NORMAL DAĞILIMLI İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLARIN ÖTELEME YÜZEYLERİ

Serap SEVİM

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NORMAL DAĞILIMLI İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLARIN ÖTELEME YÜZEYLERİ

Serap SEVİM
0009-0000-5545-7946

Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2024
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NORMAL DAĞILIMLI İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLARIN ÖTELEME YÜZEYLERİ

Serap SEVİM

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Cengizhan MURATHAN

Lopez (2011) 3 boyutlu hiperbolik uzayın modellerinden birisi olan üst yarı uzay model uzay üzerinde tanımlı olan minimal öteleme yüzeylerin bir karakterizasyonunu vermiştir. İstatistiğin önemli dağılımlardan birisi Normal (Gauss) dağılımlarıdır. Bu dağılıma sahip istatistik modelin, hiperbolik uzayın modellerinden birisi olan Poincare üstyarı-düzlem model ile yakından bir ilişkisi vardır. Bu üst yarı düzlem üzerinde tanımlı olan torsiyonsuz afin koneksiyona göre Riemann metriği paralel değildir. Böylece Lopez (2011) çalışmasından yola çıkarak istatistiksel yapıya sahip olan üç boyutlu üst yarı uzay modelin istatistiksel yüzeyin minimal olma koşulu çalışılmıştır. Bu anlamda literatüre bir istatistiksel manifoldun bir istatistiksel yapıya sahip yüzey örnekleri kazandırılmıştır.

.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik uzay, İstatiksel manifoldlar, İstatistiksel altmanifoldlar, Öteleme yüzeyleri, Normal dağılımlar, Poincare üst yarı düzlem modeli
2024, xv + 91 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

THE TRANSLATION SURFACES ON STATISTICAL MANIFOLDS WITH NORMAL DISTRIBUTIONS

Serap SEVİM

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

Lopez (2011), one of the models of three-dimensional hyperbolic space, provides a characterization of minimal displacement surfaces defined on the space. One of the significant distributions in statistics is the Normal (Gaussian) distribution. There is a close relationship between this distribution and the Poincaré upper half-plane model, which is one of the models of hyperbolic space. According to the torsion-free affine connection defined on the upper half-plane, the Riemann metric is not parallel. Thus, starting from Lopez's (2011) study, the condition for the statistical surface of a three-dimensional upper half-space model with statistical structure to be minimal has been studied. In this sense, examples of statistical manifolds with a statistical structure have been introduced into the literature.

Key words: Hyperbolic space, Statistical manifolds, Statistical submanifolds, Translation surfaces, Normal distributions, Poincare upper half model
2024, viii + 86 pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenim sürecimde, bilgi ve tecrübelerini aktaran, tüm samimiyetiyle çalışmalarım boyunca beni destekleyen, cesaretlendiren, yalnızca akademik anlamda başarılarıyla değil; karakteri ve yaşantısı ile de kendisini örnek aldığım, değerli hocam, danışmanım Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN'a,

Öğrencisi olmakla gurur duyduğum Değerli hocam Prof. Dr. Kadri ARSLAN'a ve Lisans öğrenimim boyunca derslerine katılma şansını elde ettiğim, akademik anlamda bana yeterli desteği sağlayan diğer tüm hocalarıma,

Başarılarımın destekçileri olan annem ve babam'a, yüksek lisans eğitimini almam konusunda beni yüreklendiren ve yanımda olan hayat arkadaşım Berkan SEVİM'e ve zamanından çaldığım hayatta motivasyon kaynağım olan canım oğlum Efe SEVİM'e,

Sonsuz teşekkür ederim.

Serap SEVİM
23/07/2024

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET....viii
ABSTRACT....ix
TEŞEKKÜR....x
SİMGELER DİZİNİ....xii
ŞEKİLLER DİZİNİ....xiv
ÇİZELGELER DİZİNİ....xv
1.GİRİŞ…..…… 1
2. KURAMSAL TEMELLER....21
2.1. Diferansiyellenebilir Manifold …… 21
2.2. İstatistiksel Model…… 28
2.3. İstatistiksel Manifoldlar…… 50
3. MATERYAL ve YÖNTEM....55
3.1. İstatistiksel Altmanifoldlar…….. …55
3.2 İstatiksel Hiperbolik üst yarı uzay modeli…… 57
4. BULGULAR ve TARTIŞMA....61
4.1. İstatiksel Hiperbolik üst yarı uzay modelde yüzeyler ……61
4.2 İstatiksel Hiperbolik üst yarı uzay modelinde öteleme yüzeyleri……63
5.TARTIŞMA ve SONUÇ……...81
KAYNAKLAR……82
ÖZGEÇMİŞ……91

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
∇, ∇^{α}	Afin konneksiyonu
$S[f]$	Alan fonksiyoneli
∇^{α}	Amari-Chentsov koneksiyon
$\mathfrak{O}$	Bir bölge
S	Boştan farklı bir küme
$E_{\eta}(x)$	Beklenen değer
$\nabla^{(-1)}, \nabla^{1}$	Birinci çeşit Christoffel bileşenleri belli konneksiyon
M	Boştan farklı bir küme
$\partial\Omega$	Bir yüzeyin sınırı
μ	Beklenen değer
$\Gamma_{ij,k}^{\alpha}$	Christoffel sembolleri
$\mathcal{F}$	Cisim
ψ	Diferensiyellenebilir fonksiyon
$\mathcal{K}$	$\nabla^{(-1)}$ ve ∇^{1} Afin koneksiyonlarının farkı
h, h^{*}	$\widetilde{\nabla}$ ve $\widetilde{\nabla}^{*}$ Afin konneksiyonalarına göre ikinci temel form
A, A^{*}	$\widetilde{\nabla}$ ve $\widetilde{\nabla}^{*}$ Afin konneksiyonalarına göre şekil operatörleri
∇^{*}	∇ nın Eşlenik konneksiyonu
H^{*}	∇^{*}Konneksiyonuna göre ortalama eğrilik vektör alanı
H^{LC}	∇^{LC} Konneksiyonuna göre ortalama eğrilik vektör alanı
A_N^{*}	Eşlenik şekil operatörü
$grad(F)$	F nin gradienti
$gradf$	f fonksiyonunun gradienti
g^{F}	Fisher bilgi metriği
W	$\phi_s \; ve \; \phi_t$'nin iç çarpımının uzunluğu (normu)
$\mathcal{H}^{3}$	Hiperbolik üst yarı uzay
π	İzdüşüm fonksiyon
i	İmmersiyon
$\eta, \dot{\eta}$	İstatistik model S üzerinde farklı parametre değerleri
$\mathbb{S}^{2}$	İki boyutlu küre yüzeyi
$S(x, \theta)$	İstatiksel model
U	Koordinat bölgesi, Açık alt bölge
$\widetilde{\nabla}_{\phi_s}\phi_s$	Kovaryant türev
$[\,,]$	Lie braket operatörü
∇^{LC}	Levi-Civita koneksiyonu
$l_x(\eta)$	Logaritma olabilirlik fonksiyonu
(U, x)	M'nin bir haritası
$\mathcal{A}$	M'nin bir differensiyellenebilir atlası
$\tau_{C^{\propto}}$	M nin diferensiyellenebilir yapısından indirgenmiş topoloji
$v_p(f)$	M^{n}'nin p noktasındaki tanjant (teğet) uzayı
g_M	M nin bir Riemannian metriği

$\mathcal{F}(M)$	M üzerinden $\mathbb{R}$ ye diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi
M^n	n- boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold
(M, g_M)	n- boyutlu bir Riemannian manifold
$\mathbb{R}^{n+1}$	(n+1) Boyutlu reel uzay
(x, θ)	n-Boyutlu bir manifold
$d_{\mathbb{F}}$	Normal dağılımın Fisher bilgi metriği
$p(x, \theta)$	Olasılık yoğunluk fonksiyonu
P	Olasılık ölçümü
p	Olasılık yoğunluk fonksiyonu
$E(\Psi)V$	Olasılık dağılımının beklenen (ortalama) değeri
$\mathbb{E}^n$	Öklid uzay
ϕ	Öteleme yüzey
T_a	Öteleme dönüşümü
χ, S	Örnek uzayı
$\mathcal{E}$	Parametre uzayı
s, t	Parametre
E	Parametre uzay
θ	Parametre değeri
f, g	Reel değerli diferensiyellenebilir fonksiyon
Ψ , Θ	Rastgele iki bağımsız değişken
$g^{\mathbb{F}}$	Riemann metrik tensörü
ds_E^2	$\mathbb{R}^{n+1}$ üzerindeki Euclead metriği
Ω	S' nin kuvvet cümlesi
$\partial\theta_j$	Türev operatörü
T_pM	Tanjant vektörlerin cümlesi
TM	Tanjant demeti
(M, τ)	Topolojik uzay
X	Türevlenebilir bir vektör alanı
$\mathbb{R}^3$	3 Boyutlu Euclead uzayı
$\Gamma(TM)$	Vektör alanların cümlesi
x	Veri kümesi
σ^2	Varyans
M_t	Yüzeyler alan fonksiyoneli
H	Yüzeyin ortalama eğriliği
E, F, G	Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları
$\mathrm{e}, \mathrm{f}, \mathrm{g}$	Yüzeyin ikinci temel formunun katsayıları
$\partial\theta_j$	Türev operatörü
T_pM	Tanjant vektörlerin cümlesi
TM	Tanjant demeti
A_N	Şekil operatörü
ϕ_s, ϕ_t	Yüzeyin teğet uzayının baz vektörleri
N	Yüzeyin birim normal vektör alanı
$[X, Y]$	X ile Y' nin braketi

ŞEKİLLER DİZİNİ

		Sayfa
Şekil 1.1.	Normal Dağılım	4
Şekil 1.2.	Doğada Normal Dağılım	4
Şekil 1.3.	Monge Yaması.	6
Şekil 1.4	Sabun köpüğü	11
Şekil 1.5.	Catenary (zincir) Eğrisi	12
Şekil 1.6.	Catenoid ve Helikoid yüzeyler	13
Şekil 1.7.	Scherk yüzeyi	13
Şekil 1.8.	İki kanatlı hiperboloid	17
Şekil 2.2.	İstatistik model	34
Şekil 2.3.	Poincare üst yarı düzlem model	40
Şekil 2.4.	Normal dağılım ile Poincare üst yarı düzlem ilişkisi	41
Şekil 2.5.	Normal dağılımın $P_{\mathbb{H}}$ üst yarı düzlem model ile gösterimi	41

ÇİZELGELER DİZİNİ

		Sayfa
Çizelge 2.1.	Hilesiz iki zar atıldığında elde edilen örnek uzay	30

1. GİRİŞ

Günümüzde, dijital teknolojilerin etkileri hemen hemen her yerde görülebilir. Akıllı telefonlar, tabletler, dizüstü bilgisayarlar ve buna benzer diğer akıllı cihazlarla çevremiz donatılmış ve hayatımızın bir parçası olmuşlardır. Örneğin bir internet sitesine giriş yapıldığında sizin hangi haberleri takip ettiğiniz ne çeşit reklamları ve ne tür ürünleri tercih ettiğiniz tespit edilerek bir sonraki adımda sizlere bu ürünlerle ilgili çeşitli bilgiler, telefonunuza kısa mesaj veya sosyal medya hesaplarınıza reklam sayfaları olarak sunulmaktadır. Günlük hayatımızdaki alışkanlıklarımız bu akıllı cihazlar ve yazılımlarla elde edilen verilerle öngörülebilir hale gelmektedir. İngiliz matematikçi ve veri bilimcisi Clive Humbly (2024) ile ilişikilendirilen "Veri, yeni petrol" ifadesi, elde edilen verinin ne kadar değerli olduğunu ortaya koymaktadır. Palmer (2024), Clive Humby(2024)'in bu ifadesini "Veri petrol gibi değerlidir, ancak refine (arıtma) edilmemişse gerçekten kullanılamaz" şeklinde yeniden yorumlamıştır. Bu anlamda, istatistik bilimi verilerin doğru bir şekilde değerlendirilip, ilgili istatistiksel (matematiksel) modellerin doğru şekilde ortaya konulmasında bizlere yardımcı olmaktadır. Doğru istatistik modeller, makine öğrenmesi ve sonrasında yapay zeka kavramlarını hayatımıza kazandırılması noktasında etken olmuşlardır.

x veri kümesi, χ örnek uzayı, E parametre uzayı ve $p(x,\theta)$ olasılık yoğunluk fonksiyon olmak üzere

$$S(x,\theta) = \{p(x,\theta) \int_{x\in\chi} p(x,\theta) = 1,\ p(x,\theta) > 0, \theta = (\theta_1, \dots, \theta_1) \in E \subset \mathbb{R}^n\}$$

kümesi

$$\varphi: E \subset \mathbb{R}^n \to S(x,\theta), \theta \to\ p(x,\theta)$$

dönüşümü

i) birebir ,

ii) $rank\,\varphi = boyE = n$.

şartları sağlanıyor veya bir başka deyişle bir dahil etme dönüşümü (immersiyon) olması isteniyor ise $S(x,\theta)$ kümesi istatiksel model ve (E,φ) ikilisi parametre uzayı olarak adlandırılır (Amari, 1985; Calin ve Ovidiu ,2014).
Bu yaklaşım istatiksel model ile manifold kavramı arasında doğal bir ilişki kurar. Böylece $S(x,\theta)$ n-boyutlu bir manifold olarak düşünülebilir. Bu manifoldun elemanları olasılık dağılımların bir ailesi gözü ile bakılabilir.

Diğer yandan, aynı bir $S(x,\theta)$ istatistiksel model üzerinde farklı parametre değerleri $\theta = (\theta_1,\dots,\theta_n)$ ve $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1,\dots,\hat{\theta}_n\}$'ye karşılık gelen $p(x,\theta)$ ve $p\left(x,\hat{\theta}\right)$ noktalarını karşılaştırmada uygun aparatlardan birisi Fisher bilgi matrisidir. Parametre değerler arasındaki farkın istatiksel olarak anlamlı olup olmadığında bizlere yardımcı olur.

Fisher bilgi matrisi birbirlerinden bağımsız olarak Jeffreys (1946) ve Rao (1945) tarafından tanıtıldı.

Bir $S(x,\theta)$ istatistiksel model üzerinde Fisher bilgi matrisinin bileşenleri

$$g_{ij}^{F}(\theta) = \int_{x\in\chi} \frac{\partial(\log(p(x,\theta))}{\partial\theta_i}\frac{\partial(\log(p(x,\theta))}{\partial\theta_j}p(x,\theta)dx$$

olarak tanımlanır (Amari, 20125; Calin ve Udrişte, 2014).

Bir istatistiksel model üzerinde Fisher bilgi matrisi simetriktir, pozitif tanımlı ve dejenere değildir ve bir 2-lineer dönüşüme karşılık gelir. Bu özelikler bir $S(x,\theta)$ istatiksel model üzerinde lokal koordinatları cinsinden

$$g^{F} = \sum_{i=1}^{n} g_{ij}^{F}(\theta)d\theta_i d\theta_j$$

biçiminde bir Riemann metriğini tanımlama şansını verir. Böylece Fisher bilgi matrisi istatistiğin köşe taşlarından birini oluşturur.

$\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir $S(x,\theta)$ istatiksel model üzerinde yerel koordinatlara göre Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{ij,k}^{\alpha} = \int_{x\in\chi} \left\{ \frac{\partial^2(\log(p(x,\theta))}{\partial\theta_i\partial\theta_j} + \frac{1-\alpha}{2} \left(\frac{\partial(\log(p(x,\theta))}{\partial\theta_i} \frac{\partial(\log(p(x,\theta))}{\partial\theta_j} \right\} \times \left(\frac{\partial\left(\log\left(p(x,\theta)\right)\right)}{\partial\theta_k} p(x,\theta) \right) dx$$

biçiminde tanımlı olup, literatürde bükümsüz (torsiyonsuz) ∇^{α} afin koneksiyonu, Amari-Chentsov α- koneksiyon olarak bilinir (Amari, 1985; Calin Udrişte, 2014).

Daha fazlası ∇^{α} Amari-Chentsov koneksiyon

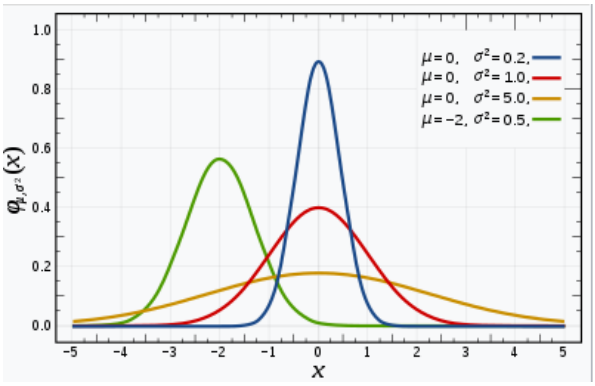
$$\partial\theta_i g^F\left(\partial\theta_j, \partial\theta_k\right) = g^F\left(\nabla^{\alpha}_{\partial\theta_i}\partial\theta_j, \partial\theta_k\right) + g^F\left(\partial\theta_j, \nabla^{-\alpha}_{\partial\theta_i}\partial\theta_k\right)$$

eşitliğini sağlar ve $(g^F, \nabla^{\alpha}, \nabla^{-\alpha})$ üçlüsü $S(x,\theta)$ istatiksel model üzerinde bir istatiksel yapı olarak isimlendirilir (Amari, 1985). Burada $\alpha = 0$ olduğunda istatistiksel yapı Riemann yapıya döner ve aşikar istatistiksel yapı olarak adlandırılır.

Günlük hayatımızda karşımıza sıklıkla çıkan istatiksel modellerden birisi μ beklenen değer, σ^2 varyans örnek uzayın varyansını göstermek üzere

$$S\left(x,(\mu,\sigma^2)\right) = \left\{\theta = (\mu,\sigma) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+} : p(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, x \in \mathbb{R}\right\} \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlı normal (Gauss) dağılımıdır.



Şekil 1.1. Normal dağılım (Normal distribution, 2024)



Şekil 1.2. Doğada normal dağılım

Normal dağılımın Fisher bilgi metriği ve Amari-Chensov α- koneksiyonu sırasıyla

$$d_{\mathbb{F}} = \frac{d\mu^2 + 2d\sigma^2}{\sigma^2},$$

ve

$$\nabla^{\alpha}_{\partial\mu}\partial\mu = \frac{1-\alpha}{\sigma}\partial\sigma, \nabla^{\alpha}_{\partial\mu}\partial\sigma = -\frac{1+\alpha}{\sigma}\partial\mu = \nabla^{\alpha}_{\partial\sigma}\partial\mu = \frac{1-\alpha}{2\sigma}\partial\sigma, \nabla^{\alpha}_{\partial\sigma}\partial\sigma = -\frac{1+\alpha}{2\sigma}\partial\sigma$$

dır (Furuhata vd., 2021). Dikkat edilirse bu istatistik modelin hiperbolik uzayın Poincare üst yarı düzlem model ile yakın bir ilişkisi vardır.

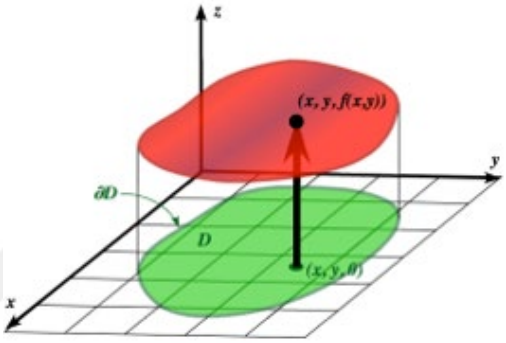
Diferensiyel geometri açısından bir (M, g) Riemann manifoldu böyle bir istatiksel yapı ile donatılmış ise Riemann manifold istatiksel manifold olarak adlandırılır (Lauritzen, 1987). Bu kavram bilgi geometrisi ile (afin) diferensiyel geometri arasında kayda değer bir ilişki kurar (Amari, 1985; Nomizu ve Sasaki, 1994; Matsuzoe, 2010).

Vos (1989), istatistiksel manifoldların alt manifoldların Gauus-Weingarten formülleri, Gauss ve Codazzi denklemlerin tanıtılmasında öncülük etmiştir. Daha sonraları istatiksel manifoldların hiperyüzeylerini araştırmış ve temel özeliklerini vermiştir. Son zamanlarda geometrinin değişik alanlarında uygulama alanı bulmuştur.

Daha sonra bu teori, hemen hemen değme yapılı istatistiksel manifoldlar (Takano, 2006), hemen hemen kompleks istatistiksel manifoldlar (Furuhata vd.,2016 ; Milijevic, 2015; Milijevic, 2019; Takano, 2010), istatistiksel Sasakian manifoldlar (Akbari ve Malek, 2021; Balgeshir 2022; Furuhata vd. 2017;), hemen hemen kosimplektik istatistiksel manifoldlar (Küpeli Erken vd.,2020; Yan vd., 2024), Kenmotsu istatistiksel manifoldlar (Furuhata vd., 2017; Siddiqui vd., 2021), hemen hemen Norden istatistiksel manifoldlar (Peyghan vd., 2022; Samereh vd., 2022), istatistiksel submersiyonlar (Aytimur ve Özgür, 2019; Balgeshir ve Salahvarzi, 2024; Kazan ve Takano, 2023; Siddiqui vd., 2021; Takano, 2006; Takano vd., 2023; A. D. Vîlcu, ve G. E. Vîlcu, 2015), istatistiksel manifoldlar üzerinde simplektik yapılar ve Hessian geometri (Noda, 2011; Shima ve Yagi, 1997; Shima, 2007) gibi geometrinin değişik alanlarında uygulama alanı bulmuştur.

Aynı sınıra sahip tüm yüzeyler içerisinde minimum alana sahip olanı bulma problemi analizde bir varyasyon problemi olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu tip yüzeyler minimal yüzeyler olarak adlandırılır ve günümüzde hala sınıflandırılması açık problem olarak durmaktadır. Minimal yüzeylere dair ilk çalışmalar J.J. Lagrange tarafından yapıldığı bilinmektedir (Lagrange, 1762; Fraser, 1992). Özetle 3 boyutlu Euclead uzayı $\mathbb{R}^3$ de bir

$M_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in \mathrm{D}\}$ yüzeyi göz önüne alınsın. $\mathrm{D} \subset M, \partial\mathrm{D}$ sınırı ile belli bir bölge olsun. Böylece $\partial\Omega$ sınırına sahip tüm yüzeyler içerisinde alanı minimum olan yüzey için diferansiyellenebilir bir f fonksiyonu hangi koşulları sağlamalıdır sorunun cevabını bulmak gerekir.



Şekil 1.3. Monge yaması (Treibergs, 2016)

$\mathbb{R}^4$'de $X(u, v) = (u, v, f(u, v), g(u, v))$ Monge yaması ile verilen yüzeylerin ortalama ve Gauss eğrilikleri ilgili özelikler (Bulca ve Arslan, 2013) de çalışılmıştır.

M_f yüzeyinin alan fonksiyoneli

$$S[f] = \int_{\mathrm{D}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy = \int_{\mathrm{D}} \sqrt{1 + (gradf)^2} dxdy$$

biçiminde tanımlanır. Burda varayasyon hesapları ile yapılacak olan tartışma (Colding, ve Minicozzi, 2011; Vargas, 2018) çalışmasından esinlenmiştir.

$h: \mathrm{D} \to \mathbb{R}$, Ω nın sınırı $\partial\,\mathrm{D}$ üzerinde sıfır olan bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun.

$$f_t: \mathrm{D} \to \mathbb{R}, f_t(x, y) = f(x, y) + th(x, y)$$

1-parametreli fonksiyonlar ailesi yardımıyla M_t=$M_{f(t)}$ yüzeyler ailesi elde edilir. Dikkat edilirse $\partial\,\Omega$ üzerinde h fonksiyonun sıfıra eşit olduğundan M_t yüzeyler ailesi ile $M_{f(t)}$ aynı sınıra sahiptir.

