HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLARIN LİNEER KOMBİNASYONU

Merve DEMİRÇAY

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLARIN LİNEER KOMBİNASYONU

Merve DEMİRÇAY
0000-0002-8788-6881

Doç. Dr. Elif YAŞAR
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2023
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLARIN
LİNEER KOMBİNASYONU

Merve DEMİRÇAY

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Elif YAŞAR

Bu tezde, kompleks değerli, harmonik, yalınkat ve bir yönde konveks fonksiyonların lineer kombinasyonları incelenmiştir. Tez, beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, tezin amacı, kapsamı ve mevcut çalışmalar içindeki yeri belirtilmiştir. İkinci bölümde, analitik ve harmonik yalınkat fonksiyonlar ile ilgili bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, belirli bir özelliğe sahip yeni bir harmonik fonksiyon oluşturmak için kullanılan kesme yöntemi ve lineer kombinasyon tekniği açıklanmıştır. Dördüncü bölümde, reel eksen veya imajiner eksen yönünde konveks harmonik yalınkat fonksiyonların lineer kombinasyonları üzerine yapılan bazı makaleler incelenmiştir. Ayrıca, reel eksen yönünde konveks harmonik fonksiyonların lineer kombinasyonunun reel eksen yönünde konveks olabilmesi için yeter koşullar araştırılmıştır. Son bölümde, tezde incelenen ve araştırılan sonuçlar özetlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Harmonik, yalınkat, lineer kombinasyon, bir yönde konveks, konveks.
2023, xi + 60 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

LINEAR COMBINATIONS OF HARMONIC
UNIVALENT FUNCTIONS

Merve DEMİRÇAY

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Elif YAŞAR

In this thesis, linear combinations of complex-valued, harmonic, univalent, and convex in one direction functions are investigated. Thesis consists of five chapters. In the first chapter, the aim, the scope and the place in the literatüre are given. In the second chapter, basic definitons and theorems related to analytic and harmonic univalent functions are stated. In the third chapter, shear construction method and linear combination technique are explained that are used to construct new examples of harmonic univalent functions with a particular property. In the fourth chapter, some studies concerning linear combinations of harmonic, univalent, and convex in the direction of the real axis or imaginary axis are studied. In addition, sufficient conditions for the linear combination of functions harmonic and convex in the direction of the real axis to be convex in the direction of the real axis are investigated. In the last chapter, the results examined and explored through the thesis are summarized.

Key words: Harmonic, univalent, linear combination, convex in one direction, convex.
2023, xi + 60 pages.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanma sürecinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine her danıştığımda bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle yardımlarını sunan, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen saygıdeğer danışmanım Doç. Dr. Elif YAŞAR' a teşekkürlerimi sunarım.

Yalnız bu çalışmamda değil, hayatımın her anında desteğini benden esirgemeyen ve benim için hiçbir fedakarlığı yapmaktan bir an olsun geri durmayan kıymetli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Merve DEMİRÇAY
11/05/2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET....vi
ABSTRACT....vii
TEŞEKKÜR....viii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ....x
ŞEKİLLER DİZİNİ....xi
1. GİRİŞ....1
2. KURAMSAL TEMELLER....3
2.1 Analitik Yalınkat Fonksiyonlar....3
2.2. Harmonik Yalınkat Fonksiyonlar....5
3. MATERYAL ve YÖNTEM....9
3.1. Kesme Yöntemi....9
3.2. Lineer Kombinasyon....10
4. BULGULAR ve TARTIŞMA....21
4.1. Reel Eksen Yönünde Konveks Harmonik Yalınkat Dönüşümlerin Lineer Kombinasyonu....21
4.2. İmajiner Eksen Yönünde Konveks Harmonik Dönüşümlerin Lineer Kombinasyonu....27
4.3. Harmonik Dikey Şerit Dönüşümlerin Lineer Kombinasyonu....38
4.4. Şerit Dönüşümlerin Yatay Kesmelerinin Lineer Kombinasyonu....50
5. SONUÇ....56
KAYNAKLAR....58
ÖZGEÇMİŞ....60

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{E}$	$\{z \in \mathbb{C}: \lvert z \rvert < 1\}$ açık birim diski
S	$f(0) = 0, f'(0) = 1$ normalizasyonuna sahip analitik yalınkat fonksiyonların sınıfı
$f = h + \bar{g}$	h ve g iki analitik fonksiyon olmak üzere f harmonik fonksiyonu
S_H	$f(0) = a_0 = 0, f_z(0) = a_1 = 1$ normalizasyonuna sahip harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı
S_H^0	S_H sınıfında $f_{\bar{z}}(0) = b_1 = 0$ normalizasyonuna sahip olan harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı
$\omega = g'/h'$	f harmonik fonksiyonunun genişlemesi (genleşmesi, dilatasyonu)
$\mathrm{Re}\{z\}$	z kompleks sayısının reel kısmı
$\mathrm{Im}\{z\}$	z kompleks sayısının imajiner kısmı
$k(z)$	$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

		Sayfa
Şekil 2.1.	Koebe fonksiyonu altında E nin resmi	4
Şekil 3.1.	$f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = -x^3$ ve $f_3(x) = 0$ fonksiyonlarının grafikleri. .	11
Şekil 3.2.	Örnek 3.2.5 da verilen f_1 fonksiyonunun E yi resmettiği bölge.....	14
Şekil 3.3.	Örnek 3.2.5 da verilen f_2 fonksiyonunun E yi resmettiği bölge.....	15
Şekil 3.4.	Örnek 3.2.5 da elde edilen f fonksiyonunun E yi resmettiği bölge.....	15
Şekil 3.5.	Örnek 3.2.7 de elde edilen f_2 fonksiyonunun E yi resmettiği bölge ..	18
Şekil 3.6.	Örnek 3.2.7 de de $t = 1/2$ için elde edilen f fonksiyonunun E yi resmettiği bölge.....	19
Şekil 4.1.	Örnek 4.4.4 de $t = 0$ için elde edilen f fonksiyonunun $\mathbb{E}$ yi resmettiği bölge ……...	54
Şekil 4.2.	Örnek 4.4.4 de $t = 1/2$ için elde edilen f fonksiyonunun $\mathbb{E}$ yi resmettiği bölge	54
Şekil 4.3.	Örnek 4.4.4 de $t = 1$ için elde edilen f fonksiyonunun $\mathbb{E}$ yi resmettiği bölge	55

1. GİRİŞ

Bir $f = u + iv$ analitik fonksiyonunun reel kısmı olan $u(x, y)$ ve imajiner kısmı olan $v(x, y)$ fonksiyonları Laplace denklemini sağlar ve böylece bu fonsiyonların her ikisi de harmoniktir. Ayrıca, $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ fonksiyonları Cauchy-Riemann denklemlerini de sağladığından bu iki fonksiyon birbirlerinin harmonik eşleniğidir. Bu tezde, $u(x, y)$ ve $v(x, y)$, Laplace denklemini sağlayan fakat Cauchy-Riemann denklemlerini sağlaması gerekmeyen fonksiyonlar olmak üzere $f = u + iv$ kompleks değerli, harmonik, yalınkat (1-1) fonksiyonların bazı problemleri ele alınacaktır. Bu fonksiyonların kümesi, harmonik yalınkat fonksiyonlar olarak bilinir ve analitik yalınkat fonksiyonları alt küme olarak bulundururlar.

Analitik yalınkat fonksiyonlar 1900 lü yılların başlarından beri çalışılmaktadır ve bu fonksiyonlar üzerine yapılan binlerce araştırma mevcuttur. Harmonik yalınkat fonksiyonlar ise 1984 yılında Clunie ve Sheil-Small'un makaleleri ile çalışılmaya başlanmış olup analitik yalınkat fonksiyonlara göre daha yeni bir araştırma konusu olmuştur. Dolayısıyla, harmonik yalınkat fonksiyonlar üzerine yapılacak araştırmaların başlangıç noktası, analitik yalınkat fonksiyonların bilinen özellikleridir.

Belirli bir özelliğe sahip yeni bir fonksiyon oluşturmak için aynı özellikteki iki fonksiyonun türev ve integrallerinden yararlanılırken daha sonraları fonksiyonların lineer kombinasyonunu araştırmak çok yaygınlaşmıştır. Örneğin, birebir olan reel değerli f_1 ve f_2 fonksiyonunun $0 \leq t \leq 1$ için $f_3 = tf_1 + (1 - t)f_2$ lineer kombinasyonunun yine birebir olup olmayacağı araştırılmıştır. Ters bir örnek olarak, $f_1(x) = x^3$ ve $f_2(x) = -x^3$ birebir fonksiyonları ele alınmış, $t = \frac{1}{2}$ için elde edilen lineer kombinasyon fonksiyonu $f_3(x) = 0$ olduğundan bu fonksiyonunun birebir olmadığı görülmüştür.

$\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ açık birim diskinde analitik ve yalınkat f fonksiyonunun görüntü kümesinin orijine göre yıldızıl olabilmesi için görüntü kümesindeki herhangi bir P noktası ile oluşan OP doğru parçasının görüntü kümesinde bulunması gerekir. Bu şekildeki f fonksiyonuna, orijine göre yıldızıl fonksiyon denir. Ayrıca, görüntü kümesindeki her noktaya göre yıldızıl olan fonksiyona konveks fonksiyon denir.

Hayman (1967), iki konveks fonksiyon olan f_1 ve f_2 için aşağıdaki probleme yer vermiştir:

Problem: $0 < t < 1$ olmak üzere $f_3(z) = tf_1(z) + (1-t)f_2(z)$ fonksiyonu yıldızıl ve yalınkat mıdır?

MacGregor (1969) bu soruya ters örnek vererek f_3 fonksiyonunun $|z| < 1$ de yalınkat olmadığını göstermiştir. Ayrıca, MacGregor (1969) f_3 fonksiyonununun $r > \frac{1}{\sqrt{2}}$ olmak üzere hiçbir $|z| < r$ diskinde yalınkat olmadığını göstermiştir.

Bu tezde, görüntü kümesi bir yönde konveks olan, yani görüntü kümesindeki noktaları o yönde birleştiren doğru parçalarının görüntü kümesinde bulunması, yalınkat harmonik fonksiyonların lineer kombinasyonlarının yine yalınkat olduğu koşulları araştıran çalışmalar yer almaktadır. Dorff (2012) tarafından $\mathbb{E}$ de harmonik ve yalınkat f_1 ve f_2 fonksiyonları için f_3 lineer kombinasyonunun yalınkat ve imajiner eksen yönünde konveks olması için yeter koşullar elde edilmiştir. Yine aynı çalışmada başka hangi koşullar altında f_3 lineer kombinasyonunun yalınkat ve imajiner eksen yönünde konveks olabileceği açık problemini vermiştir. Bu tezde bu açık probleme verilen bazı cevaplar ve yine f_3 lineer kombinasyonunun yalınkat ve reel eksen yönünde konveks olması için yeter koşulları veren çalışmalar (Dorff 2012, Wang ve ark. 2013, Kumar ve ark. 2016, Long ve Dorff 2018) incelenecektir. Ayrıca, reel eksen yönünde konveks analitik fonksiyonların çeşitli genişlemelerle yatay olarak kesilmesiyle elde edilen harmonik fonksiyonların lineer kombinasyonlarının yalınkat ve reel eksen yönünde konveks olabilmesi için gereken koşullar araştırılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Bölüm (Pommerenke 1975, Goodman 1983, Clunie ve Sheil-Small 1984, Duren 2004, Dorff 2012, Özdemir 2019) kaynaklarından derlenmiştir.

