УДК 539.3

Анализ продольных колебаний функционально-градиентного наностержня при различных условиях защемления на основе нелокальной теории упругости с учетом жесткости

B. Uzun[1], Ö. Civalek[2,3], M.Ö. Yayli[1]

[1] Университет Улудаг, Бурса, 16059, Турция
[2] Университет Акдениз, Анталья, 07058, Турция
[3] Китайский медицинский университет, Тайчжун, 406040, Тайвань

В работе в рамках нелокальной теории упругости с учетом жесткости выполнен анализ свободных продольных колебаний функционально-градиентного (ФГ) наностержня с деформируемыми концами. Рассмотрено поведение ФГ наностержня из металлокерамики, оба конца которого упруго закреплены с помощью осевых пружин. Задача о свободных продольных колебаниях ФГ наностержня с деформируемыми и недеформируемыми концами решена аналитически с использованием оригинального подхода на основе разложения в ряд Фурье по синусам и преобразования Стокса. Свободные продольные колебания закрепленного ФГ наностержня впервые изучены в рамках нелокальной теории упругости с учетом жесткости. Для валидации и оценки эффективности предложенного аналитического метода выполнен расчет продольных колебаний жестко закрепленного (через задание соответствующих значений жесткости пружин) однородного наностержня с использованием метода рядов Фурье и преобразования Стокса. Ключевым преимуществом предложенного подхода является его применимость к исследованию продольных колебаний ФГ наностержней с различными условиями закрепления. С использованием предложенного подхода выполнены расчеты при различных значениях масштабных параметров, показателя градиента и длины наностержня.

Ключевые слова: нелокальная упругость с учетом жесткости, функционально-градиентный материал, стержень с деформируемыми концами, продольные колебания, ряды Фурье

DOI 10.55652/1683-805X_2023_26_1_60

A hardening nonlocal elasticity approach to axial vibration analysis of an arbitrarily supported FG nanorod

B. Uzun[1], Ö. Civalek[2,3], and M.Ö. Yayli[1]

[1] Faculty of Engineering, Department of Civil Engineering, Bursa Uludag University, Bursa, 16059, Turkey
[2] Faculty of Engineering, Department of Civil Engineering, Akdeniz University, Antalya, 07058, Turkey
[3] Department of Medical Research, China Medical University Hospital, China Medical University, Taichung, 406040, Taiwan

The present work is aimed at analyzing free longitudinal vibrations of nanorods composed of a functionally graded (FG) material with deformable boundaries within a hardening nonlocal elasticity approach. For this purpose, a FG nanorod composed of the ceramic and metal constituents is considered to be elastically supported by means of axial springs at both ends. Then the analytical method based on the association of the Fourier sine series and the Stokes transformation is developed to solve the free axial vibration problem of a FG nanorod with both deformable and nondeformable boundaries. Free axial vibration of a restrained FG nanorod is first studied within hardening nonlocal elasticity. To show the validity and profitability of the proposed analytical method, the presented Fourier series method with the Stokes transformation is used for the analysis of axial vibration of a rigidly supported homogeneous nanorod by setting the appropriate spring stiffness values. The main superiority of this new approach is in its power of dealing with numerous boundary conditions to determine longitudinal vibration frequencies of FG nanorods. Using the present solution method, various numerical applications are given for different small-scale parameters, gradient index, and nanorod length.

Keywords: hardening nonlocal elasticity, functionally graded material, nanorod with deformable boundaries, axial vibration, Fourier series

© Uzun B., Civalek Ö., Yayli M.Ö., 2023

1. Введение

Развитие технологий, потребность в более прочных современных материалах и конструкциях, запрос на многофункциональность требуют разработки новых материалов. Для решения этих задач в последнее время широко используют композиционные материалы. При производстве композиционных материалов компоненты можно комбинировать различными способами. Функционально-градиентные (ФГ) материалы представляют один из видов композитов, обладающих определенными преимуществами за счет постепенного изменения характеристик в объеме материала. Одно из ключевых преимуществ ФГ материалов заключается в минимизации концентрации напряжений. Функционально-градиентные материалы за счет минимизации проблем, связанных с границами раздела, имеют широкую область применения, в частности, в ядерной энергетике, аэрокосмической, оборонной, военной, энергетической, оптоэлектронной и полупроводниковой отраслях [1].

Нанотехнологии имеют большое значение в современном мире. Благодаря нанотехнологиям стали возможны исследования и манипуляции на атомном и молекулярном уровнях, которые позволили создать перспективные наноразмерные материалы. В частности, внимание исследователей привлекли одномерные нано- и микроструктуры, среди которых нанотрубки [2–8], наностержни [8–13], нанобалки [14–26], микробалки [27–29], нанопроволоки [30]. С учетом интереса к композиционным материалам появились работы по исследованию композитных одномерных нано- и микроразмерных структур [31–48]. Появились также многомерные модели структур [49–54]. Теоретический анализ в рамках механики сплошной среды является важным способом изучения механического поведения этих сверхмалых элементов. Кроме того, теоретические методы исследования менее затратны по времени и средствам, чем эксперименты и молекулярно-динамическое моделирование.

Следует отметить, что результаты анализа поведения наноструктур на основе классических континуальных теорий не дают хорошего согласия с экспериментальными данными. Хотя классические теории хорошо описывают поведение таких макроструктур, как балки, пластины, оболочки и стержни, их достоверность снижается по мере уменьшения размера. Следовательно, в математические модели следует ввести новые параметры, обеспечивающие соответствие теоретических и экспериментальных данных для нано- и микроразмерных элементов и структур. Эти параметры называют размерными или масштабными параметрами. К настоящему времени разработано множество теорий для более реалистичного анализа поведения нано- и микроразмерных элементов. Эти теории можно назвать теориями упругости с учетом размерного эффекта, среди которых нелокальная теория упругости, дублетная механика, модифицированная моментная теория, модифицированная теория градиента деформации, теория поверхностной упругости.

Как упоминалось выше, существует множество теорий, описывающих поведение нано- и микроразмерных материалов. В некоторых теориях учитывается эффект снижения жесткости, в других — эффект увеличения жесткости. Влияние размера на поведение материалов с учетов влияния масштабного фактора изучалось с учетом обоих эффектов — снижения и увеличения жесткости. Нелокальная теория упругости Эрингена [55], часто используемая для изучения поведения наноразмерных стержней, балок, пластин, как известно, учитывает эффект снижения жесткости. Также используются другие модели нелокальной упругости, в том числе подходы, учитывающие увеличение жесткости [8, 11, 56].

В настоящей работе также использован подход нелокальной теории упругости с учетом изменения жесткости. Анализ литературы показал, что в основном данный подход применяют для исследования поведения однородных наностержней. При этом, хотя подход редко используется для изучения влияния различных граничных условий, решение задачи о наностержне с различными условиями закрепления, полученное с использованием нелокального подхода с учетом жесткости, можно найти в [11]. С использованием результатов [11] в настоящей работе были уточнены постановка и решение задачи о колебаниях ФГ круглых наностержней и исследовано изменение частоты колебаний ФГ наностержней при различных воздействиях.

Исследования (в том числе в рамках теоретического анализа) поведения наноразмерных элементов из функционально-градиентных материалов не теряют своей актуальности. В настоящей работе рассмотрен потенциал использования в инженерных приложениях модели ФГ наностерж-

ня с деформируемыми пружинами на концах. Очень сложно контролировать частоту наностержня при граничных условиях типа «защемление – свободный край», поскольку требует изменения других свойств наностержня. Предложенная модель позволяет контролировать частоту колебаний с помощью подстройки жесткости упругих пружин.

Настоящее теоретическое исследование направлено на разработку эффективного аналитического метода решения задач о свободных продольных колебаниях ФГ круглого наностержня при различных условиях защемления на основе нелокальной упругости с учетом жесткости. Для этого применяется комбинированный подход к решению задач, заключающийся в совместном использовании бесконечного ряда Фурье и преобразования Стокса. Также ставится ряд задач нахождения собственных частот ФГ наностержня при различных граничных условиях в рамках предложенного подхода. Анализ литературы показал, что нелокальный подход с учетом упрочнения ранее не использовался для исследования осевых колебаний ФГ круглого наностержня с деформируемыми границами. В настоящей работе впервые использована модель ФГ наностержня с упругими осевыми пружинами на концах, позволяющая задавать различные граничные условия. В работе построены матрицы коэффициентов для расчета частот свободных продольных колебаний различным образом закрепленных ФГ наностержней. Следует подчеркнуть, что данный метод решения может быть эффективен для нано-, микро- и макроразмерных структур. Исследовано влияние различных параметрических величин, таких как нелокальный параметр, показатель градиента, длина наностержня, на частоту и относительную частоту колебаний ФГ металлокерамических наностержней.

