sonuçları elde etmiştir:

$$1 + \sum_{i=1}^{4n-1} P_i = \begin{cases} \left(\frac{C_n^*}{3}\right)^2 \\ \left(\frac{C_{2n+1}^{**} - C_{2n}^{**}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} P_i = \begin{cases} \frac{7B_n^* - B_{n-1}^* - 3}{6} \\ \frac{7B_{2n+1}^{**} - 7B_{2n}^{**} - B_{2n-1}^{**} + B_{2n-2}^{**} - 2}{4} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{2i} = \begin{cases} \frac{b_{2n+1}^* - b_{2n}^* - 1}{2} \\ \frac{b_{n+1}^{**} - 1}{3} \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1} = \begin{cases} \dfrac{(b^*_{2n+1} - b^*_{2n})(c^*_{2n+1} - c^*_{2n})}{2} \\ \dfrac{c^{**}_{n+1}(2b^{**}_{n+1} + 1)}{9} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} P_{2i-1} = \begin{cases} \dfrac{2B^*_n C^*_n}{9} \\ \dfrac{(B^{**}_{2n+1} - B^{**}_{2n})(C^{**}_{2n+1} - C^{**}_{2n})}{2} \end{cases}$$

Daha sonra benzer problemi Pell-Lucas sayılarının bazı özel toplamları için ele almış ve

$$\sum_{i=1}^{2n} Q_i = \begin{cases} 2b^*_{2n+1} - 2b^*_{2n} - 2 \\ \dfrac{4b^{**}_{n+1} - 4}{3} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} Q_{2i-1} = \begin{cases} \left(\dfrac{4B^*_n}{3}\right)^2 \\ (2B^{**}_{2n+1} - 2B^{**}_{2n})^2 \end{cases}$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{2n} Q_{2i+1}}{2} = \begin{cases} \left(\dfrac{c^*_{2n+1} - c^*_{2n}}{2}\right)^2 \\ \left(\dfrac{c^{**}_{n+1}}{3}\right)^2 \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{2n-1} Q_i = \begin{cases} \dfrac{4B^*_n}{3} \\ 2B^{**}_{2n+1} - 2B^{**}_{2n} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} Q_i = \begin{cases} \dfrac{4B^*_{n+1} - 6}{3} \\ 2B^{**}_{2n+3} - 2B^{**}_{2n+2} - 2 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} Q_{2i} = \begin{cases} \dfrac{8B^*_n(b^*_{2n+1} - b^*_{2n})}{3} \\ \dfrac{(4B^{**}_{2n+1} - 4B^{**}_{2n})(2b^{**}_{n+1} + 1)}{3} \end{cases}$$

olduğunu göstermiştir. Son olarak balans sayılarının bazı özel toplamlarının da yine birer tam kare olduğunu belirterek aşağıdaki sonuçları elde etmiştir:

$$\sum_{i=1}^{n} B_{2i-1} = \begin{cases} \left(\frac{B_n^*}{3}\right)^2 \\ \left(\frac{B_{2n+1}^{**} - B_{2n}^{**}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} B_i = \begin{cases} \frac{B_n^*(c_{2n+1}^* - c_{2n}^*)}{6} \\ \frac{c_{n+1}^{**}(B_{2n+1}^{**} - B_{2n}^{**})}{6} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} B_{2i} = \begin{cases} \frac{B_n^* C_n^*(b_{2n+1}^* - b_{2n}^*)(c_{2n+1}^* - c_{2n}^*)}{9} \\ \frac{c_{n+1}^{**}(B_{2n+1}^{**} - B_{2n}^{**})(C_{2n+1}^{**} - C_{2n}^{**})(2b_{n+1}^{**} + 1)}{18} \end{cases}$$

4.1 Hemen Hemen Balansırlar ve Hemen Hemen Lucas-Balansırlar

Hemen hemen balansırlar ve hemen hemen Lucas-balansırların genel terimlerinin belirlenebilmesi için özel bir Pell denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesinin belirlenmesi gerekir. Şöyle ki (4.2) eşitliği dikkate alınırsa, belli bir $y \geq 1$ tam sayısı için

$$8(R_n^*)^2 + 8R_n^* - 7 = y^2$$

olduğu görülür. Buradan

$$2(2R_n^* + 1)^2 - 9 = y^2$$

olur. Bu son eşitlikle $x = 2R_n^* + 1$ olarak alınırsa

$$2x^2 - y^2 = 9$$

Pell denklemi elde edilir. Benzer şekilde (4.4) eşitliği dikkate alınırsa

$$8(R_n^{**})^2 + 8R_n^{**} + 9 = y^2$$

olduğu görülür. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$2(2R_n^{**} + 1)^2 + 7 = y^2$$

olur. Eğer $x = 2R_n^{**} + 1$ olarak alınırsa

$$2x^2 - y^2 = -7$$

Pell denklemi elde edilmiş olur.

Bu Pell denklemlerinin tüm tam sayı çözümleri kümesi Ω ile gösterilirse aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.1. $2x^2 - y^2 = 9$ Pell denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$\Omega = \{(-6B_n + 3C_n, 12B_n - 3C_n) : n \geq 1\}$$

ve $2x^2 - y^2 = -7$ Pell denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$\Omega = \{(6B_{n-1} + C_{n-1}, 4B_{n-1} + 3C_{n-1}) : n \geq 1\} \cup \{(6B_n - C_n, -4B_n + 3C_n) : n \geq 1\}$$

dir (Tekcan ve Türkmen 2023).