2.1. Analitik Yalınkat Fonksiyonlar

Tanım 2.1.1. $\mathbb{C}$ kompleks düzleminin boş olmayan, açık ve bağlantılı B alt kümesine bölge denir.

Tanım 2.1.2. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve B de analitik olan f fonksiyonu için $z_1, z_2 \in B$ olmak üzere $f(z_1) = f(z_2)$ iken $z_1 = z_2$ (veya $z_1 \neq z_2$ iken $f(z_1) \neq f(z_2)$) ise f fonksiyonu B bölgesinde yalınkattır denir.

Tanım 2.1.3. Bir B bölgesinde tanımlı bir f fonksiyonu bir $z_0 \in B$ noktasının uygun bir komşuluğunda yalınkat ise f fonksiyonuna $z_0 \in B$ noktasında lokal yalınkattır denir. Analitik bir f fonksiyonunun bir $z_0 \in B$ noktasında lokal yalınkat olması için gerek ve yeter şart $f'(z_0) \neq 0$ koşulunun sağlanmasıdır.

Tanım 2.1.4. $\mathbb{C}$ kompleks düzlem olmak üzere $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ cümlesi açık birim disk olarak adlandırılır.

Teorem 2.1.5 (Riemann Dönüşüm Teoremi). $B \subset \mathbb{C}$ en az iki sınır noktasına sahip basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in B$ olsun. Bu takdirde, $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ özelliğinde B'yi $\mathbb{E}$ birim diskine yalınkat olarak resmeden yalnız bir f analitik fonksiyonu vardır. (Riemann 1851)

Tanım 2.1.6. $\mathbb{E}$ birim diskinde $f(0) = 0, f'(0) = 1$ koşulları ile normalize edilen analitik ve yalınkat fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir. Yani,

$$S = \{f: \mathbb{E} \to \mathbb{C} | f(0) = 0, f'(0) = 1 \text{ ve } f \text{ analitik, yalınkat}\}$$

dır. Böylece $f \in S$ fonksiyonları

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

şeklinde bir Taylor serisi ile ifade edilir.

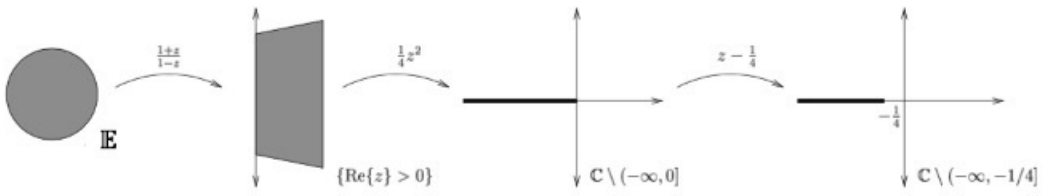
Örnek 2.1.7. S sınıfının önemli bir fonksiyonu

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$$

şeklinde verilen ve $\mathbb{E}$ birim diski $\mathbb{C}$ kompleks düzleminden $(-\infty, -\frac{1}{4}]$ ışınının çıkarılmasıyla elde edilen bölgeye resmeden Koebe fonksiyonudur.

$$k(z) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right] = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Koebe fonksiyonu altında $\mathbb{E}$ nin resmi Şekil 2.1'de verilmiştir.



Şekil 2.1. Koebe fonksiyonu altında $\mathbb{E}$ nin resmi.

Tahmin 2.1.8 (Bieberbach Tahmini). Her $f \in S$ fonksiyonu için $|a_n| \leq n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ dir. Özel olarak $|a_2| \leq 2$ dir. Bu tahminde eşitliği Koebe fonksiyonu sağlar (Bieberbach 1916). Bieberbach tahmini 1985 yılında Branges tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.1.9 (Koebe Dörtte Bir Teoremi). $f \in S$ ve $f(z) = \lambda$ denkleminin $\mathbb{E}$ de çözümü bulunmasın. Bu takdirde $|\lambda| \geq \frac{1}{4}$ dür. Eşitlik, Koebe fonksiyonu ve rotasyonları tarafından sağlanır. (Koebe 1907)

Tanım 2.1.10. Bir B bölgesinde herhangi farklı $z, \omega \in B$ noktaları ve $0 \leq t \leq 1$ için $tz + (1-t)\omega$ doğru parçası B de kalıyorsa B ye konveks bölge denir. Bir $f \in S$ fonksiyonunun $\mathbb{E}$ yi resmettiği bölge konveks ise f fonksiyonuna konvekstir denir.

Tanım 2.1.11. Bir B bölgesi ve her $a \in \mathbb{C}$ için $B \cap \{a + te^{i\varphi} : t \in \mathbb{R}\}$ kümesi bağlantılı veya boş ise B bölgesine $e^{i\varphi}$ yönünde konvekstir denir. Bir $f \in S$ fonksiyonunun $\mathbb{E}$ yi resmettiği bölge $e^{i\varphi}$ yönünde konveks bir bölge ise f fonksiyonuna $e^{i\varphi}$ yönünde konvekstir denir. Özel olarak, $\varphi = 0$ iken f fonksiyonuna reel eksen yönünde (yatay yönde) konveks, $\varphi = \pi/2$ iken f fonksiyonuna imajiner eksen yönünde (dikey yönde) konveks denir.

2.2. Harmonik Yalınkat Fonksiyonlar

Tanım 2.2.1. B bir bölge ve $u: B \to \mathbb{R}$ B de ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun. Her $z \in B$ için $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ise, u ya B de reel harmoniktir denir. Eğer B de tanımlı ve sürekli bir $f = u + iv$ fonksiyonunun reel ve sanal kısmı olan u ve v fonksiyonları B de reel harmonik ise, f fonksiyonuna B de kompleks değerli harmonik fonksiyon denir.

Teorem 2.2.2. Bir B basit bağlantılı bölgesinde harmonik $f = u + iv$ fonksiyonu h ve g analitik olmak üzere $f = h + \bar{g}$ şeklinde yazılabilir.

İspat. u ve v basit bağlantılı bir bölgede reel harmonik olduğundan $u = \mathrm{Re}\, T$ ve $v = \mathrm{Im}\, S$ olacak şekilde T ve S analitik fonksiyonları mevcuttur. (Bir analitik fonksiyonun reel ve sanal kısımları harmoniktir.) Böylece

$$f = u + iv = \mathrm{Re}\, T + i\, \mathrm{Im}\, S$$

$$= \frac{T + S}{2} + \frac{\overline{T - S}}{2} = h + \bar{g}$$

dır. ■

Bir $f(z) = h(z) + \bar{g}(z)$ harmonik fonksiyonu

$$f(z) = \mathrm{Re}\{h(z) + g(z)\} + i\mathrm{Im}\{h(z) - g(z)\}$$

formunda da yazılabilir. Çünkü,

$$f = h + \bar{g} = \frac{h + g + \bar{h} + \bar{g}}{2} + i\frac{(h - g) - (\bar{h} - \bar{g})}{2i} = \mathrm{Re}\{h + g\} + i\mathrm{Im}\{h - g\}$$

dir.

$f = h + \bar{g}$ fonksiyonu h ve g analitik olduğundan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \bar{z}^n$$

seri açılımına sahiptir. Analitik ve yalınkat fonksiyonlar normalize edildiği gibi harmonik yalınkat fonksiyonlar da normalize edilebilir.

Tanım 2.2.3. Birim diskte, harmonik, yalınkat, kompleks değerli ve normalizasyonlu fonksiyonların sınıfı S_H olsun. Yani

$$S_H = \{ f: \mathbb{E} \to \mathbb{C} \mid f, f(0) = a_0 = 0, f_z(0) = a_1 = 1$$

$$\text{normalizasyonu ile harmonik ve yalınkat } \}$$

dir. Böylece

$$S_H^0 = \{ f \in S_H \mid f_{\bar{z}}(0) = b_1 = 0 \}$$

dır. Buradan $S \subset S_H^0 \subset S_H$ olduğu görülür.

Tanım 2.2.4. B bölgesinde tanımlı bir $f = h + \bar{g}$ fonksiyonunun jakobiyeni $J_f = |h'|^2 - |g'|^2$ dir. f harmonik fonksiyonu B de lokal yalınkat ise f nin jakobiyeni sıfırdan farklıdır.(Lewy 1936)

Tanım 2.2.5. $\omega(z) = g'(z)/h'(z)$ bir $f = h + \bar{g}$ fonksiyonunun genişlemesi (genleşmesi-dilatasyonu) dir.

Teorem 2.2.6 (Lewy 1936). Bir $f = h + \bar{g}$ fonksiyonunun lokal yalınkat ve yön koruyan olması için gerek ve yeter şart her $z \in B$ için $|\omega(z)| < 1$ olmasıdır.

Sonuç 2.2.7. Bir $f = h + \bar{g}$ harmonik, yön koruyan fonksiyonu $\omega = \frac{g'}{h'}$ genişlemesi ile verilsin. Birim çemberde bulunan bir γ yayındaki her z noktasının f altındaki görüntüsü bir konkav yaydır veya bir kritik noktadır.

Tanım 2.2.8. Bir $f \in S_H$ fonksiyonunun $\mathbb{E}$ birim diskini resmettiği bölge konveks ise f fonksiyonuna konveks harmonik yalınkat fonksiyon denir. Benzer şekilde, $f \in S_H$ fonksiyonunun $\mathbb{E}$ birim diskini resmettiği bölge $e^{i\varphi}$ yönünde konveks bir bölge ise f fonksiyonuna $e^{i\varphi}$ yönünde konveks harmonik yalınkat fonksiyon denir. Özel olarak, $\varphi = 0$ iken f fonksiyonuna reel eksen yönünde (yatay yönde) konveks harmonik yalınkat fonksiyon, $\varphi = \pi/2$ iken f fonksiyonuna imajiner eksen yönünde (dikey yönde) konveks harmonik yalınkat fonksiyon denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, belirli geometrik özelliğe sahip yeni bir harmonik dönüşüm elde etmek için kullanılan iki yöntem verilecektir. Bu yöntemlerden ilki, Clunie ve Sheil-Small'un kesme teoremi ve ikincisi ise lineer kombinasyon yöntemidir. Bu bölümde, (Dorff 2012)'den yararlanılmıştır.

3.1. Kesme Yöntemi

Analitik olmayan yalınkat harmonik dönüşüm örneklerini bulmak kolay değildir. Yalınkat harmonik dönüşümlerin örneklerini elde etmek üzere, Clunie ve Sheil-Small tarafından verilen çok kullanışlı bir yöntem vardır. Bu yöntem "kesme yöntemi" olarak bilinir. Temel olarak verilen bir F analitik fonksiyonu ve ω genişlemesine dayanır. F yerine $F = h - g$ ve ω yerine $\omega = \frac{g'}{h'}$ alınarak $f = h + \bar{g}$ yalınkat harmonik fonksiyonu bulunur.

Teorem 3.1.1 (Clunie ve Sheil-Small 1984 Kesme Yöntemi). Bir $f = h + \bar{g}$ harmonik fonksiyonu $\mathbb{E}$ de lokal yalınkat olsun. ($\forall z \in \mathbb{E}$ için $|\omega(z)| < 1$ dir). Bu takdirde $f = h + \bar{g}$ harmonik yalınkat fonksiyonunun $\mathbb{E}$ yi reel eksen (veya imajiner eksen) yönünde konveks bir bölge üzerine dönüştürmesi için gerek ve yeter şart $F = h - g$ analitik yalınkat fonksiyonunun $\mathbb{E}$ yi reel eksen (veya imajiner eksen) yönünde konveks bölge üzerine resmetmesidir.