2. Характеристики материала функционально-градиентных наностержней

В анализируемых ФГ наностержнях механические характеристики изменяются в радиальном направлении. Считается, что внутренняя часть стержня изготовлена из металла (нержавеющая сталь SUS304), а внешняя — из керамики (нитрид кремния Si_3N_4). Модель функционально-градиентного Si_3N_4–SUS304 наностержня, концы которого закреплены через осевые пружины, показана на рис. 1. Изменение механических характеристик ФГ наностержня описывается функцией [57]

$$f(r) = (f_o - f_i)\left(\frac{r}{R}\right)^k + f_i. \quad (1)$$

Здесь f — функция изменения эффективных механических характеристик ФГ наностержня в радиальном направлении; R — внешний радиус ФГ наностержня; k — показатель объемной доли (показатель градиента), который принимает неотрицательные значения от 0 до ∞; нижние индексы o и i соответствуют материалу на внешней поверхности и внутри стержня соответственно. Для рассматриваемой задачи модуль упругости E и плотность ρ ФГ наностержня изменяются в радиальном направлении и могут быть описаны на основе уравнения (1):

$$E(r) = (E_o - E_i)\left(\frac{r}{R}\right)^k + E_i, \quad (2)$$

$$\rho(r) = (\rho_o - \rho_i)\left(\frac{r}{R}\right)^k + \rho_i. \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) представляют собой градиентные выражения для модуля упругости и массовой плотности ФГ наностержней. Здесь E_o, E_i и ρ_o, ρ_i — модули упругости и массовые плотности материалов на внешней поверхности и внутри стержня соответственно. Характеристики материалов внешней и внутренней части стержня, пока-

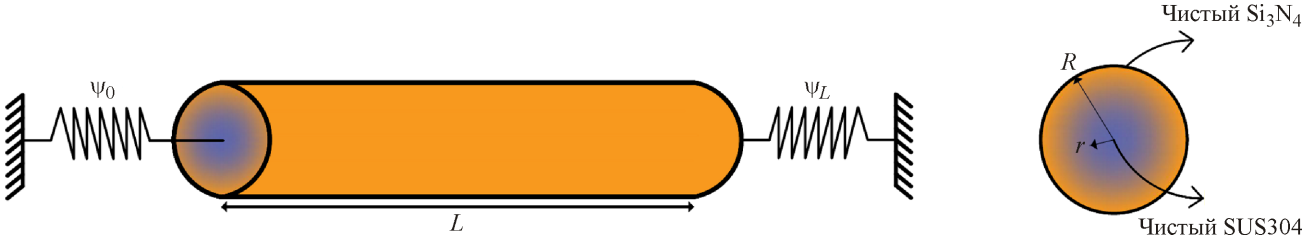


Рис. 1. Модель упруго закрепленного функционально-градиентного наностержня (цветной в онлайн-версии)

затель градиента и радиус определяют свойства ФГ наностержня. В следующих разделах будет показано влияние показателя градиента на зависимость плотности и модуля упругости от безразмерного радиуса r/R. Согласно приведенным выше формулам, возможно несколько случаев. Например, при нулевом показателе градиента ФГ наностержень будет обладать характеристиками материала внешней части стержня, тогда как при бесконечно большом значении показателя градиента (близком к ∞) характеристики ФГ наностержня будут соответствовать материалу на внутренней поверхности.

3. Задача о продольных колебаниях в нелокальной теории упругости с учетом жесткости

Рассмотрим теоретический базис нелокального подхода с учетом жесткости применительно к решению задачи о свободных продольных колебаниях ФГ наностержня. В качестве базы для анализа свободных продольных колебаний ФГ наностержней с деформируемыми упругими пружинами на обоих концах будем использовать результаты [8, 56]. Предложенные в [8, 56] формулировки перепишем с учетом композитной структуры стержня и недеформируемых и деформируемых концов стержня. Согласно закону Ньютона, динамическое уравнение для ФГ наностержня длиной dx (ось x проходит вдоль стержня) можно записать в виде (рис. 2)

$$N+\frac{\partial N}{\partial x}\mathrm{d}x-N-\rho(r)A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}x=0, \tag{4}$$

где u — продольное перемещение; N — внутреннее продольное растягивающее напряжение; A — площадь поперечного сечения ФГ наностержня; t — время. Для расчета внутреннего продольного растягивающего напряжения используется эффективное продольное напряжение σ_{ef}, введенное в [56]:

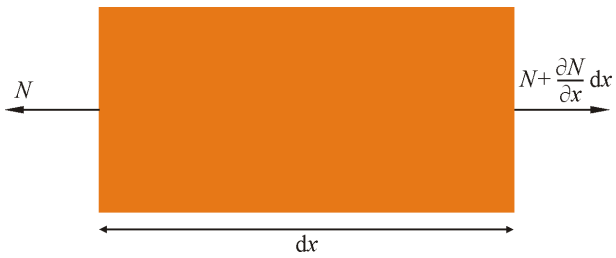


Рис. 2. Схема нагружения функционально-градиентного наностержня

$$N=\sigma_{\mathrm{ef}}A. \tag{5}$$

Для одномерных случаев упрощенное нелокальное определяющее соотношение имеет вид [55]

$$\sigma_{xx}-(e_0a)^2\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2}=E(r)\varepsilon_{xx}. \tag{6}$$

Здесь e_0 — экспериментально полученная постоянная материала; a — внутренняя длина; ε_{xx} — продольная деформация в направлении x; σ_{xx} — нелокальное продольное напряжение. Приведенное выше уравнение является общим обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка и может иметь частное решение [56]

$$\sigma_{xx}=E(r)\sum_{p=1}^{\infty}(e_0a)^{2(p-1)}\varepsilon_{xx}^{\langle 2(p-1)\rangle}. \tag{7}$$

Здесь $()^{\langle p\rangle}$ определяется как

$$()^{\langle p\rangle}=\frac{\partial^p}{\partial x^p}. \tag{8}$$

Подставляя уравнение (8) в (7), получим следующее выражение для нелокальных продольных напряжений [8, 56]:

$$\sigma_{xx}=E(r)\sum_{p=1}^{\infty}(e_0a)^{2(p-1)}\frac{\partial^{2(p-1)}\varepsilon_{xx}}{\partial x^{2(p-1)}}. \tag{9}$$

В теории нелокальной упругости эффективное продольное напряжение σ_{ef} описывается следующим образом [8, 56]:

$$\sigma_{\mathrm{ef}}=\sigma_{xx}-2\sum_{p=1}^{\infty}(e_0a)^{2p}\frac{\partial^{2p}\sigma_{xx}}{\partial x^{2p}}. \tag{10}$$

Подстановка уравнения (9) в (10) дает

$$\sigma_{\mathrm{ef}}=E(r)\varepsilon_{xx}-E(r)(e_0a)^2\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial x^2}+O(e_0a)^4. \tag{11}$$

Членом четвертой степени $O(e_0a)^4$ в уравнении (11) можно пренебречь в силу наноразмера переменной (e_0a). С использованием уравнений (5), (11) можно получить

$$N=E(r)A\varepsilon_{xx}-E(r)A(e_0a)^2\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial x^2}. \tag{12}$$

Для ненулевой деформации известно выражение

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{13}$$

Подставляя уравнение (13) в (12), можно записать

$$N=E(r)A\frac{\partial u}{\partial x}-E(r)A(e_0a)^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \tag{14}$$

Уравнение для первой производной продольной силы запишем следующим образом:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = E(r)A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - E(r)A(e_0 a)^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}. \quad (15)$$

С учетом уравнений (15) и (4) уравнение движения ФГ наностержня в рамках нелокальной теории упругости с учетом жесткости принимает вид

$$E(r)A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - E(r)A(e_0 a)^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \rho(r)A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (16)$$

где

$$E(r)A = 2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r, \quad (17)$$

$$\rho(r)A = 2\pi\int_0^R \rho(r)r\mathrm{d}r. \quad (18)$$

Необходимо отметить, что уравнение продольных колебаний ФГ наностержня (16), полученное в рамках нелокального подхода с учетом жесткости, вырождается в обычное уравнение движения, если нелокальный параметр малого масштаба $e_0 a$ равен нулю.

4. Метод решения задач для функционально-градиентных наностержней

В этом разделе представлены методы решения задачи о свободных продольных колебаниях ФГ круглого стержня с деформируемыми (упругими) концами в рамках нелокального подхода с учетом жесткости. С использованием разложения в ряд Фурье и преобразования Стокса получена матрица коэффициентов для расчета частоты свободных продольных колебаний ФГ наностержней. Условия защемления реализованы путем задания высоких значений жесткости пружин, что позволяет предотвратить деформацию в продольном направлении. Для реализации деформации в продольном направлении задаются очень низкие значения жесткости пружин. Деформации в продольном направлении описываются через разложение в ряд Фурье по синусам. Для обеспечения свободы выбора граничных условий применяются преобразования Стокса. Поскольку граничные условия заданы математически через преобразование Стокса, выбор функции не имеет значения, она определяет только количество используемых членов ряда Фурье.

4.1. Бесконечный ряд Фурье

В настоящей работе для решения задач о свободных продольных колебаниях ФГ наностержня с упругими концами применяется разложение в бесконечный ряд Фурье. По правилу разложения из $u = u(x, t)$ получим

$$u(x,t) = U(x)e^{i\omega t}, \quad (19)$$

где ω — угловая частота свободных колебаний ФГ наностержня; $U(x)$ — функция перемещения. Подставляя уравнение (19) в (16), запишем

$$\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]\frac{\mathrm{d}^2U(x)}{\mathrm{d}x^2} - \left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right](e_0 a)^2\frac{\mathrm{d}^4U(x)}{\mathrm{d}x^4} + \left[2\pi\int_0^R \rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2 U(x) = 0. \quad (20)$$

В данном методе решения обобщенные перемещения ФГ наностержня определяются через коэффициенты Фурье и известные тригонометрические функции. При этом поле перемещений $U(x) = U$ определяется тремя различными функциями [9, 11, 34]:

$$U(x) = \begin{cases} \xi_0, x = 0, \\ \xi_L, x = L, \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\beta_n x), 0 < x < L, \end{cases} \quad (21)$$

где B_n — коэффициенты Фурье;

$$\beta_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (22)$$

Функция $U(x)$ в любой точке x ФГ наностержня представляет собой разложение в ряд по синусам, а две конечные точки ФГ наностержня, $x = 0$ и $x = L$, записываются отдельно. Таким образом, функция перемещения записывается для трех различных областей.