İspat. $2x^2 - y^2 = 9$ Pell denklemi için çözüm temsilcileri kümesi Rep = $\{[\pm 3 \quad 3]\}$ ve çözüm matrisi $M = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dir (Flath 1989). Burada $n \geq 1$ için

$$[x_n \quad y_n] = [3 \quad -3]M^n$$

dir. Kolayca görüleceği üzere $n \geq 1$ için

$$M^n = \begin{bmatrix} C_n & 4B_n \\ 2B_n & C_n \end{bmatrix}$$

dir. Dolayısıyla

$$[x_n \quad y_n] = [3 \quad -3]\begin{bmatrix} C_n & 4B_n \\ 2B_n & C_n \end{bmatrix} = [-6B_n + 3C_n \quad 12B_n - 3C_n]$$

olduğundan

$$\Omega = \{(-6B_n + 3C_n, 12B_n - 3C_n) : n \geq 1\}$$

dir.

$2x^2 - y^2 = -7$ Pell denklemi için çözüm temsilcileri kümesi Rep = $\{[\pm 1 \quad 3]\}$ olup $n \geq 1$ için

$$[x_{2n-1} \quad y_{2n-1}] = [1 \quad 3]M^{n-1}$$

ve

$$[x_{2n} \quad y_{2n}] = [-1 \quad 3]M^n$$

dir. Dolayısıyla

$$[x_{2n-1} \quad y_{2n-1}] = [1 \quad 3]\begin{bmatrix} C_{n-1} & 4B_{n-1} \\ 2B_{n-1} & C_{n-1} \end{bmatrix} = [6B_{n-1} + C_{n-1} \quad 4B_{n-1} + 3C_{n-1}]$$

ve

$$[x_{2n} \quad y_{2n}] = [-3 \quad 3]\begin{bmatrix} C_n & 4B_n \\ 2B_n & C_n \end{bmatrix} = [6B_n - C_n \qquad -4B_n + 3C_n]$$

olduğundan

$$\Omega = \{(6B_{n-1} + C_{n-1}, 4B_{n-1} + 3C_{n-1}) : n \geq 1\} \cup \{(6B_n - C_n, -4B_n + 3C_n : n \geq 1\}$$

dir.

Teorem 4.1.1 den aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.2. Birinci ve ikinci tip hemen hemen balansırların ve hemen hemen Lucas-balansırların genel terimleri $n \geq 1$ için

$$R_n^* = \frac{-6B_n + 3C_n - 1}{2}$$
$$CR_n^* = 12B_n - 3C_n$$
$$R_{2n-1}^{**} = \frac{6B_{n-1} - C_{n-1} - 1}{2}$$
$$R_{2n}^{**} = \frac{6B_{n-1} + C_{n-1} - 1}{2}$$
$$CR_{2n-1}^{**} = -4B_{n-1} + 3C_{n-1}$$
$$CR_{2n}^{**} = 4B_{n-1} + 3C_{n-1}$$

dir (Tekcan ve Türkmen 2023).

İspat. Yukarıdaki teoremde $2x^2 - y^2 = 9$ Pell denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesinin $\Omega = \{(-6B_n + 3C_n, 12B_n - 3C_n) : n \geq 1\}$ olduğu gösterilmişti. $x = 2R_n^* + 1$ olduğu dikkate alınırsa

$$R_n^* = \frac{-6B_n + 3C_n - 1}{2}$$

olur. Böylece (4.2) den

$$\begin{aligned} CR_n^* &= \sqrt{8(R_n^*)^2 + 8R_n^* - 7} \\ &= \sqrt{8\left(\frac{-6B_n+3C_n-1}{2}\right)^2 + 8\left(\frac{-6B_n+3C_n-1}{2}\right) - 7} \\ &= \sqrt{9(C_n^2 - 1) - 72B_nC_n + 18(1 + 8B_n^2) - 9} \\ &= \sqrt{(12B_n - 3C_n)^2} \\ &= 12B_n - 3C_n \end{aligned}$$

olur. Diğerleri de benzer şekilde gösterilir.

Aşağıdaki çizelgede R_n^*, CR_n^*, R_n^{**} ve CR_n^{**} ın ilk on terimi verilmiştir.

Çizelge 4.1. R_n^*, CR_n^*, R_n^{**} ve CR_n^{**} ın ilk on terimi

n	R_n^*	CR_n^*	R_n^{**}	CR_n^{**}
1	1	3	-1	3
2	7	21	0	0
3	43	123	1	5
4	253	717	4	13
5	1477	4179	9	27
6	8611	24357	26	75
7	50191	141963	55	157
8	292537	827421	154	437
9	1705033	4822563	323	915
10	9937663	28107957	900	2547

4.2 Hemen Hemen Kobalansırlar ve Hemen Hemen Lucas-Kobalansırlar

Bu bölümde birinci ve ikinci tip hemen hemen kobalansırların ve hemen hemen Lucas-kobalansırların genel terimleri elde edilecektir.

(4.6) eşitliği dikkate alınırsa belli bir $y \geq 1$ tam sayısı için

$$8(r_n^*)^2 - 7 = y^2$$

olduğu görülür. Burada $x = r_n^*$ olarak alınırsa

$$8x^2 - y^2 = 7$$

Pell denklemi elde edilir. Benzer şekilde (4.8) eşitliğine dikkat edilirse

$$8(r_n^{**})^2 + 9 = y^2$$

olduğu görülür. Burada $x = r_n^{**}$ olarak alınırsa

$$8x^2 - y^2 = -9$$

Pell denklemi elde edilir. Yine bu Pell denklemlerinin tüm tam sayı çözümleri kümesi Ω ile gösterilirse aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.1. $8x^2 - y^2 = 7$ Pell denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$\Omega = \{(B_{n-1} + C_{n-1}, 8B_{n-1} + C_{n-1}) : n \geq 1\} \cup \{(-B_n + C_n, 8B_n - C_n) : n \geq 1\}$$

ve $8x^2 - y^2 = -9$ Pell denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$\Omega = \{(3B_n, 3C_n) : n \geq 1\}$$

dir (Tekcan ve Türkmen 2023).