Böylece M_t yüzeyler alan fonksiyoneli

$$S[f_t] = \int_D \sqrt{1 + f_{tx}^2 + f_{ty}^2}\, dxdy = \int_D \sqrt{1 + (gradf_t)^2}\, dxdy$$

dir. Bununla birlikte $f = f_0$ a karşılık gelen alan $S[f]$ minum ise

$$S[f] \leq S[f_t]$$

olmalıdır. Bu nedenle $t = 0$ değeri $S[f_t]$ nin kritik noktası olmalıdır. Bunun anlamı

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S[f_t]_{t=0} &= \frac{d}{dt}\iint_D \sqrt{1 + (gradf_t)^2}\, dxdy \\ &= \iint_D \frac{d}{dt}\sqrt{1 + (gradf_t)^2}_{t=0} dxdy \\ &= 0\end{aligned}$$

dır. Zincir kuralı yardımıyla

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sqrt{1 + (gradf_t)^2} &= -\frac{< gradf_t, gradh >}{\sqrt{1 + (gradf_t)^2}} \\ &= -< \frac{gradf_t}{\sqrt{1 + (gradf_t)^2}}, gradh >\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece $t = 0$ da bir önceki denklem

$$\frac{d}{dt}S[f_t]_{t=0} = \iint_D -< \frac{gradf}{\sqrt{1 + (gradf)^2}}, gradh > dxdy = 0$$

eşitliğine dönüşür.

Diğer taraftan analiz ve diferensiyellenebilir manifoldlar teorisinden ψ bir diferensiyellenebilir fonksiyon ve X bir türevlenebilir bir vektör alanı iken

$$div(\psi X) =< X, grad\psi > +\psi div(X)$$

eşitliği daima geçerlidir. Bu denklemde $\psi = h$ ve $X = \frac{gradf}{\sqrt{1+(gradf)^2}}$ alınırsa

$$-< \frac{gradf}{\sqrt{1+(gradf)^2}}, gradh >$$

$$= h(div\left(\frac{gradf}{\sqrt{1+(gradf)^2}}\right) - div\left(h\left(\frac{gradf}{\sqrt{1+(gradf)^2}}\right)\right)$$

eşitliğini elde ederiz.

Böylece son denklem

$$\frac{d}{dt}S[f_t]_{t=0} = \iint_{\mathrm{D}} -< \frac{gradf}{\sqrt{1+(gradf)^2}}, gradh > dxdy$$

$$= \iint_{\mathrm{D}} h\left(div\left(\frac{gradf}{\sqrt{1+(gradf)^2}}\right)\right)dxdy$$

$$- \iint_{\mathrm{D}} div\left(h\left(\frac{gradf}{\sqrt{1+(gradf)^2}}\right)\right)dxdy = 0$$

eşitliğine dönüşür. Divergence teoremi yardımıyla elde edilen

$$\iint_{\mathrm{D}} div\left(h\left(\frac{gradf}{\sqrt{1+(gradf)^2}}\right)\right))dxdy = \int_{\partial \mathrm{D}} h\left(\frac{gradf}{\sqrt{1+(gradf)^2}}\right)ds$$

biçimindeki eşitlik yukardaki son denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt}S[f_t]_{t=0} = \iint_{\mathrm{D}} h\left(div\left(\frac{gradf}{\sqrt{1+(gradf)^2}}\right)\right)dxdy - \int_{\partial \mathrm{D}} h\left(\frac{gradf}{\sqrt{1+(gradf)^2}}\right)ds = 0$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece h fonksiyonu $\partial\Omega$ üzerinde sıfıra eşit olduğundan

$$\int_{\partial\Omega} h\left(\frac{gradf}{\sqrt{1+(gradf)^2}}\right)ds = 0$$

dır. Burada ds, $\partial\Omega$ nın çizgi elemanıdır. Böylece

$$\frac{d}{dt}S[f_t]_{t=0} = \iint_{\mathrm{D}} h\left(div\left(\frac{gradf}{\sqrt{1+(gradf)^2}}\right)\right)dxdy = 0$$

eşitliği elde edilir.

$\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^n$ de bir açık cümle olsun. Bu durumda $supp(\psi) = \overline{\{x \in \Omega: \psi(x) \neq 0\}}$ kümesi kompakt ise $supp(\psi)$ cümlesine ψ' nin Ω üzerinde kompakt destek cümlesi denir (Baird ve Wood, 2003). Böylece $supp(\psi)$ cümlesi $\mathbb{R}^n$ de kapalı ve sınırlı olmuş olur. Genelliği bozmadan D cümlesi üzerinde kompakt olarak desteklenen fonksiyonların cümlesi $supp(\mathrm{D})$ ile gösterilebilir.

$\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^n$ de bir açık cümle, $\psi \in Supp(\mathrm{D})$ ve g fonksiyonu D üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Böylece

$$\int_{\mathrm{D}} \psi(x)g(x)dx = 0$$

ise g fonksiyonu Ω üzerinde özdeş olarak sıfıra eşittir. Bununla birlikte literatürde bilinen varyasyonun temel teoremi yardımıyla

$$\iint_{\mathrm{D}} h\left(div\left(\frac{gradf}{\sqrt{1+(gradf)^2}}\right)\right)dxdy = 0$$

denkleminde $h = \psi$ ve $g = div\left(\frac{gradf}{\sqrt{1+(gradf)^2}}\right)$ olarak seçilirse

$$div\left(\frac{gradf}{\sqrt{1+(gradf)^2}}\right) = 0$$

elde edilir. Burada h fonksiyonu ∂D üzerinde sıfıra eşit olduğuna dikkat ediniz. Diğer bir deyişle

$$div\left(\frac{gradf}{\sqrt{1+(gradf)^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+(gradf)^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+(gradf)^2}}\right) = 0$$

anlamına gelir. Sonuç olarak alanı minmize edecek $z = f(x,y)$ fonksiyonu yukarıda verilen kısmi türev denklemini sağlamalıdır. Bu kısmi türev denklemi hesaplanırsa

$$f_{xx}\left(1+f_y^2\right) - 2f_x f_y f_{yy} + f_{yy}(1+f_x^2) = 0 \qquad (1.2)$$

elde edilir. Bu son denklem $\mathbb{R}^3$'te bir yüzeyin minimal olma koşuludur. Örneğin

$$z = f(x,y) = ax + by + c, \;\; a,b,c \in \mathbb{R},$$

$\mathbb{R}^{3\prime}$te düzlem denklemi olup aşikar bir çözümdür.

1776 yılında Meusnier (1785) (1.1) denkleminin E^3, 3 boyulu Euclead uzayda $M_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y), (x,y) \in \Omega\}$ e Monge yaması formunda verilen bir yüzeyin diferensiyel geomeri bakış açısından H ortalama eğriliğinin özdeş olarak sıfıra eşit olması ile aynı anlama geldiğini işaret etmiştir. Gerçektende;

M_f yüzeyinin birinci ve ikinci temel formlarının katsayıları sırasıyla hesaplanırsa

$$E = 1 + f_x^2, \quad F = f_x f_y, \quad G = 1 + f_y^2$$

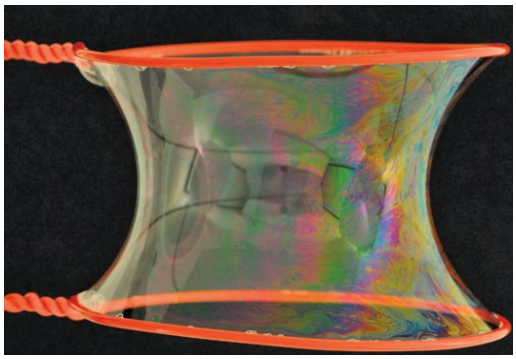
$$e = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + (gradf)^2}}, \qquad f = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + (gradf)^2}}, \quad g = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + (gradf)^2}}$$

eşitlikleri elde edilir. Monge yaması ile verilen bir yüzeyin H ortalama eğriliği

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{f_{xx}\left(1 + f_y^2\right) - 2f_x f_y f_{yy} + f_{yy}(1 + f_x^2)}{2(1 + (gradf)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

şeklinde bulunur. Eğer $H = 0$ ise (1.2) denklemi elde edilir.

Minimal yüzeylere en iyi örneklerden birisi dikdörtgen çerçeve ile çerçevelenmiş sabun köpüğü örneğidir.



Şekil 1.4 Sabun köpüğü (Perez, 2017)

Meusnier (1785), (1.1) denkleminin iki lineer olmayan çözümünü verdi. Bu çözüme karşılık gelen minimal yüzeyler sırasıyla

$$M_f = \left\{(u,v) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}^+ : (u, v, \arctan(\frac{u}{v})\right\}$$

helikoid yüzeyi ile xy düzlemsel

$$\alpha(u) = (u, r\cosh\left(\frac{u}{r}\right), 0)$$

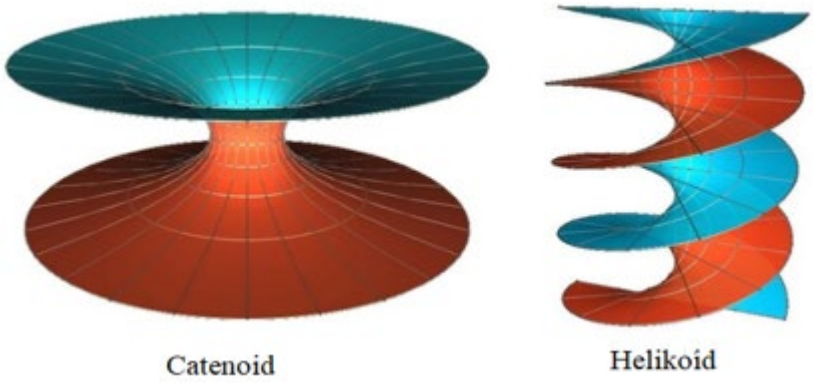


Şekil 1.5. Katenar (zincir) eğrisi (Gateway Arch, 2024)

Katenar eğrisinin *x*-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen

$$\varphi : I \times [0,2\pi] \to E^3$$
$$\varphi(u,\theta) = (u, r\cosh\left(\frac{u}{r}\right)cos\theta, r\cosh\left(\frac{u}{r}\right)sin\theta)$$

Katenoid (zincir) yüzeyidir (Meusnier, 1776). Katenoid 3 boyutlu Euclead uzayında minimal olan tek rotasyonel yüzeydir. Katenoid yüzey ile helikoid birbirine izometriktirler.

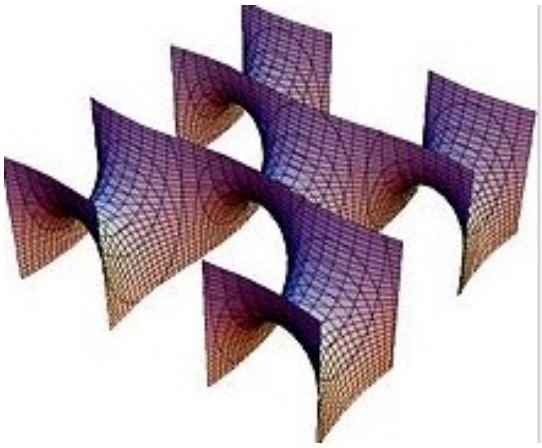


Şekil.1.6. Katenoid ve Helikoid yüzeyler (Perez, 2017)

19. yüzyılda minimal yüzeyler üzerine çalışan Alman matematikçisi Heinrich Ferdinand Scherk (1835), 3-boyutlu Euclead uzayında katenoid ve helicoidin dışında minimal olan daha sonra kendi ismi ile anılan minimal

$$\{(x, y, z = \log\left(\frac{\cos(y)}{\cos(x)}\right) : (x, y) \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)\}$$

Monge yaması ile ifade edilen Scherk yüzeyini bulmuştur.



Şekil 1.7 Scherk yüzeyi (Scherk Surface, 2024).

Scherek yüzeyinin Cartesian koordinatlardaki yazılımına dikkat edilirse f, g reel değerli diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\varphi(x,y) = (x,0,f(x)) + (0,y,g(y)) = (x,y,f(x)+g(y)),\ \ x,y \in D \subset \mathbb{R}^2$$

biçiminde parametrize edilebilir.

$\mathbb{R}^3$ te

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x,y,z) \longrightarrow z = z(x,y) = f(x) + g(y)$$

biçiminde ifade edilen yüzeyler öteleme (translation) yüzeyler olarak adlandırılır (Dillen ve ark., 1991).

Dillen vd. (1991) $\mathbb{R}^{n+1}$ de

$$F: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \longrightarrow x_{n+1} = f_1(x_1) + \cdots . + f_n(x_n)$$

şeklinde tanımlı öteleme hiperyüzeylerin minimal olması için gerek ve yeter koşulun hiper yüzeyin bir hiperdüzlem yada $\mathbb{R}^{n-1}$ ile bir Scherk yüzeyinin çarpımı olduğu sonucunu elde etmişlerdir.

Verstraelen vd.(1994) f_i ve g_i, $3 \leq i \leq n$, türevlenebilir reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$F: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n (x,y) \dashrightarrow (x, y, f_3(x) + g_3(y), \dots, f_n(x) + g_n(y)$$

biçiminde verilen bir öteleme yüzeyin minimal olması için gerek ve yeter koşulun bir düzlemin parçası yada öteleme kısımlarının $A, B_i, E_i, P_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f_i(x) + g_i(y) = \frac{c_i}{\sum_{j=3}^{n} {c_j}^2}\left(log \left| \frac{\cos\left(\sqrt{Ax}\right)}{\cos\left(\sqrt{B_i y}\right)} \right| - Ax - B_i y \right) + E_i x + P_i y, 3 \leq i \leq n$$

şeklinde olduğunu ispat etmişlerdir.

Daha sonraları öteleme yüzeyleri ile ilgili aşağıda kaynakları gösterilen çalışmalar yapılmıştır:

Afin uzayında; (Fu ve Hou, 2010; Huafei, 2000; Jung vd., 2017; Liu ve Yu, 2013; Lone vd., 2020; Magid ve Vrancken, 2000),

Öklid uzayında; (Akbay ve Wang, 2021; Akkılın ve Yüce, 2022; Arslan vd., 2016; Bueno ve Lopez, 2018; Çetin vd., 2011; Çetin ve Tunçer, 2015; Fukunaga ve Takahashi, 2022; Gün ve Ergüt, 2019; Hasanis, 2019; Hasanis ve Lopez, 2020; Hasanis ve Lopez, 2021; Kara vd., 2021; Liu, 1999, Liu ve Jung, 2017; Lopez ve Moruz, 2015; Lopez ve Perdomo, 2017; Munteanu ve Nistor, 2009; Munteanu ve Nistor, 2010; Munteanu vd., 2016; Pamuk ve Bulca, 2021; Sağlam, 2021; Tozak vd., 2020; Verstraelen vd., 1994; Wang, 2021; Yang, 2018; Yang vd., 2019; Yoon, 2010; Yoon ve Yüzbaşı, 2018).

Galilean ve İsotropik uzayında; (Aydın, 2016; Aydın ve Ergut, 2017; Aydın vd., 2019; Aydın, 2020; Aydın vd., 2022; Bükcü vd., 2017; Çakmak ve ark., 2017; Karacan ve ark., 2016; Kelleci, 2021; Lone ve Karacan, 2018; Šipuš, ve Divjak, 2011; Šipuš, 2014; Yoon, 2012)

Heisenberg ve Lorentz Heisenberg uzayında; (Bensikaddour, ve Belarbi, 2017; Bensikaddour ve Belarbi, 2018; Bensikaddour ve Belarbi, 2021; Inouguchi, 2005; Inouguchi vd., 2012; Medjati vd., 2023; Ramis ve Munteanu, 2019; Senoussi vd.,2022; Yoon ve ark., 2013; Yoon ve Lee, 2014),

Minkowski uzayında; (Baba vd., 2010; Büyüktürk ve Öztürk, 2020; Filipan vd. 2023; Goemans ve Van de Woestyne, 2007; Senoussi ve Bekkar, 2022;Van de Woestyne vd., 1992; Yang vd., 2018; Yoon, 2002; Yoon, 2017; Yuan ve Liu, 2011; Yuan ve ark., 2013; Seo, 2011),

Sol_3 geometride; **(**Belarbi ve Zoubir, 2022), (Lopez ve Munteanu, 2012), (Senoussi ve Al-Zoubi, 2020).

$\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında (Arslan vd., 2016) Monge yaması ile verilen öteleme yüzeylerin düzlemsel olma koşullarını inceleyip bir sınflandırma vermişlerdir.

$\mathbb{R}^{n+1}$ (n+1) boyutlu reel uzayda

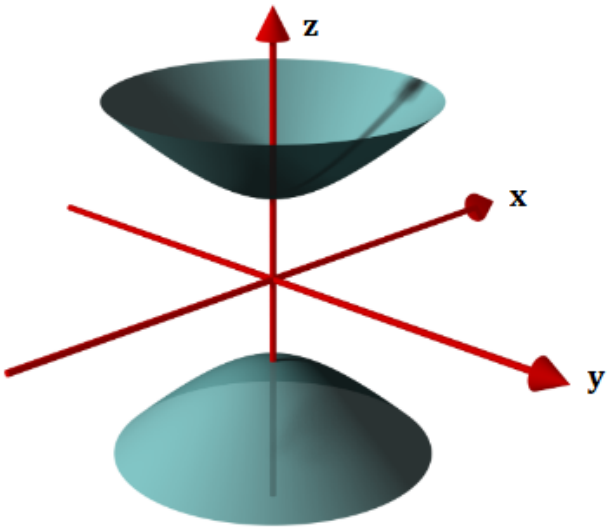
$$ds_L^2 = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 - dx_{n+1}^2$$

yarı-Riemann metriği ile beraber ($\mathbb{R}_1^{n+1}$, ds_L^2) Lorentz uzayı olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

Simetrik, basit bağlantılı ve her noktasında sabit negatif eğrilikli n-boyutlu Riemann manifold Hiperbolik n-uzay olarak adlandırılır (O'Neill, 1983). Hiperbolik uzayın çeşitli modelleri mevcuttur. Bu modellerden biriside hiperboloittir. Bu model $\mathbb{R}_1^{n+1}$ Lorentz uzayda

$$\tilde{H}^n(c) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_{n+1}^2 = -c^2, x_{n+1} > 0, c \in \mathbb{R}, c \neq 0\}$$

olarak tanımlıdır (O'Neill, 1983).



Şekil 1.8. İki kanatlı hiperboloid (Hyperboloid, 2024)

Bu hiperbolik uzay model, Öklid uzaydaki gibi bir afin uzay yapısına sahip olmadığından bir başka deyişle

$$T_a: \tilde{H}^n(c) \to \tilde{H}^n(c), p \to a + p$$

öteleme dönüşümü tanımlanamayacağından $\tilde{H}^n(c)$ de bir öteleme dönüşüm tanımlamak mümkün olamaz. Fakat $\mathbb{R}^n$ de

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\},$$

üst yarı düzlemi göz önüne alındığında

$$ds_P^2 = \frac{\sum_{i=1}^n dx_i^2}{{x_n}^2}$$

Riemann metrik ile beraber $(\mathbb{R}^3_+, ds_P^2)$, -1 eğrilikli olup ve bu model n-boyutlu hiperbolik uzayın (Poincare) üst yarı düzlem modeli olarak adlandırılır. Bu iki model izometriktirler.

$\mathbb{R}^n_+$ Öklid uzaydaki afin uzaya sahip olacağından hiperbolik üst yarı düzlemde öteleme yüzeylerden bahsetmek mümkün olacaktır. Böylece Lopez 3-boyutlu hiperbolik uzayın $\mathbb{R}^3_+$ üst yarı modelde 3-boyutlu Öklid uzaylardaki gibi öteleme yüzeylerin inşa edilebileceğini tespit etmiştir (Lopez, 2011). $\mathbb{R}^3_+$ nın xoy düzleminde

$$(x + a, y, z) \leftrightarrow (x, y + a, z)$$

birbirlerine izometriktirler. Bir başka deyişle $x \leftrightarrow y$ değişimi yapmak mümkündür. Fakat xoz yahut da yoz düzleminde $z > 0$ olması nedeniyle $x \leftrightarrow z$ veya $y \leftrightarrow z$ mümkün değildir (Lopez, 2011). Bu sebepten dolayı Lopez, 3- boyutlu üst yarı düzlem hiperbolik uzay modelde f ve g diferensiyellenebilir fonksiyonlar yardımıyla aşağıdaki öteleme yüzeylerini tanımlamıştır:

I.Tip ; $X: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3_+, X(s,t) = (s, t, f(s) + g(t))$ öyleki $f(s) + g(t) > 0$,

II.Tip; ; $X: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3_+,\ X(s,t) = (s, f(s) + g(t), t)$ öyleki $t > 0$

Aynı çalışmada bu yüzeylerin minimal olma koşullarını aşağıdaki şekilde sınıflandırmıştır.

I.Tip formunda verilen minimal öteleme yüzeylerin olmadığını ve

II.Tip biçiminde verilen minimal öteleme yüzeylerin sadece ve sadece total geodezik düzlem olduğunu bir başka deyişle

$$X: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3_+;\ X(s,t) = (s, as + b + c, t)$$

şeklinde parametrelendirilebileceğini ispatlamıştır (Lopez, 2011).

Fakat daha sonraları, Seo (2013) Lopez (2011)'in çalışmalarında **II.Tip** öteleme yüzeylerinde sınıflandırmanın eksik olduğunu işaret ederek aşağıdaki teoremi vermiştir.

1.1.Teorem. $M \subset (\mathbb{R}^3_+, ds_P^2)$ yüzeyi $X: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3_+, X(s,t) = (s, f(s) + g(t), t)$ şeklinde parametrize edilen bir öteleme yüzey olsun. Bu takdirde M nin minimal olması için gerek ve yeter koşul $a, b, c \in \mathbb{R}$ sabitler olmak üzere $f \; ve \; g$ diferensiyellenebilir fonksiyonları

$$f(s) = as + b,$$

$$g(t) = \sqrt{1 + a^2} \int \frac{ct^2}{1 - c^2 t^4} dt$$

şeklinde verilmesidir (Seo, 2013).

Dikkat edilirse $c = 0$ durumunda Lopez'in sonucu elde edilmektedir.

Bu çalışmanın amacı, 3 boyutlu istatistiksel hiperbolik uzayların istatistiksel minimal öteleme yüzeylerini sınıflandırmaktadır.

Bu tez dört ana bölünden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümü giriş kısmından oluşmaktadır. Bu bölümde öteleme yüzeylerin tarihçesinden ve bu konuda yapılan çalışmaların bir özeti verilmiştir. İkinci bölümde diferensiyellenebilir manifoldlar, istatistiğin temel kuralları, istatistiksel manifoldlar, Fisher bilgi matrisi ve bu matrise karşılık Fisher-Riemann metrik tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde istatistiksel alt manifoldlar ve Gauss ve Weingarten denklemleri ve son olarakta hiperbolik uzayın üst yarı düzlem modeli ile Gauss dağılımı arasındaki ilişki tanıtılmıştır. $\mathcal{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$

hiperbolik üst yarı uzay modelin bir istatistiksel yapıya sahip olduğu ifade edilmiştir. Ayrıca orijinal sonuçların elde edilmesindeki yöntemler verilmiştir. Tezin dördüncü bölüm tezin orijinal sonuçlardan oluşmaktadır. Bu bölümde($\mathcal{H}^3, ds_P, \overline{\nabla}^{\mathcal{H}}$) istatistiksel manifoldun istatistiksel öteleme yüzeyin minimal olma durumları araştırılmıştır. Son bölümde ise elde edilen orijinal sonuçlar özetlenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tezde kullanılan temel kavram ve teoremler tanıtılmıştır.

2.1. Diferensiyellenebilir Manifold

2.1.1 Tanım. $M \neq \emptyset$ bir küme olsun. U, M nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $x: U \subset M \to \mathbb{R}^n$ dönüşümü bire-bir ve $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ açık küme ise (U, x) ikilisine M' nin bir haritası , U' ya koordinat bölgesi ve x'e koordinat fonksiyonu denir (Brickell ve Clark 1970).

2.1.2.Tanım. $M \neq \emptyset$ bir küme, I bir indis cümlesi, (U_α, x_α) M' nin bir haritası ve haritaların bir koleksiyonu olan $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha): \alpha \in I\}$ kümesi için

(i) $M \subset \bigcup_{\alpha \epsilon I} U_\alpha$,

(ii) (U_α, x_α) ve $(U_\beta, x_\beta) \in \mathcal{A}$ öyleki $\alpha \neq \beta, U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ iken

$$x_\beta \circ {x_\alpha}^{-1}: x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{diffeomorfizm} x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$$

aksiyomlarını sağlayan $\mathcal{A}$ kümesine M' nin bir diferensiyellenebilir atlası ve M' ye bir diferansiyellenebilir n-boyutlu manifold ve M' nin boyutu 2'ye eşit ise M'ye bir yüzey denir (Brickell ve Clark 1970).