Uyarı 3.1.2. Kesme yöntemi reel eksen yönünde konveks olan $F = h - g$ analitik yalınkat fonksiyonu ile $\omega(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)}$ genişlemesine dayanır. F analitik yalınkat fonksiyonuna karşılık gelen harmonik kesme (fonksiyon) $f = h + \bar{g} = h - g + g + \bar{g} = h - g + 2\mathrm{Re}\{g\}$ dir. Dolayısıyla bu harmonik kesme (fonksiyon), analitik fonksiyona bir reel fonksiyonunun eklenmesidir. Geometrik olarak, bir reel eksen yönünde konveks analitik yalınkat F fonksiyonunun görüntü bölgesi ince yatay şeritlerle kesilip ötelenerek ve/veya ölçeklenerek birim diskin harmonik kesme (fonksiyon) altındaki görüntüsü elde edilir. Bu yüzden bu yöntemin adı kesme yöntemidir. Ayrıca

$$f = h + \bar{g}$$

$$= h + g - g + \bar{g}$$

$$= h + g - 2i\mathrm{Im}\{g\}$$

olarak yazılabileceğinden $F = h + g$ analitik fonksiyonu ile ω genişlemesi ele alınarak $f = h + \bar{g}$ harmonik fonksiyonu da elde edilebilir.

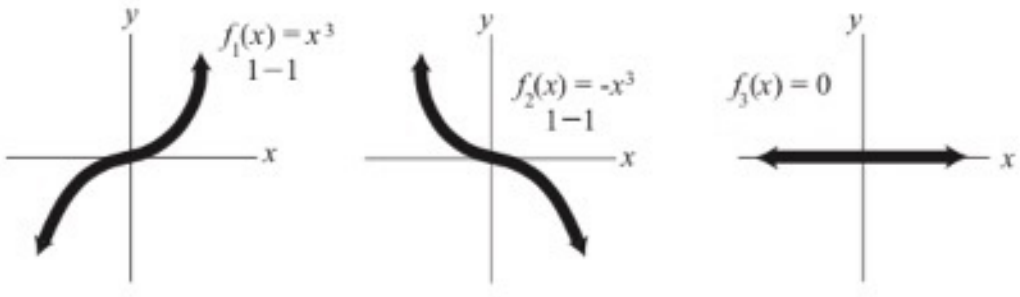
Lemma 3.1.3. Reel eksen yönünde konveks bir bölge $\Omega \subset \mathbb{C}$ ve Ω da reel değerli sürekli bir fonksiyon ρ olsun. Bu takdirde $\varphi(\omega) = \omega + \rho(\omega)$ dönüşümünün Ω da yalınkat olması için gerek ve yeter şart φ nin lokal yalınkat olmasıdır. Eğer φ birebir ise görüntüsü de bir reel eksen yönünde konveks bölgedir.

3.2. Lineer Kombinasyon

Belirli bir özelliğe sahip yeni fonksiyon üretmek için aynı özellikteki iki fonksiyonun lineer kombinasyonu ele alınabilir.

Örneğin; $f_k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ koebe dönüşümü ile $f_r(z) = \frac{z}{1-z}$ sağ yarı düzlem dönüşümünün lineer kombinasyonu olan $f(z) = tf_k(z) + (1-t)f_r(z) = \frac{z-tz^2}{(1-z)^2}, (0 \leq t \leq 1)$ fonksiyonu analitik ve yalınkat bir fonksiyondur.

Yalınkat iki fonksiyonun lineer kombinasyonu yalınkat mıdır sorusunun cevabı hayırdır. Örneğin $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1 = x^3$ ve $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2 = -x^3$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olan $f = tx^3 + (1-t)(-x^3)$ fonksiyonu $t = \frac{1}{2}$ için 1-1 değildir. Şekil 3.1 de bu fonksiyonların grafikleri gösterilmiştir.



Şekil 3.1. f_1, f_2 ve f_3 fonksiyonlarının grafikleri.

Tanım 3.2.1 (A normalizasyonu). f, B de sabit olmayan ve kompleks değerli harmonik bir fonksiyon olsun. $z = 1$ e yakınsayan z_n' dizisi ve $z = -1$ e yakınsayan z_n'' dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\{f(z_n')\} = \sup_{|z|<1} \mathrm{Re}\{f(z)\} \tag{3.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\{f(z_n'')\} = \inf_{|z|<1} \mathrm{Re}\{f(z)\} \tag{3.2}$$

eşitliklerini sağlayan f fonksiyonuna A normalizasyonunu sağlıyor denir.

Örnek 3.2.2. $f(z) = z + \frac{1}{3}\bar{z}^3$ harmonik fonksiyonu A normalizasyonunu sağlar. Çünkü,

$$f\left(e^{i\theta}\right) = e^{i\theta} + \frac{1}{3}e^{-3i\theta} = \left(\cos\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta\right) + i(\sin\theta - \frac{1}{3}\sin 3\theta)$$

olduğundan

$$\mathrm{Re}\left\{f(e^{i\theta})\right\} = \cos\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta$$

dır. Buradan, $-\frac{4}{3} \le \mathrm{Re}\left\{f\left(e^{i\theta}\right)\right\} \le \frac{4}{3}$ olduğundan $\sup_{|z|<1}\mathrm{Re}\{f(z)\} = \frac{4}{3}$ olduğu görülür. Ayrıca $z_n' = 1 - \frac{1}{n} \to 1$ alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\{f(z_n')\} = \frac{4}{3} = \sup_{|z|<1}\mathrm{Re}\{f(z)\}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\{f(z_n'')\} = -\frac{4}{3} = \inf_{|z|<1} \mathrm{Re}\{f(z)\}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3 (Hengartner ve Schober 1970). $f, \mathbb{E}$ de sabit olmayan ve analitik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\mathrm{Re}\{(1-z^2)f'(z)\} \geq 0 \quad (z \in \mathbb{E}) \tag{3.3}$$

dır ancak ve ancak

(1) f , $\mathbb{E}$ de yalınkattır,
(2) f imajiner eksen yönünde konvekstir,
(3) A normalizasyonu sağlanır.

Teorem 3.2.4. $f_1 = h_1 + \overline{g_1}$ ve $f_2 = h_2 + \overline{g_2}$ yalınkat harmonik fonksiyonları imajiner eksen yönünde konveks ve $\omega_1 = \omega_2$ olsun. f_1 ve f_2 fonksiyonları A normalizasyonu sağlıyor ise bu takdirde $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $f = tf_1 + (1-t)f_2$ fonksiyonu yalınkattır ve imajiner eksen yönünde konvekstir.

İspat. Öncelikle f fonksiyonunun lokal yalınkat olduğu gösterilecektir. $g_1' = \omega_1 h_1'$ ve $g_2' = \omega_2 h_2' = \omega_1 h_2'$ olduğundan

$$\omega_3 = \frac{tg_1' + (1-t)g_2'}{th_1' + (1-t)h_2'} = \frac{t\omega_1 h_1' + (1-t)\omega_1 h_2'}{th_1' + (1-t)h_2'} = \omega_1 \tag{3.4}$$

elde edilir. Clunie Sheil-Small'ın kesme teoremi (Teorem 3.1.1) gereği her bir $h_j + g_j$ $(j = 1,2)$ yalınkat ve imajiner eksen yönünde konvekstir. Ayrıca

$\mathrm{Re}\{f_j\} = \mathrm{Re}\{h_j + g_j\}$ olduğundan $h_j + g_j$ A normalizasyonunu sağlar. Böylece Teorem 3.2.3 gereği

$$\mathrm{Re}\left\{(1-z^2)\left(h_j'(z) + g_j'(z)\right)\right\} \geq 0 \ (j = 1,2) \tag{3.5}$$

dır. Ayrıca

$$\mathrm{Re}\{(1-z^2)(h_3' + g_3')\} = \mathrm{Re}\{(1-z^2)[t(h_1' + g_1') + (1-t)h_2' + g_2']\}$$
$$= t\mathrm{Re}\{(1-z^2)(h_1' + g_1')\} + (1-t)\mathrm{Re}\{(1-z^2)(h_2' + g_2')\} \geq 0$$

dır. Teorem 3.2.3 diğer yönde uygulanırsa $h_3 + g_3$ ün imajiner eksen yönünde konveks olduğu elde edilir. Dolayısıyla kesme teoremi gereği f lineer kombinasyonu imajiner eksen yönünde konvekstir. ■

Örnek 3.2.5. Harmonik, yalınkat ve imajiner eksen yönünde konveks

$$f_1(\mathrm{z}) = \mathrm{Re}\left[\frac{i}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right] + i\mathrm{Im}\left[-\frac{1}{2}\log\left(\frac{i+z}{i-z}\right)\right]$$

ve

$$f_2(\mathrm{z}) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right] + i\mathrm{Im}\left[\frac{i}{2}\log\left(\frac{i+z}{i-z}\right)\right]$$

fonksiyonları ele alınsın. f_1 fonksiyonunun dilatasyonu $\omega_1 = \frac{g_1'}{h_1'} = z^2$ dir. Ayrıca dördüncü bölgede 1 e yaklaşan noktalardan z_n' dizisi ele alınarak

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\{f_1(z_n')\} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sup_{|z|<1}\mathrm{Re}\{f_1(z)\}$$

olduğu elde edilir ve ikinci bölgede -1 e yaklaşan noktalardan z_n'' dizisi ele alınarak

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\{f_1(z_n'')\} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \inf_{|z|<1}\mathrm{Re}\{f_1(z)\}$$

olduğu elde edilir. Böylece f_1 fonksiyonu A normalizasyonunu sağlar. Bu dönüşüm altında birim çember

$$u_1 + iv_1 = \begin{cases} z_1 = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}, & \theta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \text{için} \\ z_3 = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}}, & \theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \text{için} \\ z_5 = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{i\frac{5\pi}{4}}, & \theta \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) \text{için} \\ z_7 = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{i\frac{7\pi}{4}}, & \theta \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right) \text{için} \end{cases}$$

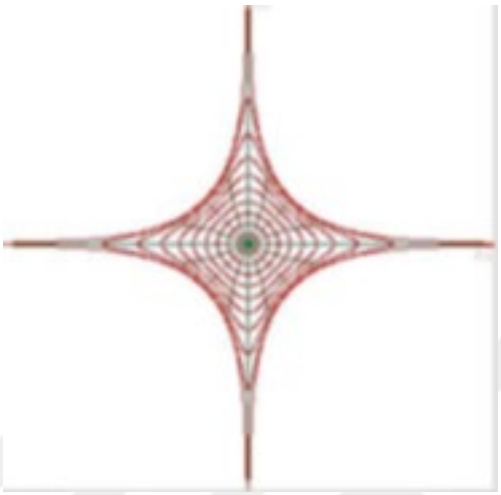
noktalarına resmedilir. Böylece $\mathbb{E}$ birim diski f_1 dönüşümü altında z_1, z_3, z_5 ve z_7 köşelerine sahip kare bölgeye resmedilir.

Şekil 3.2 de f_1 fonksiyonu altında $\mathbb{E}$ birim diskinin içinde alınan eş merkezli çemberlerin resmi gösterilmiştir.