İspat. $8x^2 - y^2 = 7$ Pell denklemi için çözüm temsilcileri kümesi Rep = $\{[\pm 1 \quad 1]\}$ ve çözüm matrisi $M = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dir. $n \geq 1$ için

$$[x_{2n-1} \quad y_{2n-1}] = [1 \quad 1]M^{n-1}$$

ve

$$[x_{2n} \quad y_{2n}] = [1 \quad -1]M^n$$

dir. Burada $n \geq 1$ için

$$M^n = \begin{bmatrix} C_n & 8B_n \\ B_n & C_n \end{bmatrix}$$

dir. Dolayısıyla

$$[x_{2n-1} \quad y_{2n-1}] = [1 \quad 1]\begin{bmatrix} C_{n-1} & 8B_{n-1} \\ B_{n-1} & C_{n-1} \end{bmatrix} = [B_{n-1} + C_{n-1} \quad 8B_{n-1} + C_{n-1}]$$

ve

$$[x_{2n} \quad y_{2n}] = [1 \quad -1]\begin{bmatrix} C_n & 8B_n \\ B_n & C_n \end{bmatrix} = [-B_n + C_n \qquad 8B_n - C_n]$$

olduğundan denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$\Omega = \{(B_{n-1} + C_{n-1}, 8B_{n-1} + C_{n-1}) : n \geq 1\} \cup \{(-B_n + C_n, 8B_n - C_n) : n \geq 1\}$$

dir. $8x^2 - y^2 = -9$ Pell denklemi için çözüm temsilcileri kümesi Rep $= \{[0 \quad 3]\}$ olup $n \geq 1$ için

$$[x_n \quad y_n] = [0 \quad 3]M^n$$

dir. Buna göre

$$[x_n \quad y_n] = [0 \quad 3]\begin{bmatrix} C_n & 8B_n \\ B_n & C_n \end{bmatrix} = [3B_n \qquad 3C_n]$$

olduğundan $\Omega = \{(3B_n, 3C_n) : n \geq 1\}$ dir.

Teorem 4.2.1 den aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.2. Birinci ve ikinci tip hemen hemen kobalansırların ve hemen hemen Lucas-kobalansırların genel terimleri $n \geq 1$ için

$$r^*_{2n-1} = B_{n-1} + C_{n-1}$$
$$cr^*_{2n-1} = 8B_{n-1} + C_{n-1}$$
$$r^*_{2n} = -B_n + C_n,$$
$$cr^*_{2n} = 8B_n - C_n$$
$$r^{**}_n = 3B_{n-1}$$
$$cr^{**}_n = 3C_{n-1}$$

dir (Tekcan ve Türkmen 2023).

İspat. $x = r^*_n$ eşitliği dikkate alınırsa, Teorem 4.2.1 den

$$r^*_{2n-1} = B_{n-1} + C_{n-1}$$

olduğu görülür. Böylece (4.6) dan

$$\begin{aligned} cr^*_{2n-1} &= \sqrt{8(r^*_{2n-1})^2 - 7} \\ &= \sqrt{8(B_{n-1} + C_{n-1})^2 - 7} \\ &= \sqrt{8B^2_{n-1} + 16B_{n-1}C_{n-1} + 8C^2_{n-1} - 7} \\ &= \sqrt{C^2_{n-1} - 1 + 16B_{n-1}C_{n-1} + 8(1 + 8B^2_{n-1}) - 7} \\ &= \sqrt{64B^2_{n-1} + 16B_{n-1}C_{n-1} + C^2_{n-1}} \\ &= \sqrt{(8B_{n-1} + C_{n-1})^2} \\ &= 8B_{n-1} + C_{n-1} \end{aligned}$$

olur. Diğerler tüm eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

Aşağıdaki çizelgede r^*_n, cr^*_n, r^{**}_n ve cr^{**}_n ın ilk on terimi verilmiştir.

Çizelge 4.2. r^*_n, cr^*_n, r^{**}_n ve cr^{**}_n ın ilk on terimi

n	r^*_n	cr^*_n	r^{**}_n	cr^{**}_n
1	1	1	0	3
2	2	5	3	9
3	4	11	18	51
4	11	31	105	297
5	23	65	612	1731
6	64	181	3567	10089
7	134	379	20790	58803
8	373	1055	121173	342729
9	781	2209	706248	1997571
10	2174	6149	4116315	11642697

4.3 Balans Sayıları ile Olan Bağıntılar

Yukarıdaki iki alt bölümde, birinci ve ikinci tip hemen hemen balansırların, Lucas-balansırların, kobalansırların ve Lucas-kobalansırların genel terimleri, balans ve Lucas-balans sayılarının genel terimlerine bağlı olarak elde edildi. Bu kısımda ise tersine balans, kobalans, Lucas-balans ve Lucas-kobalans sayılarının genel terimlerinin, birinci ve ikinci tip hemen hemen balansırların, Lucas-balansırların, kobalansırların ve Lucas-kobalansırların genel terimlerine bağlı olarak elde edilebileceği gösterilecektir.