4.2. Преобразование Стокса

Коэффициенты Фурье B_n в функции перемещения $U(x)$ могут быть записаны в явном виде:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L U(x)\sin(\beta_n x)\mathrm{d}x. \quad (23)$$

После дифференцирования уравнение (21) имеет вид

$$U'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n B_n \cos(\beta_n x). \quad (24)$$

Уравнение (24) можно разложить в ряд по косинусам:

$$U'(x) = \frac{c_0}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\beta_n x). \quad (25)$$

Коэффициенты c_0 и c_n определяют следующим образом:

$$c_0 = \frac{2}{L}\int_0^L U'(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{L}[U(L)-U(0)], \quad (26)$$

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L U'(x)\cos(\beta_n x)\mathrm{d}x,\ n=1,2,\ldots. \quad (27)$$

Из (26), (27) получим выражение для c_n:

$$c_n = \frac{2}{L}[U(x)\cos(\beta_n x)]_0^L + \frac{2}{L}\left[\beta_n\int_0^L U(x)\sin(\beta_n x)\mathrm{d}x\right], \quad (28)$$

$$c_n = \frac{2}{L}[(-1)^n U(L)-U(0)] + \beta_n B_n. \quad (29)$$

Такой метод называют преобразованием Стокса. Данное преобразование необходимо для получения точных выражений для первых четырех производных ряда Фурье по синусам. Предложенный комбинированный метод решения на базе бесконечного ряда Фурье и преобразования Стокса подходит для теоретического анализа различных наноструктур (в данном случае ФГ наностержней) с упругим защемлением концов. Для решения задачи необходимо вывести формулы для первых четырех производных от $U(x)$ [9, 11, 34]:

$$\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\xi_L-\xi_0}{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos(\beta_n x)\left(\frac{2((-1)^n\xi_L-\xi_0)}{L}+\beta_n B_n\right), \quad (30)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2U(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin(\beta_n x)\left(\frac{2((-1)^n\xi_L-\xi_0)}{L}+\beta_n B_n\right), \quad (31)$$

$$\frac{\mathrm{d}^3U(x)}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\xi_L''-\xi_0''}{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos(\beta_n x)\left(\frac{2((-1)^n\xi_L''-\xi_0'')}{L} - \beta_n^2\left(\frac{2((-1)^n\xi_L-\xi_0)}{L}+\beta_n B_n\right)\right), \quad (32)$$

$$\frac{\mathrm{d}^4U(x)}{\mathrm{d}x^4} = -\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin(\beta_n x)\left(\frac{2((-1)^n\xi_L''-\xi_0'')}{L} - \beta_n^2\left(\frac{2((-1)^n\xi_L-\xi_0)}{L}+\beta_n B_n\right)\right). \quad (33)$$

Необходимо найти коэффициенты Фурье, удовлетворяющие основному динамическому уравнению свободных продольных колебаний ФГ наностержня. Для этого выразим коэффициенты Фурье B_n через ξ_0, ξ_L, ξ''_0, ξ''_L, подставляя уравнения (21), (31), (33) в уравнение (20):

$$B_n = \frac{2\pi n(\Xi_n\Phi_n-(e_0a)^2L^2\Gamma_n)}{\pi^2n^2\Xi_n-\Upsilon^2L^2}. \quad (34)$$

Здесь

$$\Xi_n = L^2+\pi^2(e_0a)^2n^2, \quad (35)$$

$$\Phi_n = (-1)^{n+1}\xi_L+\xi_0, \quad (36)$$

$$\Gamma_n = (-1)^{n+1}\xi_L''+\xi_0''. \quad (37)$$

Зная коэффициенты Фурье, продольное перемещение можно выразить как

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi n(\Xi_n\Phi_n-(e_0a)^2L^2\Gamma_n)}{\pi^2n^2\Xi_n-\Upsilon^2L^2}\sin(\beta_n x). \quad (38)$$

4.3. Неклассические граничные условия

Как упоминалось ранее, в работах [8, 56] нелокальный подход с учетом жесткости применен для описания поведения однородных наноструктур с жестко закрепленными концами. В [11] было изучено поведение однородного наностержня с деформируемыми концами. Опираясь на эти работы, в настоящей работе решена задача о свободных продольных колебаниях ФГ круглого наностержня с упругими (деформируемыми) концами. Для этого в математической модели на обоих концах ФГ наностержня используются деформируемые осевые пружины. Для описания колебательного поведения стержня с упруго закрепленными концами рассмотрим следующие граничные условия:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}-\tau^2\left.\frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=0} = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}-\tau^2\left.\frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=L} = 0, \quad (40)$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0, \quad (41)$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} = 0. \quad (42)$$

Запишем силовые граничные условия в местах расположения пружин:

$$\Psi_0\xi_0 = \left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$$

$$-(e_0a)^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]\frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}x^3},\qquad x=0,\tag{43}$$

$$\Psi_L\xi_L=-\left(\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}-(e_0a)^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]\frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}x^3}\right),\qquad x=L.\tag{44}$$

где Ψ_0 и Ψ_L — жесткость пружин в точках $x=0$ и $x=L$ соответственно. Подставляя уравнения (30), (32), (34) в уравнения (43), (44), запишем два совместных однородных уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{\xi_L-\xi_0}{L}-\tau^2\frac{\xi_0''-\xi_L''}{L}\\ -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\xi_0\omega^2\Xi_n}{L^4\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2-\pi^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]n^2\Xi_n}\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L(-1)^n\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2\xi_L\Xi_n}{L^4\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2-\pi^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]n^2\Xi_n}\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(e_0a)^2L^3\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\xi_0''\omega^2}{L^4\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2-\pi^2\left[\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]n^2\Xi_n}\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(e_0a)^2L^3(-1)^{n+1}\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2\xi_L''}{L^4\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2-\pi^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]n^2\Xi_n}\\ =\frac{\Psi_0\xi_0}{2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r},\\ \frac{\xi_0-\xi_L}{L}+\tau^2\frac{\xi_L''-\xi_0''}{L}\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L(-1)^n\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2\xi_0\Xi_n}{L^4\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2-\pi^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]n^2\Xi_n}\\ -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\xi_L\omega^2\Xi_n}{L^4\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2-\pi^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]n^2\Xi_n}\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(e_0a)^2L^3(-1)^{n+1}\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2\xi_0''}{L^4\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2-\pi^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]n^2\Xi_n}\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(e_0a)^2L^3\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\xi_L''\omega^2}{L^4\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2-\pi^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]n^2\Xi_n}\\ =\frac{\Psi_L\xi_L}{2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r}.\end{gathered}\tag{45}$$

Подставив уравнения (30), (34) в (41), (42), получим два дополнительных однородных уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{\xi_L-\xi_0}{L}\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L^3\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\xi_0\omega^2}{\pi^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]n^2\Xi_n-L^4\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2}\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L^3(-1)^n\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2\xi_L}{L^4\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2-\pi^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]n^2\Xi_n}\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi^2(e_0a)^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]Ln^2\xi_0''}{L^4\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2-\pi^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]n^2\Xi_n}\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi^2(e_0a)^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]L(-1)^nn^2\xi_L''}{\pi^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]n^2\Xi_n-L^4\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2}\\ =0,\\ \frac{\xi_0-\xi_L}{L}\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L^3(-1)^n\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2\xi_0}{L^4\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2-\pi^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]n^2\Xi_n}\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L^3\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\xi_L\omega^2}{\pi^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]n^2\Xi_n-L^4\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2}\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi^2(e_0a)^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]L(-1)^nn^2\xi_0''}{\pi^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]n^2\Xi_n-L^4\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2}\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi^2(e_0a)^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]Ln^2\xi_L''}{L^4\left[2\pi\int_0^R\rho(r)r\mathrm{d}r\right]\omega^2-\pi^2\left[2\pi\int_0^R E(r)r\mathrm{d}r\right]n^2\Xi_n}=0.\end{gathered}\tag{46}$$

4.4. Задача о собственных значениях функционально-градиентного наностержня

Задача о собственных значениях ФГ наностержня с учетом коэффициентов жесткости пру-

жин, нелокального параметра и характеристик материалов может быть сформулирована на основе уравнений (45), (46):

$$\begin{gathered}
\left(-1-\bar{\Psi}_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\Upsilon^2\Delta_n}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n}\right)\frac{\xi_0}{L^2}\\
+\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\Upsilon^2(-1)^n\Delta_n}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n}\right)\frac{\xi_L}{L^2}\\
+\left(\tau^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\tau^2\Upsilon^2}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n}\right)\xi_0''\\
+\left(-\tau^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\tau^2\Upsilon^2(-1)^{n+1}}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n}\right)\xi_L''=0,\\
\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\Upsilon^2(-1)^n\Delta_n}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n}\right)\frac{\xi_0}{L^2}\\
+\left(-1-\bar{\Psi}_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\Upsilon^2\Delta_n}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n}\right)\frac{\xi_L}{L^2}\\
+\left(-\tau^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\tau^2\Upsilon^2(-1)^{n+1}}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n}\right)\xi_0''\\
+\left(\tau^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\tau^2\Upsilon^2}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n}\right)\xi_L''=0,\\
\left(-1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\Upsilon^2}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n}\right)\frac{\xi_0}{L^2}\\
+\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\Upsilon^2(-1)^n}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n}\right)\frac{\xi_L}{L^2}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi^2\tau^2n^2}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n}\right)\xi_0''\\
+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi^2\tau^2(-1)^nn^2}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n}\right)\xi_L''=0,\\
\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\Upsilon^2(-1)^n}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n}\right)\frac{\xi_0}{L^2}+\left(-1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\Upsilon^2}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n}\right)\frac{\xi_L}{L^2}\\
+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi^2\tau^2(-1)^nn^2}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n}\right)\xi_0''+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi^2\tau^2n^2}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n}\right)\xi_L''=0,
\end{gathered}\tag{47}$$

где

$$\tau=\frac{e_0a}{L},\tag{48}$$

$$\Delta_n=\pi^2\tau^2n^2+1,\tag{49}$$

$$\bar{\Psi}_0=\frac{\Psi_0L}{E_{\text{o}}A},\tag{50}$$

$$\bar{\Psi}_L=\frac{\Psi_LL}{E_{\text{o}}A},\tag{51}$$

$$\Upsilon=\omega L\sqrt{\frac{\rho(r)A}{E(r)A}}.\tag{52}$$

Некоторые параметры в приведенных выше уравнениях даны в безразмерном виде. Здесь τ — безразмерный параметр малого масштаба; $\bar{\Psi}_0$ и $\bar{\Psi}_L$ — безразмерная жесткость пружины упруго закрепленного конца стержня в точках $x=0$ и $x=L$ соответственно; Υ — безразмерная частота колебаний. Последний шаг решения записывается в матричной форме:

$$\begin{bmatrix}\xi_{11}&\xi_{12}&\xi_{13}&\xi_{14}\\ \xi_{21}&\xi_{22}&\xi_{23}&\xi_{24}\\ \xi_{31}&\xi_{32}&\xi_{33}&\xi_{34}\\ \xi_{41}&\xi_{42}&\xi_{43}&\xi_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\xi_0}{L^2}\\ \dfrac{\xi_L}{L^2}\\ \xi_0''\\ \xi_L''\end{bmatrix}=0.\tag{53}$$