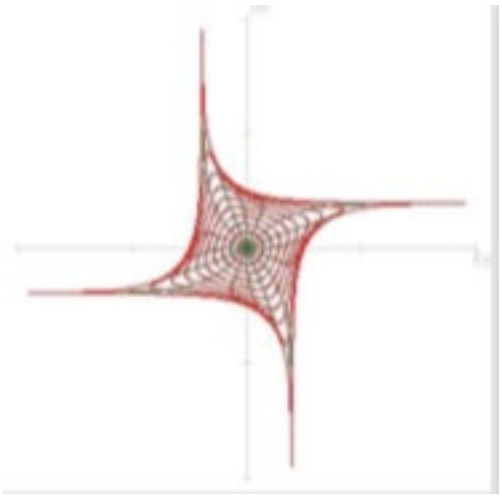
Şekil 3.2. f_1 fonksiyonu altında $\mathbb{E}$ birim diskinin resmi.

Ayrıca, f_2 fonksiyonunun dilatasyonu $\omega_2 = \frac{g_2'}{h_2'} = z^2$ dir ve f_2 fonksiyonu da A normalizasyonunu sağlar. f_2 fonksiyonu altında $\mathbb{E}$ birim diskinin resmi Şekil 3.3 de verilmiştir.



Şekil 3.3. f_2 fonksiyonu altında $\mathbb{E}$ birim diskinin resmi.

Teorem 3.2.4 gereği, $f = tf_1 + (1-t)f_2$ lineer kombinasyonu yalınkattır ve imajiner eksen yönünde konvekstir. $t = \frac{1}{2}$ için f fonksiyonu altında $\mathbb{E}$ birim diskinin resmi Şekil 3.4 de verilmiştir.



Şekil 3.4. f fonksiyonu altında $\mathbb{E}$ birim diskinin resmi.

Uyarı 3.2.6. Teorem 3.2.4 de f_1 ve f_2 fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olan f fonksiyonunun yalınkat olması için yeterli koşul verilmiş olsa da gerekli koşul verilmemiştir. f_1 fonksiyonu A normalizasyonunu sağlamıyor iken f in yalınkat olabileceği aşağıdaki örnekler verilmiştir.

$$f_1(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{z+\frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3}\right) + i\ \mathrm{Im}\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right),$$

$$f_2(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{z}{1-z}\right) + i\mathrm{Im}\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)$$

fonksiyonlarının f_3 lineer kombinasyonu ve

$$f_4(z) = z - \frac{1}{m}\bar{z}^m \quad (m \geq 2),$$

$$f_5(z) = z - \frac{1}{2}\bar{z}^{-n} \quad (n \geq 2)$$

fonksiyonlarının f_6 lineer kombinasyonu Teorem 3.2.4 ün bir çok koşulunu sağlamadığı halde yalınkat olabilir. Böylece şu açık problem verilebilir.

Açık Problem: Hangi koşullar altında f lineer kombinasyonu yalınkattır ve imajiner eksen yönünde konvekstir.

Örnek 3.2.7. Örnek 3.2.5 de verilen $f_1 = h_1 + \overline{g_1}$

$$f_1(\mathrm{z}) = \mathrm{Re}\left[\frac{i}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right] + i\mathrm{Im}\left[-\frac{1}{2}\log\left(\frac{i+z}{i-z}\right)\right]$$

harmonik fonksiyonu yeniden ele alınsın. Ayrıca,

$$h_2(z) = -\frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\log\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}+z}{e^{i\frac{\pi}{4}}-z}\right) - \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}\log\left(\frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}+z}{e^{i\frac{3\pi}{4}}-z}\right)$$

ve

$$g_2(z) = \frac{1}{4}e^{i\frac{3\pi}{4}}\log\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}+z}{e^{i\frac{\pi}{4}}-z}\right) + \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}\log\left(\frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}+z}{e^{i\frac{3\pi}{4}}-z}\right)$$

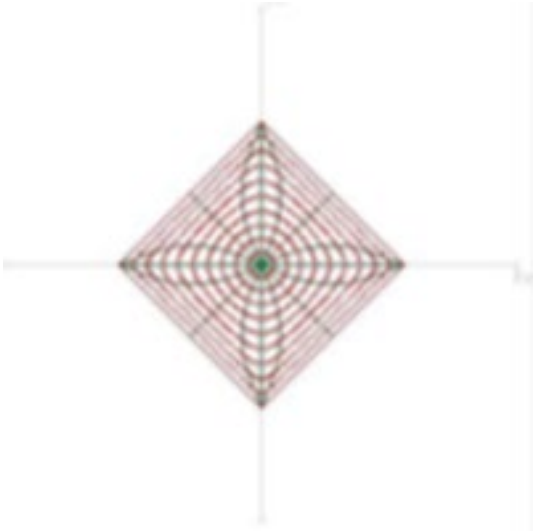
olmak üzere $f_2 = h_2 + \overline{g_2}$ fonksiyonu ele alınsın. Bu fonksiyon

$$f_2(z) = \mathrm{Re}\left\{\frac{i}{2\sqrt{2}}\left[\log\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}+z}{e^{i\frac{\pi}{4}}-z}\right) + \log\left(\frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}+z}{e^{i\frac{3\pi}{4}}-z}\right)\right]\right\}$$
$$+ i\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\log\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}+z}{e^{i\frac{\pi}{4}}-z}\right) - \log\left(\frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}+z}{e^{i\frac{3\pi}{4}}-z}\right)\right]\right\}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu dönüşüm altında birim çember

$$u_2 + iv_2 = \begin{cases} z_0 = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\,, & \theta \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right) \text{için} \\ z_2 = \dfrac{i\pi}{2\sqrt{2}}\,, & \theta \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right) \text{için} \\ z_4 = -\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\,, & \theta \in \left(\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right) \text{için} \\ z_6 = -\dfrac{i\pi}{2\sqrt{2}}\,, & \theta \in \left(\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right) \text{için} \end{cases}$$

noktalarına resmedilir. Böylece $\mathbb{E}$ birim diski f_2 dönüşümü altında $z_0, z_2, z_4\ ve\ z_6$ köşelerine sahip karenin içine resmedilir. Şekil 3.5 de f_2 fonksiyonu altında $\mathbb{E}$ birim diskinin resmi gösterilmiştir.



Şekil 3.5. f_2 fonksiyonu altında $\mathbb{E}$ birim diskinin resmi.

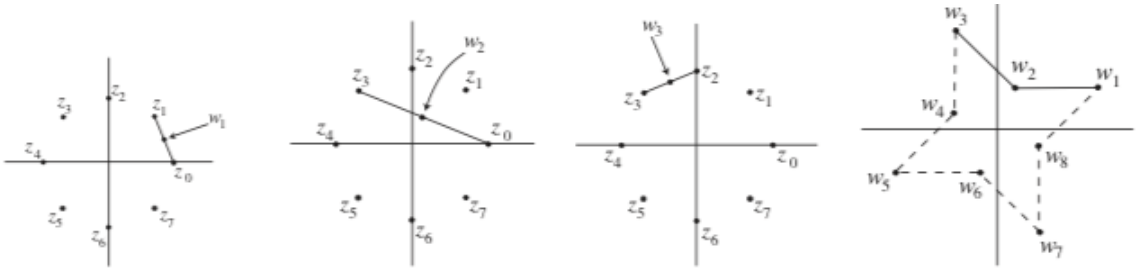
Yine f_2 dönüşümünün dilatasyonu $\omega = \frac{g_2'}{h_2'} = z^2$ dir ve bu dönüşüm A normalizasyonunu sağlar. Böylece Teorem 3.2.4 gereği $f = tf_1 + (1-t)f_2$ yalınkattır.

Şimdi $t = \frac{1}{2}$ için f nin birim diski nereye resmettiği araştırılacaktır. $f(\mathbb{E})$ için $f_1(\mathbb{E})$ ve $f_2(\mathbb{E})$ resimleri arasında bulunacağı tahmin edilmesine rağmen sonuç öyle olmayacaktır. $f(\mathbb{E})$ bölgesi, konveks olmayan bir yıldızdır. Bu sebeple, bu örnek ilginçtir. $f(\mathbb{E})$ resmi şu şekilde bulunur:

$\theta \in (-\frac{\pi}{4}, 0)$ iken $f_1(e^{i\theta}) = z_1$ ve $f_2(e^{i\theta}) = z_0$ olduğundan $f(e^{i\theta}) = \frac{z_1+z_0}{2}$ dır. Benzer şekilde $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ iken $f_1(e^{i\theta}) = z_3$ ve $f_2(e^{i\theta}) = z_0$ olduğundan $f(e^{i\theta}) = \frac{z_3+z_0}{2}$ dır. Yani

$$f(e^{i\theta}) = \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{z_1 + z_0}{2} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos\dfrac{\pi}{8}e^{i\frac{\pi}{8}}, & \theta \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, 0\right) \text{için} \\ \omega_2 = \dfrac{z_3 + z_0}{2} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos\dfrac{3\pi}{8}e^{i\frac{3\pi}{8}}, & \theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right) \text{için} \\ \omega_3 = \dfrac{z_3 + z_2}{2} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos\dfrac{\pi}{8}e^{i\frac{5\pi}{8}}, & \theta \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right) \text{için} \\ \omega_4 = \dfrac{z_5 + z_2}{2} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos\dfrac{3\pi}{8}e^{i\frac{7\pi}{8}}, & \theta \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right) \text{için} \\ \omega_5 = \dfrac{z_5 + z_4}{2} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos\dfrac{\pi}{8}e^{i\frac{9\pi}{8}}, & \theta \in \left(\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right) \text{için} \\ \omega_6 = \dfrac{z_7 + z_4}{2} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos\dfrac{3\pi}{8}e^{i\frac{11\pi}{8}}, & \theta \in \left(\pi, \dfrac{5\pi}{4}\right) \text{için} \\ \omega_7 = \dfrac{z_7 + z_6}{2} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos\dfrac{\pi}{8}e^{i\frac{13\pi}{8}}, & \theta \in \left(\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right) \text{için} \\ \omega_8 = \dfrac{z_1 + z_6}{2} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos\dfrac{3\pi}{8}e^{i\frac{15\pi}{8}}, & \theta \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right) \text{için} \end{cases}$$

dır. Böylece f dönüşümü $\mathbb{E}$ birim diskini $\omega_1, \dots, \omega_8$ köşelerine sahip yıldız bölgenin içine resmeder. Şekil 3.6 da $t = \frac{1}{2}$ için f lineer kombinasyonunun $\mathbb{E}$ birim diskini resmettiği bölge gösterilmiştir.



Şekil 3.6. $t = \frac{1}{2}$ için f lineer kombinasyonunun $\mathbb{E}$ birim diskini resmettiği bölge.

Uyarı 3.2.8. Teorem 3.2.4'de $\omega_1 = \omega_2$ şartı gerekli değildir. Çünkü, bu teoremin ispatı incelendiğinde, f lineer kombinasyonunun lokal yalınkat olması yeterlidir. Yani, Teorem 3.2.4 şu şekilde de ifade edilebilir:

$f_1 = h_1 + \overline{g_1}$ ve $f_2 = h_2 + \overline{g_2}$ yalınkat harmonik fonksiyonları imajiner eksen yönünde konveks ve

$$|\omega_3| = \left|\frac{tg_1' + (1-t)g_2'}{th_1' + (1-t)h_2'}\right| < 1 \tag{3.6}$$

olsun. f_1 ve f_2 fonksiyonları A normalizasyonunu sağlıyor ise bu takdirde $f = tf_1 + (1-t)f_2$ ($0 \leq t \leq 1$) yalınkat ve imajiner eksen yönünde konvekstir.