Teorem 4.3.1. Tüm balans sayılarının genel terimleri $n \geq 1$ için

$$B_n = \frac{2R_n^* + CR_n^*}{6}$$

$$b_n = \frac{R_n^* - 1}{3}$$

$$C_n = \frac{4R_n^* + CR_n^* + 2}{3}$$

ve $n \geq 2$ için

$$c_n = \frac{2(R_n^* + R_{n-1}^*) + CR_n^* + CR_{n-1}^* + 2}{6}$$

dir (Tekcan ve Türkmen 2023).

İspat. Teorem 4.1.2 den

$$R_n^* = \frac{-6B_n + 3C_n - 1}{2} \quad \text{ve} \quad CR_n^* = 12B_n - 3C_n$$

dir. Buradan

$$-6B_n + 3C_n = 2R_n^* + 1 \quad \text{ve} \quad 12B_n - 3C_n = CR_n^*$$

ve böylece

$$B_n = \frac{2R_n^* + CR_n^* + 1}{6} \quad \text{ve} \quad C_n = \frac{4R_n^* + CR_n^* + 2}{3}$$

olarak elde edilir. Diğer yandan

$$b_n = \frac{-2B_n + C_n - 1}{2}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$b_n = \frac{-2B_n + C_n - 1}{2} = \frac{-2\left(\frac{2R_n^* + CR_n^* + 1}{6}\right) + \left(\frac{4R_n^* + CR_n^* + 2}{3}\right) - 1}{2} = \frac{R_n^* - 1}{3}$$

olduğu görülür. Son olarak

$$c_n = B_n + B_{n-1}$$

olduğundan

$$c_n = B_n + B_{n-1} = \frac{2(R_n^* + R_{n-1}^*) + CR_n^* + CR_{n-1}^* + 2}{6}$$

dir.

Teorem 4.3.1 e benzer şekilde aşağıdaki üç teorem verilebilir. İspatları benzer yöntemle yapılabilir.

Teorem 4.3.2. Tüm balans sayılarının genel terimleri $n \geq 1$ için

$$B_n = \frac{6R_{2n+1}^{**} + CR_{2n+1}^{**} + 3}{14}$$

$$b_n = \frac{-R_{2n+1}^{**} + CR_{2n-1}^{**} - 4}{7}$$

$$C_n = \frac{4R_{2n+1}^{**} + 3CR_{2n+1}^{**} + 2}{7}$$

$$c_n = \frac{6(R_{2n+1}^{**} + R_{2n-1}^{**}) + CR_{2n+1}^{**} + CR_{2n-1}^{**} + 6}{14}$$

veya

$$B_n = \frac{6R^{**}_{2n+2} - CR^{**}_{2n+2} + 1}{14}$$

$$b_n = \frac{-5R^{**}_{2n+2} + 2CR^{**}_{2n+2} - 6}{7}$$

$$C_n = \frac{-4R^{**}_{2n+2} + 3CR^{**}_{2n+2} - 2}{7}$$

$$c_n = \frac{6(R^{**}_{2n+2} + R^{*}_{2n}) - (CR^{**}_{2n+2} + CR^{**}_{2n}) + 6}{14}$$

(Tekcan ve Türkmen 2023).

Teorem 4.3.3. Tüm balans sayılarının genel terimleri $n \geq 1$ için

$$B_{\boldsymbol{n}} = \frac{r^{*}_{2n} + cr^{*}_{2n}}{7}$$

$$b_n = \frac{6r^{*}_{2n} - cr^{*}_{2n} - 7}{14}$$

$$C_n = \frac{8r^{*}_{2n} + cr^{*}_{2n}}{7}$$

$$c_n = \frac{r^{*}_{2n} + r^{*}_{2n-2} + cr^{*}_{2n} + cr^{*}_{2n-2}}{7}$$

veya

$$B_{\boldsymbol{n}} = \frac{-r^{*}_{2n+1} + cr^{*}_{2n+1}}{7}$$

$$b_n = \frac{10r^{*}_{2n+1} - 3cr^{*}_{2n+1} - 7}{14}$$

$$C_n = \frac{8r^{*}_{2n+1} - cr^{*}_{2n+1}}{7}$$

$$c_n = \frac{-r^{*}_{2n+1} - r^{*}_{2n} + cr^{*}_{2n+1} + cr^{*}_{2n-1}}{7}$$

dir (Tekcan ve Türkmen 2023).

Teorem 4.3.4. Tüm balans sayılarının genel terimleri $n \geq 1$ için

$$B_n = \frac{r_{n+1}^{**}}{3}\,, b_n = \frac{-2r_{n+1}^{**} + cr_{n+1}^{**} - 3}{6},\; C_n = \frac{cr_{n+1}^{**}}{3} \text{ ve } c_n = \frac{r_{n+1}^{**} + r_n^{**}}{3}$$

(Tekcan ve Türkmen 2023).

Yukarıdaki dört teorem dikkate alındığında, tüm balans sayılarının genel terimlerinin

1. Teorem 4.3.1 de, birinci tip hemen hemen balansırların ve Lucas-balansırların genel terimlerine,
2. Teorem 4.3.2 de, ikinci tip hemen hemen balansırların ve Lucas-balansırların genel terimlerine,
3. Teorem 4.3.3 de, birinci tip hemen hemen kobalansırların ve Lucas-kobalansırların genel terimlerine,
4. Teorem 4.3.4 de, ise ikinci tip hemen hemen kobalansırların ve Lucas-kobalansırların genel terimlerine

bağlı olarak verilebileceği görülmüş oldu.