Для расчета частоты свободных продольных колебаний ФГ круглого наностержня следует приравнять нулю определитель матрицы коэффициентов:

$$\left|\xi_{\eta j}\right|=0,\ \eta,\ j=1,2,3,4.\tag{54}$$

Здесь

$$\xi_{11}=-1-\bar{\Psi}_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\Upsilon^2\Delta_n}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n},\tag{55}$$

$$\xi_{12}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\Upsilon^2(-1)^n\Delta_n}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n},\tag{56}$$

$$\xi_{13}=\tau^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\tau^2\Upsilon^2}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n},\tag{57}$$

$$\xi_{14}=-\tau^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\tau^2\Upsilon^2(-1)^{n+1}}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n},\tag{58}$$

$$\xi_{21}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\Upsilon^2(-1)^n\Delta_n}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n},\tag{59}$$

$$\xi_{22}=-1-\bar{\Psi}_L+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\Upsilon^2\Delta_n}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n},\tag{60}$$

$$\xi_{23}=-\tau^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\tau^2\Upsilon^2(-1)^{n+1}}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n},\tag{61}$$

$$\xi_{24}=\tau^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\tau^2\Upsilon^2}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n},\tag{62}$$

$$\xi_{31}=-1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\Upsilon^2}{\Upsilon^2-\pi^2n^2\Delta_n},\tag{63}$$

$$\xi_{32} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Upsilon^2 (-1)^n}{\Upsilon^2 - \pi^2 n^2 \Delta_n}, \quad (64)$$

$$\xi_{33} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi^2 \tau^2 n^2}{\Upsilon^2 - \pi^2 n^2 \Delta_n}, \quad (65)$$

$$\xi_{34} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi^2 \tau^2 (-1)^n n^2}{\Upsilon^2 - \pi^2 n^2 \Delta_n}, \quad (66)$$

$$\xi_{41} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Upsilon^2 (-1)^n}{\Upsilon^2 - \pi^2 n^2 \Delta_n}, \quad (67)$$

$$\xi_{42} = -1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Upsilon^2}{\Upsilon^2 - \pi^2 n^2 \Delta_n}, \quad (68)$$

$$\xi_{43} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi^2 \tau^2 (-1)^n n^2}{\Upsilon^2 - \pi^2 n^2 \Delta_n}, \quad (69)$$

$$\xi_{44} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi^2 \tau^2 n^2}{\Upsilon^2 - \pi^2 n^2 \Delta_n}. \quad (70)$$

При изменении жесткости пружины на концах ФГ наностержня изменяются граничные условия. Следует подчеркнуть, что, если жесткость пружины стремится к нулю или бесконечности, конец стержня считается свободным или жестко защемленным соответственно. Уравнение (53) является решением полученной матрицы 4×4. В следующем разделе будут представлены решения для пяти типов условий на концах стержня. При изменении граничного условия меняется и размер матрицы. В зависимости от размера матрицы η и j могут варьироваться от 2 до 4.

5. Решения задач с различными граничными условиями

В разделе приведены решения задачи о собственных значениях для ФГ наностержней с пятью различными условиями закрепления концов: два недеформируемых защемленных конца, два деформируемых свободных конца, недеформируемый защемленный конец и недеформируемый свободный конец, недеформируемый и деформируемый свободные концы, деформируемый защемленный конец и недеформируемый свободный конец.

5.1. Задача о стержне с двумя недеформируемыми защемленными концами

Для стержня с двумя недеформируемыми защемленными концами граничные условия определяются как [8]

$$U\big|_{x=0} = 0, U\big|_{x=L} = 0, \quad (71)$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0, \left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} = 0. \quad (72)$$

Матрица коэффициентов в этом случае строится с помощью уравнения (54), удаляя столбцы и строки, связанные ξ_0 и ξ_L. В результате математических преобразований получим матрицу 2×2

$$\begin{vmatrix} \xi_{33} & \xi_{34} \\ \xi_{43} & \xi_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (73)$$

Считаем, что жесткость пружин на обоих концах ФГ наностержня стремится к бесконечности. Для обеспечения требуемой жесткости примем значение $\Psi = 10^{10}$ нН/нм. При Ψ_0 и $\Psi_L = 10^{10}$ частоту колебаний можно найти из уравнения (54).

5.2. Задача о стержне с недеформируемыми свободным и защемленным концами

Для стержня с недеформируемыми свободным и защемленным концами граничные условия записываются как [8, 56]

$$\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} - \tau^2 \frac{\mathrm{d}^3 U}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=L} = 0, \left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} = 0, \quad (74)$$

$$U\big|_{x=0} = 0, \left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0. \quad (75)$$

Матрица коэффициентов для этого случая выводится с помощью уравнений (30), (32), (34), (74), (75). Кроме того, матрица может быть получена непосредственно из уравнения (54), удаляя строки и столбцы, связанные с ξ_0. Определитель для расчета частоты колебаний выглядит следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \xi_{22} & \xi_{23} & \xi_{24} \\ \xi_{32} & \xi_{33} & \xi_{34} \\ \xi_{42} & \xi_{43} & \xi_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (76)$$

Характеристическое уравнение решается при $\Psi_L \to 0$.

5.3. Задача о стержне с недеформируемым свободным и деформируемым защемленным концами

Для стержня с недеформируемым свободным и деформируемым защемленным концами граничные условия имеют следующий вид [8, 56]:

$$\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} - \tau^2 \frac{\mathrm{d}^3 U}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=L} = 0, \left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} = 0, \quad (77)$$

$$U\big|_{x=0} = 0, \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} + 3\tau^2 \frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}x^3}\bigg|_{x=0} = 0. \quad (78)$$

После математических преобразований определитель матрицы частот имеет вид

$$\begin{vmatrix} \xi_{22} & \xi_{24} \\ \xi_{42} & \xi_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (79)$$

Частота колебаний рассчитывается при $\Psi_L \to 0$.

5.4. Задача о стержне с двумя деформируемыми свободными концами

Для стержня с двумя деформируемыми свободными концами граничные условия задаются следующим образом [8]:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} - \tau^2 \frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}x^3}\bigg|_{x=0} = 0, \quad (80)$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} - \tau^2 \frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}x^3}\bigg|_{x=L} = 0, \quad (81)$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} + 3\tau^2 \frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}x^3}\bigg|_{x=0} = 0, \quad (82)$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} + 3\tau^2 \frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}x^3}\bigg|_{x=L} = 0. \quad (83)$$

Определитель матрицы частот имеет размеры 2×2:

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (84)$$

Решение получают при $\Psi_0 \to 10^{10}$ и $\Psi_L \to 10^{10}$.

5.5. Задача о стержне с недеформируемым защемленным и деформируемым свободным концами

Для стержня с недеформируемым защемленным и деформируемым свободным концами граничные условия имеют следующий вид [8]:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} - \tau^2 \frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}x^3}\bigg|_{x=0} = 0, \quad (85)$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} - \tau^2 \frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}x^3}\bigg|_{x=L} = 0, \quad (86)$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0} = 0, \quad (87)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2} + 3\tau^2 \frac{\mathrm{d}^4U}{\mathrm{d}x^4}\bigg|_{x=L} = 0. \quad (88)$$

Определитель матрицы частот может быть получен из уравнения (54), удаляя столбцы и строки, связанные с ξ''_L:

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (89)$$

Решение характеристического уравнения получают при условии $\Psi_0 \to 0$ и $\Psi_L \to 0$.

6. Валидация метода и численные результаты

В разделе выполнено сравнение полученных численных результатов с литературными данными и рассмотрено влияние различных параметров на частоту продольных колебаний ФГ наностержня для некоторых граничных условий. В расчетах принимали, что ФГ наностержень представляет собой композит, состоящий из керамического компонента Si_3N_4 на внешней поверхности и металлического компонента SUS304 внутри стержня. Компоненты материалов на внешней поверхности и внутри ФГ наностержня имеют следующие характеристики [58]: $E_o = 322.27$ ГПа, $\rho_o = 2370$ кг/м^3 и $E_i = 207.78$ ГПа, $\rho_i = 8166$ кг/м^3 соответственно. Наностержень имеет длину 10 нм, если не оговорено иное, и радиус $R = 1$ нм. Рассматриваются безразмерные значения частоты, которые выражаются соотношением

$$\varpi = \omega L \sqrt{\frac{\rho_o}{E_o}}. \quad (90)$$

6.1. Валидация метода решения

Была выполнена оценка точности и применимости предложенного аналитического метода к решению задач о колебаниях ФГ наностержней. Матрица коэффициентов для расчета частоты колебаний ФГ наностержня определяется разложением по синусам бесконечного ряда Фурье. Однако для расчетов необходим усеченный ряд Фурье, который содержит конечное количество членов. В табл. 1 приведены результаты сравнения безразмерной частоты для первых трех мод колебаний с литературными данными для различного числа членов ряда. Показатель градиента задается равным нулю, при этом ФГ наностержень вырождается в однородный наностержень, состоящий только из нитрида кремния. Безразмерный нелокальный параметр e_0a/L считается равным 0.15. В предлагаемом методе решения число членов ряда варьировалось от 35 до 175 с шагом 10. Получен-

Таблица 1. Сравнение безразмерной частоты для первых трех мод колебаний однородных наностержней

Количество членов ряда	Первая мода ϖ_1		Вторая мода ϖ_2		Третья мода ϖ_3	
	Расчет	[8]	Расчет	[8]	Расчет	[8]
35	4.91235	4.82619	11.6926	11.4556	21.1293	20.6748
45	4.89274	4.82619	11.6368	11.4556	21.0243	20.6748
55	4.88039	4.82619	11.6023	11.4556	20.959	20.6748
65	4.87191	4.82619	11.5788	11.4556	20.9144	20.6748
75	4.86573	4.82619	11.5618	11.4556	20.8820	20.6748
85	4.86101	4.82619	11.5489	11.4556	20.8574	20.6748
95	4.8573	4.82619	11.5388	11.4556	20.8382	20.6748
105	4.85431	4.82619	11.5307	11.4556	20.8286	20.6748
115	4.85184	4.82619	11.524	11.4556	20.8099	20.6748
125	4.84977	4.82619	11.5184	11.4556	20.7992	20.6748
135	4.84801	4.82619	11.5137	11.4556	20.7901	20.6748
145	4.84649	4.82619	11.5096	11.4556	20.7823	20.6748
155	4.84517	4.82619	11.5061	11.4556	20.7755	20.6748
165	4.84401	4.82619	11.5030	11.4556	20.7695	20.6748
175	4.84299	4.82619	11.5002	11.4556	20.7642	20.6748

ные значения безразмерных частот хорошо согласуются с данными работы [8]. Причем чем больше количество членов ряда, тем ближе значения безразмерных частот к референтным значениям [8]. Влияние количества членов ряда на результаты расчета наглядно демонстрирует рис. 3, на котором показана разность значений безразмерных частот для первых трех мод колебаний, полученных в настоящей работе и в работе [8]:

$$\text{Difference} = \frac{\varpi_{\text{study}} - \varpi_{[8]}}{\varpi_{[8]}} \cdot 100. \qquad (91)$$

Анализируя кривые на рис. 3, можно сделать следующие выводы. Во-первых, по мере увеличения числа членов ряда растет точность результатов (разность результатов настоящего исследования и работы [8] уменьшается). Во-вторых, при более низких модах можно достичь более точного результата, используя меньшее количество членов. Соответственно, при одинаковом количестве членов ряда значения разности для третьей моды выше, чем для двух первых мод. Поэтому для более точной оценки частоты для высоких мод необходимо использовать большее количество членов ряда. Из кривых, построенных с помощью данных табл. 1, видно, что разность значений частот для первых трех мод достигает надлежащего уровня 0.5 % при более чем 150 членах ряда. Необходимо отметить, что количество членов, достаточное для точного расчета, зависит от граничных условий. В настоящей работе для решения задачи о колебаниях стрежня с двумя недеформируемыми защемленными концами использованы 160 членов.