2.1.3. Önerme. Bir diferensiyellenebilir M manifoldun koordinat bölgelerinin koleksiyonu M üzerinde bir topoloji için baz oluşturur (Brickell ve Clark 1970).

2.1.4. Tanım. M diferensiyellenebilir manifoldun koordinat komşulukları ile inşa edilen topolojiye M nin diferensiyellenebilir yapısından indirgenmiş topoloji denir ve $\tau_C{}^\propto$ ile gösterilir (Brickell ve Clark 1970).

2.1.5. Önerme. *M* bir diferensiyellenebilir manifold olsun. *M* nin bu diferensiyellenebilir yapısından indirgenmiş τ_{C^∞} topolojiye göre *M* nin her bir koordinat fonksiyonu bir homeomorfizmdir (Brickell ve Clark 1970).

2.1.6. Önerme. (M, τ) hem bir topolojik uzay hem de bir diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M nin üzerindeki topoloji ile diferensiyellenebilir yapısından indirgenmiş τ_{C^∞} topolojinin çakışık olması için gerek ve yeter koşul M nin atlasındaki her bir koordinat fonksiyonu τ topolojisine göre de homeomorfizm olmasıdır. (Brickell ve Clark 1970).

Yaşadığımız 3-boyutlu uzayda çevremize baktığımızda çeşitli geometrik objelerle karşılaşırız. Örneğin çocukluğumuzda sıkça oynadığımız plastik bir topu düşünelim. Bu plastik topu geometrik olarak bir 2-boyutlu küre yüzeyi $\mathbb{S}^2$ olarak düşünebiliriz.
Bu $\mathbb{S}^2$ küre yüzeyinin analitik ifadesi

$$F^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$$

şeklindedir. Kapalı denklem formu ile verilen bu küre yüzeyi üzerinde bir 2-boyutlu diferansiyellenebilir bir yapı kurabilmek için *F* fonksiyonu hangi şartları sağlamalıdır sorusu akla gelir. Bu sorunun genel cevabı aşağıdaki önerme ile verilir.

2.1.7. Önerme. $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir türevlenebilir fonksiyon ve $S=F^{-1}(0)$ olsun. Eğer her $p \in M$ noktasında *grad(F)* (F nin gradienti) sıfırdan farklı ise *S* üzerinde *n*-1 boyutlu bir diferensiyellenebilir yapı inşa edilebilir. Bu diferensiyel yapı ile donatılmış *S* cümlesi (*n*-1) boyutlu diferensiyellenebilir varyete (hiper yüzey) denir (Brickell ve Clark 1970).

2.1.8. Önerme. $\mathbb{R}^n$ de bir diferensiyellenebilir varyete S üzerine diferensiyellenebilir yapısından indirgenmiş τ_{C^∞} topoloji ile $\mathbb{R}^n$ den S ye indirgenmiş alt uzay topolojisi $\tau_S = \{U \cap S : U\ \mathbb{R}^n \text{ de açık}\}$ çakışıktır (Brickell ve Clark 1970).

Özel olarak n =3 alındığında yukardaki 2.1.7.Önerme ve 2.1.8.Önerme yardımıyla $\mathbb{R}^3$ de kaynaklarda daha çok karşılaşılan yüzey tanımı verilebilir.

2.1.9. Tanım. $S \subset \mathbb{R}^3$ olsun. Eğer her $p \in S$ noktası için p noktasını içeren $\mathbb{R}^3$ 'ün bir açık V alt cümlesi ve $\mathbb{R}^2$ ' nin U açık alt cümlesi için

$$\varphi: \mathrm{U} \subset \mathbb{R}^2 \to S \cap V \subset \mathbb{R}^3, \varphi(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$

dönüşümü,

i) φ homeorfizm,

ii) φ difeomorfizm,

iii) $\forall\ (s,t) \in \mathrm{U}$ için ,$\varphi_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s}\ ve\ \varphi_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ lineer bağımsız

koşullarını sağlayacak şekilde var ise S cümlesine regüler yüzey ve φ dönüşümüne S'nin bir yerel (lokal) parametrizasyonu denir (Do Carmo, 2016).

2.1.10. Tanım. M^n $n-$ boyutlu diferansiyellenebilir manifold osun. (U,x), $p \in M$ noktasını içeren bir haritası, $\mathcal{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R}, \text{diferensiyellenebilir}\}$ ve $\mathbb{R}^n$ nin koordinat fonksiyonları $y = (y_1, .., y_i, \dots, y_n)$ olsun.

$$v_p : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}, p \to v_p(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial (f \diamond x^{-1})}{\partial y_i} \diamond x(p); a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

Leibnitz özeliğini sağlayan lineer dönüşüme M^n nin p noktasındaki tanjant (teğet) uzayı denir ve tanjant vektörlerin cümlesi T_pM şeklinde gösterilir (Brickell ve Clark, 1970).

T_pM üzerinde iç işlem (+) ve dış işlem (.) sırasıyla

$$(v_p + w_p)(f) = v_p(f) + w_p(f);\ \forall\, v_p, w_p \in T_pM, \forall\, f \in \mathcal{F}(M),$$

$$(\lambda . v_p)(f) = \lambda v_p(f),\ \forall\, v_p \in T_pM, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, f \in \mathcal{F}(M)$$

Biçiminde tanımlanırsa, T_pM bir reel vektör uzayı olur (Brickell ve Clark, 1970).

2.1.11. Tanım. M, n boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve tanjant demeti

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

olsun. Bu durumda,

$$\begin{tikzcd} X: M \arrow[r] & TM \\ p \arrow[r] \arrow[dr, "id"'] & T_pM \arrow[d, "\pi"] \\ & p \in M \end{tikzcd}$$

π izdüşüm fonksiyon olmak üzere, eğer $\pi \circ X = id$ oluyorsa X'e M üzerinde bir vektör alanı (TM nin bir kesiti) denir ve bu vektör alanların cümlesi $\Gamma(TM)$ ile gösterilir (Xin, 2003).

Dikkat edilirse M üzerinde tanımlı bir X vektör alanı M nin verilen her bir noktasına bir tanjant vektör karşılık tutar.

M üzerinden $\mathbb{R}$ ye diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $\mathcal{F}(M)$ olsun. O zaman,

i) $\forall X \in \Gamma(TM), \forall f \in \mathcal{F}(M)$ ve $\forall p \in M$ için $(Xf)(p) = X_p(f) \in \mathcal{F}(M)$,

ii) $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, ve $\forall p \in M$ için $(X + Y)_p = X_p + Y_p$,

iii) $X \in \Gamma(TM), \forall f \in \mathcal{F}(M)$ ve $\forall p \in M$ için $(fX)_p = f(p)\, X_p$

dir (O'Neill, 1983).

Böylece diferensiyellenebilir manifold üzerinde bir $X \in \Gamma(TM)$ vektör alanı kavramını

$$X: \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M),$$
$$f \to X(f): M \to \mathbb{R}$$
$$p \to (X(f))p = X_p f$$

olarak tanımlı lineer ve $X(f.g) = X(f).g + f.X(g)$ Leibnitz kuralını sağlayan bir diferensiyellenebilir dönüşüm olarak da tanımlamak mümkündür ve bu anlamda vektör alanların cümlesi $\chi(M)$ biçiminde de temsil edilir (O'Neill,1983).

2.1.12. Tanım. M, n boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Bu takdirde,

$$\Gamma(TM)^* = \{\theta: \theta: \Gamma(TM) \to \mathcal{F}(M), \text{lineer}\}$$

cümlesine $\Gamma(TM)$nin dual uzayı denir ve ve bu dual uzayın elamanlarına 1-form denir (O'Neill, 1983).

2.1.13. Tanım. M, n boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Buradan $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r) \in \Gamma^r(TM)^*$ ve $X = (X_1, \dots, X_s) \in \Gamma^s(TM)$ olmak üzere

$$B: \Gamma^r(TM)^* \times \Gamma^s(TM) \to \mathcal{F}(M)$$
$$(\theta \quad , \quad X) \to B(\theta, X)$$

$r + s$- lineer dönüşümüne (r, s)-tipinde tensör alanı denir (O'Neill, 1983).

2.1.14.Tanım. M, n boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Bu takdirde,

$$\mathfrak{D}: \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$$

dönüşümü

a) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall f, g \in \mathcal{F}(M)$ için $\mathfrak{D}(af + bg) = a\mathfrak{D}(f) + b\mathfrak{D}(g)$,

b) $\forall f, g \in \mathcal{F}(M)$ için $\mathfrak{D}(fg) = \mathfrak{D}(f)g + f\mathfrak{D}(g)$

özeliklerini sağlıyorsa $\mathfrak{D}$ ye $\mathcal{F}(M)$ üzerinde bir türev operatörü denir (O'Neill,1983).

2.1.15.Tanım. M, n boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Buradan

$$[\,,]: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$
$$(X \quad , \quad Y) \to [X,Y] = XY - YX: \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$$
$$f \to X(Y(f)) - Y(X(f))$$

olarak tanımlı dönüşüm $\mathcal{F}(M)$ üzerinde bir türev operatörü olup $[X,Y]$'ye X ile Y' nin braketi ve $[\,,]$'ye Lie braket operatörü denir (O'Neill,1983).

2.1.16. Tanım. M, n boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Her $p \in M$ için

$$g_M: T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

a) Simetrik ($\forall u_p, v_p \in T_pM$ için $g_M(u_p, v_p) = g_M(v_p, u_p)$),
b) Pozitif tanımlı ($\forall u_p \in T_pM$ için $g_M(u_p, u_p) \geq 0$) ve dejenere olmama ($g_M(u_p, u_p) = 0 \Leftrightarrow u_p = 0$)

koşullarını sağlayan 2-lineer g_M dönüşümüne M nin bir Riemannian metriği denir. M nin her noktası böyle bir g_M Riemannian metriği ile donatılmış ise (M, g_M) ikilisine n-boyutlu bir Riemannian manifold denir (O'Neill,1983).

g_M Riemannian metriği 2-lineer olduğundan karşılık gelen matris, simetrik $n \times n$ tipinde olup ve bu matrisin determinatı b) şıkkı nedeniyle daima sıfırdan farklı olmalıdır.

2.1.17. Tanım. M, n boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun.

$$\nabla: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$
$$(X \quad , \quad Y) \to \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü

a) $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM), \forall a,b \in \mathbb{R}$ için $\nabla_X(aY+bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$,
b) $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM), \forall f,g \in \mathcal{F}(M)$ için $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
c) $\forall X,Y \in \Gamma(TM), \forall f \in \mathcal{F}(M)$ için $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$

koşullarını sağlayan dönüşüme M üzerinde bir afin koneksiyon denir (O'Neill, 1983).

2.1.18. Teorem. (M, g_M) n-boyutlu bir Riemannian manifold ve ∇ M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. O zaman M üzerinde her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

d) $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için $(\nabla_X g_M)(Y,Z) = 0$, bir başka deyişle
$(Xg_M(Y,Z) = g_M(\nabla_X Y, Z) + g_M(Y, \nabla_X Z)$,(metriğin paralelliği)

e) $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y Z$, (torsiyonsuz ya da bükümsüz)

koşullarını sağlayan bir tek ∇ afin konneksiyonu vardır. Bu özelikteki ∇ afin konneksiyonuna Riemannian ya da Levi-Civita koneksiyonu denir ve ∇^{LC} ile gösterilir (O'Neill, 1983).

2.1.19. Tanım. (M, g_M) n-boyutlu bir Riemannian manifold ve üzerindeki konneksiyon ∇^{LC} olsun. O zaman

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \in \mathcal{F}(M)$$

ye ∇^{LC} Levi-Civita konneksiyonun Christoffel sembolleri denir (O'Neill, 1983).

2.2. İstatistiksel Model

Bu alt bölümde istatistik model kavramını tanımlamak için gerekli bazı istatistiksel kavramlar tanıtılacaktır.

2.2.1. Tanım. S boştan farklı bir küme ve $\Omega = \{A: A \subset S\}$ cümlesi S' nin kuvvet cümlesi ve $\mathcal{F} \subset \Omega$ olsun. O zaman,

a) $S \in \mathcal{F}$,

b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A$ nın tümleyeni $A^C \in \mathcal{F}$

c) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

koşullarını sağlayan $\mathcal{F}$ cümlesine bir cebir ya da cisim ve ilaveten

d) $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

koşulu da sağlanıyorsa $\mathcal{F}$ cebirine σ cebiri denir ya da σ cismi denir (Athreya ve Lahiri, 2006; Ash, 2014).

a) ve b) koşullar altında $A, B \in \mathcal{F}$ $iken$ $A \cap B = (A^C \cup B^C)^C \in \mathcal{F}$ olması nedeniyle c) şıkkına denk olan

$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \, \mathcal{F}$$

önermesi verilir (Athreya ve Lahiri, 2006; Ash, 2014).

2.2.2. Örnek. $S = \{a, b, c, d\}$ olsun. Böylece

$$\mathcal{F}_1 = \{S, \emptyset, \{a\}\},$$

ve

$$\mathcal{F}_2 = \{S, \emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}\}$$

cümlelerini göz önüne alalım. $\{\{a\}\}^c \notin \mathcal{F}_1$ olduğundan bir cebir değildir. Fakat $\mathcal{F}_2$ bir cebir ve üstelikte bir σ cebiridir (Athreya ve Lahiri, 2006).

2.2.4. Tanım. Boşdan farklı S cümlesi üzerinde tanımlı bir σ cebiri $\mathcal{F}$ olsun. O zaman

$$\mu: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu

a) $\mu(A) \geq 0; \forall A \in \mathcal{F}$

b) $\mu(\emptyset) = 0$,

c) $\mathcal{F}$ deki her ayrık $\{A_i: i \geq 1, i \in \mathbb{N}\}$ cümlesi için

$$\mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$$

koşullarını sağlıyor ise μ' ye $\mathcal{F}$ üzerinde bir ölçüm ve $(S, \mathcal{F}, \mu)$ 3-lüsüne bir ölçüm uzayı denir. Eğer $\mu(S) = 1$ ise μ'ye olasılık ölçümü denir ve P ile gösterilir ve burumda $(S, \mathcal{F}, P)$ 3-lüsü olasılık uzayı olarak adlandırılır (Calin ve Udrişte,2014).

2.2.5. Tanım. Bir fiziksel fenomeni ölçmek için kullanılan bir sürece bir deney, bir deneyi bir kez gerçekleştirmeye deneme, bir deneyin bir deneme sonrası elde edilen sonuca bir deney sonucu, örnek nokta veya basit sonuç denir (Gazi, 2023).

2.2.6. Tanım. Bir D deneyinin sonucunda elde edilecek tüm mümkün sonuçların kümesine D deneyin örnek uzayı denir ve S harfi ile temsil edilir. S örnek uzayının her bir alt cümlesi olay olarak adlandırılır (Akdeniz, 2022).

2.2.7. Örnek. Bir madeni paranın havaya atılıp yere düşmesi bir deney, madeni para havaya fırlatıldığında tura (T) ya da yazı (Y) gelme durumlarından birisi söz konusu olur ve bu da deneyin bir sonucudur. Örnek uzay ise $S = \{T, Y\}$ ve örnek uzayın bütün alt kümeleri $O_1 = \{T\}$, $O_2 = \{Y\}$, $O_3 = \{T, Y\}$, $O_4 = \emptyset$ da birer olay olacaktır. Görüldüğü gibi olay sayısı 4 tür (Gazi, 2023)

2.2.8. Örnek. Bir zarın atılması bir deney, zarın (1), (2), (3), (4), (5), (6) dan birisinin gelmesi deneyin bir sonucu, örnek uzay ise S ={1,2,3,4,5,6} ve örnek uzayın bütün alt kümeleri birer olacak olacağından bütün olay sayısı ise $2^6 = 64$ tür (Akdeniz, 2009).

2.2.9. Örnek. Hilesiz iki zarın atıldığını varsayalım. O zaman aşağıda tabloda verilen örnek uzayı meydana gelir**.**

Çizelge 2.1. Hilesiz iki zar atıldığında elde edilen örnek uzay (Akdeniz, 2022)

Z1 / **Z2**	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

2.2.9 Örnek göz önüne alındığında aynı anda fırlatılan zarın iki birli gelmesi nedir sorusunun cevabı $\frac{1}{36}$ olacaktır. Bu sonucun anlamı (1,1) olayının olabilirliğini ifade etmektedir ve bunun olabilirlik yüzdesi 0,27 dir. Bu matematiksel olarak

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(E)} = \frac{Uygun\ sonuçların\ sayısı}{Olanaklı\ sonuçların\ sayısı}$$

şeklinde ifade edilir (Akdeniz, 2022).

2.2.10. Tanım. Bir deney yapıldığında elde edilen olanaklı sonuçlardan birisinin gelme ya da gelmeme yüzdesine o olayın gelme ya da gelmeme olasılığı (ihtimali) denir (Akdeniz, 2022).

Olasılık günlük hayatta çokça kullandığımız bir kavramdır. Örneğin bir hava durumu haberinde "yağmurun yağma ihtimali %29 dendiğinde", ifade edilen matematiksel değer yağmurun yağma hakkındaki beklentimizi ölçer.

Olasılık değeri 1 ise, olayın kesinlikle meydana geleceği anlamına gelir, eğer 0 ise olayın gerçekleşmeyeceği olarak anlaşılır. Olasılık 0'dan 1'e doğru artarsa olayın gerçekleşme olasılığının daha yüksek olduğu anlamına gelir.

2.2.11. Tanım. Değeri bir deney sonucuyla belirtilen bir değişkene rastgele (raslantı) değişken denir (Akdeniz, 2022).

Rastlantı değişkeni örnek uzay ile gerçel sayılar arasında bir ilişki kurar. Bir başka deyişle rastlantı değişkeni Ψ

$$\Psi: D \to \mathbb{R}$$

bir fonksiyon olarak ifade edilir.

2.2.12. Örnek. Hilesiz bir para iki kez havaya atılsın. O zaman örnek uzayı kümesi

$$D = \{YY, YT, TY, TT\}$$

şeklindedir.

Ψ, D üzerindeki turaların sayısını bulan fonksiyon olmak üzere,

$$\Psi(TT) = 2, \Psi(YT) = \Psi(TY) = 1, \Psi(YY) = 0$$

dır. Böylece Ψ nin alabileceği olanaklı değerler $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$ dir (Akdeniz, 2022).

2.2.13. Tanım. Ψ bir rastgele değişken olsun. $Gör(\Psi) = \Im = \{ x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ kümesi sonlu veya sayılabilir sonsuzlukta ise Ψ ye kesikli rastgele değişken denir (Calin ve Udrişte,2014).

2.2.14. Tanım. Ψ kesikli rastgele bir değişken olsun. $\Im = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ olmak üzere

$$p: \Im \to [0,1], p(x_i) = P(\Psi = x_i)$$

fonksiyonuna Ψ kesikli rastgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir (Calin ve Udrişte,2014).

2.2.15. Önerme. Ψ kesikli rastgele bir değişken olsun. O zaman Ψ ye karşılık gelen olasılık kütle fonksiyonu

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

eşitliğini sağlar (Gazi, 2023).

Bir markette alış veriş yaptığımızda ürünleri paketlerinde $\pm 2gr, \pm 3$ml gibi değerler görebiliriz. Bunun anlamı kutudaki ürünün ağırlığı 100 gramında olanaklı değerlerin [98,102] aralığında , 100 mili litrede ise [97,103] değiştiğini düşünürüz. Ağırlığı [98,102] arasında olan bir paketin seçilme olasılığı sorusu önceki örneklerden farklı bir probleme dönüşmektedir. [98,102] aralığında sonsuz sayıda sayılamaz çoklukta değerler vardır. Bu nedenle olanaklı değerler sonsuz sayıda sayılamaz çoklukta olacaktır.

2.2.16. Tanım. Ψ bir *D* deneyinin Ψ rastgele (rastlantı) değişkeni olsun.

$$\Psi: D \to \mathfrak{O} \subset \mathbb{R}^n$$

$\mathfrak{O}$ bir bölge

$$p: \mathfrak{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$p(x) \geq 0 \text{ ve } \int_{x \in \mathfrak{O}} p(x)dx = 1$$

ise Ψ 'ye sürekli rastgele değişken ve p ye olasılık yoğunluk fonksiyonu denir. Eğer $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{O}$ ise $\mathfrak{B}$ nin olasılık değeri

$$P(x \in \mathfrak{B}) = \int_{x \in \mathfrak{B}} p(x)dx$$

şeklinde hesaplanır (Calin ve Udrişte,2014, 2014).

Özel olarak *n*=1, $\mathfrak{O} = \mathbb{R}$ ve de $\mathfrak{B} = [a, b]$ olduğunda $\mathfrak{B}$ nin olasılık değeri

$$P(x \in \mathfrak{B}) = P(a < x < b) = \int_a^b p(x)dx$$

olarak hesaplanır (Akdeniz. 2022)

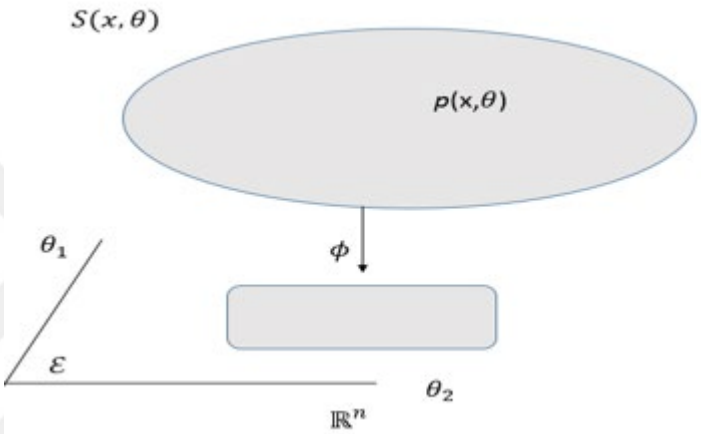
2.2.17. Tanım. Ψ bir sürekli rastgele değişken , $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ kümesi parametre uzayı,η =$(\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathcal{E}$ parametre ve Ψ nin alabileceği olanaklı değerler kümesi χ olmak üzere

$$S = S(x, \eta) = \{p(x, \eta) = p_\eta(x): \int_{x \in \mathfrak{O}} p(x, \eta)dx = 1\},$$

kümesine Ψ ile belli n-boyutlu bir istatistik model denir (Amari, 1985; Calin ve Udrişte , 2014).

$$\phi: S(x,\eta) \rightarrow \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$$
$$p(x,\eta) \rightarrow \phi\big(p(x,\eta)\big) = \eta$$

birebir ve *Rank* ϕ *=boy* $\mathcal{E}$ olacak şekilde ϕ dönüşümün göz önüne alalım. Böylece istatistik model S, $(\mathcal{E},\eta)$ ile parametrelendirilir (Calin ve Udrişte,2014).



Şekil 2.2. İstatistik model (Calin ve Udrişte,2014)

Diğer taraftan aynı istatistik model S üzerinde farklı parametre değerleri $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ve $\dot{\eta} = (\dot{\eta_1}, \dots, \dot{\eta_n}) \in \mathcal{E}'$yi karşılaştırmak istenilirse bir metriğe ihtiyaç duyulur. Bu durumda kullanılabilecek seçeneklerden biri, parametre değerleri arasındaki farkın istatiksel olarak anlamlı olup olmadığını belirlemekte kullanılan Fisher bilgi matrisidir.

Fisher bilgi matrisi ilk kez bağımsız olarak Jeffreys (1946) ve Rao (1945) tarafından tanıtılmıştır. O zamandan beri istatistiğin köşe taşlarından birisi olmuştur.

2.2.18. Tanım. Ψ sürekli rastgele değişken ile belli olasılık yoğunluk fonksiyonu $p(\Psi = x)$ olsun.

$$E(\Psi) = \int_{x\in\mathcal{D}} xp(x,\eta)dx,$$

değerine olasılık dağılımının beklenen (ortalama) değeri denir (Akdeniz, 2022).

Bundan sonra bir istatistik model için uyarlanırsa beklenen değer

$$E_\eta(x) = \int_{x\epsilon\mathfrak{O}} x p_\eta(x) dx,$$

şeklinde ifade edilecektir.