Balans sayıları arasındaki

$$B_n = r_{n+1} \text{ ve } R_n = b_n$$

bağıntısına benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3.5. $n \geq 1$ için

$$B_n^* = r_{n+1}^{**}, b_n^* = R_{n+2}^{**}, C_n^* = cr_{n+1}^{**}, c_n^* = CR_{n+2}^{**}$$

ve

$$B_n^{**} = r_n^*, b_n^{**} = R_n^*, C_n^{**} = cr_n^*, c_n^{**} = CR_n^*$$

dir (Tekcan ve Türkmen 2023).

İspat. $B_n^* = 3B_n$ ve $r_n^{**} = 3B_{n-1}$ olduğundan

$$B_n^* = r_{n+1}^{**}$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} b_{2n}^* &= 2b_{n+1} - b_n \\ &= 2\left(\frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \alpha^{2n}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{2}} - \frac{\alpha^{-1}}{4\sqrt{2}}\right) + \beta^{2n}\left(\frac{-\beta}{2\sqrt{2}} + \frac{\beta^{-1}}{4\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\alpha^{2n}\left(3+\sqrt{2}\right) + \beta^{2n}\left(-3+\sqrt{2}\right)}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \\ &= \alpha^{2n}\left(\frac{6}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\right) + \beta^{2n}\left(\frac{-6}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{6\left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right) + \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2} - 1}{2} \\ &= R_{2n+2}^{**} \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı işlemler yapılarak

$$b_{2n-1}^* = 4b_n - b_{n-1} + 1 = \frac{6B_n - C_n - 1}{2} = R_{2n+1}^{**}$$

olduğu da gösterilebilir. O halde her $n \geq 1$ için

$$b_n^* = R_{n+2}^{**}$$

olduğu sonucuna varılır. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Birinci hemen hemen balansırların, hemen hemen Lucas-balansırların, hemen hemen kobalansırların ve hemen hemen Lucas-kobalansırların genel terimleri, ikinci tiplerin genel terimlerine bağlı olarak aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 4.3.6. Birinci tip hemen hemen balansırların, hemen hemen Lucas-balansırların, hemen hemen kobalansırların ve hemen hemen Lucas-kobalansırların genel terimleri $n \geq 1$ için

$$R_n^* = \frac{-3R_{2n+1}^{**} + 3CR_{2n+1}^{**} - 5}{7}$$

$$CR_n^* = \frac{48R_{2n+1}^{**} - 6CR_{2n+1}^{**} + 24}{14}$$

$$r_{2n-1}^* = \frac{14R_{2n-1}^{**} + 7CR_{2n-1}^{**} + 7}{14}$$

$$r_{2n}^* = \frac{2R_{2n+1}^{**} + 5CR_{2n+1}^{**} + 1}{14}$$

$$cr_{2n-1}^* = \frac{28R_{2n-1}^{**} + 7CR_{2n-1}^{**} + 14}{7}$$

$$cr_{2n}^* = \frac{20R_{2n+1}^{**} + CR_{2n+1}^{**} + 10}{7}$$

veya

$$R_n^* = \frac{-15R_{2n+2}^{**} + 6CR_{2n+2}^{**} - 11}{7}$$

$$CR_n^* = \frac{48R_{2n+2}^{**} - 15CR_{2n+2}^{**} + 24}{7}$$

$$r_{2n-1}^* = \frac{-2R_{2n}^{**} + 5CR_{2n}^{**} - 1}{14}$$

$$r_{2n}^* = \frac{-14R_{2n+2}^{**} + 7CR_{2n+2}^{**} - 7}{14}$$

$$cr_{2n-1}^* = \frac{20R_{2n}^{**} - CR_{2n}^{**} + 10}{7}$$

$$cr_{2n}^* = \frac{28R_{2n+2}^{**} - 7CR_{2n+2}^{**} + 14}{7}$$

dir (Tekcan ve Türkmen 2023).

İspat. Teorem 4.1.2 de

$$R_n^* = \frac{-6B_n + 3C_n - 1}{2}$$

olduğu gösterilmişti. Teorem 4.3.2 de ise

$$B_n = \frac{6R_{2n+1}^{**} + CR_{2n+1}^{**} + 3}{14} \quad \text{ve} \quad C_n = \frac{4R_{2n+1}^{**} + 3CR_{2n+1}^{**} + 2}{7}$$

olduğu belirtilmişti. O halde

$$R_n^* = \frac{-6B_n + 3C_n - 1}{2} = \frac{-3R_{2n+1}^{**} + 3CR_{2n+1}^{**} - 5}{7}$$

dir. Diğer tüm durumlarda da benzer şekilde gösterilebilir.

Tersine, ikinci tip hemen hemen balansırların, hemen hemen Lucas-balansırların, hemen hemen kobalansırların ve hemen hemen Lucas-kobalansırların genel terimleri, birinci tiplerin genel terimlerine bağlı olarak aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 4.3.7. İkinci tip hemen hemen balansırların, hemen hemen Lucas-balansırların, hemen hemen kobalansırların ve hemen hemen Lucas-kobalansırların genel terimleri $n \geq 2$ için