Lemma 3.2.9 (Pommerenke 1963). $f, \mathbb{E}$ de analitik fonksiyon, $f(0) = 0$ ve $f'(0) \neq 0$ olsun.

$$\varphi(z) = \frac{z}{(1 + ze^{i\gamma_1})(1 + ze^{-i\gamma_2})} \quad (\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R})$$

iken

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{\varphi(z)}\right) > 0 \ (z \in \mathbb{E}),$$

ise f reel eksen yönünde konvekstir.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölüm, dört alt bölümden oluşmaktadır ve (Wang 2013, Kumar ve ark. 2016, Long ve Dorff 2018) kaynakları incelenecektir. Ayrıca, tezde elde edilen sonuçlar ve örnek verilecektir.

4.1. Reel Eksen Yönünde Konveks Harmonik Yalınkat Dönüşümlerin Lineer Kombinasyonu

Bu bölümde Wang ve ark. (2013) tarafından yapılan makale incelenecektir. Bu çalışmada harmonik yalınkat dönüşümlerin lineer kombinasyonlarının yalınkat ve reel eksen yönünde konveks olabilmesi için yeter koşulları araştırılmıştır.

Teorem 4.1.1. $j = 1,2$ için $f_j = h_j + \overline{g_j} \in S_H$ normalize edilmiş harmonik fonksiyonlar ve $\omega_1 = \omega_2$ olsun. $j = 1,2$ için $F_j = h_j - g_j$ fonksiyonları

$$\varphi(z) = \frac{z}{(1 + ze^{i\theta})(1 + ze^{-i\theta})} \quad (\theta \in \mathbb{R}) \tag{4.1}$$

iken

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z\,F_j'(z)}{\varphi(z)}\right) > 0 \quad (z \in \mathbb{E}) \tag{4.2}$$

koşulunu sağlıyor ise $0 \leq t \leq 1$ için $f = tf_1 + (1-t)f_2$ lineer kombinasyonu yalınkat ve reel eksen yönünde konvekstir.

İspat. Öncelikle f fonksiyonunun lokal yalınkat olduğu gösterilecektir. $g_1' = \omega_1 h_1'$ ve $g_2' = \omega_2 h_2' = \omega_1 h_2'$ olduğundan

$$\omega_3 = \frac{tg_1' + (1-t)g_2'}{th_1' + (1-t)h_2'} = \frac{t\omega_1 h_1' + (1-t)\omega_1 h_2'}{th_1' + (1-t)h_2'} = \omega_1$$

elde edilir. Şimdi f fonksiyonunun reel eksen yönünde konveks olduğu gösterilecektir. $f_1, f_2 \in S_H$ ve $j = 1,2$ için $F_j = h_j - g_j$ analitik fonksiyonu

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z\,(h_j' - g_j')}{\varphi(z)}\right) > 0 \quad (z \in \mathbb{E})$$

koşulunu sağladığından

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\frac{z\,(h_3' - g_3')}{\varphi(z)}\right) &= \mathrm{Re}\left(\frac{z}{\varphi(z)}[t(h_1' - g_1') + (1-t)(h_2' - g_2')]\right)\\ &= t\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\varphi(z)}(h_1' - g_1')\right) + (1-t)\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\varphi(z)}(h_2' - g_2')\right)\\ &> 0\end{aligned}$$

dır. Lemma 3.2.9 gereği $h_3 - g_3$ reel eksen yönünde konvekstir ve kesme teoremi gereği f yalınkat ve reel eksen yönünde konvekstir.■

Aşağıdaki sonuç ile Teorem 4.1.1 genelleştirilebilir:

Sonuç 4.1.2. $j = 1,2,\dots,n$ için $f_j = h_j + \overline{g_j} \in S_H$ normalize edilmiş harmonik fonksiyonlar ve her bir f_j fonksiyonunun dilatasyonu aynı olsun (yani $\omega_1 = \cdots = \omega_n$ olsun). $j = 1,2,\dots n$ için $F_j = h_j - g_j$ fonksiyonları

$$\varphi(z) = \frac{z}{(1 + ze^{i\theta})(1 + ze^{-i\theta})} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

iken

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z\,F_j'(z)}{\varphi(z)}\right) > 0 \quad (z \in \mathbb{E})$$

koşulunu sağlar ise $0 \leq t_j \leq 1$ ve $t_1 + \cdots + t_n = 1$ için $f = t_1 f_1 + t_2 f_2 + \cdots + t_n f_n$ yalınkat ve reel eksen yönünde konvekstir.

Teorem 4.1.3. $j = 1,2$ için $f_j = h_j + \overline{g_j} \in S_H$ normalize edilmiş harmonik fonksiyonları reel eksen yönünde konveks olsun. $\mathrm{Re}((1 - \omega_1\overline{\omega_2})\ h_1'\overline{h_2'}) \geq 0$ ise $0 \leq t \leq 1$ için $f = tf_1 + (1-t)f_2$ lineer kombinasyonu reel eksen yönünde konvekstir.

İspat. $j = 1,2$ için $|\omega_j| < 1$ koşulunu sağlayan $g_1' = \omega_1 h_1'$ ve $g_2' = \omega_2 h_2'$ için

$$|\omega_3| = \left|\frac{tg_1' + (1-t)g_2'}{th_1' + (1-t)h_2'}\right| = \frac{|t\omega_1 h_1' + (1-t)\omega_2 h_2'|}{|th_1' + (1-t)h_2'|} \tag{4.3}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
&|th_1' + (1-t)h_2'|^2 - |t\omega_1 h_1' + (1-t)\omega_2 h_2'|^2 \\
&= (th_1' + (1-t)h_2')\overline{(th_1' + (1-t)h_2')} - (t\omega_1 h_1' + (1-t)\omega_2 h_2')\overline{(t\omega_1 h_1' + (1-t)\omega_2 h_2')} \\
&= t^2(1 - |\omega_1|^2)|h_1'|^2 + (1-t)^2(1 - |\omega_2|^2)|h_2'|^2 + 2t(1-t)\mathrm{Re}((1 - \omega_1\overline{\omega_2})\ h_1'\overline{h_2'}) \\
&> 0
\end{aligned}$$

dır. Buradan $|\omega_3| < 1$ olduğu görülür ve f lokal yalınkattır. Şimdi $f \in S_H$ olduğu gösterilecektir.

$$f_1(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n}\overline{z^n} \in S_H$$

ve

$$f_2(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}\overline{z^n} \in S_H$$

alınırsa

$$\begin{aligned} f(z) &= tf_1(z) + (1-t)f_2(z) \\ &= t\left(z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \overline{z^n}\right) + (1-t)\left(z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \overline{z^n}\right) \\ &= z + \sum_{n=2}^{\infty} [ta_n + (1-t)A_n] z^n + \sum_{n=1}^{\infty} [tb_n + (1-t)B_n] \overline{z^n} \in S_H \end{aligned}$$

olur. $f_j = h_j + \overline{g_j}$ $(j = 1,2)$ yalınkat ve reel eksen yönünde konveks olduğundan kesme teoremi gereği $j = 1,2$ için $F_j = h_j - g_j$ yalınkattır ve reel eksen yönünde konvekstir. $f_j = F_j + 2\mathrm{Re}(g_j)$ ve $j = 1,2$ için $q_j(\omega)$ reel değerli sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$f_j\left[F_j^{-1}(\omega)\right] = \omega + 2\mathrm{Re}\left(g_j\left(F_j^{-1}(\omega)\right)\right) = \omega + q_j(\omega)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} f[F^{-1}(\omega)] &= tf_1[F_1^{-1}(\omega)] + (1-t)f_2[F_2^{-1}(\omega)] \\ &= t[\omega + q_1(\omega)] + (1-t)[\omega + q_2(\omega)] \\ &= \omega + [tq_1(\omega) + (1-t)q_2(\omega)] = \omega + q_3(\omega) \end{aligned}$$

olur. Lemma 3.1.3 gereği f lineer kombinasyonu yalınkattır ve reel eksen yönünde konvekstir. ■

Teorem 4.1.4. $j = 1,2$ için $f_j = h_j + \overline{g_j} \in S_H$ normalize edilmiş harmonik fonksiyonlar ve $h_j + g_j = \frac{z}{1-z}$ olsun. Bu takdirde $0 \le t \le 1$ için $f = tf_1 + (1-t)f_2$ lineer kombinasyonu yalınkat ve reel eksen yönünde konvekstir.

İspat. $j = 1,2$ için $h_j + g_j = \frac{z}{1-z}$ ve $g_j' = \omega_j h_j'$ olmak üzere $h_j' = \frac{1}{(1+\omega_j)(1-z)^2}$ dir. Ayrıca

$$|\omega_3| = \left|\frac{tg_1' + (1-t)g_2'}{th_1' + (1-t)h_2'}\right| = \frac{|t\omega_1 h_1' + (1-t)\omega_2 h_2'|}{|th_1' + (1-t)h_2'|} = \frac{|t\omega_1 + (1-t)\omega_2 + \omega_1\omega_2|}{|1 + (1-t)\omega_1 + t\omega_2|} \quad (4.4)$$

olduğu görülür. Şimdi $|\omega_3| < 1$ olduğu gösterilecektir.

$$\omega_j = \rho_j(\cos\theta_j + i\sin\theta_j)\ (0 \le \rho_j < 1\ , j = 1{,}2)$$

alınırsa

$$\begin{aligned} I &:= |1 + (1-t)\omega_1 + t\omega_2|^2 - |t\omega_1 + (1-t)\omega_2 + \omega_1\omega_2|^2 \\ &= [1 + (1-t)\rho_1\cos\theta_1 + t\rho_2\cos\theta_2]^2 + [(1-t)\rho_1\sin\theta_1 + t\rho_2\sin\theta_2]^2 \\ &\quad - \{[t\rho_1\cos\theta_1 + (1-t)\rho_2\cos\theta_2 + \rho_1\rho_2\cos(\theta_1+\theta_2)]^2 \\ &\quad + [t\rho_1\sin\theta_1 + (1-t)\rho_2\sin\theta_2 + \rho_1\rho_2\sin(\theta_1+\theta_2)]^2\} \\ &= [2\rho_2\cos\theta_2\,(1-\rho_1^2) - 2\rho_1\cos\theta_1\,(1-\rho_2^2) + 2(\rho_2^2 - \rho_1^2)]t \\ &\quad + (1-\rho_2^2)(\rho_1^2 + 2\rho_1\cos\theta_1 + 1) \\ &= (1-\rho_2^2)(1-\rho_1)^2 + 2t(\rho_1-\rho_2)[1 + \rho_1\rho_2 - (\rho_1+\rho_2)] := II \end{aligned}$$

olsun. $p_j \in [0,1)$ için $0 < 1 + \rho_1\rho_2 - (\rho_1+\rho_2) = (1-\rho_1)(1-\rho_2) \le 1$ olduğu kolayca görülür. $\rho_1 - \rho_2 \ge 0$ ise

$$I \ge II \ge (1-\rho_2^2)(1-\rho_1)^2 > 0$$

dır. $\rho_1 - \rho_2 < 0$ ise

$$\begin{aligned} I \ge II &\ge (1-\rho_2^2)(1-\rho_1)^2 + 2(\rho_1-\rho_2)[1 + \rho_1\rho_2 - (\rho_1+\rho_2)] \\ &= (1-\rho_1^2)(1-\rho_2)^2 > 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece $|\omega_3| < 1$ dir ve f lokal yalınkattır. Şimdi f nin reel eksen yönünde konveks olduğu gösterilecektir. $p_j = \frac{1-\omega_j}{1+\omega_j}$ $(j = 1{,}2)$ ve $\mathrm{Re}(p_j) > 0$ olmak üzere

$$h_j{}' - g_j{}' = \left(h_j{}' + g_j{}'\right)\left(\frac{h_j{}' - g_j{}'}{h_j{}' + g_j{}'}\right) = \left(h_j{}' + g_j{}'\right)\left(\frac{1-\omega_j}{1+\omega_j}\right) = \frac{p_j}{(1-z)^2}\ (j = 1,2)$$

dır. Böylece

$$\varphi(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

iken

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\frac{z(h_3{}' - g_3{}')}{\varphi(z)}\right) &= \mathrm{Re}\left(\frac{z}{\varphi(z)}[t(h_1{}' - g_1{}') + (1-t)(h_2{}' - g_2{}')]\right)\\ &= t\ \mathrm{Re}\Big((1-z)^2(h_1{}' - g_1{}')\Big) + (1-t)\mathrm{Re}\Big((1-z)^2(h_2{}' - g_2{}')\Big)\\ &= t\mathrm{Re}(p_1) + (1-t)\mathrm{Re}(p_2) > 0\end{aligned}$$

dır. Lemma 3.2.9 gereği $h_3 - g_3$ ün reel eksen yönünde konveks olduğu elde edilir. Kesme teoreminden f yalınkattır ve reel eksen yönünde konvekstir. ■