6.2. Численные результаты для функционально-градиентного наностержня

Оценим значения частоты продольных колебаний ФГ наностержня, полученные с помощью предложенного метода. Рассмотрим влияние показателя градиента на изменение характеристик материалов стержня. На рис. 4 показано изменение массовой плотности и модуля Юнга ФГ наностержня в зависимости от безразмерного радиуса при различных значениях показателя градиента k. Видно, что характеристики материала остаются постоянными при $k=0$ и $k=\infty$, т.е. при $k=0$ и $k=\infty$ они не зависят от радиуса. Это значит, что ФГ наностержень вырождается в однородный наностержень. Анализ численных значений модуля Юнга и плотности указывает на то, что свойства наностержня соответствуют нитриду кремния при $k=0$ и нержавеющей стали при $k=\infty$. При промежуточных значениях показателя градиента ФГ наностержень может преимущественно проявлять свойства металла или керамики. При низких значениях показателя градиента материал стержня демонстрирует свойства керамики, при высоких — свойства металла.

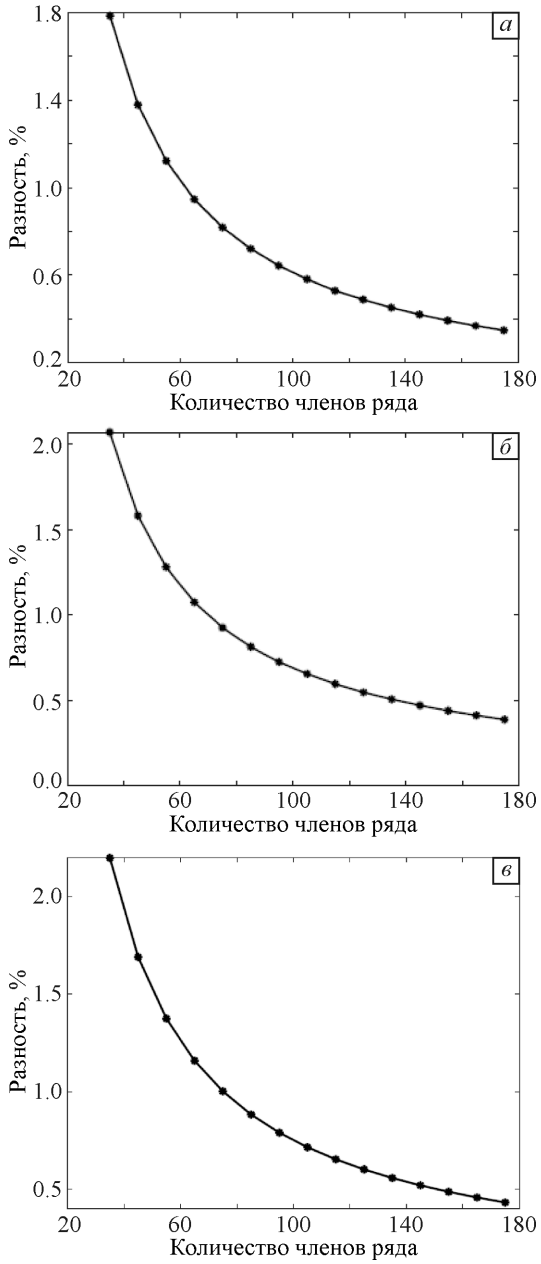


Рис. 3. Разность частот в зависимости от числа членов ряда для первой (*а*), второй (*б*) и третьей мод (*в*) колебаний

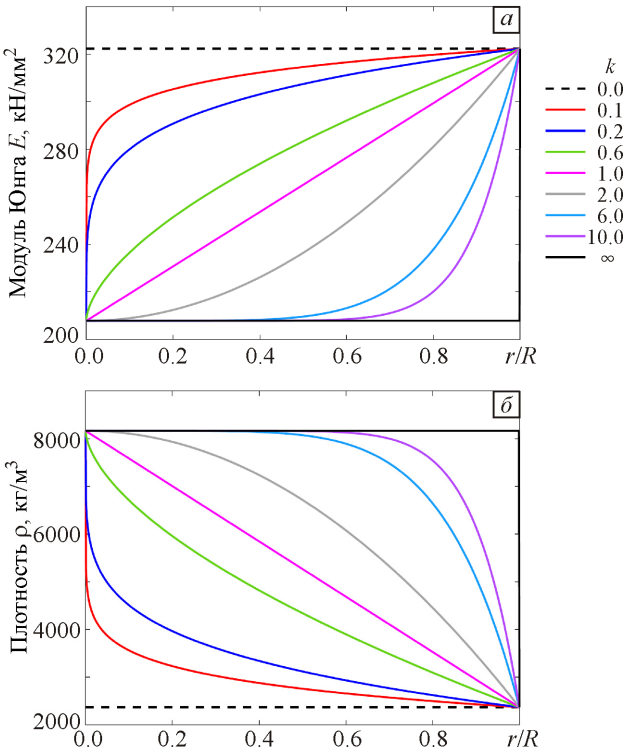


Рис. 4. Зависимость модуля Юнга (*а*) и массовая плотность (*б*) ФГ наностержня от безразмерного радиуса r/R для различных значений k (цветной в онлайн-версии)

Рассмотрим влияние различных параметров на безразмерную частоту ФГ наностержней при различных условиях. На рис. 5–9 представлены решения уравнения (84) при $\Psi_0 = \Psi_L = 10^{10}$ нН/нм. Влияние нелокального параметра на изменение безразмерной частоты ФГ наностержня для первых трех мод колебаний показано на рис. 5 при $k = 0, 0.1, 0.2, 0.6, 1.0, \infty$. На рис. 5 кривые черного цвета соответствуют результатам, полученным в рамках нелокальной теории упругости с учетом жесткости, а кривые синего, зеленого и красного цвета — классической теории упругости. Это позволяет оценить влияние нелокального параметра на результаты расчетов и референтные значения. Очевидно, что нелокальный параметр не оказывает влияния на «классические» значения безразмерной частоты. Это вновь подтверждает, что влияние масштаба нельзя оценить в рамках классического подхода. С другой стороны, хорошо видно, что с ростом нелокального параметра увеличивается безразмерная частота, определенная в рамках нелокальной теории упругости с учетом жесткости. Кроме того, рис. 5 демонстрирует влияние показателя градиента. Наибольшее значение безразмерной частоты достигается при $k = 0$ (керамика), а самое низкое значения соответствует $k = \infty$ (металл). Другими словами, с увеличением показателя градиента k наблюдается затухание безразмерной частоты.

Рисунок 6 демонстрирует важность учета масштабного параметра. Кривые безразмерных относительных частот представлены для первых трех мод колебаний при показателе градиента $k = 0.1$. Безразмерную относительную частоту находят