$$R_{2n-1}^{**} = \frac{-2r_{2n-2}^* + 5cr_{2n-2}^* - 7}{14}$$

$$R_{2n}^{**} = \frac{14r_{2n-2}^* + 7cr_{2n-2}^* - 7}{14}$$

$$CR_{2n-1}^{**} = \frac{20r_{2n-2}^* - cr_{2n-2}^*}{7}$$

$$CR_{2n}^{**} = \frac{28r_{2n-2}^* + 7cr_{2n-2}^*}{7}$$

$$r_n^{**} = \frac{3r_{2n-2}^* + 3cr_{2n-2}^*}{7}$$

$$cr_n^{**} = \frac{24r_{2n-2}^* + 3cr_{2n-2}^*}{7}$$

veya $n \geq 1$ için

$$R_{2n-1}^{**} = \frac{-14r_{2n-1}^* + 7cr_{2n-1}^* - 7}{14}$$

$$R_{2n}^{**} = \frac{2r_{2n-1}^* + 5cr_{2n-1}^* - 7}{14}$$

$$CR_{2n-1}^{**} = \frac{28r_{2n-1}^{*} - 7cr_{2n-1}^{*}}{7}$$

$$CR_{2n}^{**} = \frac{20r_{2n-1}^{*} + cr_{2n-1}^{*}}{7}$$

$$r_{n}^{**} = \frac{-3r_{2n-1}^{*} + 3cr_{2n-1}^{*}}{7}$$

$$cr_{n}^{**} = \frac{24r_{2n-1}^{*} - 3cr_{2n-1}^{*}}{7}$$

dir (Tekcan ve Türkmen 2023).

İspat. Teorem 4.3.6 nın ispatına benzer şekilde gösterilebilir.

4.4 İlk n-Terim Toplamlar

Bu kısımda birinci ve ikinci tip hemen hemen balansırların, hemen hemen Lucas-balansırların, hemen hemen kobalansırların ve hemen hemen Lucas-kobalansırların ilk n-terim toplamlar ele alınacaktır.

Teorem 4.4.1. Birinci ve ikinci tip hemen hemen balansırların, hemen hemen Lucas-balansırların, hemen hemen kobalansırların ve hemen hemen Lucas-kobalansırların ilk n-terim toplamları $n \geq 1$ için

$$\sum_{i=1}^{n} R_i^{*} = \frac{3B_n - n}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} CR_i^{*} = \frac{9B_n - 3B_{n-1} - 3}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^{**} = \frac{15B_{n-1} - 3B_{n-2} - 3}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} cr_i^{**} = \frac{21B_{n-1} - 3B_{n-2} + 3}{2}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^* = \begin{cases} 18B_{\frac{n-2}{2}} - 3B_{\frac{n-4}{2}}, n \geq 2 \text{ çift} \\ 7B_{\frac{n-1}{2}} - B_{\frac{n-3}{2}}, n \geq 1 \text{ tek} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} cr_i^* = \begin{cases} 51B_{\frac{n-2}{2}} - 9B_{\frac{n-4}{2}} - 3, n \geq 2 \text{ çift} \\ 20B_{\frac{n-1}{2}} - 4B_{\frac{n-3}{2}} - 3, n \geq 1 \text{ tek} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} R_i^{**} = \begin{cases} \dfrac{15B_{\frac{n-2}{2}} - 3B_{\frac{n-4}{2}} - n - 3}{2}, n \geq 2 \text{ çift} \\ \dfrac{34B_{\frac{n-3}{2}} - 6B_{\frac{n-5}{2}} - n - 3}{2}, n \geq 1 \text{ tek} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} CR_i^{**} = \begin{cases} 21B_{\frac{n-2}{2}} - 3B_{\frac{n-4}{2}} + 3, n \geq 2 \text{ çift} \\ 48B_{\frac{n-3}{2}} - 8B_{\frac{n-5}{2}} + 3, n \geq 1 \text{ tek} \end{cases}$$

dir (Tekcan ve Türkmen 2023).

İspat. Teorem 4.1.2 den

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} R_i^* &= R_1^* + R_2^* + R_3^* + \cdots + R_n^* \\ &= \frac{-6B_1 + 3C_1 - 1}{2} + \frac{-6B_2 + 3C_2 - 1}{2} + \cdots + \frac{-6B_n + 3C_n - 1}{2} \\ &= \frac{-6(B_1 + B_2 + \cdots + B_n) + 3(C_1 + C_2 + \cdots + C_n) - n}{2} \\ &= \frac{-6\left(\frac{5B_n - B_{n-1} - 1}{4}\right) + 3\left(\frac{7B_n - B_{n-1} - 1}{2}\right) - n}{2} \\ &= \frac{3B_n - n}{2} \end{aligned}$$

dir. Diğer tüm toplamlar da benzer yöntemle elde edilir.

5. SONUÇ

Hemen hemen balans sayısı

$$|\,[(B+1)+(B+2)+\cdots+(B+R)]-[1+2+\cdots+(B-1)]\,|=1 \qquad (5.1)$$

denklemini sağlayan pozitif B tam sayısına denir. Eşitlikteki pozitif R tam sayısına ise hemen hemen balansır denir.

(5.1) eşitliğine göre iki durum söz konusudur:

Eğer $[(B+1)+(B+2)+\cdots+(B+R)]-[1+2+\cdots+(B-1)]=1$ ise B ye birinci tip hemen hemen balans sayısı, R ye ise birinci tip hemen hemen balansır denir. Bu durumda

$$R=\frac{-2B-1+\sqrt{8B^2+9}}{2} \quad \text{ve} \quad B=\frac{2R+1+\sqrt{8R^2+8R-7}}{2} \qquad (5.2)$$

dir. Birinci tip hemen hemen balans sayıları B_n^* ve birinci tip hemen hemen balansırlar da R_n^* ile gösterilirse (5.2) den "B_n^* birinci tip hemen hemen balans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8(B_n^*)^2+9$ bir tam kare" ve "R_n^* birinci tip hemen hemen balansırdır $\Leftrightarrow$ $8(R_n^*)^2+8R_n^*-7$ bir tam kare" olduğu görülür. Dolayısıyla

$$C_n^*=\sqrt{8(B_n^*)^2+9} \quad \text{ve} \quad CR_n^*=\sqrt{8(R_n^*)^2+8R_n^*-7}$$

birer tam sayı olup, bu tam sayılara sırasıyla birinci tip hemen hemen Lucas-balans sayısı ve birinci tip hemen hemen Lucas-balansır denir.