Yukarıdaki Teoremin (Wang 2013) tarafından verilen ispatında Long ve Dorff (2018) tarafından düzeltme yapılmıştır. Burada, (Long ve Dorff 2018, Uyarı 2.5) de verildiği gibi ispat düzenlenmiştir. Ayrıca, yukarıdaki teorem, sağ yarı düzlem dönüşümleri yerine asimetrik dikey şerit dönüşümleri ele alınarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

Sonuç 4.1.5. $f_j = h_j + \overline{g_j} \in S_H\ (j = 1,2)$ ve $h_j + g_j = \frac{1}{2i\sin\theta}\log\left(\frac{1+ze^{i\theta}}{1+ze^{-i\theta}}\right)$ $(j = 1,2, 0 < \theta < \pi)$ olsun. Bu takdirde $f = tf_1 + (1-t)f_2\ \ (0 \le t \le 1)$ yalınkattır ve reel eksen yönünde konvekstir.

4.2. İmajiner Eksen Yönünde Konveks Harmonik Dönüşümlerin Lineer Kombinasyonu

Bu bölümde Kumar ve ark. (2016) tarafından yapılan makale ele alınacaktır. Bu çalışmada, $\alpha \in [-1,1]$ olmak üzere $F_\alpha = h_\alpha + g_\alpha = \frac{z(1-\alpha z)}{1-z^2}$ analitik fonksiyonunun verilen $\omega = \frac{g_{\alpha'}}{h_{\alpha'}}$ genişlemesi altında dikey kesilmesiyle elde edilen $f_\alpha = h_\alpha + \overline{g_\alpha}$ yalınkat harmonik dönüşümlerinin lineer kombinasyonları incelenmiştir.

Burada, $F_\alpha = h_\alpha + g_\alpha = \frac{z(1-\alpha z)}{1-z^2}$ analitik fonksiyonu yalınkattır ve imajiner eksen yönünde konvekstir. Çünkü, her $z \in \mathbb{E}$ için

$$\mathrm{Re}[(1-z^2)F_\alpha'(z)] = \mathrm{Re}\left[\frac{1+z^2-2\alpha z}{1-z^2}\right] = \frac{(1-|z|^2)\left(1+|z|^2-2\alpha \mathrm{Re}(z)\right)}{|1-z^2|^2} > 0 \quad (4.5)$$

dır. Teorem 3.2.3 gereği F_α fonksiyonunun yalınkat ve imajiner eksen yönünde konveks olduğu görülür. Böylece, Teorem 3.1.1 gereği (Kesme yöntemi) $f_\alpha = h_\alpha + \overline{g_\alpha}$ harmonik fonksiyonu da yalınkattır ve imajiner eksen yönünde konvekstir.

Teorem 4.2.1. $i = 1,2$ ve $\alpha_i \in [-1,1]$ olmak üzere $h_{\alpha_i}(z) + g_{\alpha_i}(z) = \frac{z(1-\alpha_i z)}{1-z^2}$ ve $\left|\frac{g_{\alpha_i}'}{h_{\alpha_i}'}\right| < 1$ özelliğinde $f_{\alpha_i} = h_{\alpha_i} + \overline{g_{\alpha_i}} \in S_H$ dönüşümleri ele alınsın. Ayrıca, $0 \le t \le 1$ için $f = tf_{\alpha_1} + (1-t)f_{\alpha_2}$ lineer kombinasyonu lokal yalınkat ve yön koruyan olsun. Bu takdirde $f \in S_H$ dır ve f imajiner eksen yönünde konvekstir.

İspat. Lineer kombinasyon fonksiyonu $f = tf_{\alpha_1} + (1-t)f_{\alpha_2} = h + \bar{g}$ formunda ve onun analitik kesmesi $F = t\mathrm{F}_{\alpha_1} + (1-t)\mathrm{F}_{\alpha_2} = h + g$ formunda olsun. Böylece, (4.5) kullanıldığında her $z \in \mathbb{E}$ için

$$\mathrm{Re}\{(1-z^2)F'(z)\} = t\,\mathrm{Re}\{(1-z^2)F_{\alpha_1}'(z)\} + (1-t)\mathrm{Re}\{(1-z^2)F_{\alpha_2}'(z)\} > 0$$

olur. Dolayısıyla, kesme teoremi gereği F analitik, yalınkat ve imajiner eksen yönünde konveks olduğundan lineer kombinasyon fonksiyonu olan f fonksiyonu yalınkattır ve imajiner eksen yönünde konvekstir. ■

Teorem 4.2.2. $i = 1,2$ ve $\alpha_i \in [-1,1]$ olmak üzere $h_{\alpha_i}(z) + g_{\alpha_i}(z) = \frac{z(1-\alpha_i z)}{1-z^2}$ ve $|\omega_i| = \left|\frac{g_{\alpha_i}'}{h_{\alpha_i}'}\right| < 1$ özelliğinde $f_{\alpha_i} = h_{\alpha_i} + \overline{g_{\alpha_i}} \in S_H$ dönüşümleri ele alınsın. Bu takdirde $f = tf_{\alpha_1} + (1-t)f_{\alpha_2}$ $o \le t \le 1$ fonksiyonunun genişlemesi

$$\omega = \frac{(1+z^2)(t\omega_1 + (1-t)\omega_2 + \omega_1\omega_2) - 2z(\alpha_1 t\omega_1 + \alpha_1 t\omega_1\omega_2 + (1-t)\omega_2\alpha_2 + (1-t)\omega_1\omega_2\alpha_2)}{(1+z^2)(1 + t\omega_2 + (1-t)\omega_1) - 2z(\alpha_2 + \alpha_1 t\omega_2 + (1-t)\omega_1\alpha_2 + \alpha_1 t - \alpha_2 t)} \quad (4.6)$$

dir.

İspat. $f = tf_{\alpha_1} + (1-t)f_{\alpha_2} = th_{\alpha_1} + (1-t)h_{\alpha_2} + t\overline{g_{\alpha_1}} + (1-t)\overline{g_{\alpha_2}}$ olduğundan

$$\omega = \frac{tg_{\alpha_1}' + (1-t)g_{\alpha_2}'}{th_{\alpha_1}' + (1-t)h_{\alpha_2}'} = \frac{t\omega_1 h_{\alpha_1}' + (1-t)\omega_2 h_{\alpha_2}'}{th_{\alpha_1}' + (1-t)h_{\alpha_2}'} \quad (4.7)$$

dır. Ayrıca $h_{\alpha_i} + g_{\alpha_i} = \frac{z(1-\alpha_i z)}{1-z^2}$ ve $\omega_i = \frac{g_{\alpha_i}'}{h_{\alpha_i}'}$ $(i = 1,2)$ olduğundan

$$h_{\alpha_1}'(z) = \frac{1+z^2-2\alpha_1 z}{(1+\omega_1)(1-z^2)^2} \text{ ve } h_{\alpha_2}'(z) = \frac{1+z^2-2\alpha_2 z}{(1+\omega_2)(1-z^2)^2} \quad (4.8)$$

bulunur. (4.8), (4.7) de yerine yazıldığında

$$\omega = \frac{t\omega_1 h'_{\alpha_1} + (1-t)\omega_2 h'_{\alpha_2}}{t h'_{\alpha_1} + (1-t)h'_{\alpha_2}}$$

$$= \frac{t\omega_1 \frac{1+z^2-2\alpha_1 z}{(1+\omega_1)(1-z^2)^2} + (1-t)\omega_2 \frac{1+z^2-2\alpha_2 z}{(1+\omega_2)(1-z^2)^2}}{t\frac{1+z^2-2\alpha_1 z}{(1+\omega_1)(1-z^2)^2} + (1-t)\frac{1+z^2-2\alpha_2 z}{(1+\omega_2)(1-z^2)^2}}$$

bulunur. Paydalar eşitlenip sadeleştirme yapıldıktan sonra (4.6) elde edilir. ■

Teorem 4.2.3. $i = 1,2$ $\alpha \in [-1,1]$ için $h_i(z) + g_i(z) = \frac{z(1-\alpha z)}{1-z^2}$ olsun. Bu takdirde $0 \le t \le 1$ için $f = tf_1 + (1-t)f_2 \in S_H$ dır ve f imajiner eksen yönünde konvekstir.

İspat. Teorem 4.2.1. gereği f fonksiyonunun lokal yalınkat ve yön koruyan olduğunu ispatlamak yeterlidir. f_1, f_2, f fonksiyonlarının genişlemesi sırasıyla $\omega_1, \omega_2, \omega$ olsun. $\omega_1 = \omega_2$ olduğunda ispat açıktır. $\omega_1 \neq \omega_2$ iken (4.6) de $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ yazıldığında

$$\omega = \frac{t\omega_1 + (1-t)\omega_2 + \omega_1\omega_2}{1 + t\omega_2 + (1-t)\omega_1}$$

elde edilir. Teorem 4.1.4 'ün ispatından $|\omega| < 1$ dir. Dolayısıyla f lokal yalınkat ve yön koruyandır. ■

Sonuç 4.2.4. $i = 1,2$ için $f_i = h_i + \overline{g_i}$ lokal yalınkat, normalize edilmiş harmonik fonksiyonlar ve $h_i(z) + g_i(z) = \frac{z}{1-z}$ olsun. Bu takdirde $0 \leq t \leq 1$ için $f = tf_1 + (1-t)f_2 \in S_H$ dır ve f imajiner eksen yönünde konvekstir.

Teorem 4. 2. 5. (Cohn Kuralı). *n.* dereceden $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ polinomu verilsin ve $p^*(z) = z^n \overline{p(\frac{1}{\bar{z}})} = \overline{a_n} + \overline{a_{n-1}} z + \cdots + \overline{a_0} z^n$ olsun. Ayrıca, p polinomunun birim çemberin içinde r tane, birim çemberin üzerinde s tane kökü (sıfır yeri) olsun. Bu takdirde $|a_0| < |a_n|$ iken $(n-1)$. dereceden

$$p_1(z) = \frac{\overline{a_n} p(z) - a_0 p^*(z)}{z}$$

polinomunun birim çemberin içerisinde $r_1 = r - 1$ ve birim çember üzerinde $s_1 = s$ tane kökü vardır (Cohn 1922).