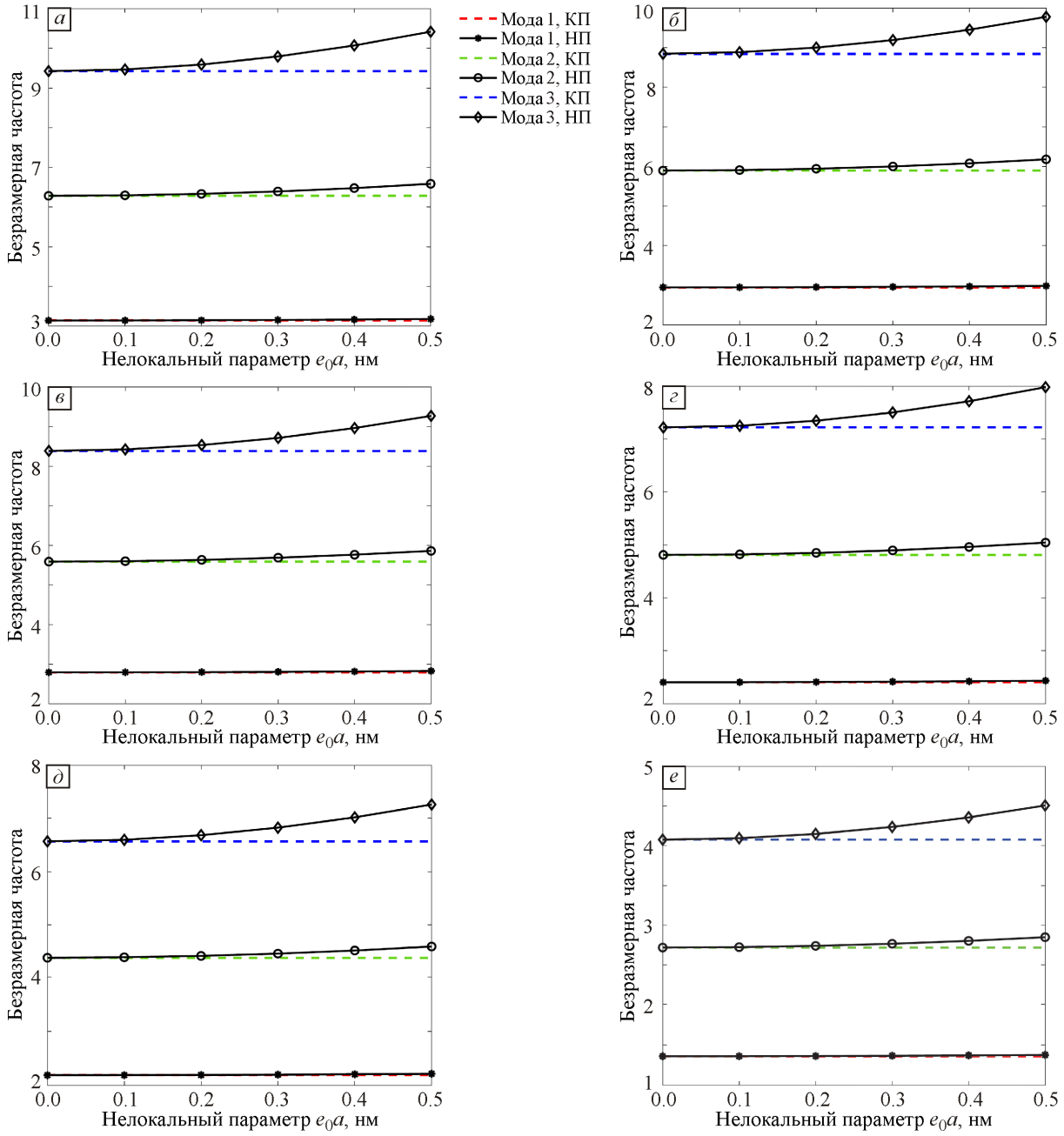


Рис. 5. Влияние нелокального параметра на безразмерную частоту для $k = 0$ (керамика) (*а*), $k = 0.1$ (*б*), 0.2 (*в*), 0.6 (*г*), 1.0 (*д*) и $k = \infty$ (металл) (*е*). КП — классический подход, НП — нелокальный подход с учетом жесткости (цветной в онлайн-версии)

как отношение безразмерной частоты, рассчитанной в рамках нелокальной теории упругости с учетом жесткости, к безразмерной частоте, определенной в рамках классической теории упругости. Как видно, с увеличением масштабного параметра возрастает безразмерная относительная частота. Значения безразмерной относительной частоты больше 1 связаны с эффектом учета жесткости в нелокальном подходе. Другим важным моментом является различие безразмерных относительных частот для трех мод. Безразмерная относительная частота имеет более низкие значения для первой моды и более высокие значения для третьей моды. Следовательно, масштабный эффект нелокальной теории упругости с учетом жесткости более выражен для высоких мод.

Влияние показателя градиента k на безразмерную частоту колебаний ФГ наностержня де-

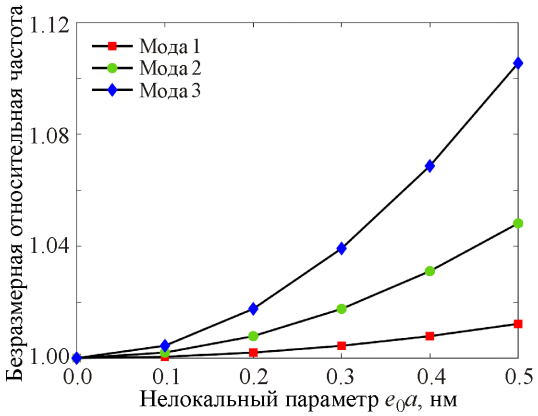


Рис. 6. Влияние нелокального параметра на безразмерную относительную частоту при первых трех модах, $k = 0.1$ (цветной в онлайн-версии)

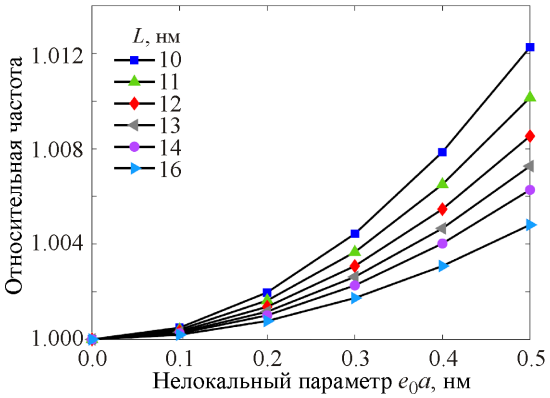


Рис. 8. Влияние длины наностержня на безразмерную относительную частоту при первой моде (цветной в онлайн-версии)

монстрирует рис. 7. Расчет значений безразмерных частот выполнен для первых трех мод при $k = 0$, 0.1, 0.2, 0.3, 0.6, 1.0. По мере увеличения показателя градиента, т.е. по мере приближения ФГ наностержня к преимущественно металлическому состоянию, отчетливо видно уменьшение значений частоты. Кроме того, рис. 7 позволяет сравнить частоты колебаний, полученные в рамках нелокальной и классической теории упругости. При этом на рис. 7, *а* нелокальным параметром e_0a пренебрегают, на рис. 7, *б* $e_0a = 0.5$ нм.

Одним из важных параметров, влияющих на колебания ФГ наностержня, является его длина. На рис. 8 и 9 показано влияние длины ФГ наностержня на относительную частоту при показателе градиента $k = 0.1$. Зависимость относительной частоты от нелокального параметра ФГ наностержня рассчитана для первой (рис. 8) и второй моды (рис. 9). Длина ФГ наностержня изменяется от 10 до 16 нм. Отметим, что более короткий наностержень имеет более высокую относительную частоту. Наностержень длиной 16 нм характеризуется наименьшими значениями относительной частоты. Это подтверждает, что масштабный эффект возрастает с уменьшением длины ФГ наностержня. Другим важным аспектом является

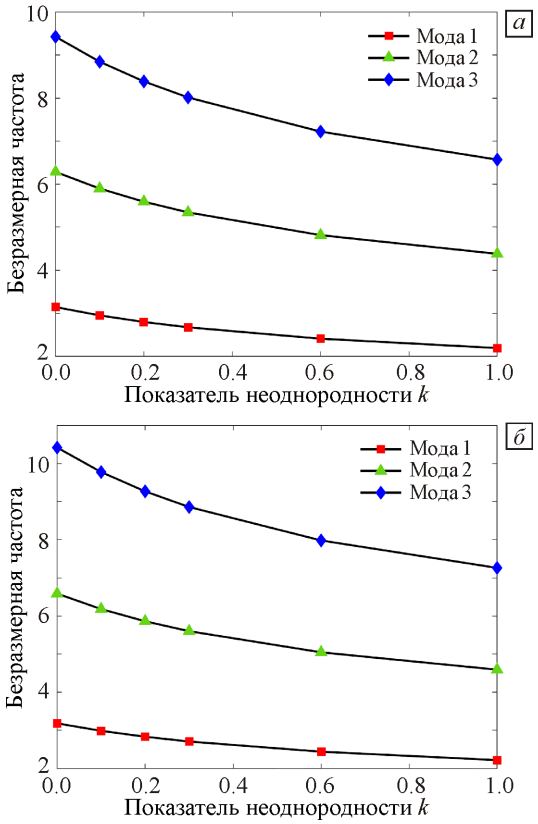


Рис. 7. Влияние показателя неоднородности на безразмерные частоты для классического (*а*) и нелокального подхода с учетом увеличения жесткости (*б*) (цветной в онлайн-версии)

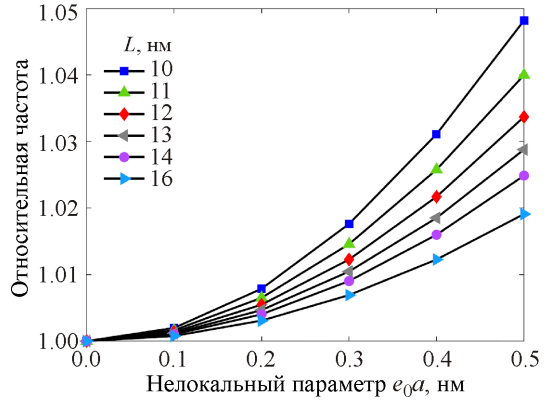


Рис. 9. Влияние длины наностержня на безразмерную относительную частоту при второй моде (цветной в онлайн-версии)