Beklenen değer aşağıdaki özeliklere sahiptir:

1- Sabit bir bağımsız *d* değişken için *E(d)=d*,

2- Ψ , Θ rastgele iki bağımsız değişken ve *a,b* keyfi iki reel sabit iseler $E(a\Psi + b\Theta) = aE(\Psi) + bE(\Theta)$,

3- Ψ , Θ rastgele iki bağımsız değişken iseler $E(\Psi.\Theta) = E(\Psi).E(\Theta) = E(\Theta.\Psi)$ dir (Akdeniz, 2022).

2.2.19. Tanım. Ψ sürekli rastgele değişken ile belli olasılık yoğunluk fonksiyonu $p(\Psi = x)$ ve $S(x,\eta) = \{p(x,\eta) = p_\eta(x):\ ,\ \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)) \in \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n\}$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna karşılık gelen istatistik model olsun. Logaritma olabilirlik fonksiyonu

$$l_x(\eta) = l(\eta, x) = ln\, p_\eta(x)$$

ve

$$\partial_i\, l(\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta_i}\Big(ln p_\eta(x)\Big) = \frac{1}{p_\eta(x)} \frac{\partial p_\eta(x)}{\eta_i} = \frac{1}{p_\eta(x)} \partial_i p_\eta(x)$$

olmak üzere

$$g_{ij}^{\mathbb{F}} = E_\eta(\partial_i\, l(\eta).\partial_j\, l(\eta)),\ \forall i,j \in \{1, \dots, n\} \tag{2.1}$$

beklenen değerleri ile belli

$$I(\eta\ ) = [g_{ij}^{\mathbb{F}}]_{n\times n}$$

matrise Fisher bilgi matrisi denir (Calin ve Udrişte, 2014).

2.2.20. Önerme. $S(x,\eta)$ istatistik model üzerinde $\{\frac{\partial}{\partial\eta_i}=\partial_i: i=1,\dots,n\}$ kısmi türevler ile oluşan küme lineer bağımsız kümesi $S(x,\eta)'$ nin T_η tanjant uzayının bir bazıdır (Calin ve Udrişte, 2014).

(2.1) denklemi hesaplanırsa

$$g_{ij}^{\mathbb{F}}=\int_{x\epsilon\mathfrak{D}}\partial_i\, l(\eta).\partial_j\, l(\eta)\, p_\eta(x)dx=\int_{x\epsilon\mathfrak{D}}\frac{1}{p_\eta(x)}\partial_i p_\eta(x)\frac{1}{p_\eta(x)}\partial_j p_\eta(x)p_\eta(x)dx$$

$$=4\int_{x\epsilon\mathfrak{D}}\frac{\partial_i p_\eta(x)}{2\sqrt{p_\eta(x)}}\frac{\partial_j p_\eta(x)}{2\sqrt{p_\eta(x)}}dx$$

$$=4\int_{x\epsilon\mathfrak{D}}\partial_i(\sqrt{p_\eta(x)}\,)\partial_j(\sqrt{p_\eta(x)}\,)\,dx$$

bulunur. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.2.21. Sonuç. Bir $S(x,\eta)$ istatistik modeline karşılık gelen Fisher bilgi matrisi bileşenleri

$$g_{ij}^{\mathbb{F}}=4\int_{x\epsilon\mathfrak{D}}\partial_i(\sqrt{p_\eta(x)}\,)\partial_j(\sqrt{p_\eta(x)}\,)\,dx \tag{2.2}$$

şeklinde ifade edilir (Calinve Udrişte, 2014).

2.2.21. Sonuç yardımıyla aşağıdaki önerme verilir.

2.2.22. Önerme. Bir $S(x,\eta)$ istatistik modeline karşılık gelen Fisher bilgi matrisi bileşenlerini tensör bileşeni kabul eden

$$g^{\mathbb{F}}=\sum_{i=}^{n}g_{ij}d\eta_i\otimes d\eta_j$$

$S(x,\eta)$ istatistik modeli üzerinde bir Riemann metrik tensörüdür (Calin ve Udrişte, 2014).

İspat.

a) Simetriktir

Beklenen değer tanımı yardımıyla

$$g_{ij}^{\mathbb{F}} = E_\eta\big(\partial_i\, l(\eta).\, \partial_j\, l(\eta)\big) = E_\eta\big(\partial_j\, l(\eta).\, \partial_i\, l(\eta)\big) = g_{ij}^{\mathbb{F}}$$

olup $g^{\mathbb{F}}$ nin simetrik olduğu sonucuna varılır.

b) Her $v \in T_\theta(S)$ için

$$g^{\mathbb{F}}(v,v) = \sum_{i,j}^{n} g_{ij} v_i\, v_j = 4 \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_{x \epsilon \mathfrak{O}} \partial_i \left(\sqrt{p_\eta(x)} \right) \partial_j \left(\sqrt{p_\eta(x)} \right) dx \right)$$

$$= 4 \int_{x \epsilon \chi} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i \left(\sqrt{p_\eta(x)} \right) \sum_{j=1}^{n} v_j \partial_j \left(\sqrt{p_\eta(x)} \right) \right) dx$$

$$= 4 \int_{x \epsilon \mathfrak{O}} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i \left(\sqrt{p_\eta(x)} \right) \right)^2 dx \geq 0$$

olup pozitif tanımlıdır.

c) $g^{\mathbb{F}}$ dejenere değildir. Gerçektende, her $v \in T_\theta(S)$ için

$$g^{\mathbb{F}}(v,v) = \int_{x \epsilon \mathfrak{O}} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i \left(\sqrt{p_\eta(x)} \right) \right)^2 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i \left(\sqrt{p_\eta(x)} \right) \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \textstyle\sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i \left(\sqrt{p_\eta(x)} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \textstyle\sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i p_\eta(x) = 0 \Leftrightarrow v_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Leftrightarrow v = 0.$$

d) Ψ, Θ, Υ bağımsız üç değişken olsun. Beklenen değer özelliğinden

$$E\big((\Psi + \Theta).\Upsilon\big) = E(\Psi + \Theta)E(\Upsilon) = \big(E(\Psi) + E(\Theta)\big)E(\Upsilon)$$
$$= E(\Psi).E(\Upsilon) + E(\Theta).E(\Upsilon),$$

eşitliği edilir. Bu eşitlik yardımıyla her $v, w, z \in T_\theta(S)$ için

$$g^{\mathbb{F}}(v + w, z) = g^{\mathbb{F}}(v, z) + g^{\mathbb{F}}(w, z),$$
$$g^{\mathbb{F}}(v, w + z) = g^{\mathbb{F}}(v, w) + g^{\mathbb{F}}(v, z)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $g^{\mathbb{F}}$ dönüşümü *2*-lineerdir.

Aşağıda verilecek önerme Fisher bilgi matrisini daha kolay hesaplamaya yardımcı olacaktır. Böylece Fisher bilgi matrisi ile Hessian matris arasında da bir ilişki kurulmuş olacaktır.

2.2.23. Önerme. Bir $S(x, \eta)$ istatistik modeline karşılık gelen Fisher bilgi matrisi bileşenleri için aşağıdaki formül geçerlidir:

$$g_{ij}^{\mathbb{F}} = -E_\eta(\partial_i\, \partial_j l(\eta)) = -E_\eta(\partial_i\, \partial_j\, lnp_\eta). \tag{2.3}$$

İleriki bölümde tezin temelini oluşturacak Gauss (Normal) dağılımı tanıtalım.

2.2.24. Örnek. (1.1) denklemi tanıtılan

$$S(x, \theta) = \left\{\theta = (\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : p(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, x \in \mathbb{R}\right\}$$

ve elemanları normal dağılım olan istatistik modeli göz önüne alalım. Fisher bigi matrisinin bileşenleri (2.3) yardımıyla

$$g_{11}^{\mathbb{F}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^4} dx = \frac{1}{\sigma^2}$$

$$g_{12}^{\mathbb{F}} = g_{21}^{\mathbb{F}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{x-\mu}{\sigma^2} \left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma}\right) dx = 0$$

$$g_{22}^{\mathbb{F}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma}\right)^2 dx = \frac{2}{\sigma^2}$$

biçiminde elde edilir (Costa vd, 2015). Böylece Fisher bilgi matrisi

$$\mathbb{I}(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^2} \end{bmatrix}$$

formunda olur. Böylece Fisher bilgi matrisi yardımıyla Riemann metrik

$$ds_{\mathbb{F}}^2 = \frac{d\sigma^2 + 2d\mu^2}{\sigma^2} \tag{2.4}$$

biçiminde yazılır. Buradan (2.4) denklemiyle belli Riemann metriğe karşılık gelen ∇^{LC} Levi-Civita koneksiyonu koordinat bileşenlerine göre değişimleri

$$2g(\nabla_X^{LC} Y, Z) = Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) - g([Y,X],Z)$$
$$-g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X)$$

Koszul formülü yardımıyla

$$\nabla_{\partial\mu}^{LC} \partial\mu = \frac{1}{2\sigma}\partial\sigma, \quad \nabla_{\partial\mu}^{LC} \partial\sigma = \nabla_{\partial\sigma}^{LC} \partial\mu = -\frac{1}{\sigma}, \quad \nabla_{\partial\sigma}^{LC} \partial\sigma = -\frac{1}{2\sigma}\partial\sigma \tag{2.5}$$

formunda bulunur (Furuhata vd.,2021).

Diğer taraftan 2 boyutlu Hiperbolik uzayın bir geometri modelide

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

üst yarı düzlem üzerinde tanımlanan

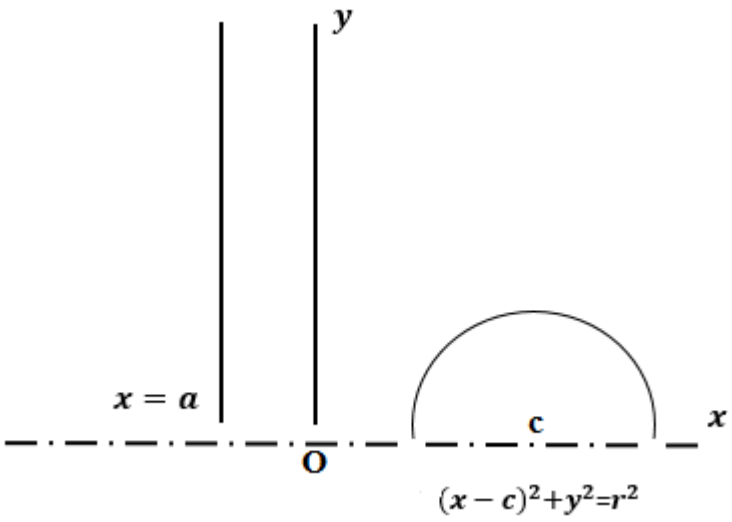
$$ds^2_{\mathbb{H}} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

Riemann metriği ile birlikte tanımlanan $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}})$ Poincare üst yarı düzlem modelidir.

Böylece $\theta = (\mu, \sigma)$ parametrenin değişim tanım kümesi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ olması nedeniyle normal dağılımı

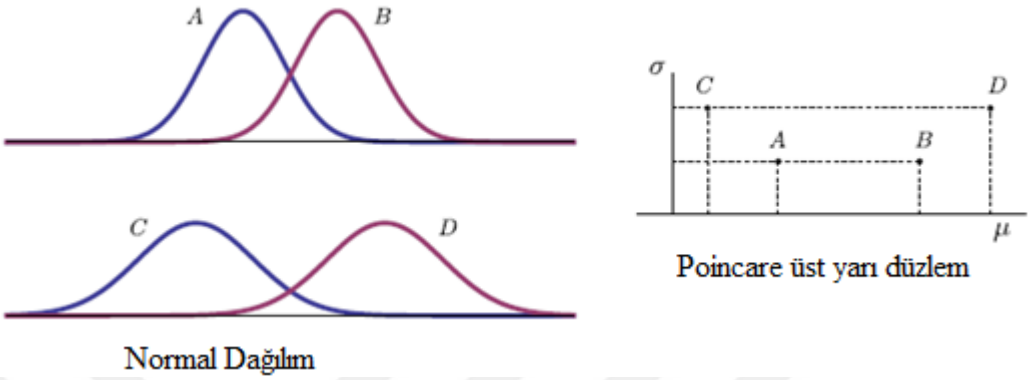
$$(\mathbb{P}_{\mathbb{H}} = \{(\mu, \sigma) \in \mathbb{R}^2 : \sigma > 0\}, \frac{d\sigma^2 + 2d\mu^2}{\sigma^2})$$

2 boyutlu hiperbolik uzayın bir Poincare üst yarı düzlem modeli olarak düşünebiliriz.

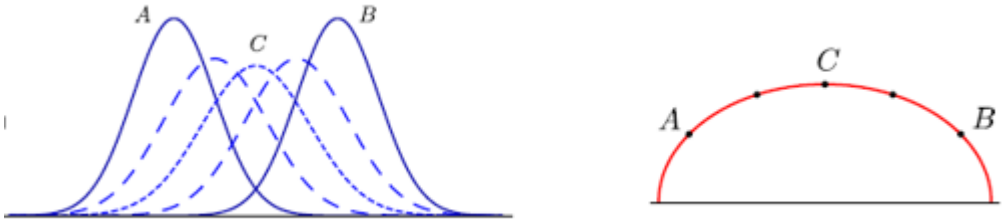


Şekil 2.3. Poincare üst yarı düzlem model

$(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ Poincare üst yarı düzlem modelinin geodezikleri merkezi x-ekseni üzerinde olan r yarıçaplı yarı çemberler ve x eksenine dik olan doğrulardan oluşurlar.



Şekil 2.4. Normal dağılım ile Poincare üst yarı düzlem ilişkisi (Costa vd.,2015)



Şekil 2.5. Normal dağılımın $P_{\mathbb{H}}$ üst yarı düzlem model ile gösterimi (Costa vd; 2015)

$(\mathbb{P}_{\mathbb{H}}, d_{\mathbb{F}})$ ile $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ arasındaki ilişki

$$\psi: (\mathbb{P}_{\mathbb{H}}, ds^2_{\mathbb{F}}) \longrightarrow (\mathbb{H}, ds^2_{\mathbb{H}}), \psi(\mu, \sigma) = \left(\frac{\mu}{\sqrt{2}}, \sigma\right) = (x, y)$$

dönüşümü ile verilir (Costa vd; 2015).

2.2.25. Önerme. $S(x, \eta)$ istatistik model ve bu istatistik modele karşılık gelen Fisher bilgi matrisinin bileşenleri yardımıyla elde edilen Fisher metrik $g_{\mathbb{F}}$ olsun. O zaman

a) $\partial_k g^{\mathbb{F}}_{ij}(\eta) = -E_\eta[\partial_i\partial_j\partial_k l] - E_\eta[(\partial_i\partial_j l)(\partial_k l)]$,

b) $\partial_k g^{\mathbb{F}}_{ij}(\eta) = E_\eta[(\partial_k\partial_i l)(\partial_j l)] + E_\eta[(\partial_k\partial_j l)(\partial_i l)] + E_\eta[(\partial_i l)(\partial_j l)(\partial_k l)]$

eşitlikleri sağlanır. Burada $l = l_x(\eta) = \log\big(p_x(\eta)\big)$, ve $\partial_i = \partial_i l_x(\eta) = \frac{\partial l_x(\eta)}{\partial \eta_i}$ dir (Calin ve Udrişte, 2014).

İspat.

a) (2.3) denklemin *k*. bileşene göre kısmi türevi alınırsa

$$\partial_k g_{ij}^{\mathbb{F}} = -\partial_k E_\eta\big(\partial_i \partial_j l\big)$$

$$= -\partial_k \int_{x\in\chi} (\partial_i \partial_j l) p(x;\eta) dx$$

$$= \int_{x\in\mathfrak{O}} (\partial_k \partial_i \partial_j l) p(x;\eta) dx - \int_{x\in\mathfrak{O}} (\partial_i \partial_j l)(\partial_k p(x;\eta)) dx$$

$$= \int_{x\in\mathfrak{O}} (\partial_k \partial_i \partial_j l) p(x,\eta) dx - \int_{x\in\mathfrak{O}} (\partial_i \partial_j l)(\partial_k lnp(x,\eta)) p(x;\eta) dx$$

$$= \int_{x\in\mathfrak{O}} (\partial_k \partial_i \partial_j l) p(x,\eta) dx - \int_{x\in\mathfrak{O}} (\partial_i \partial_j l)(\partial_k l) p(x,\eta) dx$$

$$= -E_\eta[\partial_i \partial_j \partial_k l] - E_\eta[\big(\partial_i \partial_j l\big)(\partial_k l)]$$

eşitliği elde edilir.

b)

$$\partial_k g_{ij}^{\mathbb{F}} = \int_{x\in\mathfrak{O}} \partial_k\, \partial_i l \partial_j l p(x,\eta) dx + \int_{x\in\mathfrak{O}} \partial_i\, l \partial_k \partial_j l p(x,\eta) dx$$

$$+ \int_{x\in\mathfrak{O}} \partial_i l\, \partial_j l \partial_k p(x,\eta) dx$$

$$= E_\eta\big[\partial_k \partial_i l \partial_j l\big] + E_\eta\big[\partial_i l \partial_k \partial_j l\big] + E_\eta\big[\partial_i l \partial_j l \partial_k l\big]$$

elde edilir.

2.2.26. Tanım. (M, g_M) n-boyutlu bir Riemannian manifold ve üzerindeki Levi-Civita koneksiyon ∇^{LC} olsun. M' nin bir $(\mathcal{U}, x)$ haritası üzerindeki koordinat fonksiyonu x'in $x_1, \dots, x_n$ bileşenlerine karşılık gelen vektör alanları $\{\partial_i = \frac{\partial}{\partial_{x_i}} : i = 1, \dots, n\}$ olmak üzere

$$\Gamma_{ij,k} = g_M\left(\nabla^{LC}_{\partial i}\partial_j, \partial_k\right),$$

reel değerli diferensiyellenebilir fonksiyona birinci çeşit Christoffel sembolleri denir (O'Neill,1983).

Koszul formülü ve $[\partial_i, \partial_j] = 0$ olmasını kullanarak aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

2.2.27. Önerme. (M, g_M) n-boyutlu bir Riemannian manifold ve üzerindeki Levi-Civita koneksiyon ∇^{LC} olsun. M' nin bir $(\mathcal{U}, x)$ haritası üzerindeki koordinat fonksiyonu x'in $x_1, \dots, x_n$ bileşenlerine karşılık gelen vektör alanları $\{\partial_i = \frac{\partial}{\partial_{x_i}} : i = 1, \dots, n\}$ olmak üzere birinci çeşit Christoffel sembolleri

$$\Gamma^{Lc}_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right) \tag{2.6}$$

şeklinde hesaplanır.

2.1.18.Teorem d) şıkkı yardımıyla aşağıdaki önerme verilir.

2.2.28. Önerme. (M, g_M) n-boyutlu bir Riemannian manifold ve üzerindeki Levi-Civita koneksiyon ∇^{LC} olsun. M' nin bir $(\mathcal{U}, x)$ haritası üzerindeki koordinat fonksiyonu x'in $x_1, \dots, x_n$ bileşenlerine karşılık gelen vektör alanları $\{\partial_i = \frac{\partial}{\partial_{x_i}} : i = 1, \dots, n\}$ olmak üzere

$$\partial_k g^{\mathbb{F}}_{ij} = \Gamma^{Lc}_{ki,j} + \Gamma^{Lc}_{kj,i} \tag{2.7}$$

denklemi elde edilir (O'Neill,1983).

2.2.29. Önerme. $S(x,\eta)$ istatistik model ve bu istatistik modele karşılık gelen Fisher bilgi matrisinin bileşenleri yardımıyla elde edilen Fisher metrik $g_{\mathbb{F}}$ olsun. O zaman ∇^{LC} Riemannian koneksiyonun birinci çeşit Christoffel sembolleri için

a) $\Gamma^{LC}_{ij,k}(\eta) = E_\eta[(\partial_i\partial_j l + \frac{1}{2}\partial_i l \partial_j l)\partial_k l]$

b) $2\Gamma^{Lc}_{ij,k}(\eta) = E_\eta[(\partial_i\partial_j l)(\partial_k l)] - E_\eta[(\partial_k\partial_j l)(\partial_i l)] - E_\eta[(\partial_k\partial_i l)(\partial_j l)]$
$- E_\eta(\partial_i\partial_j\partial_k l),$

eşitlikleri sağlanır (Calin ve Udrişte,2014).

İspat. 2.2.25.Önerme. b) şıkkı yardımıyla sırasıyla $\partial_k g^{\mathbb{F}}_{ij}, \partial_j g^{\mathbb{F}}_{ik}$ ve $\partial_i g^{\mathbb{F}}_{jk}$ değerleri sırasıyla

$$\partial_k g^{\mathbb{F}}_{ij} = E_\eta[(\partial_k\partial_i l)\partial_j l] + E_\eta[(\partial_k\partial_j l)\partial_i l] + E_\eta[\partial_i l\partial_j l\partial_k l], \tag{2.8}$$

$$\partial_j g^{\mathbb{F}}_{ik} = E_\eta[(\partial_j\partial_i l)\partial_k l] + E_\eta[(\partial_j\partial_k l)\partial_i l] + E_\eta[\partial_i l\partial_k l\partial_j l], \tag{2.9}$$

$$\partial_i g^{\mathbb{F}}_{jk} = E_\eta[(\partial_i\partial_j l)\partial_k l] + E_\eta[(\partial_i\partial_k l)\partial_j l] + E_\eta[\partial_j l\partial_k l\partial_i l] \tag{2.10}$$

şeklinde hesaplanır. (2.8),(2.9) ve (2.10) değerleri (2.6) da yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{ij,k} = \quad & E_\eta[(\partial_i\partial_j l)\partial_k l] + E_\eta[(\partial_i\partial_k l)\partial_j l] + E_\eta[\partial_j l\partial_k l\partial_i l] \\ & + E_\eta[(\partial_j\partial_i l)\partial_k l] + E_\eta[(\partial_j\partial_k l)\partial_i l] + E_\eta[\partial_i l\partial_k l\partial_j l] \end{aligned}$$

$$- E_\eta\big[(\partial_k\partial_i l)\partial_j l\big] - E_\eta[(\partial_k\partial_j l)\partial_i l] - E_\eta[\partial_i l\partial_j l\partial_k l] \tag{2.11}$$

denklemi elde edilir. (2.11) denklemi beklenen değer E_η fonksiyonun özelikleri ve analizde çokça iyi bilinen $\partial_{ij}^2 l = \partial_i\partial_j l = \partial_j\partial_i l = \partial_{ji}^2 l$ eşitliği kullanılarak

$$2\Gamma_{ij,k} = 2E_\eta[(\partial_i\partial_j l)(\partial_k l)] + E_\eta[\partial_i l\partial_j l\partial_k l]$$

eşitliği elde edilir. Böylece a) şıkkı ispatlanmış olur.

2.2.25. Önerme. a) şıkkı yardımıyla sırasıyla $\partial_k g_{ij}^{\mathbb{F}}, \partial_j g_{ik}^{\mathbb{F}}$ ve $\partial_i g_{jk}^{\mathbb{F}}$ değerleri sırasıyla hesaplanırsa

$$-\partial_k g_{ij}^{\mathbb{F}}(\eta) = E_\eta\big[\partial_i\partial_j\partial_k l\big] + E_\eta\big[\big(\partial_i\partial_j l\big)(\partial_k l)\big], \tag{2.12}$$

$$\partial_j g_{ik}^{\mathbb{F}}(\eta) = -E_\eta\big[\partial_i\partial_k\partial_j l\big] - E_\eta\big[(\partial_i\partial_k l)\big(\partial_j l\big)\big], \tag{2.13}$$

$$\partial_i g_{jk}^{\mathbb{F}}(\eta) = -E_\eta\big[\partial_j\partial_k\partial_i l\big] - E_\eta\big[\big(\partial_j\partial_k l\big)(\partial_i l)\big] \tag{2.14}$$

denklemleri bulunur. (2.12), (2.13) ve (2.14) değerleri (2.6) da yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{ij,k}^{Lc} = {} & E_\eta\big[\partial_i\partial_j\partial_k l\big] + E_\eta\big[\big(\partial_i\partial_j l\big)(\partial_k l)\big] - E_\eta\big[\partial_i\partial_k\partial_j l\big] - E_\eta\big[(\partial_i\partial_k l)\big(\partial_j l\big)\big] \\ & - E_\eta\big[\partial_j\partial_k\partial_i l\big] - E_\eta\big[\big(\partial_j\partial_k l\big)(\partial_i l)\big] \end{aligned} \tag{2.15}$$

denklemi bulunur. Sadeleşmeler yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{ij,k}^{Lc}(\eta) = {} & E_\eta[(\partial_i\partial_j l)(\partial_k l)] - E_\eta[(\partial_k\partial_j l)(\partial_i l)] - E_\eta[(\partial_k\partial_i l)(\partial_j l)] \\ & - E_\eta\big(\partial_i\partial_j\partial_k l\big) \end{aligned}$$

denklemi bulunur ki buda b) şıkkın ispatı olur

2.2.30.Tanım. $S(x,\eta)$ istatistik model ve bu istatistik model ile belli Fisher metrik $g_{\mathbb{F}}$ olsun.

$$\Gamma^1_{ij,k} = g^{\mathbb{F}}\left(\nabla^1_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\right) = E_\eta\left[\left(\partial_i\partial_j\right)l(\partial_k l)\right] \tag{2.16}$$

birinci çeşit Christoffel bileşenleri belli koneksiyona ∇^1 koneksiyonu denir (Calin ve Udrişte, 2014).