Eğer $[(B+1)+(B+2)+\cdots+(B+R)]-[1+2+\cdots+(B-1)]=-1$ ise B ye ikinci tip hemen hemen balans sayısı, R ye ise ikinci tip hemen hemen balansır denir. Bu durumda

$$R = \frac{-2B - 1 + \sqrt{8B^2 - 7}}{2} \quad \text{ve} \quad B = \frac{2R + 1 + \sqrt{8R^2 + 8R + 9}}{2} \qquad (5.3)$$

dir. İkinci tip hemen hemen balans sayıları B_n^{**} ve ikinci tip hemen hemen balansırlar da R_n^{**} ile gösterilirse (5.3) den "B_n^{**} ikinci tip hemen hemen balans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8(B_n^{**})^2 - 7$ bir tam kare" ve "R_n^{**} ikinci tip hemen hemen balansırdır $\Leftrightarrow$ $8(R_n^{**})^2 + 8R_n^{**} + 9$ bir tam kare" olduğu görülür. Dolayısıyla

$$C_n^{**} = \sqrt{8(B_n^{**})^2 - 7} \quad \text{ve} \quad CR_n^{**} = \sqrt{8(R_n^{**})^2 + 8R_n^{**} + 9}$$

birer tam sayı olup, bu tam sayılarına sırasıyla ikinci tip hemen hemen Lucas-balans sayısı ve ikinci tip hemen hemen Lucas-balansır denir.

Hemen hemen kobalans sayısı ise

$$| [(b+1) + (b+2) + \cdots + (b+r)] - [1 + 2 + \cdots + b] | = 1 \qquad (5.4)$$

eşitliğini gerçekleyen pozitif b tam sayısına denir. Eşitlikteki pozitif r tam sayısına ise hemen hemen kobalansır denir.

(5.4) eşitliğine göre yine iki durum söz konusudur:

Eğer $[(b+1) + (b+2) + \cdots + (b+r)] - [1 + 2 + \cdots + b] = 1$ ise b ye birinci tip hemen hemen kobalans sayısı, r ye ise birinci tip hemen hemen kobalansır denir. Bu durumda

$$r = \frac{-2b - 1 + \sqrt{8b^2 + 8b + 9}}{2} \quad \text{ve} \quad b = \frac{2r - 1 + \sqrt{8r^2 - 7}}{2} \qquad (5.5)$$

dir. Birinci tip hemen hemen kobalans sayıları b_n^* ve birinci tip hemen hemen kobalansırlar da r_n^* ile gösterilirse (5.5) den "b_n^* birinci tip hemen hemen kobalans sayısıdır $\Leftrightarrow$

$8(b_n^*)^2 + 8b_n^* + 9$ bir tam kare" ve "r_n^* birinci tip hemen hemen kobalansırdır $\Leftrightarrow$ $8(r_n^*)^2 - 7$ bir tam kare" olduğu görülür. Dolayısıyla

$$c_n^* = \sqrt{8(b_n^*)^2 + 8b_n^* + 9} \quad \text{ve} \quad cr_n^* = \sqrt{8(r_n^*)^2 - 7}$$

birer tam sayı olup, bu tam sayılara sırasıyla birinci tip hemen hemen Lucas-kobalans sayısı ve birinci tip hemen hemen Lucas-kobalansır denir.

Eğer $[(b+1) + (b+2) + \cdots + (b+r)] - [1 + 2 + \cdots + b] = -1$ ise b ye ikinci tip hemen hemen kobalans sayısı, r ye ise ikinci tip hemen hemen kobalansır denir. Bu durumda

$$r = \frac{-2b - 1 + \sqrt{8b^2 + 8b - 7}}{2} \quad \text{ve} \quad n = \frac{2r - 1 + \sqrt{8r^2 + 9}}{2} \qquad (5.6)$$

dir. İkinci tip hemen hemen kobalans sayıları b_n^{**} ve ikinci tip hemen hemen kobalansırlar da r_n^{**} ile gösterilirse (5.6) dan "b_n^{**} ikinci tip hemen hemen kobalans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8(b_n^{**})^2 + 8b_n^{**} - 7$ bir tam kare" ve "r_n^{**} ikinci tip hemen hemen kobalansırdır $\Leftrightarrow$ $8(r_n^{**})^2 + 9$ bir tam kare" olduğu görülür. Dolayısıyla

$$c_n^{**} = \sqrt{8(b_n^{**})^2 + 8b_n^{**} - 7} \quad \text{ve} \quad cr_n^{**} = \sqrt{8(r_n^{**})^2 + 9}$$

birer tam sayı olup, bu tam sayılara sırasıyla ikinci tip hemen hemen Lucas-kobalans sayısı ve ikinci tip hemen hemen Lucas-kobalansır denir.