Teorem 4. 2. 6. $i = 1,2$ ve $\alpha_i \in [-1,1]$ için $f_{\alpha_i} = h_{\alpha_i} + \overline{g_{\alpha_i}}$ normalize edilmiş harmonik fonksiyonlar ve $h_{\alpha_i} + g_{\alpha_i} = \frac{z(1-\alpha_i z)}{(1-z^2)}$ olsun. Ayrıca, sırasıyla f_{α_1} ve f_{α_2} nin genişlemesi $\omega_1(z) = -z$ ve $\omega_2(z) = z$ olsun. Bu takdirde $\alpha_1 \geq \alpha_2$ iken $f = tf_{\alpha_1} + (1-t)f_{\alpha_2}$ $(0 \leq t \leq 1)$ lineer kombinasyonu yalınkattır ve imajiner eksen yönünde konvekstir.

İspat. $h_{\alpha_1} + g_{\alpha_1} = \frac{z(1-\alpha_1 z)}{1-z^2}$ olduğundan

$$h'_{\alpha_1} + g'_{\alpha_1} = \frac{(1-2\alpha_1 z)(1-z^2) - (z-\alpha_1 z^2)(-2z)}{(1-z^2)^2}$$

dir. $\omega_1 = \frac{g'_{\alpha_1}}{h'_{\alpha_1}}$ kullanılarak

$$h'_{\alpha_1} + \omega_1 h'_{\alpha_1} = \frac{1 + z^2 - 2\alpha_1 z}{(1 - z^2)^2}$$

yazılır. Buradan

$$h'_{\alpha_1} = \frac{1 + z^2 - 2\alpha_1 z}{(1 + \omega_1)(1 - z^2)^2}$$

yazılır. $\omega_1(z) = -z$ olduğu kullanılırsa

$$h'_{\alpha_1} = \frac{1 + z^2 - 2\alpha_1 z}{(1 - z)(1 - z^2)^2}$$

bulunur. Böylece

$$h'_{\alpha_1} = \frac{1 + \alpha_1}{8(1 - z)} + \frac{1 - \alpha_1}{2(1 - z)^3} + \frac{1 + \alpha_1}{8(1 + z)} + \frac{1 + \alpha_1}{4(1 + z)^2}$$

olduğundan integral alınarak

$$h_{\alpha_1}(z) = \frac{1-\alpha_1}{4(1-z)^2} - \frac{1+\alpha_1}{4(1+z)} + \frac{1+\alpha_1}{8}\log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] + \frac{\alpha_1}{2}$$

elde edilir. $h_{\alpha_1} + g_{\alpha_1} = \frac{z(1-\alpha_i z)}{(1-z^2)}$ denkleminde h_{α_1} yerine yazılarak

$$g_{\alpha_1}(z) = \frac{z(1-\alpha_1 z)}{1-z^2} - \frac{1-\alpha_1}{4(1-z)^2} + \frac{1+\alpha_1}{4(1+z)} - \frac{1+\alpha_1}{8}\log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] - \frac{\alpha_1}{2}$$

elde edilir. Benzer şekilde $h_{\alpha_2} + g_{\alpha_2} = \frac{z(1-\alpha_2 z)}{1-z^2}$ denkleminden

$$h_{\alpha_2}(z) = \frac{1-\alpha_2}{4(1-z)} - \frac{1+\alpha_2}{4(1+z)^2} + \frac{1-\alpha_2}{8}\log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] + \frac{\alpha_2}{2}$$

ve

$$g_{\alpha_2}(z) = \frac{z(1-\alpha_2 z)}{1-z^2} + \frac{1+\alpha_2}{4(1+z)^2} - \frac{1-\alpha_2}{4(1-z)} - \frac{1-\alpha_1}{8}\log\left[\frac{1+z}{1-z}\right] - \frac{\alpha_2}{2}$$

elde edilir. Teorem 4.2.1 gereği $|\omega| < 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. Ayrıca Teorem 4.2.3 den $\alpha_1 = \alpha_2$ durumu elde edilir. Dolayısıyla sadece $\alpha_1 > \alpha_2$ durumu ele alınmalıdır. (4.6) de $\omega_1(z) = -z$ ve $\omega_2(z) = z$ yazılırsa

$$\omega = \frac{(1+z^2)(-tz+(1-t)z-z^2)-2z(-\alpha_1 tz-\alpha_1 tz^2+(1-t)\alpha_2 z-(1-t)\alpha_2 z^2)}{(1+z^2)(1+tz-(1-t)z)-2z(\alpha_2+\alpha_1 tz-(1-t)\alpha_2 z+\alpha_1 t-\alpha_2 t)}$$

$$= -z\frac{z^3+\big(2t-1-2\alpha_1 t-2\alpha_2(1-t)\big)z^2+(1+2\alpha_2(1-t)-2\alpha_1 t)z+(2t-1)}{(2t-1)z^3+(1+2\alpha_2(1-t)-2\alpha_1 t)z^2+\big(2t-1-2\alpha_1 t-2\alpha_2(1-t)\big)z+1} \quad (4.9)$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi(z) = z^3+\big(2t-1-2\alpha_1 t-2\alpha_2(1-t)\big)z^2+(1+2\alpha_2(1-t)-2\alpha_1 t)z+(2t-1)$$

$$= a_3 z^3+a_2 z^2+a_1 z+a_0$$

ve

$$\varphi^*(z) = (2t-1)z^3+(1+2\alpha_2(1-t)-2\alpha_1 t)z^2+\big(2t-1-2\alpha_1 t-2\alpha_2(1-t)\big)z+1$$

$$= z^3\overline{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}$$

olmak üzere (4.9) dan $\omega(z) = -z\frac{\varphi(z)}{\varphi^*(z)}$ elde edilir. Böylece φ nin kökü $z_0 \neq 0$ iken φ^* in kökü $\frac{1}{\overline{z_0}}$ dır. Buradan

$$\omega(z) = -z\frac{(z+A)(z+B)(z+C)}{(1+\bar{A}z)(1+\bar{B}z)(1+\bar{C}z)}$$

yazılır. Ayrıca $|\beta| \leq 1$ için $\emptyset(z) = \frac{z+\beta}{1+\bar{\beta}z}$ fonksiyonunun $\overline{\mathbb{E}} = \{z;\ |z| \leq 1\}$ yi $\overline{\mathbb{E}}$ üzerine resmettiği bilinmektedir. Dolayısıyla, $\mathbb{E}$ de $|\omega| < 1$ olduğunu göstermek için $|\mathrm{A}| < 1$, $|\mathrm{B}| < 1$ ve $|\mathrm{C}| < 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. $t = 0$ ve $t = 1$ durumları açıktır ve $t = \frac{1}{2}$ durumu ayrıca incelenecektir. Şimdi $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ durumu ele alınsın. $|a_0| = 2t - 1 < 1 = |a_3|$ olduğundan φ de Cohn kuralı uygulanarak

$$\varphi_1(z) = \frac{\overline{a_3}\varphi(z) - a_0\varphi^*(z)}{z} = 4t(1-t)[z^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)z - (\alpha_1 - \alpha_2 - 1)]$$
$$= b_2 z^2 + b_1 z + b_0 \qquad (4.10)$$

elde edilir. Böylece $\varphi_1{}'$in sıfırlarının $|z| = 1$ içinde ve üzerinde olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$a_1 = 1$ ve $a_2 = -1$ iken φ_1 in iki kökü de $|z| = 1$ dedir. Ayrıca $a_1 - a_2 > 0$ iken $|b_0| < |b_2|$ dir. Çünkü $a_1, a_2 \in (-1,1)$ ve $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ için $4t(1-t) \neq 0$ olur. φ_1 e tekrar Cohn kuralı uygulandığında

$$\varphi_1{}^*(z) = b_0 z^2 + b_1 z + b_2 = 4t(1-t)[(-a_1 + a_2 + 1)z^2 - (a_1 + a_2)z + 1]$$
$$= z^2\overline{\varphi_1\left(\frac{1}{z}\right)}$$

olmak üzere

$$\varphi_2(z) = \frac{\overline{b_2}\varphi_1(z) - b_0\varphi_1{}^*(z)}{z} = \left(4t(1-t)\right)^2(a_1 - a_2)[(2 - a_1 + a_2)z - (a_1 + a_2)]$$

elde edilir. Böylece φ_2 nin sıfırlarının $|z| = 1$ içinde veya üzerinde olduğunu göstermek yeterlidir. $i = 1,2$ için $|a_i| \leq 1$ olduğundan $(1 - a_1)(1 - a_2) \geq 0$ dır. Dolayısıyla φ_2 nin sıfırı eğer z_2 ise $|z_2| \leq 1$ olduğu görülür. Böylece φ_1 ve φ nin sıfırları $|z| = 1$ birim çemberinin içinde veya üzerindedir.

Şimdi $t = \frac{1}{2}$ durumu ele alınsın. Böylece

$$\varphi(z) = z[z^2 - (a_1 + a_2)z - (a_1 - a_2 - 1)]$$

elde edilir. φ nin kökleri φ_1 in kökleri olduğundan φ nin kökleri birim çember içinde ve üzerindedir. ■

Uyarı 4.2.8. Teorem 4.2.7. de $a_2 > a_1$ durumu mümkün değildir çünkü bu durumda φ_1 in sıfırlarının çarpımının modülünün $|1 + a_2 - a_1|$ olduğu sonucu çıkacaktır. Bu kesinlikle 1 den büyüktür. Böylece φ_1 in en az bir kökü $|z| = 1$ in dışındadır. Dolayısıyla φ nın en az bir kökü $|z| = 1$ in dışında olur. Bundan dolayı bazı $z \in \mathbb{E}$ için $|\omega(z)| \not< 1$ yani f_{α_1}ve f_{α_2} nin lineer kombinasyonu artık lokal yalınkat ve yön koruyan olmaz.

Teorem 4.2.9. f_{α_1}, Teorem 4.2.7. de verildiği gibi olsun. Ayrıca $\alpha_2 \in [-1,1]$ ve $|\omega_2| < 1$ için $f_{\alpha_2} = h_{\alpha_2} + \overline{g_{\alpha_2}}$ normalize edilmiş harmonik fonksiyon ve $h_{\alpha_2}(z) + g_{\alpha_2}(z) = \frac{z(1-\alpha_2 z)}{1-z^2}$ olsun. Bu takdirde $0 \leq t \leq 1$ için $f = tf_{\alpha_1} + (1 - t)f_{\alpha_2}$ lineer kombinasyonu

(i) $\omega_2(z) = -z^2$ ve $\alpha_1 \geq \alpha_2$ ise yalınkattır ve imajiner eksen yönünde konvekstir.

(ii) $\omega_2(z) = z^2$,$|\alpha_1| \geq |\alpha_2|$ ve $\alpha_1\alpha_2 \geq 0$ ise yalınkattır ve imajiner eksen yönünde konvekstir.

Bu teoremin ispatı Teorem 4.2.7 nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Uyarı 4.2.10. Yukarıdaki teoremde $\omega_2(z) = z^3$ alındığında f nin lokal yalınkat ve yön koruyan olamayacağı gözlemlenir. $t = \frac{3}{4}$ için $\alpha_1 = 0{,}4$ ve $\alpha_2 = 0{,}3$ veya $\alpha_1 = 0{,}3$ ve $\alpha_2 = 0{,}6$ olarak alınırsa f nin genişlemesi ω_3 olmak üzere $|\omega_3| < 1$ olduğu kolayca görülür.