Dikkat edilirse $f, S(x,\eta)$ istatistik model üzerinde tanımlı en azından birinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon ise beklenen değer fonksiyonun özeliklerinden

a) $g^{\mathbb{F}}\left(\nabla^1_{f\partial_i}\partial_j, \partial_k\right) = E_\eta\left[\left(f\partial_i\partial_j\right)l(\partial_k l)\right] = fE_\eta\left[\left(\partial_i\partial_j\right)l(\partial_k l)\right] = fg_{\mathbb{F}}\left(\nabla^1_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\right)$,

b) $g^{\mathbb{F}}\left(\nabla^1_{\partial_{i+}\partial_s}\partial_j, \partial_k\right) = E_\eta\left[\left(\partial_i + \partial_s\right)\partial_j\right)l(\partial_k l)\right]$

$$= E_\eta\left[\left(\partial_i\partial_j\right)l(\partial_k l)\right] + E_\eta[(\partial_s\partial_j)l(\partial_k l)]$$
$$= g^{\mathbb{F}}\left(\nabla^1_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\right) + g^{\mathbb{F}}\left(\nabla^1_{\partial_s}\partial_j, \partial_k\right)$$

c) $g^{\mathbb{F}}\left(\nabla^1_{\partial_i} f\partial_j, \partial_k\right) = E_\eta\left[\left(\partial_i(f\partial_j)\right)l(\partial_k l)\right]$

$$= E_\eta\left[\partial_i(f)(\partial_j l)(\partial_k l) + f\left(\partial_i\partial_j\right)l(\partial_k l)\right]$$
$$= \partial_i(f)E_\eta[(\partial_j l)(\partial_k l)] + fE_\eta[\left(\partial_i\partial_j\right)l(\partial_k l)]$$
$$= \partial_i(f)g^{\mathbb{F}}(\partial_j, \partial_k) + fg^{\mathbb{F}}(\nabla^1_{\partial_i}\partial_j, \partial_k)$$

elde edilir.

d) $g^{\mathbb{F}}\left(\nabla^1_{\partial_i}\left(\partial_s + \partial_j\right), \partial_k\right) = E_\eta\left[\left(\partial_i(\partial_s + \partial_j\right)l(\partial_k l)\right]$

$$= E_\eta[(\partial_i\partial_s)l(\partial_k l)] + E_\eta\left[\left(\partial_i\partial_j\right)l(\partial_k l)\right]$$

$$= g^{\mathbb{F}}\left(\nabla^1_{\partial_i}\partial_s, \partial_k\right) + g^{\mathbb{F}}\left(\nabla^1_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\right)$$

Christoffel sembolleri simetrik olduğundan torsiyonsuzdur. Böylece ∇^1 torsiyonsuz bir afin koneksiyondur.

2.2.31. Tanım. $S(x,\eta)$ istatistik model ve bu istatistik model ile belli Fisher metrik $g_{\mathbb{F}}$ olsun.

$$\Gamma^{(-1)}_{ij,k} = g^{\mathbb{F}}\left(\nabla^{(-1)}_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\right) = E_\eta\left[(\partial_i\partial_j l + \partial_j l\partial_i l)(\partial_k l)\right] \tag{2.17}$$

birinci çeşit Christoffel bileşenleri belli koneksiyona $\nabla^{(-1)}$ koneksiyonu denir (Calin ve Udrişte, 2014).

2.2.32. Önerme. $S(x,\eta)$ istatistik model üzerinde tanımlı koneksiyonlar sırasıyla ∇^{LC}, ∇^1 ve $\nabla^{(-1)}$ olsun. O zaman bu üç koneksiyon arasındaki ilişki

$$2\nabla^{LC} = \nabla^1 + \nabla^{(-1)} \tag{2.18}$$

şeklinde bellidir (Calin ve Udrişte,2014).

(2.16) ve (2.17) denklemlerini taraf tarafa toplanıp ve 2.2.29 Önerme a) şıkkı yardımıyla

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{ij,k} + \Gamma^{(-1)}_{ij,k} &= E_\eta\left[(\partial_i\partial_j)l(\partial_k l)\right] + E_\eta\left[(\partial_i\partial_j l + \partial_j l\partial_i l)(\partial_k l)\right] \\ &= E_\eta\left[(2\partial_i\partial_j l + \partial_j l\partial_i l)(\partial_k l)\right] \\ &= 2\Gamma^{LC}_{ij,k}\end{aligned}$$

eşitliği elde ve dolayısıyla (2.18) denklemi elde edilir.

2.2.33. Önerme. $S(x,\eta)$ istatistik modeli üzerindeki her X,Y,Z vektör alanları için

$$Xg^{\mathbb{F}}(Y,Z) = g^{\mathbb{F}}(\nabla_X^1 Y, Z) + g^{\mathbb{F}}\left(Y, \nabla_X^{(-1)} Z\right)$$

eşitliği sağlanır (Calin ve Udrişte, 2014).

İspat. Lokal koordinatlarda

$$\partial_k g^{\mathbb{F}}{}_{ij} = \Gamma^1_{ki,j} + \Gamma^{(-1)}_{kj,i}$$

eşitliğini göstermek ispat için yeterli olacaktır. Önce (2.16), (2.17) ve daha sonra (2.8) denklemi kullanarak

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{ki,j} + \Gamma^{(-1)}_{kj,i} &= E_\eta\left[(\partial_k\partial_i)l(\partial_j l)\right] + E_\eta\left[\left(\partial_k\partial_j l + \partial_k l\partial_j l\right)(\partial_i l)\right] \\ &= E_\eta\left[(\partial_k\partial_i)l(\partial_j l)\right] + E_\eta[(\partial_k\partial_j l)\,(\partial_i l)] + \\ &\quad + E_\eta\left[\left(\partial_i l\partial_j l\right)(\partial_k l)\right] \\ &= \partial_k g^{\mathbb{F}}{}_{ij}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilip ispat tamamlanır.

Şimdi $\nabla^{(-1)}$ ve ∇^1 afin koneksiyonların farkına $\mathcal{K}$ denirse lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned}\Gamma^{(-1)}_{ij,k} - \Gamma^1_{ij,k} &= E_\eta\left[\left(\partial_i\partial_j l + \partial_j l\partial_i l\right)(\partial_k l)\right] - E_\eta\left[\left(\partial_i\partial_j\right)l(\partial_k l)\right] \\ &= E_\eta[\left(\partial_j l\partial_i l\right)(\partial_k l)]\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$g^{\mathbb{F}}\left(\mathcal{K}\left(\partial_i l, \partial_j l\right), \partial_k l\right) = g^{\mathbb{F}}\left(\nabla^{(-1)}_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\right) - g^{\mathbb{F}}\left(\nabla^1_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\right)$$

bağıntısı bulunur.

2.2.34. Tanım. $S(x,\eta)$ bir istatistik model olsun. Her $X,Y \in \Gamma(TS)$ için

$$\mathcal{K}: \Gamma(TS) \times \Gamma(TS) \to \Gamma(TS)$$
$$(X, \quad Y) \to \mathcal{K}(X,Y) = \nabla_X^{(-1)} Y - \nabla_X^1 Y$$

olarak tanımlı (2,1) tensör alanına çarpık fark tensör alanı denir ve (0,3) tipindeki $\mathcal{T}$ tensör alan

$$\mathcal{T}: \Gamma(TS) \times \Gamma(TS) \times \Gamma(TS) \to \mathcal{F}(S)$$
$$(X, \quad Y, \quad Z) \to \mathcal{T}(X,Y,Z) = g^{\mathbb{F}}(\mathcal{K}(X,Y),Z)$$

şeklinde tanımlanır (Calin ve Udrişte, 2014).

$S(x,\eta)$ bir istatistik model olsun. Her $X,Y \in \Gamma(TS)$ için

$$(\nabla_X^1 g^{\mathbb{F}})(Y,Z) = Xg^{\mathbb{F}}(Y,Z) - g^{\mathbb{F}}(\nabla_X^1 Y, Z) - g^{\mathbb{F}}(Y, \nabla_X^1 Z)$$

eşitliğini lokal koordinatlarda hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \partial_i g_{jk}^{\mathbb{F}} - \Gamma_{ij,k}^1 - \Gamma_{ik,j}^1 &= E_\eta[(\partial_i \partial_j l)\partial_k l] + E_\eta[(\partial_i \partial_k l)\partial_j l] + E_\eta[\partial_j l \partial_k l \partial_i l] \\ &\quad - E_\eta\big[(\partial_i \partial_j) l (\partial_k l)\big] - E_\eta\big[(\partial_i \partial_k) l (\partial_j l)\big] \\ &= E_\eta\big[\partial_j l \partial_k l \partial_i l\big] = (\nabla_{\partial_i}^1 g^{\mathbb{F}})(\partial_j, \partial_k) \end{aligned}$$

$$\partial_i g_{jk}^{\mathbb{F}} - \Gamma_{ij,k}^{(-1)} - \Gamma_{ik,j}^{(-1)} = -(\nabla_{\partial_i}^{(-1)} g^{\mathbb{F}})(\partial_j, \partial_k)$$

elde edilir. Benzer şekilde hesaplama yapılırsa aşağıdaki teoreme ulaşılır.

2.2.3. Teorem. $S(x,\eta)$ bir istatistik model olsun ve model üzerinde tanımlı torsiyonsuz afin koneksiyonlar ∇^1, $\nabla^{(-1)}$ ve Fisher metrik $g^{\mathbb{F}}$ olmak üzere

$$\mathcal{T} = \nabla^1 g^{\mathbb{F}} = -\nabla^{(-1)} g^{\mathbb{F}} \tag{2.19}$$

bağıntısı geçerlidir (Calin ve Udrişte,2014).

Dikkat edilirse $g^{\mathbb{F}}$, ∇^1, $\nabla^{(-1)}$ koneksiyonlarına göre paralel değildir.

2.3. İstatistiksel Manifoldlar

2.3.1. Tanım. (M, g_M) bir Riemannian manfold ve ∇ M üzerinde bir afin koneksiyon ve T (0,2) tipinde bir simetrik tensör alanı olsun. Eğer her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X T)(Y,Z) = (\nabla_Y T)(X,Z)$$

oluyor ise T M üzerinde Codazzi tipinde bir tensör alanı denir (O'Neill, 1983).

2.3.2. Tanım. (M, g) bir Riemannian manfold ve M üzerinde tanımlı torsiyonsuz afin konneksiyon ∇ olsun. Eğer ∇g_M hepten (total) simetrik ise bir başka deyişle bir Codazzi tensör alanı ise (∇, g_M) ikilisine bir istatistik yapı ve bu yapı ile donatılmış (M, g_M) Riemann manifolduna bir istatistiksel manifold denir ve (M, ∇, g_M) olarak gösterilir (Amari, 1985).

2.3.1. Tanım'a dikkat edilirse eğer ∇ afin konneksiyonu ∇^{LC} Levi-Civita konneksiyonu olarak seçilirse $\nabla^{LC} g_M = 0$ olacağından g_M Riemann metriği ∇^{LC} ye göre aşikar bir Codazzi tensör olur. Böylece her Riemann manifold, üzerinde tanımlı olan Levi-Civita

konneksiyonla birlikte bir istatistiksel manifolddur. Böylece (M, ∇^{LC}, g_M) 3-lüsü istatistiksel manifoldların bir alt sınıfında yer alır.

2.3.3. Tanım. $(M, \nabla, g g_M)$ bir istatistiksel manifold ve ∇^* M üzerinde tanımlı bir başka torsiyonsuz afin konneksiyon olsun. Eğer her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$Xg_M(Y,Z) = g_M(\nabla_X Y, Z) + g_M(Y, \nabla_X^* Z) \tag{2.20}$$

∇^* koneksiyonuna ∇ nın eşlenik konesiyonu denir (Simon, 2000).

Dikkat edilirse $(\nabla^*)^* = \nabla$ dır.

2.3.4. Önerme. (M, ∇, g_M) bir istatistiksel manifold ve ∇^* M üzerinde ∇ nın eşlenik konneksiyonu olsun. O zaman (M, ∇^*, g_M) de istatistik manifold olur (Amari, 1985).

İspat. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için $(\nabla_X^* g_M)(Y,Z) = (\nabla_Y^* g_M)(X,Z)$ eşitliğinin sağlandığını göstermek yeterli olacaktır.

$$(\nabla_X^* g_M)(Y,Z) = Xg_M(Y,Z) - g_M(\nabla_X^* Y, Z) - g_M(Y, \nabla_X^* Z) \tag{2.21}$$

$$(\nabla_Y^* g_M)(Y,Z) = Yg_M(X,Z) - g_M(\nabla_Y^* X, Z) - g_M(X, \nabla_Y^* Z) \tag{2.22}$$

(2.20) denklemi (2.21) ve (2.22) de kullanılırsa

$$(\nabla_X^* g_M)(Y,Z) = g_M(\nabla_X Y, Z) - g_M(\nabla_X^* Y, Z) \tag{2.23}$$

ve

$$(\nabla_Y^* g_M)(Y,Z) = g_M(\nabla_Y X, Z) - g_M(\nabla_Y^* X, Z) \tag{2.24}$$

eşitlikleri elde edilir. (2.23) ve (2.24) taraf tarafa çıkartılırsa

$$\begin{aligned}(\nabla_X^* g_M)(Y,Z) - (\nabla_Y^* g_M)(Y,Z) &= g_M(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) - g_M(\nabla_X^* Y - \nabla_Y^* X, Z)\\ &= g_M([X,Y],Z) - g_M([X,Y],Z)\\ &= 0\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

2.3.5. Sonuç. (M, ∇, g_M) bir istatistiksel manifold, ∇^* ∇ nın M üzerinde tanımlı eşlenik konneksiyonu ve ∇^{LC} M nin Levi-Civita konneksiyonu olsun. O zaman

$$2\nabla^{LC} = \nabla + \nabla^* \tag{2.25}$$

dır (Amari, 1985).

İspat. $\nabla^{LC} g_M = 0$ ve (2.20) denkleminden

$$Xg_M(Y,Z) = g_M(\nabla_X^{LC} Y, Z) + g_M(Y, \nabla_X^{LC} Z) \tag{2.26}$$

$$Xg_M(Y,Z) = g_M(\nabla_X Y, Z) + g_M(Y, \nabla_X^* Z) \tag{2.27}$$

$$Xg_M(Y,Z) = g_M(\nabla_X^* Y, Z) + g_M(Y, \nabla_X Z) \tag{2.28}$$

denklemleri elde edilir. (2.27) ve (2.28)'i taraf tarafa toplarsak

$$2Xg_M(Y,Z) = g_M(\nabla_X Y + \nabla_X^* Y, Z) + g_M(Y, \nabla_X Z \nabla_X^* Z) \tag{2.29}$$

denklemi elde edilir. (2.29) denklemi (2.26) ile karşılaştırılırsa

$$2\nabla_X^{LC} Y = \nabla_X Y + \nabla_X^* Y$$

eşitliğine ulaşılır ve buda ispatı tamamlar.

2.3.6. Tanım. (M, ∇, g_M) bir istatistiksel manifold olsun. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\mathcal{K}: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$
$$(X, \quad Y) \to \mathcal{K}(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_X^* Y$$

olarak tanımlı (2,1) tensör alanına istatistiksel çarpık fark tensör alanı denir ve (0,3) tipindeki $\mathcal{T}$ tensör alan

$$\mathcal{T}: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \mathcal{F}(M)$$
$$(X, \quad Y, \quad Z) \to \mathcal{T}(X,Y,Z) = g_M(\mathcal{K}(X,Y), Z)$$

şeklinde tanımlanır (Calin ve Udrişte, 2014).

(2.25) denklem ve 2.3.6. Tanım'dan

$$\nabla_X Y = \nabla_X^{LC} Y + \mathcal{K}(X,Y)\ ;\ \forall X, Y \in \Gamma(TM) \tag{2.30}$$

$$\nabla_X^* Y = \nabla_X^{LC} Y + \mathcal{K}(X,Y)\ ;\ \forall X, Y \in \Gamma(TM) \tag{2.31}$$

denklemleri elde edilir.

2.3.7. Önerme. (M, ∇, g_M) bir istatistiksel manifold olsun. O zaman, her $X, Y \in (TM)$ için

$$(\nabla_X g_M)(Y,Z) = \mathcal{T}(X,Y,Z) = -(\nabla_X^* g_M)(Y,Z) \tag{2.32}$$

denklemi geçerlidir (Calin ve Udrişte,2014).

2.3.8. Sonuç. (M, ∇, g_M) bir istatistiksel manifold olsun. O zaman, her $X, Y \in (TM)$ için

$$\mathcal{T}(X,Y,Z) = \mathcal{T}(Y,X,Z) = \mathcal{T}(X,Z,Y) \tag{2.33}$$

eşitliği geçerlidir (Calin ve Udrişte,2014).

2.3.9. Teorem. (M, g_M) bir Riemannian manifold olsun. Eğer her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için ∇ ve ∇^* torsiyonsuz iki afin konneksiyon

$$Xg_M(Y,Z) = g_M(\nabla_X Y, Z) + g_M(Y, \nabla_X^* Z)$$

denklemini sağlasın. O zaman (M, ∇, g_M) bir istatistiksel manifold olur (Calin ve Udrişte,2014).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde istatistiksel manifoldların istatistiksel alt manifoldların ortalama eğriliklerinin nasıl hesaplanacağı tanıtılacaktır.

3.1. İstatistiksel Altmanifoldlar

3.1.1. Tanım. $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \tilde{g}_{\widetilde{M}})$ n-boyutlu bir istatistiksel manifold ve M m-boyutlu bir differensiyellenebilir manifold ve $i: M \to \widetilde{M}$ bir immersiyon olsun. M üzerindeki g_M Riemann metrik ve ∇ afin konneksiyon

$$g_M(X,Y) = \tilde{g}_{\widetilde{M}}(i_*X, i_*Y) \text{ ve } g_M(\nabla_X Y, Z) = \tilde{g}_{\widetilde{M}}\left(\widetilde{\nabla}_X i_*Y, i_*Z\right); \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$$

olarak tanımlanırsa, (∇, g_M) M üzerinde bir istatistiksel yapı tanımlar ve bu yapı i immersiyonu yardımıyla $(\widetilde{\nabla}, \tilde{g}_{\widetilde{M}})$ den indirgenmiş istatistiksel yapı olarak adlandırılır. Bu durumda (M, ∇, g_M) 3-lüsüne $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \tilde{g}_{\widetilde{M}})$ nin m boyutlu istatistiksel alt manifoldu ve eğer boyutlar arasındaki ilişki $m = n - 1$ şeklinde ise istatistiksel hiperyüzey olarak isimlendirilir (Furuhata, 2009).

Riemannian alt manifoldlar için tanımlanan Gauss ve Weingarten denklemleri istatistiksel alt manifoldlar için sırasıyla aşağıdaki şekilde verilir (Vos, 1989):

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y),\ \widetilde{\nabla}^*_X Y = \nabla^*_X Y + h^*(X,Y)\ ; \forall X, Y \in \Gamma(TM)\ , \qquad (3.1)$$

$$\widetilde{\nabla}_X N = -\mathrm{A}^*_N X + \nabla^{\perp}_X N,\ \widetilde{\nabla}^*_X N = A_N X + \nabla^{*\perp}_X N;\ \forall X \in \Gamma(TM) \text{ ve } \forall N\ \in \Gamma(TM)^{\perp}\ . \quad (3.2)$$

Burada h, h^* $\widetilde{\nabla}$ ve $\widetilde{\nabla}^*$ afin konneksiyonalarına göre ikinci temel form ve A, A^* benzer şekilde $\widetilde{\nabla}$ ve $\widetilde{\nabla}^*$ afin konneksiyonalarına göre şekil operatörlerini temsil etmektedirler.

Riemannian durumdakine benzer şekilde ikinci temel formlar ve şekil operatörler arasındaki ilişki aşağıdaki şekildeki gibidir (Vos, 1989):

$$h(X,Y) = h(Y,X),\ h^*(X,Y) = h^*(Y,X), \tag{3.3}$$

$$g_M(A_N X, Y) = \tilde{g}_{\tilde{M}}(h(X,Y),N)\ g_M(\mathrm{A}_N^* X, Y) = \tilde{g}_{\tilde{M}}(h^*(X,Y),N)\,. \tag{3.4}$$

Böylece (3.1) ve (3.4) arasında verilen denklemler istatistiksel hiperyüzeyler için aşağıdaki formlara dönüşür (Furuhata, 2009):

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)N, \qquad \tilde{\nabla}_X^* Y = \nabla_X^* Y + h^*(X,Y)N\,, \tag{3.5}$$

$$\tilde{\nabla}_X N = -\mathrm{A}_N^* X + \tau(X), \qquad \tilde{\nabla}_X^* N = A_N X + \tau^*(X)\,. \tag{3.6}$$

Burada, τ ve τ^* $\tau(X) + \tau^*(X) = 0$ özeliğindeki 1-formlardır.

Bu denklemler Levi-Civita konneksiyonları alt manifoldlar için Gauss ve Weingarten denklemleri aşağıdaki formdaırlar (O'Neill, 1983):

$$\tilde{\nabla}_X^{LC} Y = \nabla_X^{LC} Y + h^{LC}(X,Y), \tag{3.7}$$

$$\tilde{\nabla}_X^{LC} N = -A_N^{LC} X + \nabla_X^{LC\perp} N. \tag{3.8}$$

Bu durumda (2.25) denklemi yardımıyla ikinci temel formlar ve şekil operatörleri arasında

$$2h^{LC} = h + h^* \text{ ve } 2A^{LC} = A + A^*$$

biçiminde doğal bir ilişki vardır.

3.1.2. Tanım. n-noyutlu (M, ∇, g_M) istatistiksel manifold, m- boyutlu $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \tilde{g}_{\widetilde{M}})$'nin istatistiksel manifoldun bir alt manifold ve $\Gamma(TM)$ nin bir ortonormal çatı alanı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olsun. O zaman

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i), \qquad H^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^*(e_i, e_i), \qquad H^{LC} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^{LC}(e_i, e_i)$$

değerlerine sırasıyla M nin ∇, ∇^* ve ∇^{LC} konneksiyonlarına göre ortalama eğrilik vektör alanları denir.

Eğer $H = 0$, (H^*=0 veya H^{LC}=0) ise istatistiksel altmanifold sırasıyla H tip-minimal (H^* tip-minimal veya H^{LC} tip-minimal) olarak adlandırılır (O'Neill, 1983), (Calin ve Udrişte, 2014).

3.2 İstatiksel Hiperbolik üst yarı uzay modeli

3.2.1. Tanım. $(n+1)$ boyutlu $\mathbb{R}^{n+1}$ reel uzayın bir alt cümlesi

$$\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > 0\}$$

üzerinde tanımlı

$$ds_P^2 = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} \tag{3.9}$$

Riemann metriği ile birlikte $(\mathbb{R}^{n+1}_+, ds_P^2)$ bir Riemann manifold olur ve $(n+1)$ boyutlu hiperbolik uzayın üst yarı uzay modeli olarak adlandırılır ve $\mathcal{H}^{n+1}$ ile gösterilir (Cannon ve ark., 1997).