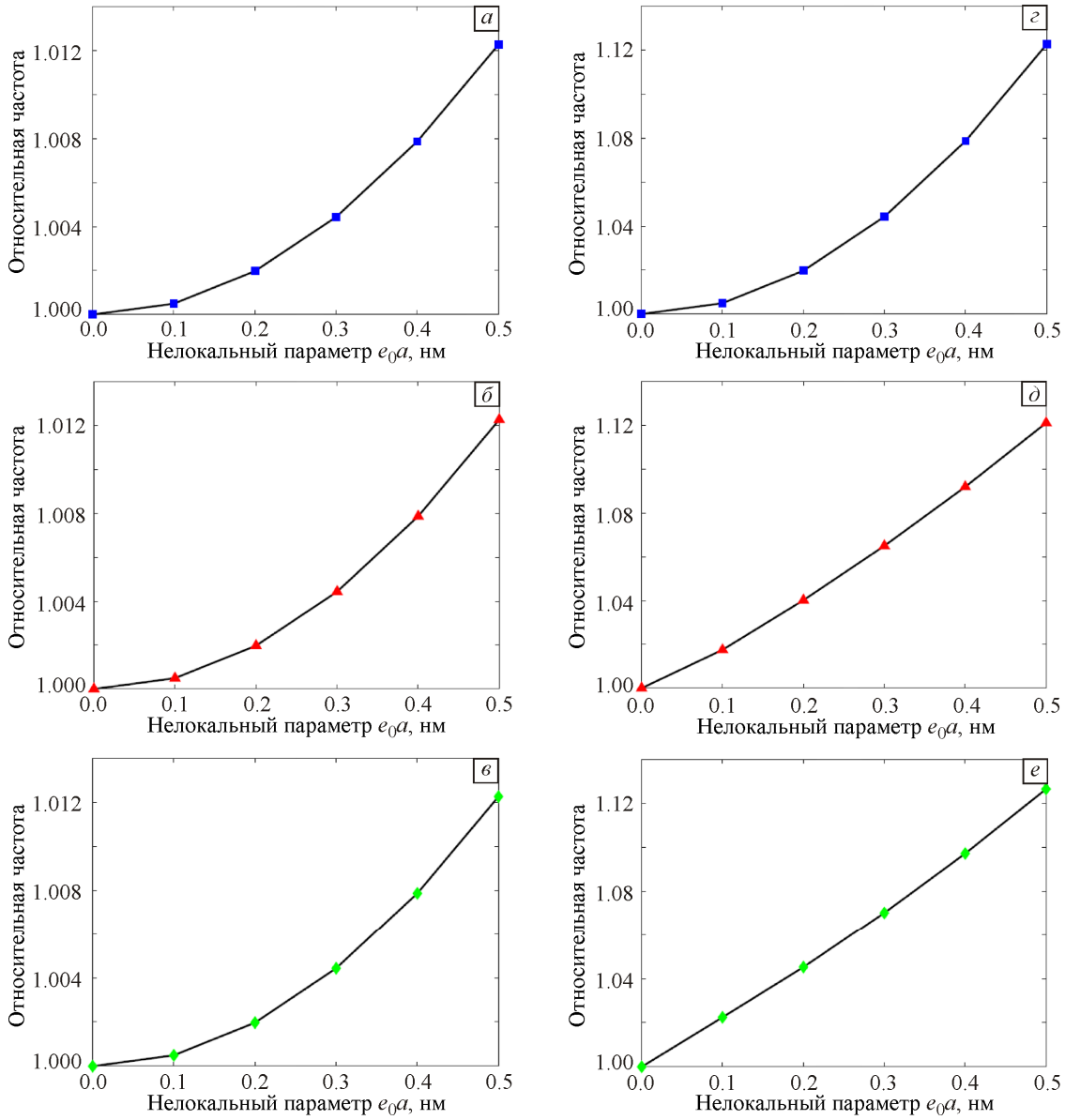


Рис. 10. Влияние нелокального параметра на относительную частоту колебаний ФГ наностержня (*а–в*) и ФГ наностержня с жесткими защемленными границами (*г–е*): $k=0$ (керамика) (*а*, *г*), $k=0.6$ (*б*, *д*), $k=\infty$ (металл) (*в*, *е*) (цветной в онлайн-версии)

взаимосвязь длины наностержня и колебательных мод. Влияние длины и нелокального параметра более выражено для более высоких мод. На рис. 10, 11 показана зависимость относительной частоты от нелокального параметра для заданных граничных условий. Кривые на рис. 10, *а–в* построены для первой моды при $k=0$, 0.6, ∞. Эти кривые также отражают влияние нелокального параметра на изменение жесткости.

На основе уравнения (73) для случая с двумя недеформируемыми защемленными концами исследовано влияние нелокального параметра на безразмерную относительную частоту (рис. 10, *г–е*). В расчетах нелокальный параметр изменяется от 0 до 0.5 нм. Поскольку при нулевом нелокальном параметре уравнение (73) решения не имеет, необходимо задать очень малое значение нелокального параметра, которое в данном случае равно $e_0a=10^{-10}$ нм. На этих рисунках также видно влияние нелокального параметра e_0a на изменение жесткости. Относительная частота для металлического стержня ($k=\infty$) выше, чем для других k, что говорит о большем влиянии нелокального параметра на материал с более высоким по-

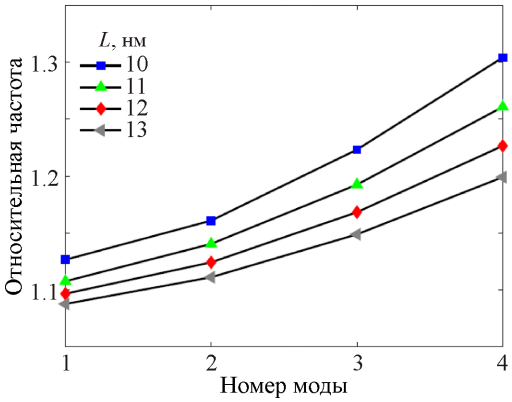


Рис. 11. Влияние длины наностержня и моды на относительную частоту ФГ наностержня (металл) с жесткими защемленными границами (цветной в онлайн-версии)

казателем градиента. На рис. 11 показано изменение относительной частоты в зависимости от моды колебаний для ФГ наностержней разной длины. Расчеты выполнены при показателе градиента $k=\infty$, нелокальном параметре $e_0a=0.5$ нм и длине стержня от 10 до 13 нм. Подчеркнем, что здесь также наблюдается усиление влияния масштабного параметра на частоту продольных колебаний ФГ наностержня. Кроме того, на собственную и относительную частоту колебаний ФГ наностержня существенное влияние оказывают условия закрепления. Полученные численные результаты показали, что нелокальный параметр, показатель градиента, длина наностержня, граничные условия играют важную роль в поведении ФГ наностержня при продольных колебаниях.

7. Выводы

В работе решена задача о продольных колебаниях ФГ композитного наностержня с учетом длины стержня при различных условиях защемления. Влияние размеров на поведение ФГ наностержня исследовано в рамках подхода нелокальной упругости с учетом жесткости. Исследован ФГ наностержень круглого поперечного сечения, характеристики материала которого изменялись в радиальном направлении. Для реализации деформируемых концов стержня использовали комплексный метод на основе разложения в ряд Фурье по синусам и преобразования Стокса. Получены решения задач о продольных колебаниях для различных граничных условий, включая задачи о стержнях с деформируемыми и недеформируемыми концами. Проведена валидация метода и выполнены численные расчеты для оценки влияния различных параметров на динамическое поведение ФГ наностержней в рамках нелокальной теории упругости с учетом жесткости. Показано, что при увеличении масштабного параметра растет собственная частота защемленного ФГ наностержня. Кроме того, масштабный параметр сильнее влияет на более высокие колебательные моды ФГ наностержня. При увеличении жесткости осевой пружины возрастают собственные частоты ФГ наностержня. Показатель градиента оказывает заметное влияние на частоту продольных колебаний ФГ наностержня: при его увеличении частота колебаний ФГ наностержня уменьшается.

Литература

1. *Naebe M., Shirvanimoghaddam K.* Functionally graded materials: A review of fabrication and properties // Appl. Mater. Today. – 2016. – V. 5. – P. 223–245.
2. *Timesli A.* Buckling behavior of SWCNTs and MWCNTs resting on elastic foundations using an optimization technique // Phys. Mesomech. – 2022. – V. 25. – No. 2. – P. 129–141. – https://doi.org/10.1134/S1029959922020047
3. *Uzun B., Kafkas U., Yayli M.O.* Free vibration analysis of nanotube based sensors including rotary inertia based on the Rayleigh beam and modified couple stress theories // Microsyst. Technol. – 2021. – V. 27. – No. 5. – P. 1913–1923.
4. *Faghidian S.A., Zur K.K., Reddy J.N.* A mixed variational framework for higher order unified gradient elasticity // Int. J. Eng. Sci. – 2022. – V. 170. – P. 103603.
5. *Civalek O., Uzun B., Yayli M.O., Akgoz B.* Size-dependent transverse and longitudinal vibrations of embedded carbon and silica carbide nanotubes by nonlocal finite element method // Eur. Phys. J. Plus. – 2020. – V. 135. – P. 381.
6. *Akgoz B., Civalek Ö.* Bending analysis of embedded carbon nanotubes resting on an elastic foundation using strain gradient theory // Acta Astronautica. – 2016. – V. 119. – P. 1–12.
7. *Eltaher M.A., Abdelrahman A.A., Esen I.* Dynamic analysis of nanoscale Timoshenko CNTs based on doublet mechanics under moving load // Eur. Phys. J. Plus. – 2021. – V. 136. – No. 7. – P. 1–21.
8. *Li C., Li S., Yao L., Zhu Z.* Nonlocal theoretical approaches and atomistic simulations for longitudinal free vibration of nanorods/nanotubes and verification of different nonlocal models // Appl. Math. Model. – 2015. – V. 39. – No. 15. – P. 4570–4585.
9. *Uzun B., Kafkas U., Yayli M.Ö.* Axial dynamic analysis of a Bishop nanorod with arbitrary boundary conditions // ZAMM. J. Appl. Math. Mech. – 2020. – V. 100. – No. 12.