Bu çalışmada birinci ve ikinci tip hemen hemen balansırların, hemen hemen Lucas-balansırların, hemen hemen kobalansırların ve hemen hemen Lucas-kobalansırların genel terimleri elde edilmiştir. Birinci ve ikinci tip hemen hemen balansırların ve hemen hemen Lucas-balansırların genel terimlerini elde etmek için ilk olarak

$$2x^2 - y^2 = 9 \quad \text{ve} \quad 2x^2 - y^2 = -7$$

Pell denklemlerinin tüm tam sayı çözümleri kümesi belirlenmiş ve sonrasında bu sayıların genel terimleri elde edilmiştir.

Sonrasında birinci ve ikinci tip hemen hemen kobalansırların ve hemen hemen Lucas-kobalansırların genel terimlerini elde etmek için ise ilk olarak

$$8x^2 - y^2 = 7 \text{ ve } 8x^2 - y^2 = -9$$

Pell denklemlerinin tüm tam sayı çözümleri kümesi belirlenmiş ve sonrasında bu sayıların genel terimleri elde edilmiştir.

Daha sonra tersine balans, kobalans, Lucas-balans ve Lucas-kobalans sayılarını genel terimleri, birinci ve ikinci tip hemen hemen balansırların, hemen hemen Lucas-balansırların, hemen hemen kobalansırların ve hemen hemen Lucas-kobalansırların genel terimlerine bağlı olarak elde edilmiştir. Ayrıca birinci tip hemen hemen tüm bu sayıların genel terimleri, ikinci tiplerin genel terimlerine ve tersine ikinci tiplerin genel terimleri de birinci tiplerin genel terimlerine bağlı olarak elde edilmiştir.

Son olarak ise birinci ve ikinci tip hemen hemen balansırların, hemen hemen Lucas-balansırların, hemen hemen kobalansırların ve hemen hemen Lucas-kobalansırların ilk n-terim toplamları elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Barbeau, E.J. (2003). Pell's equation. Springer-Verlag New York, Inc.

Behera, A. ve Panda, G.K. (1999). On the square roots of triangular numbers. *The Fibonacci Quart.* 37(2): 98-105.

Chailangka, N. ve Pakapongpun, A. (2021). Neo Balancing Numbers. *International Journal of Mathematics and Computer Science* 16(4): 1653-1664.

Flath, D.E. (1989). Introduction to number theory. Wiley.

Gözeri, G.K., Özkoç, A. ve Tekcan, A. (2017). Some algebraic relations on balancing numbers. *Utilitas Mathematica* 103: 217-236.

Kovacs, T., Liptai, K. ve Olajos, P. (2010). On (a,b) balancing numbers. *Publ. Math. Deb.* 77(3-4): 485-498.

Liptai, K. (2004). Fibonacci balancing numbers. *The Fibonacci Quart.* 42(4): 330-340.

Liptai, K. (2006). Lucas balancing numbers. *Acta Math. Univ. Ostrav.* 14: 43-47.

Liptai, K., Luca, F., Pinter, A. ve Szalay, L. (2009). Generalized balancing numbers. *Indag. Mathem. N.S.* 20(1): 87-100.

Mollin, R.A. (1996). Quadratics. CRS Press, Boca Raton, New York, London, Tokyo

Özkoc, A. ve Tekcan, A. (2017). On k-balancing numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Maths*. 23(3): 38-52.

Panda, G.K. ve Ray, P.K. (2011). Some links of balancing and cobalancing numbers with Pell and associated Pell numbers. *Bull. of Inst. of Math. Acad. Sinica* 6(1): 41-72.

Panda, K.G. ve Ray, P.K. (2005). Cobalancing numbers and cobalancers. *Int. Jour. of Math. and Math. Sci.* 8: 1189-1200.

Panda, G.K. ve Panda, A.K. (2015). Almost balancing numbers. *Jour. of the Indian Math. Soc.* 82(3-4): 147-156.

Panda, A.K. (2017). Some variants of the balancing sequences. *Ph.D. dissertation.* National Institute of Technology Rourkela, India.

Ray, P.K. (2009). Balancing and cobalancing numbers. *Ph.D. dissertation*. Department of Mathematics, National Institute of Technology, Rourkela, India.

Santana, S.F. ve Diaz-Barrero, J.L. (2006). Some properties of sums involving Pell numbers. *Missouri Journal of Mathematical Science* 18(1): 33-40.

Szalay, L. (2007). On the resolution of simultaneous Pell equations. *Annales Mathematics and Informatics* 34: 77-87.

Tekcan, A. (2019). Almost balancing, triangular and square triangular numbers. *Creative Mathematics and Informtics* 28(2): 203-214.

Tekcan, A. (2019a). Sums and spectral norms of all almost balancing numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics* 25(1): 108-121.

Tekcan, A. ve Erdem, A. (2020). t-cobalancing numbers and Lucas t-cobalancing numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Maths*. 26(1): 45-58.

Tekcan, A. ve Aydın, S. (2021). On t-balancers, t-balancing Numbers and Lucas t-balancing Numbers. *Libertas Mathematica* 41(1): 37-51.

Tekcan, A. ve Yıldız, M. (2021). Balcobalancing numbers and balcobalancers. *Creative Mathematics and Informatics.* 30(2): 203-222.

Tekcan, A. ve Türkmen, E.Z. (2023). Almost balancers, almost cobalancers, almost Lucas-balancers and almost Lucas-cobalancers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics* 29(4): 682-694.

Tekcan, A. ve Yıldız, M. (2023). Neo cobalancing numbers. Yayına yollandı.

Tengely, S. (2013). Balancing numbers which are product of consecutive integers. *Publ. Math. Debrecen* 83(1-2): 197-205.