Dikkat edilirse $ds_P^2 = \frac{1}{x_{n+1}^2} ds_E^2$ dir. Burada ds_E^2 , $\mathbb{R}^{n+1}$ üzerindeki Euclead metriğidir.

Koszula formül yardımıyla $\mathcal{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ hiperbolik üst yarı uzay modelin Levi-Civita koneksiyonu, koordinat bileşenlere göre ifadesi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} &\widetilde{\nabla}^{LC}_{\partial x}\partial x = \tfrac{1}{z}\partial z, \quad \widetilde{\nabla}^{LC}_{\partial y}\partial x = 0, \quad \widetilde{\nabla}^{LC}_{\partial z}\partial x = -\tfrac{1}{z}\partial z, \\ &\widetilde{\nabla}^{LC}_{\partial x}\partial y = 0, \quad \widetilde{\nabla}^{LC}_{\partial y}\partial y = \tfrac{1}{z}\partial z, \quad \widetilde{\nabla}^{LC}_{\partial z}\partial y = -\tfrac{1}{z}\partial z, \\ &\widetilde{\nabla}^{LC}_{\partial x}\partial z = 0 \quad \widetilde{\nabla}^{LC}_{\partial y}\partial z = 0, \quad \widetilde{\nabla}^{LC}_{\partial z}\partial z = -\tfrac{1}{z}\partial z. \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.1.2. Önerme. $\mathcal{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ hiperbolik üst yarı uzay model $\mathcal{H}^3$ üzerinde bükülmeyen (torsiyonsuz) iki afin koneksiyon

$$\begin{aligned} &\widetilde{\nabla}^{\mathcal{H}}_{\partial x}\partial x = \tfrac{2}{z}\partial z, \quad \widetilde{\nabla}^{\mathcal{H}}_{\partial y}\partial x = 0, \quad \widetilde{\nabla}^{\mathcal{H}}_{\partial z}\partial x = 0 \\ &\widetilde{\nabla}^{\mathcal{H}}_{\partial x}\partial y = 0, \quad \widetilde{\nabla}^{\mathcal{H}}_{\partial y}\partial y = \tfrac{2}{z}\partial z, \quad \widetilde{\nabla}^{\mathcal{H}}_{\partial z}\partial y = 0 \\ &\widetilde{\nabla}^{\mathcal{H}}_{\partial x}\partial z = 0 \quad \widetilde{\nabla}^{\mathcal{H}}_{\partial y}\partial z = 0, \quad \widetilde{\nabla}^{\mathcal{H}}_{\partial z}\partial z = \tfrac{1}{z}\partial z. \end{aligned} \tag{3.11}$$

ve

$$\begin{aligned} &\widetilde{\nabla}^{*\mathcal{H}}_{\partial x}\partial x = 0, \quad \widetilde{\nabla}^{*\mathcal{H}}_{\partial y}\partial x = 0, \quad \widetilde{\nabla}^{*\mathcal{H}}_{\partial z}\partial x = -\tfrac{2}{z}\partial z \\ &\widetilde{\nabla}^{*\mathcal{H}}_{\partial x}\partial y = 0, \quad \widetilde{\nabla}^{*\mathcal{H}}_{\partial y}\partial y = 0, \quad \widetilde{\nabla}^{*\mathcal{H}}_{\partial z}\partial y = -\tfrac{2}{z}\partial z \\ &\widetilde{\nabla}^{*\mathcal{H}}_{\partial x}\partial z = -\tfrac{2}{z}\partial z, \quad \widetilde{\nabla}^{*\mathcal{H}}_{\partial y}\partial z = -\tfrac{2}{z}\partial z, \quad \widetilde{\nabla}^{*\mathcal{H}}_{\partial z}\partial z = -\tfrac{3}{z}\partial z. \end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $X, Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{H}^3)$ vektör alanları için

$$X ds_P(Y, Z) = ds_P\left(\widetilde{\nabla}^{\mathcal{H}}_X Y, Z\right) + ds_P(Y, \widetilde{\nabla}^{*\mathcal{H}}_X Z)$$

eşitliği sağlanır. Böylece $(\mathcal{H}^3, ds_P, \overline{\nabla}^{\mathcal{H}})$ bir istatistik manifold olur (Furuhata, 2019).

Diğer taraftan,

$$N(x,(\mu,\sigma^2)) = \{\theta = (\mu,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : p(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}, x \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde tanımlı normal dağılım istatiksel modelde Riemann metrik

$$ds_P^2 = \frac{dx^2 + 2dy^2}{y^2}$$

ve ∇^α Amari-Chentsov koneksiyon

$$\nabla^\alpha_{\partial x}\partial x = \frac{1-\alpha}{2y}\partial y,\ \nabla^\alpha_{\partial x}\partial y = \nabla^\alpha_{\partial y}\partial x = -\frac{1+\alpha}{y}\partial x,\ \nabla^\alpha_{\partial y}\partial y = -\frac{1+2\alpha}{y}\partial y$$

şeklinde olur (Furuhata vd., 2021). Bu istatiksel modelde $\alpha = -1$ ve $\alpha = 1$ seçilirse

$$\nabla_{\partial x}\partial x = \frac{1}{y}\partial y,\ \nabla_{\partial x}\partial y = \nabla_{\partial y}\partial x = 0\ ,\ \nabla_{\partial y}\partial y = \frac{1}{y}\partial y$$

$$\nabla^*_{\partial x}\partial x = 0,\ \nabla^*_{\partial x}\partial y = \nabla^*_{\partial y}\partial x = -\frac{2}{y}\ \partial x\ ,\ \nabla^*_{\partial y}\partial y = -\frac{3}{y}\partial y$$

elde edilir. $\alpha = 0$ alınırsa ∇^{LC} Levi-Civita konneksiyonuna ulaşılır ve bu da aşağıdaki fomda olur.

$$\nabla^{LC}_{\partial x}\partial x = \frac{1}{2y}\partial y\ ,\ \nabla^{LC}_{\partial x}\partial y = \nabla^{LC}_{\partial y}\partial x = -\frac{1}{y}\partial x\ \ ,\ \nabla^{LC}_{\partial y}\partial y = -\frac{1}{y}\partial y$$

Furuhta ve ark. bu tartışmayı

$$ds^2_{P_\lambda} = \frac{dx^2 + \lambda^2 dy^2}{y^2}$$

Riemann metriği için yaptıklarında ∇^α Amari-Chentsov koneksiyon

$$\nabla^{\alpha}_{\partial x}\partial x = \frac{1-\alpha}{\lambda^2 y}\partial y,\ \nabla^{\alpha}_{\partial x}\partial y = \nabla^{\alpha}_{\partial y}\partial x = -\frac{1+\alpha}{y}\partial x,\ \nabla^{\alpha}_{\partial y}\partial = -\frac{1+2\alpha}{y}\partial y$$

şeklinde olur (Furuhata vd.,2021).

Dikkat edilirse Normal dağılım ile hiperbolik uzayın $\mathcal{H}^2$ Poincare üst yarı düzlem modeli ile yakından bir ilişkisi vardır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölüm orijinal sonuçlardan oluşmaktadır. Hiperbolik uzayın bir modeli olan üst yarı düzlem modelin istatistik yapısı ve istatistik öteleme yüzeyler tanıtılacaktır. Daha sonra 3-boyutlu istatistiksel üst yarı hiperbolik uzayın istatiksel öteleme yüzeylerin minimal olma koşulları altında sınıflandırılması verilecektir.

4.1. İstatiksel hiperbolik üst yarı uzay modelde yüzeyler

(M, ∇, g_M) *3-* boyutlu $\left(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \tilde{g}_{\widetilde{M}}\right)$ istatistiksel manifoldun bir yüzeyi olsun.

$$\phi: (s,t) \in D \subset \mathbb{R}^2 \to M \subset \widetilde{M},$$

istatistiksel yüzeyin bir parametrelendirilmesi olsun. Birinci temel form, $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayının $\{\phi_s, \phi_t\}$ bazına göre katsayıları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E = \tilde{g}_{\widetilde{M}}(\phi_s, \phi_s), F = \tilde{g}_{\widetilde{M}}(\phi_s, \phi_t) ve\ G = \tilde{g}_{\widetilde{M}}(\phi_t, \phi_t) \tag{4.1}$$

M'nin birim normal vektör alanı şu şekilde verilir:

$$\mathrm{N} = \frac{\phi_s \times \phi_t}{\|\phi_s \times \phi_s\|} \tag{4.2}$$

(3.5) ve (3.6) denklemleri ile verilen Gauss ve Weingarten formülleri yardımıyla

$$-g(\overline{\nabla}^*{}_X N, Y) = \tilde{g}\left(\widetilde{\nabla}_X Y, N\right) = g(A_N X, Y), ; \forall X, Y \in \Gamma(TM)\ ve\ \ N\ \in \Gamma(TM)^{\perp} \tag{4.3}$$

$$-g\left(\widetilde{\nabla}_X N, Y\right) = \tilde{g}(\overline{\nabla}^*{}_X Y, N) = g(A_N^* X, Y), \tag{4.4}$$

denklemleri elde edilir.

$\{\phi_s, \phi_t\}$ bazı (tabanına) göre A_N şekil operatörü ve A_N^* eşlenik şekil operatörü ifadesi sırasıyla

$$A_N\phi_s = h_{11}\phi_s + h_{12}\phi_t, \tag{4.5}$$

$$A_N\phi_t = h_{21}\phi_s + h_{22}\phi_t, \tag{4.6}$$

$$A_N^*\phi_s = h^*{}_{11}\phi_s + h^*{}_{12}\phi_t, \tag{4.7}$$

$$A_N^*\phi_t = h^*{}_{21}\phi_s + h^*{}_{22}\phi_t \tag{4.8}$$

biçiminde ifade edilir.

(4.5) - (4.12) arasındaki denklemler yardımıyla, ikinci temel form h ve eşlenik ikinci temel form h^* 'ın katsayıları sırasıyla

$$h_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\phi_s}\phi_s, N) & F \\ \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\phi_s}\phi_t, N) & G \end{vmatrix}}{EG - F^2}, \quad h_{22} = \frac{\begin{vmatrix} E & \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\phi_t}\phi_s, N) \\ F & \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\phi_t}\phi_t, N) \end{vmatrix}}{EG - F^2}$$

$$h_{12} = \frac{\begin{vmatrix} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\phi_s}\phi_t, N) & F \\ \tilde{g}(\overline{\nabla}_{\phi_s}\phi_s, N) & E \end{vmatrix}}{EG - F^2}, \quad h_{21} = \frac{\begin{vmatrix} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\phi_t}\phi_s, N) & F \\ \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\phi_t}\phi_t, N) & G \end{vmatrix}}{EG - F^2}$$

ve

$$h^*{}_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \tilde{g}(\tilde{\nabla}^*_{\phi_s}\phi_s, N) & F \\ \tilde{g}(\tilde{\nabla}^*_{\phi_s}\phi_t, N) & G \end{vmatrix}}{EG - F^2}, \quad h^*{}_{22} = \frac{\begin{vmatrix} E & \tilde{g}(\tilde{\nabla}^*_{\phi_t}\phi_s, N) \\ F & \tilde{g}(\tilde{\nabla}^*_{\phi_t}\phi_t, N) \end{vmatrix}}{EG - F^2}$$

$$h^*{}_{21} = \frac{\begin{vmatrix} \tilde{g}(\tilde{\nabla}^*_{\phi_s}\phi_t, N) & F \\ \tilde{g}(\tilde{\nabla}^*_{\phi_s}\phi_s, N) & E \end{vmatrix}}{EG - F^2}, \quad h^*{}_{22} = \frac{\begin{vmatrix} \tilde{g}(\tilde{\nabla}^*_{\phi_t}\phi_s, N) & F \\ \tilde{g}(\tilde{\nabla}^*_{\phi_t}\phi_t, N) & G \end{vmatrix}}{EG - F^2}.$$

şeklinde bulunur. Böylece H ortalama ve eşlenik ortalama eğrilik H^* sırasıyla

$$H = \frac{h_{11} + h_{22}}{2}$$
$$= \frac{G\tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{\phi_s}\phi_s, N\right) - F\left(\tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{\phi_s}\phi_t, N\right) + \tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{\phi_t}\phi_s, N\right)\right) + E\tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{\phi_t}\phi_t, N\right)}{2(EG - F^2)}, \tag{4.9}$$

$$H^* = \frac{h^*{}_{11} + h^*{}_{22}}{2}$$
$$= \frac{G\tilde{g}\left(\overline{\nabla}_{\phi_s}\phi_s, N\right) - F\left(\tilde{g}\left(\overline{\nabla}_{\phi_s}\phi_t, N\right) + \tilde{g}\left(\overline{\nabla}_{\phi_t}\phi_s, N\right)\right) + E\tilde{g}\left(\overline{\nabla}_{\phi_t}\phi_t, N\right)}{2(EG - F^2)}. \tag{4.10}$$

şeklindedir.

4.2 İstatiksel Hiperbolik üst yarı uzay modelinde öteleme yüzeyler

Hiperbolik uzayın $\mathcal{H}^{n+1}$ üst yarı uzay modeli $\mathbb{R}^{n+1}$ afin uzaydaki gibi iki uzaysal eğrinin toplamına izin vereceğinden

$$\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{H}^3$$
$$(s,t) \to (s,t,f(s)+g(t))$$

biçiminde 3-boyutlu Öklid uzaydakine benzer bir öteleme yüzeyini tanımlamak mümkün olacaktır. Bu ise günlük hayatımızda karşımıza çıkan katı örneklere birde istatiksel yapılar gözü ile bakma fırsatı verecektir. Bu anlamda literatüre kazandırılacak ilk örnekler olacaktır.

$\mathcal{H}^3$ nın xoy düzleminde

$$(x + a, y, z) \leftrightarrow (x, y + a, z)$$

birbirlerine izometrik olmaları nedeniyle $x \leftrightarrow y$ değişimi yapmak mümkündür. Fakat xoz veya yoz düzleminde $z > 0$ olması nedeniyle $x \leftrightarrow z$ veya $y \leftrightarrow z$ mümkün değildir (Lopez, 2011). Bu nedenle iki çeşit öteleme yüzeyi tanımlanır.

4.2.1. Tanım. 3 boyutlu hiperbolik üst uzay modeld $\mathcal{H}^3$ 'te

$$\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{H}^3, \phi(s,t) = (s,t,f(s)+g(t)) \text{ öyleki } f(s)+g(t) > 0,$$

Monge yaması ile verilen yüzey I.tip öteleme yüzey,

$$\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{H}^3, \phi(s,t) = (s,f(s)+g(t),t) \text{ öyleki } t > 0$$

parametrizasyonu ile tanımlanan yüzeye de II. tip öteleme yüzey denir (Lopez, 2011).

Şimdi tezin ilk orijinal teoremini verelim.

4.2.2. Teorem. M, $\mathcal{H}^3$ 3- boyutlu istatiksel yapıya sahip olan hiperbolik uzayın üst yarı uzay modelinde I tip istatiksel öteleme yüzey olsun. Eğer $M, H-$ tipi minimal bir yüzey ise f ve g fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$f = f_0 =, sabit$$

$$g(t) = \mathcal{I}^{-1}(t) + m, \mathcal{I}(t) = \mp\sqrt{3}\int^t \frac{c_1^3(f_0+\tau)}{\sqrt{1-4c_1^6(f_0+\tau)^6}}d\tau.$$

Burada $m \in \mathbb{R}, c_1 \in \mathbb{R}^+$ dir.

İspat: 3-boyutlu $\mathcal{H}^3$ hiperbolik uzayında

$$\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to M \subset \mathcal{H}^3$$
$$(s,t) \to (s,t,f(s)+g(t))$$

lokal olarak parametrize edilmiş bir öteleme yüzeyini göz önüne alalım. O zaman yüzeyin teğet uzayının baz vektörleri sırasıyla

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \phi_s = \big(1,0,f'(s)\big) = \partial_x + f'(s)\partial_z, \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi_t = \big(0,1,g'(t)\big) = \partial_y + g'(t)\partial_z \tag{4.12}$$

şeklinde olur. Yüzeyin I temel formun katsayıları sırasıyla denklem (3.9) yardımıyla

$$E = ds_P^2(\phi_s,\phi_s) = \frac{1+f'(s)^2}{\big(f(s)+g(t)\big)^2}, \tag{4.13}$$

$$F = ds_P^2(\phi_s,\phi_t) = \frac{f'(s)g'(t)}{\big(f(s)+g(t)\big)^2}, \tag{4.14}$$

$$G = ds_P^2(\phi_t,\phi_t)\frac{1+g'(s)^2}{(f(s)+g(t))^2} \tag{4.15}$$

bulunur. Böylece (4.13), (4.14) ve (4.15) denklemleri kullanarak yüzeyin I. temel formu (metrik tensör alanı)

$$ds_M^2 = \frac{1+f'(s)^2}{\big(f(s)+g(t)\big)^2} ds \otimes ds + 2\frac{f'(s)g'(t)}{\big(f(s)+g(t)\big)^2} ds \otimes dt + \frac{1+g'(s)^2}{(f(s)+g(t))^2} dt \otimes dt$$

olarak elde edilir.

Ortalama eğrilik H yı hesaplamak için yüzeyin birim ortonormal vektör alanı N'yi hesaplamak gerekir. O da 3 boyutlu Euclead uzayına benzer vektörel çarpım yardımıyla

$$N = \frac{\phi_s \times \phi_t}{\|\phi_s \times \phi_t\|} = -\frac{f'(s)}{W}\partial_x - \frac{g'(t)}{W}\partial_y + \frac{1}{W}\partial_z \tag{4.16}$$

olarak bulunur. Burada $W = \|\phi_s \times \phi_t\| = \frac{1}{f(s)+g(t)}\sqrt{f'(s)^2 + g'(t)^2 + 1}$ dir.

Bu yüzeyin H ortalama eğriliği hesaplamak için yüzeyin tanjant (teğet) uzayının üreteçlerin $\{\phi_s, \phi_t\}$ kendileri boyunca değişimleri (kovaryant türevleri) hesaplamak gerekir. (3.11),(4.11) ve (4.12) denklemleri yardımıyla

$$\widetilde{\nabla}_{\phi_s}\phi_s = (f''(s) + \frac{2}{f(s)+g(t)} + \frac{f'(s)^2}{f(s)+g(t)})\,\partial_z\,,$$

$$\widetilde{\nabla}_{\phi_s}\phi_t = \frac{f'(s)g'(t)}{f(s)+g(t)}\partial_z = \widetilde{\nabla}_{\phi_t}\phi_s\ , \tag{4.17}$$

$$\widetilde{\nabla}_{\phi_t}\phi_t = \left(g''(t) + \frac{2}{f(s)+g(t)} + \frac{g'(t)^2}{f(s)+g(t)}\right)\partial_z$$

denklemleri elde edilir. Buradan (4.16) ve (4.17) denklemlerini kullanarak

$$\tilde{g}_{\widetilde{\mathcal{H}}^3}\big(\widetilde{\nabla}_{\phi_s}\phi_s, N\big) = \frac{1}{W\big(f(s)+g(t)\big)^3}\big(f''(s)\big(f(s)+g(t)\big) + 2 + f'(s)^2\big),$$

$$\tilde{g}_{\widetilde{\mathcal{H}}^3}\big(\widetilde{\nabla}_{\phi_s}\phi_t, N\big) = \frac{1}{W\big(f(s)+g(t)\big)^3}\big(f'(s)g'(t)\big) = \tilde{g}_{\widetilde{\mathcal{H}}^3}\big(\widetilde{\nabla}_{\phi_t}\phi_s, N\big), \tag{4.18}$$

$$\tilde{g}_{\widetilde{\mathcal{H}}^3}\big(\widetilde{\nabla}_{\phi_t}\phi_t, N\big) = \frac{1}{W\big(f(s)+g(t)\big)^3}\big(g''(t)\big(f(s)+g(t)\big) + 2 + g'(t)^2\big)$$

eşitlikleri elde edilir.

Denklem (4.9) ve (4.18) yardımıyla yüzeyin H-minimal olması için gerek ve yeter koşul

$$0 = (1+g'(t)^2)(f''(s)\big(f(s)+g(t)\big) + 2 + f'(s)^2) - 2f'(s)^2g'(t)^2 +$$
$$(1+f'(s)^2)\,\big(g''(t)\big(f(s)+g(t)\big) + 2 + g'(t)^2\big) \tag{4.19}$$

olmasıdır. Burada (4.19) denklem $(1+f'(s)^2)(1+g'(t)^2)$ terimine bölünürse

$$\frac{1}{(1+f'(s)^2)}\big(f'(s)^2+f''(s)\big(f(s)+g(t)\big)+2\big)-\frac{2f'(s)^2g'(t)^2}{(1+f'(s)^2)(1+g'(t)^2)}$$
$$+\frac{1}{(1+g'(t)^2)}\big(g'(t)^2+g''(t)\big(f(s)+g(t)\big)+2\big) \qquad (4.20)$$

denklemi elde edilir. Böylece (4.20) denklem $f(s)+g(t)$ ortak terimine göre yeniden düzenlenirse

$$\big(f(s)+g(t)\big)\left(\frac{f''(s)}{1+f'(s)^2}+\frac{g''(t)}{1+g'(t)^2}\right)+\frac{f'(s)^2+2}{1+f'(s)^2}+\frac{g'(t)^2+2}{1+g'(t)^2}$$
$$-\frac{2f'(s)^2g'(t)^2}{(1+f'(s)^2)(1+g'(t)^2)}=0 \qquad (4.21)$$

bulunur. Böylece (4.21) denklemin son üç terimi toplanırsa (4.21) denklemi

$$\big(f(s)+g(t)\big)\left(\frac{f''(s)}{1+f'(s)^2}+\frac{g''(t)}{1+g'(t)^2}\right)$$
$$+\frac{f'(s)^2+f'(s)^2g'(t)^2+2+2g'(t)^2+g'(t)^2+g'(t)^2f'(s)^2+2+2f'(s)^2}{(1+f'(s)^2)(1+g'(t)^2)}$$
$$-\frac{2f'(s)^2g'(t)^2}{(1+f'(s)^2)(1+g'(t)^2)}=0 \qquad (4.22)$$

formunda olur. Böylece (4.22) eşitliği

$$\big(f(s)+g(t)\big)\left(\frac{f''(s)}{1+f'(s)^2}+\frac{g''(t)}{1+g'(t)^2}\right)+\frac{4+3f'(s)^2+3g'(t)^2}{(1+f'(s)^2)(1+g'(t)^2)}=0 \qquad (4.23)$$

denklemine indirgenir.

(4.23) denklemini önce s ve daha sonra t parametrelerine göre türevini alırsak

$$f'(s)\left(\frac{g''(t)}{1+g'(t)^2}\right)' + g'(t)\left(\frac{f''(s)}{1+f'(s)^2}\right)' = 8\frac{f'(s)f''(s)g'(t)g''(t)}{(1+f'(s)^2)^2(1+g'(t)^2)^2} \qquad (4.24)$$

denklemine ulaşılır.

Şimdi aşağıdaki üç durumu göz önüne alalım.

1. Durum: $f'(s)g'(t) \neq 0$,

2. Durum: $f'(s) = 0$ veya $g'(t) = 0$,

3. Durum: $f'(s) = 0$ ve $g'(t) = 0$

Şimdi sırasıyla bu durumlar tartışalım.

1. **Durum:** $f'(s)g'(t) \neq 0$ olduğundan (4.24) denklemin her iki tarafı $f'(s)g'(t)$ terimine bölünürse (4.24) denklemi

$$\frac{1}{g'(t)}\left(\frac{g''(t)}{1+g'(t)^2}\right)' + \frac{1}{f'(s)}\left(\frac{f''(s)}{1+f'(s)^2}\right)' = 8\frac{f''(s)g''(t)}{(1+f'(s)^2)^2(1+g'(t)^2)^2} \qquad (4.25)$$

biçiminde yazılır. (4.25) denklemini sırasıyla s ve t parametrelerine göre tekrar türevlerini alırsak

$$(f'''(s)(1+f'(s)^2) - 4f''(s)^2f'(s))(\, g'''(t)(1+g'(t)^2) \\ -4g'(t)g''(t)^2) = 0 \qquad (4.26)$$

denklemine ulaşılır. O zaman (4.26) denklemi

$$f'''(s)(1+f'(s)^2) - 4f''(s)^2 f'(s) = 0 \tag{4.27}$$

veya

$$g'''(t)(1+g'(t)^2) - 4g'(t)g''(t)^2) = 0 \tag{4.28}$$

denklemlerinden en az biri sağlanması anlamına gelir.

f nin g ye üstünlüğü olmadığından (4.27) denklemini tartışmak yeterli olacaktır.