10. *Numanoglu H.M., Akgoz B., Civalek Ö*. On dynamic analysis of nanorod // Int. J. Eng. Sci. – 2018. – V. 130. – P. 33–50.
11. *Yayli M.O*. An efficient solution method for the longitudinal vibration of nanorods with arbitrary boundary conditions via a hardening nonlocal approach // J. Vibr. Control. – 2018. – V. 24(11). – P. 2230–2246.
12. *Zur K.K., Faghidian S.A*. Analytical and meshless numerical approaches to unified gradient elasticity theory // Eng. Analys. Bound. Elem. – 2021. – V. 130. – P. 238–248.
13. *Li L., Hu Y., Li X*. Longitudinal vibration of size-dependent rods via nonlocal strain gradient theory // Int. J. Mech. Sci. – 2016. – V. 115. – P. 135–144.
14. *Numanoglu H.M., Ersoy H., Akgoz B., Civalek Ö*. A new eigenvalue problem solver for thermo-mechanical vibration of Timoshenko nanobeams by an innovative nonlocal finite element method // Math. Meth. Appl. Sci. – 2021.
15. *Sedighi H.M., Abouelregal A.E., Faghidian S.A*. Modified couple stress flexure mechanics of nanobeams // Physica Scripta. – 2021. – V. 96. – No. 11. – P. 115402.
16. *Civalek Ö., Uzun B., Yayli M.Ö*. Buckling analysis of nanobeams with deformable boundaries via doublet mechanics // Arch. Appl. Mech. – 2021. – V. 91. – No. 12. – P. 4765–4782.
17. *Samani M.S.E., Beni Y.T*. Size dependent thermo-mechanical buckling of the flexoelectric nanobeam // Mater. Res. Express. – 2018. – V. 5(8). – P. 085018.
18. *Omidian R., Tadi Beni Y., Mehralian F*. Analysis of size-dependent smart flexoelectric nanobeams // Eur. Phys. J. Plus. – 2017. – V. 132(11). – P. 1–19.
19. *Beni Z.T., Beni Y.T*. Dynamic stability analysis of size-dependent viscoelastic/piezoelectric nano-beam // Int. J. Struct. Stabil. Dyn. – 2022. – V. 22(05). – P. 2250050.
20. *Wang L., He X., Sun Y., Liew K.M*. A mesh-free vibration analysis of strain gradient nano-beams // Eng. Analys. Bound. Elem. – 2017. – V. 84. – P. 231–236.
21. *Yayli M.Ö., Uzun B., Deliktas B*. Buckling analysis of restrained nanobeams using strain gradient elasticity // Waves Random Complex Media. – 2021. – P. 1–20.
22. *Weng W., Lu Y., Borjalilou V*. Size-dependent thermoelastic vibrations of Timoshenko nanobeams by taking into account dual-phase-lagging effect // Eur. Phys. J. Plus. – 2021. – V. 136(7). – P. 1–26.
23. *Fazlali M., Faghidian S.A., Asghari M., Shodja H.M*. Nonlinear flexure of Timoshenko–Ehrenfest nanobeams via nonlocal integral elasticity // Eur. Phys. J. Plus. – 2020. – V. 135(8). – P. 1–20.
24. *Barretta R., Canadija M., Marotti de Sciarra F*. A higher-order Eringen model for Bernoulli–Euler nanobeams // Arch. Appl. Mech. – 2016. – V. 86(3). – P. 483–495.
25. *Li C., Tian X., He T*. Size-dependent buckling analysis of Euler–Bernoulli nanobeam under non-uniform concentration // Arch. Appl. Mech. – 2020. – V. 90(9). – P. 1845–1860.
26. *Mohammadi M., Safarabadi M., Rastgoo A., Farajpour A*. Hygro-mechanical vibration analysis of a rotating viscoelastic nanobeam embedded in a visco-Pasternak elastic medium and in a nonlinear thermal environment // Acta Mechanica. – 2016. – V. 227(8). – P. 2207–2232.
27. *Attia M.A., Emam S.A*. Electrostatic nonlinear bending, buckling and free vibrations of viscoelastic microbeams based on the modified couple stress theory // Acta Mechanica. – 2018. – V. 229(8). – P. 3235–3255.
28. *Akgoz B., Civalek Ö*. A size-dependent shear deformation beam model based on the strain gradient elasticity theory // Int. J. Eng. Sci. – 2013. – V. 70. – P. 1–14.
29. *Rajabi F., Ramezani S*. A nonlinear microbeam model based on strain gradient elasticity theory with surface energy // Arch. Appl. Mech. – 2012. – V. 82(3). – P. 363–376.
30. *Lounis A., Youcef D.O., Bousahla A.A., Bourada F., Kaci A., Heireche H., Tounsi Abdeldjebbar, Benrahou K.H., Tounsi Abdelouahed, Hussain M*. Surface effects and small-scale impacts on the bending and buckling of nanowires using various nonlocal HSDTs // Phys. Mesomech. – 2022. – V. 25. – No. 1. – P. 42–56. – https://doi.org/10.1134/S1029959922010064
31. *Ebrahimi F., Barati M.R., Civalek Ö*. Application of Chebyshev–Ritz method for static stability and vibration analysis of nonlocal microstructure-dependent nanostructures // Eng. Comp. – 2020. – V. 36. – P. 953–964.
32. *Akgoz B., Civalek Ö*. Thermo-mechanical buckling behavior of functionally graded microbeams embedded in elastic medium // Int. J. Eng. Sci. – 2014. – V. 85. – P. 90–104.
33. *Civalek Ö., Uzun B., Yayli M.Ö*. An effective analytical method for buckling solutions of a restrained FGM nonlocal beam // Comput. Appl. Math. – 2022. – V. 41(2). – P. 1–20.
34. *Civalek Ö., Uzun B., Yayli M.Ö*. Longitudinal vibration analysis of FG nanorod restrained with axial springs using doublet mechanics // Waves Random Complex Media. – 2021. – P. 1–23.
35. *Faghidian S.A., Zur K.K., Reddy J.N., Ferreira A.J.M*. On the wave dispersion in functionally graded porous Timoshenko–Ehrenfest nanobeams based on the higher-order nonlocal gradient elasticity // Compos. Struct. – 2022. – V. 279. – P. 114819.
36. *Uzun B., Yayli M.Ö*. A solution method for longitudinal vibrations of functionally graded nanorods // Int. J. Eng. Appl. Sci. – 2020. – V. 12(2). – P. 78–87.
37. *Jalaei M.H., Thai H.T., Civalek Ö*. On viscoelastic transient response of magnetically imperfect functionally graded nanobeams // Int. J. Eng. Sci. – 2022. – V. 172. – P. 103629.
38. *Uzun B., Civalek Ö., Yayli M.Ö*. Vibration of FG nanosized beams embedded in Winkler elastic foundation

and with various boundary conditions // Mech. Based Design Struct. Machin. – 2020. – P. 1–20.
39. *Uzun B., Yayli M.Ö.* Nonlocal vibration analysis of Ti-6Al-4V/ZrO_2 functionally graded nanobeam on elastic matrix // Arab. J. Geosci. – 2020. – V. 13(4). – P. 1–10.
40. *Zenkour A.M., Radwan A.F.* A compressive study for porous FG curved nanobeam under various boundary conditions via a nonlocal strain gradient theory // Eur. Phys. J. Plus. – 2021. – V. 136(2). – P. 248.
41. *Esen I., Daikh A.A., Eltaher M.A.* Dynamic response of nonlocal strain gradient FG nanobeam reinforced by carbon nanotubes under moving point load // Eur. Phys. J. Plus. – 2021. – V. 136(4). – P. 1–22.
42. *Dinachandra M., Alankar A.* Static and dynamic modeling of functionally graded Euler–Bernoulli microbeams based on reformulated strain gradient elasticity theory using isogeometric analysis // Compos. Struct. – 2022. – V. 280. – P. 114923.
43. *Mollamahmutoglu C., Mercan A.* A novel functional and mixed finite element analysis of functionally graded micro-beams based on modified couple stress theory // Compos. Struct. – 2019. – V. 223. – P. 110950.
44. *Abadi M.M., Daneshmehr A.* An investigation of modified couple stress theory in buckling analysis of micro composite laminated Euler–Bernoulli and Timoshenko beams // Int. J. Eng. Sci. – 2014. – V. 75. – P. 40–53.
45. *Arshid E., Arshid H., Amir S., Mousavi S.B.* Free vibration and buckling analyses of FG porous sandwich curved microbeams in thermal environment under magnetic field based on modified couple stress theory // Arch. Civil Mech. Eng. – 2021. – V. 21(1). – P. 1–23.
46. *Tang Y., Qing H.* Elastic buckling and free vibration analysis of functionally graded Timoshenko beam with nonlocal strain gradient integral model // Appl. Math. Model. – 2021. – V. 96. – P. 657–677.
47. *Zenkour A.M., Radwan A.F.* A nonlocal strain gradient theory for porous functionally graded curved nanobeams under different boundary conditions // Phys. Mesomech. – 2020. – V. 23. – No. 6. – P. 601–615. – https://doi.org/10.1134/S1029959920060168
48. *Hosseini S.A.H., Rahmani O.* Free vibration of shallow and deep curved FG nanobeam via nonlocal Timoshenko curved beam model // Appl. Phys. A. – 2016. – V. 122. – P. 169.
49. *Mehralian F., Beni Y.T.* Vibration analysis of size-dependent bimorph functionally graded piezoelectric cylindrical shell based on nonlocal strain gradient theory // J. Brazil. Soc. Mech. Sci. Eng. – 2018. – V. 40(1). – P. 1–15.
50. *Sahmani S., Safaei B., Aldakheel F.* Surface elastic-based nonlinear bending analysis of functionally graded nanoplates with variable thickness // Eur. Phys. J. Plus. – 2021. – V. 136(6). – P. 1–28.
51. *Ansari R., Hasrati E., Faghih Shojaei M., Gholami R., Mohammadi V., Shahabodini A.* Size-dependent bending, buckling and free vibration analyses of microscale functionally graded mindlin plates based on the strain gradient elasticity theory // Lat. Am. J. Solids Struct. – 2016. – V. 13(4). – P. 632–664.
52. *Liu C., Yu J., Xu W., Zhang X., Wang X.* Dispersion characteristics of guided waves in functionally graded anisotropic micro/nano-plates based on the modified couple stress theory // Thin-Walled Struct. – 2021. – V. 161. – P. 107527.
53. *Ashrafi Dehkordi A., Jahanbazi Goojani R., Tadi Beni Y.* Porous flexoelectic cylindirical nanoshells based on the non-classical continuum theory // Appl. Phys. A. – 2022. – V. 128. – P. 478.
54. *Jiang Y., Li L., Hu Y.* Strain gradient elasticity theory of polymer networks // Acta Mech. – 2022. – V. 233(8). – P. 3213–3231.
55. *Eringen A.C.* On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves // J. Appl. Phys. – 1983. – V. 54(9). – P. 4703–4710.
56. *Lim C.W.* Is a nanorod (or nanotube) with a lower Young's modulus stiffer? Is not Young's modulus a stiffness indicator? // Sci. China Phys. Mech. Astron. – 2010. – V. 53(4). – P. 712–724.
57. *Zhang X., Zheng S., Zhou Y.* An effective approach for stochastic natural frequency analysis of circular beams with radially varying material inhomogeneities // Mater. Res. Express. – 2019. – V. 6(10). – P. 105701.
58. *Talha M., Singh B.* Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory // Appl. Math. Model. – 2010. – V. 34(12). – P. 3991–4011.

Поступила в редакцию 05.07.2022 г.,
после доработки 19.08.2022 г.,
принята к публикации 21.08.2022 г.

Сведения об авторах

Büsra Uzun, PhD Student, Bursa Uludag University, Turkey, buzun@uludag.edu.tr
Ömer Civalek, Prof., Akdeniz University, Turkey; China Medical University, Taiwan, civalek@yahoo.com
Mustafa Özgür Yayli, Prof., Bursa Uludag University, Turkey, ozguryayli@uludag.edu.tr