(4.27) denkleminin integralini alırsak bir a sabiti için $f''(s) = a(1+f'(s)^2)^2$ eşitliğine ulaşırız. Bu eşitlik (4.25) denkleminde kullanılırsa

$$\frac{1}{g'(t)}\left(\frac{g''(t)}{1+g'(t)^2}\right)' + 2af''(s) = 8a\frac{g''(t)}{(1+g'(t)^2)^2} \tag{4.29}$$

denklemine ulaşılır. Şimdi alt durumları tartışalım.

1. Alt durum: $a = 0$ olduğunu varsayalım. O zaman $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(s) = c_1 s + c_0$ formunda olur. Diğer taraftan (3.33) denkleminden $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $g''(t) = b(1+g'(t)^2)$ denklemi elde edilir.

Eğer $b \neq 0$ ise

$$g(t) = -\frac{1}{b}\ln(\cos(bt+d_1)) + d_0,\ d_0, d_1 \in \mathbb{R} \tag{4.30}$$

denklemi elde edilir. (4.30) denklemi (4.23) de yerine yazılırsa

$$0 = b(c_1 s + c_0 - \frac{1}{b}\ln(\cos(bt + d_1)) + d_0 + 8\frac{4 + 3c_1^2 + 3tan^2(bt + d_1)}{(1 + {c_1}^2)\left(1 + tan^2(bt + d_1)\right)} \quad (4.31)$$

denklemine varılır. (4.31) denklemi s'ye göre kısmi türevi alınırsa $c_1 = 0$ sonucuna varılır. O zaman $f(s) = c_0$ yani f 'nin sabit bir fonksiyon olduğu ve böylece de $f'(s)$ $g'(t) \neq 0$ kabulü ile çelişkili olduğu sonucuna varılır. Buda b'nin sıfırdan farklı olmayacağını ifade eder.

Eğer $b = 0$ ise $m_0, m_1 \epsilon \mathbb{R}$ sabitleri için $g(t) = m_1 t + m_0$ elde ederiz. O zaman (4.23) denklemi

$$\frac{4 + 3c_1^2 + 2m_1^2}{(1 + {c_1}^2)(1 + m_1^2)} = 0$$

eşitliğine indirgenir ki bu da anlamlı değildir. Böylece tekrar bir çelişkiye ulaşılır. Böylece $a = 0$ olamaz.

2. Alt durum:

Şimdi $a \neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman (4.29) denklemi birbirinden bağımsız s ve t parametrelerine göre bağımsız iki türevli terimin toplamından ibaret olduğundan, öyle bir $c \in \mathbb{R}$ reel sayısı

$$2af''(s) = -c \quad (4.32)$$

$$\frac{1}{g'(t)}\left(\frac{g''(t)}{1 + g'(t)^2}\right)' - 8a\frac{g''(t)}{(1 + g'(t)^2)^2} = c \quad (4.33)$$

denklemlerini sağlayacak şekilde vardır.

(4.32) diferensiyel denklemin çözümünden

$$f(s) = -\frac{c}{4a}s^2 + c_1 s + c_0, c_1, c_0 \in \mathbb{R} \tag{4.34}$$

f fonksiyonu bulunur. Diğer taraftan f fonksiyonu $f\,''(s) = a(1 + f'(s)^2)^2$ eşitliği sağlanması gerekir. (4.34) bu eşitlikte yerine yazılırsa s parametresine bağlı $\{1, s, s^2, s^3, s^4\}$ nın cinsinden ifadeli dördüncü dereceden bir polinom elde edilir. Burdan $\{1, s, s^2, s^3, s^4\}$ lineer bağımsız olduğundan polinomun bütün katsayıları sıfır olmalı sonucu elde edilir. Bunun anlamı f fonksiyonun katsayıları sıfır olmalıdır sonucuna varılır. Böylece f fonksiyonu sabit bir fonksiyon olur. Bu ise kabulümüz $f'(s)g'(t) \neq 0$ ile çelişir. Dolayısyla bu durum söz konusu olamaz.

2. Durum: Şimdi $f'(s) = 0\ ve g'(t) \neq 0$ olduğunu varsayalım. O halde bir f_0 sabiti için $f(s) = f_0$ dır. Böylece (4.23)'den

$$0 = (f_0 + g(t))\, g''(t) + 4 + 3g'(t)^2 \tag{4.35}$$

denklemi elde edilir. Böylece $g'(t) = u$ değişimi yapılırsa

$$g''(t) = \frac{du}{dg}\frac{dg}{dt} = u\frac{du}{dg}$$

Bu durumda (4.35) denklemi

$$(f_0 + g)u\frac{du}{dg} + 3u^2 + 4 = 0$$

g değişkenine bağlı bir diferansiyel denkleme indirgenir. Bu diferansiyel denklemin çözümü

$$u = \frac{dg}{dt} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1-4{c_1}^6(f_0+g)^6}}{{c_1}^3(f_0+g)^3},\ c_1\epsilon\mathbb{R}^+$$

şeklinde olur. Bu denklem t bağımsız değişkenine göre integrali alınırsa

$$\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\int^t \frac{\sqrt{1-4{c_1}^6(f_0+g(\tau)^6)}}{{c_1}^3(f_0+g(\tau)^3)}g'(\tau)d\tau = t + c_0$$

elde edilir.

$$I(t) = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}\int^t \frac{\sqrt{1-4{c_1}^6(f_0+\tau^6)}}{{c_1}^3(f_0+\tau^3)}d\tau,\ c_1\epsilon\mathbb{R}^+$$

$1-4{c_1}^6(f_0+\tau^6)>0$ ve $c_1\epsilon\mathbb{R}^+$ olduğundan $I(t)$, $\pm\sqrt{3}$ bağlı olarak kesin artan (azalan) fonksiyondur. Dolayısıyla $I\big(g(t)\big) = t + c_0$ denkleminin tek bir $g(t) = I^{-1}(t)$ olacak şekilde çözümü vardır.

3. Durum: Eğer $f'(s) = 0$ ve $g'(t) = 0$ ise (3.27) denkleminden $0 = 4$ olur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla bu durum söz konusu olamaz. Böylece teoremin ispatı tamam olur.

4.2.3. Sonuç. M, $\mathcal{H}^3$ 3- boyutlu istatiksel yapıya sahip olan hiperbolik uzayın üst yarı uzay modelinde I tip istatiksel öteleme yüzey olsun. f ve g diferensiyellenebilir sabit olmayan $f + g > 0$ biçiminde tanımlı reel değerli fonksiyon olsunlar. O zaman istatistiksel hiperbolik uzay $\widetilde{\mathcal{H}}^3$ 'ün üst yarı-uzay modelinde $(s,\ t,\ f(s) + g(t))$

biçiminde parametrelendirilmesiyle belli bir $H-$ tipi minimal istatistiksel öteleme yüzeyi yoktur.

4.2.4. Teorem. 3 boyutlu hiperbolik üst uzay modeld $\mathcal{H}^3$ 'te

$$\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \widetilde{\mathcal{H}}^3, \phi(s,t) = (s, f(s) + g(t), t) \text{ öyleki } t > 0$$

parametrizasyonu ile tanımlanan II. tip öteleme yüzey M, $H-$ tipi minimal yüzey ise, o zaman f ve g diferensiyellenebilir fonksiyonları

$$f(s) = ms + n$$

$$g(t) = \pm\sqrt{3(1+a^2)} \int \frac{c^3 t^3}{\sqrt{1-4c^6 t^6}} dt,$$

biçiminde olur. Burada m, n, a, c sabittirler ve $t > 0$ dır.

İspat.

$$\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to M \subset \widetilde{\mathcal{H}}^3$$

$$(s,t) \quad \to \phi(s,t) \to (s, f(s) + g(t), t)$$

ile paramerelendirilmiş II. tip istatistiksel öteleme yüzeyini göz önüne alalım. Yüzeyin lokal çatı alanı

$$\phi_s = (1, f'(s), 0) = \partial_x + f'(s)\partial_y, \tag{4.36}$$

$$\phi_t = (0, g'(t), 1) = \partial_y + g'(t)\partial_z \tag{4.37}$$

şeklinde olur. Dolayısıyla $\widetilde{\mathcal{H}}^3$'ten M 'ye indirgenmiş Riemann metrik tensör bileşenleri (4.1) denkleminin yardımıyla

$$E = \tilde{g}_{\tilde{\mathcal{H}}^3}(\phi_s, \phi_s) = \frac{1 + f'(s)^2}{t^2}, \qquad F = \tilde{g}_{\tilde{\mathcal{H}}^3}(\phi_s, \phi_t) = \frac{f'(s)g'(t)}{t^2}$$

ve $G = \tilde{g}_{\tilde{\mathcal{H}}^3}(\phi_t, \phi_t)\frac{1 + g'(t)^2}{t^2}$

biçiminde bulunur. Buradan (3.11), (4.36) ve (4.37) denklemleri yardımıyla

$$\tilde{\nabla}_{\phi_s}\phi_s = f''(s)\partial_y + \frac{2}{t}\,(1 + f'(s)^2)\partial_z$$

$$\tilde{\nabla}_{\phi_s}\phi_t = 2\frac{f'(s)g'(t)}{t}\partial_z = \tilde{\nabla}_{\phi_t}\phi_s \tag{4.38}$$

$$\tilde{\nabla}_{\phi_t}\phi_t = g''(t)\partial_y + \frac{2g'(t)^2 + 1}{t}\partial_z$$

denklemleri elde edilir. Yüzeyin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{\phi_s \times \phi_t}{\|\phi_s \times \phi_t\|} = \frac{f'(s)}{W}\partial_x - \frac{1}{W}\partial_y + \frac{g'(t)}{W}\partial_z \tag{4.39}$$

şeklinde bulunur. Burada $W = \|\phi_s \times \phi_t\| = \frac{1}{t}\sqrt{1 + f'(s)^2 + g'(t)^2}$ dir. Böylece (4.38) ve (4.39) denklemleri yardımıyla yüzeyin ikinci temel formunun katsayılarını aşağıdaki formda buluruz.

$$\tilde{g}_{\tilde{\mathcal{H}}^3}\left(\tilde{\nabla}_{\phi_s}\phi_s, N\right) = -\frac{1}{Wt^2}f''(s) + \frac{2}{Wt^3}((1 + f'(s)^2)\,g'(t)),$$

$$\tilde{g}_{\tilde{\mathcal{H}}^3}\left(\tilde{\nabla}_{\phi_s}\phi_t, N\right) = \frac{2}{Wt^3}f'(s)g'(t)^2 = \tilde{g}_{\tilde{\mathcal{H}}^3}\left(\tilde{\nabla}_{\phi_t}\phi_s, N\right), \tag{4.40}$$

$\tilde{g}_{\tilde{\mathcal{H}}^3}\left(\tilde{\nabla}_{\phi_t}\phi_t, N\right) = -\frac{1}{Wt^2}g''(t) + \frac{1}{Wt^3}((1+2g'(t)^2)g'(t))$.

Dolayısıyla (4.9) ve (4.40)'ten $H = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$0 = (1+g'(t)^2)\left(-tf''(s) + 2(1+f'(s)^2)g'(t)\right) - 4f'(s)^2g'(t)^3 + (1+f'(s)^2)\left(-tg''(t) + 2(1+2g'(t)^2)g'(t)\right) \quad (4.41)$$

denklemin sağlanmasıdır. (4.41)'ten hemen

$$t\left(\frac{f''(s)}{1+f'(s)^2} + \frac{g''(t)}{1+g'(t)^2}\right) = \left(\frac{3+3f'(s)^2+4g'(t)^2}{(1+f'(s)^2)(1+g'(t)^2)}\right)g'(t) \quad (4.42)$$

denklemine ulaşırız.

1.Durum. Eğer $g'(t) = 0$ ise$g\ (t) = g_0$ sabittir. Bu durumda m, n sabitleri $f(s) = ms + n$ olacak şekilde vardır.

2.Durum. Şimdi $g'(t) \neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman (4.42) denkleminin s parametresine göre türevini alırsak

$$t\left(\frac{f''(s)}{1+f'(s)^2}\right)' = -8\frac{f'(s)f''(s)g'(t)^3}{(1+f'(s)^2)^2(1+g'(t)^2)} \quad (4.43)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemi de iki alt durumda inceleyelim.

Altdurum 1. Öncelikle $f'(s)f''(s) = 0$ kabul edelim. Bu durumda $f(s) = as + b$ olacak şekilde a, b sabitleri mevcuttur. O zaman (4.41) denklemi

$$tg''(t) = 3g'(t) + \frac{4}{1+a^2}g'(t)^3 \quad (4.44)$$

denklemine indirgenir. Böylece $g'(t) = p$ değişimi yapılırsa (4.44) denklemi

$$t\frac{dp}{dt} = 3p + \frac{4}{1+a^2}p^3 \tag{4.45}$$

denklemine dönüşür. Bu durumda (4.45) denkleminin genel çözümü c keyfi bir sabit olmak üzere aşağıdaki şekildedir:

$$p = \pm\sqrt{3(1+a^2)}\,\frac{c^3t^3}{\sqrt{1-4c^6t^6}}\,. \tag{4.46}$$

Sonuç olarak (4.46) denklemini t parametresine göre integralini alırsak g fonksiyonunu

$$g(t) = \pm\sqrt{3(1+a^2)}\int \frac{c^3t^3}{\sqrt{1-4c^6t^6}}\,dt \tag{4.47}$$

şeklinde buluruz.

Alt durum 2. Şimdi $f'(s)f''(s) \neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman (4.43) denklemini s ve t parametrelerine göre gruplandırırsak

$$-\frac{(1+f'(s)^2)}{8f'(s)f''(s)}\left(\frac{f''(s)}{1+f'(s)^2}\right)' = \frac{g'(t)^3}{t(1+g'(t)^2)} = c = sbt. \tag{4.48}$$

denklemi elde edilir. Böylece (4.48) denklem daha açıkça

$$\left(\frac{f''(s)}{1+f'(s)^2}\right)' = -8c\,\frac{f'(s)f''(s)}{(1+f'(s)^2)}, \quad g'(t)^3 = ct(1+g'(t)^2 \tag{4.49}$$

dir.

Eğer $c = 0$ ise

$$\frac{f''(s)}{1+f'(s)^2} = k \in \mathbb{R} \text{ ve } g(t) = q \in \mathbb{R}$$

olur. Bu son denklem (4.42) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{f''(s)}{1+f'(s)^2} = k = 0$$

ve dolayısıyla $f''(s) = 0$ elde ederiz. Bu da $f'(s)f''(s) \neq 0$ kabulümüz ile çelişir. O halde c sabiti sıfırdan farklı olmalıdır.

Eğer $c \neq 0$ ise (4.48) denkleminin ikinci kısmı olan

$$g'(t)^3 = ct(1+g'(t)^2) \tag{4.50}$$

denklemini t parametresine göre tekrar türevini alırsak

$$g''(t)g'(t)(3g'(t) - 2ct) = c(1+g'(t)^2) \tag{4.51}$$

denklemine ulaşılır. Burada $c \neq 0$ olduğundan $g''(t)g'(t)(3g'(t) - 2ct) \neq 0$ olmalıdır. Böylece (4.51) denklemi

$$\frac{g''(t)}{t(1+g'(t)^2)} = \frac{c}{g'(t)(3g'(t) - 2ct)} \tag{4.52}$$

şeklinde yeniden yazılır. Şimdi (4.49) denkleminin birinci tarafının integralini alırsak,

$$\frac{f''(s)}{(1+f'(s)^2)} = \frac{4c}{(1+f'(s)^2} + b, b \in \mathbb{R} \tag{4.53}$$

denklemi elde edilir. Böylece (4.52) ve (4.53) denklemlerini (4.43) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$t(\frac{4c}{(1+f'(s)^2} + b + \frac{c}{g'(t)(3g'(t)-2ct)} = \frac{3+3f'(s)^2+4g'(t)^2}{(1+f'(s)^2)(1+g'(t)^2)}\, g'(t) \tag{4.54}$$

denklemine varılır. Bununla birlikte (4.50) denklemini (4.54)'e yerleştirdiğimizde

$$\frac{4c}{(1+f'(s)^2} + b + \frac{c}{g'(t)(3g'(t)-2ct)} = c\frac{3+3f'(s)^2+4g'(t)^2}{g'(t)^2(1+f'(s)^2)} \tag{4.55}$$

elde edilir. Böylece (4.55) denklemi düzenlenirse

$$\frac{4c}{(1+f'(s)^2} + b + \frac{c}{(3g'(t)^2-2cg'(t)t)} = c\frac{3(1+f'(s)^2)+4g'(t)^2}{g'(t)^2(1+f'(s)^2)} \tag{4.56}$$

denklemi elde edilir. (4.56) denklemi tekrar düzenlenirse

$$\frac{4c}{(1+f'(s)^2)} + b + \frac{c}{(3g'(t)^2-2cg'(t)t)} = \frac{3c}{g'(t)^2} + \frac{4c}{(1+f'(s)^2)} \tag{4.57}$$

denklemi elde edilir. Bu durumda (4.57) denkleminde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$g'(t)^2(3g'(t)^2-2cg'(t)t) + cg'(t)^2 = 3c\big(3g'(t)^2-2ct\ g'(t)\big) \tag{4.58}$$

denklemine ulaşılır. Sonuçta (4.58) denkleminde sadeleşmeler yapıldığında (4.55) denklemi

$$3bg'(t)^3 - 2bctg'(t)^2 - 8cg'(t) + 6c^2t = 0 \tag{4.59}$$

denklemine indirgenir.

$b = 0$ olduğu varsayılsın. O zaman (4.59) denklemi $g'(t) = \frac{3ct}{4}$ formuna indirgenir ve bu son denklem (4.50)'de yerine yazılırsa t değişkenine bağlı ikinci dereceden

$$\frac{63c^2}{256}t^2 + 1 = 0 \tag{4.60}$$

polinomu elde edilir. Bu denklem bir çelişkiye yol açmaktadır. Dolayısıyla $b \neq 0$ olmalıdır.

Şimdi $b \neq 0$ ve $X = g'(t)$ olsun. (4.50) denklemi (4.59) denkleminde yerine yazılırsa

$$5btX^2 + 8X - 6ct + 3bt = 0 \tag{4.61}$$

elde edilir. (4.61) denklemi $-2b$ ile çarpılıp ve elde edilen denklem (4.50) denklemi ile toplanırsa

$$bX^3 + 8cX + 2bct + 6c^2t = 0 \tag{4.62}$$

denklemi elde edilir. (4.61) denklemi X ile ve (4.62) denklemini $-5t$ ile çarpıp elde edilen denklemleri birbirinden çıkarıldığında

$$8X^2 + t(34c + 3b)X - 5ct^2(2b + 6c) = 0 \tag{4.63}$$

denklemine ulaşılır. Böylece (4.61) ve (4.63) denklemlerinin ortak çözümünden

$$X = \frac{-48c + 24b + 4b^2ct^2 + 6bc^2t^2}{5bt^2(34c + 3b) - 64}t$$

eşitliği elde edilir.

X'in bu değeri denklem (4.61)'de yerine yazılırsa, aşağıdaki gibi t değişkenine bağlı 7. dereceden bir polinom denklemi elde edilir

$$\begin{aligned} 0 = \; & 5b(6bc^2t^2 + 4b^2ct^2 + 24b - 48c)^2t^3 \\ & +8(6bc^2t^2 + 4b^2ct^2 + 24b - 48c)\big((34c + 3b)bt^2 - 64\big)t \\ & (-6c + 3b)\big((34c + 3b)bt^2 - 64\big)t. \end{aligned}$$

Bu denklemden son denklemden b ve c'nin 0'a eşit olduğu sonucu elde edilir. Buda $g'(t) \neq 0$ ve $b \neq 0$ varsayımıyla çelişir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu yüksek lisans tezinde, 3 boyutlu hiperbolik üst uzay model $\mathcal{H}^3$'in doğasında yer alan istatistiksel yapıyı kullanarak Lopez (2011) de tanıtılan I.tip ve II. Tip öeteleme yüzeylerin mimimal olma koşulunu bu istatistiksel yapı altında tartışılmıştır. I.tip istatistiksel öteleme yüzeylerin *H*-tipi minimal olması için ilgili diferensiyellenebilir fonksiyonların

$$f = f_0 =, sabit$$

$$g(t) = \mathcal{I}^{-1}(t) + m, \mathcal{I}(t) = \mp\sqrt{3}\int^{t} \frac{c_1^3(f_0+\tau)}{\sqrt{1-4c_1^6(f_0+\tau)^6}}d\tau, m \in \mathbb{R}, c_1 \in \mathbb{R}^+$$

şeklinde ve II. tip istatistiksel öteleme yüzeylerin *H*-tipi minimal olması içinde öteleme yüzeyi tanımlayan diferensiyellenebilir fonksiyonların

$$f(s) = ms + n$$

$$g(t) = \pm\sqrt{3(1+a^2)}\int \frac{c^3t^3}{\sqrt{1-4c^6t^6}}dt, ,$$

şeklinde olduğu gösterilmiştir. Bu anlamda literatüre bir istatistiksel manifoldun bir istatistiksel yapıya sahip yüzey örnekleri kazandırılmıştır.

Bu çalışmanın ışığı altında n- boyutlu $\mathcal{H}^n$ istatistiksel manifoldun I.tip ve II.tip istatistiksel öteleme yüzeylerin sabit ortalama, sabit Gauss eğrilikli olma durumları açık problem olarak durmaktadır.

KAYNAKLAR

Akbari, H., & Malek, F. (2021). On contact metric statistical manifolds. *Differential Geometry and Applications*, 75(101735). https: doi.org/10.1016/j.difgeo.2021.101735.

Akbay, A. K. (2021). Translation-Factorable Flat Surfaces in 3 spaces. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, (1), 843-854. https://doi.org/10.22190/FUMI201125063K.

Akdeniz, F. (2022). *Olasılık ve istatistik*. Akademisyen Kitabevi.

Akkılın, I., & Salim, Y. (2022). Translation Hypersurfaces in Euclidean 4-Spaces. *Punjab University Journal of Mathematics*, *54*(12), 702-711. https://doi.org/10.52280/pujm.2022.541201.

Amari, S. I. (2012). *Differential-geometrical methods in statistics* (Vol. 28). Springer Science & Business Media.

Arslan, K., Bayram, B., Bulca, B., & Öztürk, G. (2016). On translation surfaces in 4-dimensional Euclidean space. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, *20*(2), 123-133. https://doi.org/10.12697/ACUTM.2016.20.11.

Ash, R. B. (2014). *Real analysis and probability: probability and mathematical statistics: a series of monographs and textbooks*. Academic press.

Athreya, K. B., & Lahiri, S. N. (2006). *Measure theory and probability theory* (Vol. 19). New York. Springer

Aydın, M. E. (2016). A generalization of translation surfaces with constant curvature in the isotropic space. *Journal of Geometry*, *107*(3), 603-615. https://doi.org/10.1007/s00022-015-0292-0.

Aydın, M. E., & Ergüt, M. (2017). Affine translation surfaces in the isotropic 3-space. *International Electronic Journal of Geometry*, *10*(1), 21-30.

Aydın, M. E., Külahçı, M. A., & Öğrenmiş, A. O. (2019). Constant curvature translation surfaces in Galilean 3-space. *International Electronic Journal of Geometry*, *12*(1), 9-19.

Aydın, M. E. (2020). Classifications of translation surfaces in isotropic geometry with constant curvature. *Ukrainian Math. J. 72(3)*, 329-347. https://doi.org/10.1007/s11253-020-01785-y.

Aydın, M. E., Sepet, S. A., & Bozok, H. G. (2022). Translatıon Surfaces In Pseudo-Galilean Space Wıth Prescrıbed Mean And Gaussıan Curvatures. *Honam Mathematical Journal, 44(1)*, 36-51. https://doi.org/ 10.5831/HMJ.2022.44.1.36.

Aytimur, H.,& Özgür, C. (2019). On cosymplectic-like statistical submersions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 16 (3) Paper No. 70. https://doi.org/10.1007/s00009-019-1332-z.

Baird, P., & Wood, J. C. (2003). *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds* (No. 29). Oxford University Press.

Balgeshir, M. B. K. (2022). On Submanifolds of Sasakian Statistical Manifolds. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, *40*, 1-6. https://doi:10.5269/bspm.42402.

Balgeshir, M.B.K., & Salahvarzi, S. (2024). On statistical submersions from 3-Sasakian statistical manifolds. Differential Geometry and its Applications, 94, Paper No. 102124. https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2024.102124.

Baba-Hamed, C., Bekkar, M., & Zoubir, H. (2010). Translation surfaces in the three dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying $\Delta r_i = \lambda_i r_i$. *Int. J. Math. Anal*, *4*(17), 797-808.

Bensikaddour, D., & Belarbi, L. (2017). Minimal Translation Surfaces in Lorentz-Heiesenberg 3-Space. *Nolinear Studies*, *24*(4), 859-867.

Bensikaddour, D., & Belarbi, L. (2018). Minimal translation surfaces in Lorentz-Heiesenberg 3-space with flat metric. *Differential Geometry-Dynamical Systems*, *20*, 1-14.

Bensikaddour, D., & Belarbi, L. (2021). Minimal translation surfaces in Lorentz Heisenberg space $(\mathcal{H}_3, g_2)$. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, *24*(4), 881-896. https://doi.org/10.1080/09720502.2020.1815345.

Belarbi, L.,& Zoubir, H. (2022) : On translation surfaces with zero Gaussian curvature in Lorentzian Sol_3 space. *Journal of applied mathematics and informatics. 40 (5-6)* , 831-842. https://doi.org/10.14317/jami.2022.831.

Bozok, H. G., & Ergüt, M. (2019). Polynomial affine translation surfaces in Euclidean 3-space. *Boletim Sociedade Paranaense De Matematical, 3(37), 195-202.* https://doi.org/10.5269/bspm.v37i3.32978.

Brickell, F., & Clark, R. S. (1970). *Differentiable manifolds: an introduction*. Van Nostrand Reinhold Co., Londra.

Bulca,B., & Arslan, K. (2013). Surfaces given with the Monge patch in $\mathbb{E}^4$. *Journal of Mathematical Physics , Analysis, Geometry,9(4),435-447.*

Bükcü, B., Karacan, M. K., & Yoon, D. W. (2017). Translation surfaces of type 2 in three dimensional simply isotropic space I_3^1. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, *54*(3), 953-965. https://doi.org/10.4134/BKMS.b160377.

Büyükkütük, S.,& Öztürk G. (2020). Spacelike Translation Surfaces in Minkowski 4-space $\mathbb{E}_1^4$.*Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics,* 789-800. https://doi.org/10.22190/FUMI2003789B.

Calin, O., & Udrişte, C. (2014). *Geometric modeling in probability and statistics* (Vol. 121). Berlin, Germany. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-07779-6.

Cannon, J. W., Floyd, W. J., Kenyon, R., & Parry, W. R. (1997). Hyperbolic geometry. *Flavors of geometry*, *31*(59-115), 2.

Clieve Humby (2024, 28 March). In https://en.humipedia.org/wiki/Clive_Humby.

Colding, T. H., & Minicozzi, W. P. (2011). *A course in minimal surfaces* (Vol. 121). American Mathematical Society.

Costa, S. I., Santos, S. A., & Strapasson, J. E. (2015). Fisher information distance: A geometrical reading. *Discrete Applied Mathematics*, *197*, 59-69. https://doi.org/10.1016/j.dam.2014.10.004.

Cakmak, A., Karacan, M. K., Kiziltug, S., & Yoon, D. W. (2017). Translation surfaces in 3-dimensional Galilean space satisfying $\Delta^{II} x_i = \lambda_i x_i$. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, *54*(4), 1241-1254. https://doi.org /10.4134/BKMS.b160442.

Çetin, M., Tunçer, Y., & Ekmekçi, N. (2011). Translation surfaces in Euclidean 3-space. *Int. J. Phys. Math. Sci*, *5*(4), 49-56.

Çetin, M., & Tunçer Y. (2015). Parallel surfaces to translation surfaces in Euclidean 3-space. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, *64*(2), 47-54. https://doi.org /10.1501/Commua1_ 0000000732.

Do Carmo, M. P. (2016). *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition*. Courier Dover Publications.

Dillen, F., Verstraelen, L., & Zafindratafa, G. (1991). A generalization of the translation surfaces of Scherk. *Diff. Geom. in honor of Radu Rosca (KUL)*, 107-109.

Filipan, I., Milin Šipuš, Ž., & Primorac Gajčić, L. (2023). Null-translation surfaces with constant curvatures in Lorentz-Minkowski 3-space. *Rad Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti. Matematičke znanosti*, (555= 27), 219-230. https://doi.org/10.21857/yk3jwhnl19.

Fraser, C. G. (1992). Isoperimetric problems in the variational calculus of Euler and Lagrange. *Historia mathematica*, *19*(1), 4-23. https://doi.org/10.1016/0315-0860(92)90052-D.

Fu, Y., & Hou, Z. H. (2010). Affine translation surfaces with constant Gaussian curvature. *Kyungpook Mathematical Journal*, *50*(2), 337-343.

Fukunaga, T., & Takahashi, M. (2022). Singularities of translation surfaces in the Euclidean 3-space. *Results in Mathematics*, *77*(2), 89. https://doi.org/10.1007/s00025-022-01622-7.

Furuhata, H. (2009). Hypersurfaces in statistical manifolds. *Differential Geometry and its Applications*, *27*(3), 420-429.https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2008.10.019.

Furuhata, H., Hasegawa, I., Okuyama, Y., Sato, K.,& Shahid, M.H. (2017). Sasakian statistical manifolds. *Journal of Geometry And Physics*, 117, 79-186. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2017.03.010.

Furuhata, H., & Hasegawa, I. (2016). Submanifold theory in holomorphic statistical manifolds In: *Geometry of Cauchy-Riemann Submanifolds*, 179-215.

Furuhata, H., Inoguchi, J., & Kobayashi, S. (2021). A characterization of the alpha-connections on the statistical manifold of normal distributions. Information Geometry, 4(1),177-188. https://doi.org/10.1007/s41884-020-00037-z.

Furuhata, H., Hasegawa, I., Okuyama, Y., & Sato, K. (2017). Kenmotsu statistical manifolds and warped product. *Journal of Geometry*, 108(3), 1175–1191. https://doi.org/10.1007/s00022-017-0403-

Gateway Arch.(2024, 15 Mart).
In Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Gateway_Arch

Gazi, O. (2023). *Introduction to Probability and Random Variables*. Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-031-31816-0

Goemans, W., & Van de Woestyne, I. (2007). Translation surfaces with vanishing second Gaussian curvature in Euclidean and Minkowski 3-space. F. Dillen and I. Van de Woestyne (Eds.), *Pure and Applied Differential Geometry, PADGE 2007*, Berichte aus der Mathematik. Shaker Verlag, Aachen, 123–131.

Hasanis, T. (2019). Translation surfaces with non-zero constant mean curvature in Euclidean space. *Journal of Geometry*, *110*, 1-8. https://doi.org/10.1007/s00022-019-0476-0.

Hasanis, T., & López, R. (2020). Classification and construction of minimal translation surfaces in Euclidean space. *Results in Mathematics*, *75*(1), 2. https://doi.org/10.1007/s00025-019-1128-2.

Hasanis, T., & Lopez, R. (2021). Translation surfaces in Euclidean space with constant Gaussian curvature. *Communications in Analysis and Geometry.* 29(6), 1415-1447. https://dx.doi.org/10.4310/CAG.2021.v29.n6.a4.

Huafei, S. (2000). On affine translation surfaces of constant mean curvature. *Kumamoto journal of mathematics*, *13*, 49-57.

Hyperboloid (2024, 28 Mart).
In Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperboloid

Inoguchi, J. I. (2005). Flat translation invariant surfaces in the 3-dimensional Heisenberg group. *Journal of Geometry*, *82*, 83-90 https://doi.org /10.1007/s00022-005-1730-1.

Inoguchi, J. I., López, R., & Munteanu, M. I. (2012). Minimal translation surfaces in the Heisenberg group Nil_3. *Geometriae Dedicata*, *161*, 221-231. https://doi.org/10.1007/s10711-012-9702-8.

Jeffreys, H. (1946). An invariant form for the prior probability in estimation problems. *Proceedings of the Royal Society. London. Series A, Mathematical and Physical Sciences,* 186 (1007), 453-461. https://doi.org/10.1098/rspa.1946.0056.

Jung, S. D., Liu, H., & Liu, Y. (2017). Weingarten affine translation surfaces in Euclidean 3-space. *Results in Mathematics*, *72*(4), 1839-1848. DOI 10.1007/s00025-017-0737-x

Kara, A. E., Aydın, M. E., & Ergüt, M. (2021). Singular Minimal Translation Surfaces in Euclidean Spaces Endowed with Semi-symmetric Connections. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, *13*(2), 270-281. DOI : 10.47000/tjmcs.882976

Karacan, M. K., Yoon, D. W., & Bukcu, B. (2016). Translation surfaces in the three-dimensional simply isotropic space I_3^1. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, *13*(07), 1650088. https://doi.org/10.1142/S0219887816500882.

Kazan, S. & Takano, K. (2023). Anti-invariant holomorphic statistical submersions. *Results in Mathematics*, 78(4), PaperNo.128. https://doi.org/10.1007/s00025-023-01904-8.

Kelleci, A. (2021). Translation-factorable surfaces with vanishing curvatures in Galilean 3-spaces: TF-Surfaces with vanishing curvatures. *International Journal of Maps in Mathematics*, *4*(1), 14-26.

Küpeli Erken, İ., Murathan, C.,& Yazla, A. (2020) Almost cosympletic statistical manifolds. *Quaestiones Mathematicae*, 43(2), 265-282. https://doi.org/10.2989/16073606.2019.1576069.

Lagrange, J.L. (1762). Essai d'une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima des formules integrales indefinies. *Miscellanea Taurinensia*, II (176061). 173-195. Reprinted in Lagrange, J. L. Oeuvres, Vol. 1, pp. 335-362.

Lauritzen, S. (1987). Statistical Manifolds. In Amari, S., Barndorff-Nielsen, O.E., Kass, R., Lauritzen, S. & Rao, C.R. *Differential Geometry in Statistical Inference*. (pp.163-216).Lecture Notes-Monograph Series vol. 10, Hayward.

Liu, H. (1999). Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces. *Journal of Geometry*, *64*, 141-149. https://doi.org/10.1007/BF01229219.

Liu, H., & Yu, Y. (2013). Affine translation surfaces in Euclidean 3-space. *Proceedings of the Japan Academy, Ser. A, Mathematical Sciences,*89 (9),111-113. DOI: 10.3792/pjaa.89.111

Liu, H., & Jung, S. D. (2017). Affine translation surfaces with constant mean curvature in Euclidean 3-space. *Journal of Geometry*, *108*(2), 423-428. https://doi.org/10.1007/s00022-016-0348-9.

Lone, M. S., & Karacan, M. K. (2018). Dual translation surfaces in the three dimensional simply isotropic space I_1^3. *Tamkang Journal of mathematics*, *49*(1), 67-77. DOI: 10.5556/j.tkjm.49.2018.2476

Lone, M. S., Karacan, M. K., Tuncer, Y., & Hasan, E. S. (2020). Translation surfaces in affine 3-space. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, *49*(6), 1944-1954. DOI : 10.15672/hujms.564921.

López, R. (2011). Minimal translation surfaces in hyperbolic space. *Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry*, *52*(1), 105-112. https://doi.org/10.1007/s13366-011-0008-z.

López, R., & Moruz, M. (2014). Translation and homothetical surfaces in Euclidean space with constant curvature. . *Journal of the Korean Mathematical Society, 52(3),* 523–535. https://doi.org/10.4134/JKMS.2015.52.3.523.

López, R., & Munteanu, M. I. (2012). Minimal translation surfaces in Sol_3. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, *64*(3), 985-1003. doi: 10.2969/jmsj/06430985.

López, R., & Perdomo, Ó. (2017). Minimal translation surfaces in Euclidean space. *The Journal of Geometric Analysis*, *27*, 2926-2937. https://doi.org/10.1007/s12220-017-9788-1.

Magid, M., & Vrancken, L. (1999). Affine translation surfaces. *Results in Mathematic, 35*, 134-144.

Magid, M., & Vrancken, L. (2000). Affine translation surfaces with constant sectional curvature. *Journal of Geometry*, *68*, 192-199.

Matsuzoe, H. (2010). Statistical manifolds and affine differential geometry. Advanced Studies in Pure Mathematics, 57, 303–321. https://doi.org/10.2969/aspm/05710303.

Medjati, R., Zoubir, H., & Medjahdi, B. (2023). Classification of space-like translation surfaces in the 3-dimensional Lorentz Heisenberg group $\mathbb{H}_3$. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, *29*(2), 154-171. . https://doi.org/10.1108/AJMS-03-2021-0071.

Meusnier, J. B. (1776). Memoire sur la Courbure Des Surfaces. *Memoires de Mathematique et de Physique, Pr´esent´es a L 'Academie Royale des Sciences, par Divers Savans, et lus Dans ses Assembl´ees* ,10 (1785), 477- 510.

Meusnier, J. B. (1785). Mémoire sur la courbure des surfaces. *Mem des savan etrangers*, *10*(1776), 477-510.

Milijevic, M. (2015). Totally real statistical submanifolds. *Interdisciplinary Information Sciences*, 21(2), 87-96. https://doi.org/10.4036/iis.2015.87.

Milijevic, M. (2019). CR staistical submanifolds. *Kyushu Journal of Mathematics,*73(1), 89-101. https://doi.org/10.2206/kyushujm.73.89.

Noda, T. (2011). Symplectic structures on statistical manifolds. *Journal of the Australian Mathematical Society*, *90*(3), 371-384. https://doi.org/10.1017/S1446788711001285

Normal distribution (2024, 29 Mart), In Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution.

Magid, M., & Vrancken, L. (2000). Affine translation surfaces with constant sectional curvature. *Journal of Geometry*, *68*, 192-199.

Magid, M.; Vrancken, L. Affine translation surfaces. Results Math. 35 (1999), no. 1-2, 134-144.

Munteanu, M. I., & Nistor, A. I. (2009). Polynomial translation Weingarten surfaces in 3-dimensional Euclidean space. *Proceedings of the VIII International Colloquuim on Differential Geometry, World Scientific, Hackensack*, 316-320.

Munteanu, M.,& Nistor, A. I. (2010). New results on the geometry of translation surfaces. *Journal of Geometry and Symmetry Physics, 18*, 49-62. DOI: 10.7546/jgsp-18-2010-49-62.

Munteanu, M. I., Palmas, O., & Ruiz-Hernández, G. (2016). Minimal translation hypersurfaces in Euclidean space. *Mediterranean Journal of Mathematics*, *13*, 2659-2676. DOI 10.1007/s00009-015-0645-9

Nomizu, K., & Sasaki, T. (1994). *Affine differential geometry: geometry of affine immersions*. Cambridge university press.

O'neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic press.

Palmer, M. (2024,28 March). *Data is the New Oil*. https://ana.blogs.com/maestros/2006/11/data_is_the_new.html

Pamuk, E., & Bulca, B. (2021). Translation-Factorable Surfaces in 4-dimensional Euclidean Space. *Konuralp Journal of Mathematics*, *9*(1), 193-200.

Pérez, J. (2017). A new golden age of minimal surfaces. *Notices of the AMS*, *64*(4), 347-358. https://doi.org : 10.1090/noti1500.

Peyghan, E., Gezer, A., & Nourmohammadifar, L. (2022). Kaehler-Norden structures on statistical manifolds. *Filomat*, 36(17), 5691–5706. https://doi.org/10.2298/FIL2217691P.

Ramis, Ç., & Munteanu, M. I. (2019). Minimal translation surfaces in the three-dimensional Heisenberg group. *Filomat*, *33*(6), 1583-1592. https://doi.org/10.2298/FIL1906583R.

Rao , C.R., (1945). Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*,37(3), 81-91.

Saglam, D. (2021). Minimal translation graphs in semi-Euclidean space. *AIMS Math*, *6*. 10207-10221. doi: 10.3934/math.2021591.

Samereh, L., Peyghan,E., & Mihai, I. (2022). On almost Norden statistical manifolds. *Entropy* 24(6), Paper No. 758, https://doi.org/10.3390/e24060758

Scherk, H.F. (1835). *Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen*. J. Reine Angew. Math. 13, 185–208. https://doi.org/10.1515/crll.1835.13.185.

Scherk Surface (2024, 25 March). In Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Scherk_surface.

Senoussi, B., & Al-Zoubi, H. (2020). Translation surfaces of finite type in Sol_3. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, *61*(2), 237-256. https://doi.org/10.14712/1213-7243.2020.018.

Senoussi, B., & Bekkar, M. (2022). Translation Surfaces of the Third Fundamental Form in Lorentz-Minkowski Space. *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, *17*(1), 165-176. https://doi.org/10.52547/ijmsi.17.1.165.

Senoussi, B., Beddani, K., & Bennour, A. (2022). Translation Surfaces in Lorentz-Heisenberg 3-space Nil_1^3. *International Journal of Geometry*, *11*(4), 34-46.

Seo, K. (2013). Translation hypersurfaces with constant curvature in space forms.*Osaka Journal of Mathematics,50(3),* 631-641.

Shima, H. (2007). *The Geometry of Hessian Structure*. World Scientific, Singapore . https://doi.org/ 10.1142/6241.

Shima, H., &Yagi, K.(1997). Geometry of Hessian manifolds. *Differential Geometry and its Applications,* 7 (3), 277-290. https://doi.org/10.1016/S0926-2245(96)00057-5.

Siddiqui, A.N., Chen, B.Y., & Siddiqi, M.D. (2021). Chen inequalities for statistical submersions between statistical manifolds. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 18(4), Paper No. 2150049 https://doi.org/10.1142/S0219887821500493.

Siddiqui, A.,N., Suh, Y.J. & Bahadır, O. (2021). Extremities for statistical submanifolds in Kenmotsu statistical manifolds. *Filomat*, 35(2), 591–603. https://doi.org/10.2298/FIL2102591S.

Simon, U. (2000). Affine Differential Geometry.In Dillen, F., Verstraelen, L.C.(Eds) *In Handbook of Differential Geometry*.Volume 1, (pp. 905-961). Elsevier.

Šipuš, Z. M., & Divjak, B. (2011). Translation surfaces in the Galilean space. *Glas. Mat. Ser. III*, *46*(66), 455-469. https://doi.org/10.3336/gm.46.2.14.

Šipuš, Z. M. (2014). Translation surfaces of constant curvatures in a simply isotropic space. *Periodica Mathematica Hungarica*, *68*(2), 160-175. https://doi.org/10.1007/s10998-014-0027-2.

Takano, K. (2006). Statistical manifolds with almost contact structures and its statistical submersions. *Journal of Geometry. 85(1-2*), 171–187. https://doi.org/10.1007/s00022-006-0052-2.

Takano, K. (2010). Statistical manifolds with almost complex structures. *Tensor (N.S.)*, *72(3)*, 225-231.

Takano, K., Erkan, E., & Gülbahar, M. (2023). Locally product-like statistical submersions. *Turkish Journal of Mathematics* , 47(2), 846-869. https://doi.org/10.55730/1300-0098.3397.

Tozak, H., Dede, M., & Ekici, C. (2020). Translation surfaces according to a new frame. *Caspian Journal of Mathematical Sciences (CJMS)*, *9*(1), 56-67. https://doi.org /10.22080/CJMS.2020.14987.1354

Treibergs, A. (2016, January). *Minimal Surfaces*. *Nonparametric Theory* [Portable Document Format]. Slide Share. http://www.math.utah.edu/~treiberg/MinimalSurfacesSlides.pdf.

Xin, Y. (2013). *Minimal submanifolds and related topics* (Vol. 8). World Scientific. https://doi.org/10.1142/5417.

Van de Woestyne, I., Verstraelen, L., Walrave, J., & Yaprak, S. (1992). Minimal surfaces of translation in $\mathbb{R}_1^n$. F. Dillen and L. Verstraelen (Eds.), *Geometry and Topology of Submanifolds IV*. World Scientific Publishing, New Jersey, 217–225. https://doi.org/10.1142/9789814537346.

Vargas, A.J. (2018, May 10). Minimal Surfaces in $\mathbb{R}^3$.(Portable Document Format). https://www.sas.rochester.edu/mth/undergraduate/honorspaperspdfs/alfredovargas2018.pdf

Verstraelen, L., Walrave, J., & Yaprak, S. (1994). The minimal translation surfaces in Euclidean space. *Soochow J. Math*, *20*(1), 77-82.

Vîlcu, A. D., & Vîlcu, G. E. (2015). Statistical manifolds with almost quaternionic structures and quaternionic Kähler-like statistical submersions. *Entropy*, *17*(9), 6213-6228. https://doi.org/10.3390/e17096213.

Vos, P. W. (1989). Fundamental equations for statistical submanifolds with applications to the Bartlett correction. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, *41*, 429-450. https://doi.org/10.1007/BF00050660.

Yan, M., Wu, X., & Zhang, L. (2024). The cosymplectic statistical structures of constant ϕ-sectional curvature on cosymplectic space forms. *Journal of Geometry and Physics*, *196*, 105076. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2023.105076.

Yang, D. (2018). Some classifications of Weingarten translation hypersurfaces in Euclidean space. *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, *61*(1), 107-115.

Yang, D., Zhang, J., & Fu, Y. (2019). A note on minimal translation graphs in Euclidean space. *Mathematics*, *7*(10), 889. https://doi.org/10.3390/math7100889.

Yang, D., Dan, W., & Fu, Y. (2018). A classification of minimal translation surfaces in Minkowski space. *Journal of Nonlinear Sciences & Applications (JNSA)*, *11*(3). http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.011.03.12.

Yoon, D. W. (2002). On the Gauss map of translation surfaces in Minkowski 3-space. *Taiwanese journal of Mathematics*, 389-398.

Yoon, D. W. (2010). Polynomial translation surfaces of Weingarten types in Euclidean 3-space. *Central European Journal of Mathematics*, *8*, 430-436. https://doi.org/10.2478/s11533-010-0034-3.

Yoon, D. W. (2012). Some classification of translation surfaces in Galilean 3-space. *International Journal of Mathematical Analysisl*, *6*(28), 1355-1361.

Yoon, D. W., Lee, C. W., & Karacan, M. K. (2013). Some translation surfaces in the 3-dimensional Heisenberg group. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, *50*(4), 1329-1343. http://dx.doi.org/10.4134/BKMS.2013.50.4.1329.

Yoon, D. W., & Lee, J. W.(2014).Translation invariant surfaces in the 3-dimensional Heisenberg group. *Bulletin of Iranian Mathematical Society, 40 (6),* 1373-1385.

Yoon, D. W. (2017). Weighted minimal translation surfaces in Minkowski 3-space with density. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, *14*(12), 1750178. https://doi.org/10.1142/S021988781750178X.

Yoon, D. W., & Yüzbaşı, Z. K. (2018). Weighted minimal affine translation surfaces in Euclidean space with density. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, *15*(11). https://doi.org/10.1142/S0219887818501967

Yuan, Y., & Liu, H. L. (2011). Some new translation surfaces in 3-Minkowski space. *In Journal of Mathematical Research and Exposition, 31(6)*, 1123-1128.

Yuan, Y., & Ma, L.B., L.H.L (2013). Affine Translation Surfaces in Minkowski 3D-Space. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, *34*(10), 1517-1520

Tozak, H., Dede, M., & Ekici, C. (2020). Translation surfaces according to a new frame. *Caspian Journal of Mathematical Sciences (CJMS)*, *9*(1), 56-67. https://doi.org/10.22080/CJMS.2020.14987.1354.

Wang, Y. (2021). Minimal translation surfaces with respect to semi-symmetric connections in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}_1^3$. *Bulletin of the Korean Mathematical Society, 58(4)*, 959-972. https://doi.org/10.4134/BKMS.b200732.

Sevim, S. & Murathan C. (2024). The translation surfaces on statistical manifolds with normal distribution. *International Electronic Journal of Geometry, 17(1),* 44-62. https://doi.org/10.36890/iejg.1378844.