Teorem 4.2.11. $\theta \in (0, \pi)$ ve $\left|\frac{g'_\theta}{h'_\theta}\right| < 1$ için $f_\theta = h_\theta + \bar{g}_\theta$ normalize edilmiş harmonik fonksiyonu ve $h_\theta(z) + g_\theta(z) = \frac{1}{2i \sin\theta} \log\left(\frac{1+ze^{i\theta}}{1+ze^{-i\theta}}\right)$ olsun. Ayrıca $\alpha \in [-1,1]$ ve $\left|\frac{g'_\alpha}{h'_\alpha}\right| < 1$ için $f_\alpha = h_\alpha + \bar{g}_\alpha$, normalize edilmiş harmonik fonksiyonu ve $h_\alpha(z) + g_\alpha(z) = \frac{z(1-\alpha z)}{1-z^2}$ olsun. Bu takdirde $0 \le t \le 1$ için $f_{\theta,\alpha} = tf_\theta + (1-t)f_\alpha$ lineer kombinasyonu lokal yalınkat ve yön koruyan ise $f_{\theta,\alpha} \in S_H$ dır ve imajiner eksen yönünde konvekstir.

İspat. Lineer kombinasyon fonksiyonu $f_{\theta,\alpha} = tf_\theta + (1-t)f_\alpha = h + \bar{g}$ formunda ve onun analitik kesmesi $F_{\theta,\alpha} = t\mathrm{F}_\theta + (1-t)\mathrm{F}_\alpha = h + g$ formunda olsun. Böylece, (4.5) kullanıldığında her $z \in \mathbb{E}$ için

$$\mathrm{Re}\{(1-z^2)F'_{\theta,\alpha}\} = t\ \mathrm{Re}\{(1-z^2)F'_\theta(z)\} + (1-t)\mathrm{Re}\{(1-z^2)F'_\alpha(z)\} > 0$$

olduğu gösterilmelidir. Teorem 4.2.1 in ispatında $\mathrm{Re}\{(1-z^2)F'_\alpha(z)\} > 0$ olduğu gösterilmiştir. Şimdi, $\mathrm{Re}\,[(1-z^2)F'_\theta(z)] > 0$ eşitsizliği gösterilecektir.

$$\Phi(z) = (1-z^2)F'_\theta(z) = \frac{1-z^2}{(1+ze^{i\theta})(1+ze^{-i\theta})}$$

olsun. $\Phi(0) = 1$ ve her $\gamma \in \mathbb{R}$ için $\mathrm{Re}\left[\Phi(e^{i\gamma})\right] = 0$ olduğundan harmonik fonksiyonların minimum prensibi gereği her $z \in \mathbb{E}$ için $\mathrm{Re}[\Phi(z)] = \mathrm{Re}\left[(1-z^2)F'_{\theta,\alpha}(z)\right] > 0$ dır. Buradan Teorem 3.2.3 gereği $F_{\theta,\alpha}$ analitik yalınkat ve imajiner eksen yönünde konvekstir. Dolayısıyla Teorem 3.1.1 gereği $f_{\theta,\alpha} \in S_H$ dır ve imajiner eksen yönünde konvekstir. ■

Örnek 4.2.12. $f_\theta = h_\theta + \bar{g}_\theta$ harmonik dönüşüm ve $h_\theta(z) + g_\theta(z) = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$ olsun. $\omega_1(z) = -z$ alınırsa

$$h_\theta(z) = \frac{1}{2}\tan^{-1} z - \frac{1}{2}\log(1-z) + \frac{1}{4}\log(1+z^2)$$

$$g_\theta(z) = \frac{1}{2}\tan^{-1} z + \frac{1}{2}\log(1-z) - \frac{1}{4}\log(1+z^2)$$

elde edilir. Ayrıca $f_\alpha = h_\alpha + \bar{g}_\alpha$ harmonik dönüşümü için $h_\alpha(z) + g_\alpha(z) = \frac{z}{1-z}$ olsun. $\omega_2(z) = z^2$ alınırsa

$$h_\alpha(z) = \frac{z}{2(1-z)} - \frac{1}{2}\log(1-z) + \frac{1}{4}\log(1+z^2)$$

$$g_\alpha(z) = \frac{z}{2(1-z)} + \frac{1}{2}\log(1-z) - \frac{1}{4}\log(1+z^2)$$

elde edilir. $0 \leq t \leq 1$ için $f_{\theta,\alpha} = tf_\theta + (1-t)f_\alpha$ lineer kombinasyonun genişlemesi ω_3 olmak üzere

$$|\omega_3| = \left|\frac{tg'_\theta + (1-t)g'_\alpha}{th'_\theta + (1-t)h'_\alpha}\right| = \left|\frac{t\omega_1 h'_\theta + (1-t)\omega_2 h'_\alpha}{th'_\theta + (1-t)h'_\alpha}\right| = \left|\frac{z(1-t)}{1-tz}\right| < 1$$

dir. Böylece $f_{\theta,\alpha}$ lokal yalınkat ve yön koruyandır. Teorem 4.2.11 gereği $f_{\theta,\alpha} \in S_H$ dır ve imajiner eksen yönünde konvekstir.

4.3. Harmonik Dikey Şerit Dönüşümlerin Lineer Kombinasyonu

Bu bölümde Long ve Dorff (2018) tarafından yapılan çalışma ele alınacaktır. Bu çalışmada $j = 1,2$ için $\alpha_j \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için $\vartheta_j(z) = \frac{1}{2i\sin\alpha_j}\log\left(\frac{1+z^{i\alpha_j}}{1+z^{-i\alpha_j}}\right)$ asimetrik dikey şerit dönüşümlerinin çeşitli genişlemelerle dikey olarak kesilmesiyle elde edilen harmonik dönüşümlerin lineer kombinasyonları incelenmiştir. Bu dönüşümler $\mathbb{E}$ yi $\Omega_\alpha = \left\{\omega: \frac{\alpha-\pi}{2i\sin\alpha} < \mathrm{Re}(\omega) < \frac{\alpha}{2\sin\alpha}\right\}$ dikey şerit bölgesine dönüştürür.

Teorem 4.3.1. $j = 1,2$ ve $\alpha_j \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için $f_i = h_j + \overline{g_j} \in S_H$ normalize edilmiş harmonik fonksiyonlar ve $h_j + g_j = \frac{1}{2i\sin\alpha_j}\log\left(\frac{1+z^{i\alpha_j}}{1+z^{-i\alpha_j}}\right)$ olsun. $0 \leq t \leq 1$ için $f = tf_1 + (1-t)f_2$ lineer kombinasyonu lokal yalınkat ve yön koruyan ise $f \in S_H$ dır ve f imajiner eksen yönünde konvekstir.

İspat. $j = 1,2$ için $F_j = h_j + g_j = \frac{1}{2i\sin\alpha_j}\log\left(\frac{1+z^{i\alpha_j}}{1+z^{-i\alpha_j}}\right)$ olmak üzere $F = tF_1 + (1-t)F_2$ şeklinde ele alınsın. Buradan

$$\varphi_j(z) := (1-z^2)F_j'(z) = \frac{1-z^2}{\left(1+ze^{i\alpha_j}\right)\left(1+ze^{-i\alpha_j}\right)}$$

olsun. $|z|=1$ iken $\mathrm{Re}\left[\varphi_j(z)\right]=0$ ve $\varphi_j(0)=1$ olduğu görülmektedir. Harmonik fonksiyonlar için minimum prensibine göre $z\in\mathbb{E}$ için $\mathrm{Re}\left[\varphi_j(z)\right]=\mathrm{Re}\left[(1-z^2)F_j'(z)\right]>0$ dır. Dolayısıyla her $z\in\mathbb{E}$ için

$$\mathrm{Re}[(1-z^2)F'(z)] = t\mathrm{Re}[(1-z^2)F_1'(z)] + (1-t)\mathrm{Re}[(1-z^2)F_2'(z)] > 0$$

dır. Teorem 3.2.3 gereği

$$F = tF_1 + (1-t)F_2 = t\,h_1 + (1-t)h_2 + tg_1 + (1-t)g_2$$

analitik ve imajiner eksen yönünde konvekstir. Bu nedenle

$$f = tf_1 + (1-t)f_2 = th_1 + (1-t)h_2 + \overline{tg_1 + (1-t)g_2}$$

lokal yalınkat ve yön koruyan olduğundan kesme teoremi gereği $f\in S_H$ dır ve imajiner eksen yönünde konvekstir. ■

Yukarıdaki teoreme göre dikkat edilmesi gereken nokta f lineer kombinasyonunun lokal yalınkat ve yön koruyan olmasıdır. Dolayısıyla f nin genişlemesi olan ω nın $|\omega| < 1$ şartını sağlamasıdır.

Lemma 4.3.2. $j = 1,2$ ve $\alpha_j \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için $f_i = h_j + \overline{g_j} \in S_H$ normalize edilmiş harmonik fonksiyonlar ve $h_j + g_j = \frac{1}{2\sin\alpha_j} \log\left(\frac{1+z^{i\alpha_j}}{1+z^{-i\alpha_j}}\right)$ olsun. Ayrıca ω_1 ve ω_2 sırasıyla f_1 ve f_2 nin genişlemesi olsun. Bu takdirde $0 \leq t \leq 1$ için $f = tf_1 + (1-t)f_2$ lineer kombinasyonunun genişlemesi

$$\omega = \frac{t(1+\omega_2)(1+2z\cos\alpha_2+z^2)\omega_1 + (1-t)(1+\omega_1)(1+2z\cos\alpha_1+z^2)\omega_2}{t(1+\omega_2)(1+2z\cos\alpha_2+z^2) + (1-t)(1+\omega_1)(1+2z\cos\alpha_1+z^2)} \quad (4.11)$$

dir.

İspat. $f = tf_1 + (1-t)f_2 = th_1 + (1-t)h_2 + \overline{tg_1 + (1-t)g_2}$ olduğundan

$$\omega = \frac{tg_1' + (1-t)g_2'}{th_1' + (1-t)h_2'} = \frac{t\omega_1 h_1' + (1-t)\omega_2 h_2'}{th_1' + (1-t)h_2'} \quad (4.12)$$

dir. $j = 1,2$ için $h_j + g_j = \frac{1}{2\sin\alpha_j} \log\left(\frac{1+z^{i\alpha_j}}{1+z^{-i\alpha_j}}\right)$ ve $\omega_j = \frac{g_j'}{h_j'}$ olduğundan

$$h_j'(z) = \frac{1}{\left(1+\omega_j(z)\right)\left(1+2z\cos\alpha_j+z^2\right)} \tag{4.13}$$

dir. (4.13), (4.12) de yerine yazılırsa (4.11) elde edilir. ■

Teorem 4.3.3. $j = 1,2$ ve $\alpha_j \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için $f_i = h_j + \overline{g_j} \in S_H$ normalize edilmiş harmonik fonksiyonlar ve $h_j + g_j = \frac{1}{2\sin\alpha_j}\log\left(\frac{1+z^{i\alpha_j}}{1+z^{-i\alpha_j}}\right)$ olsun. Bu takdirde $\omega_1 = \omega_2$ ise $0 \le t \le 1$ için $f = tf_1 + (1-t)f_2 \in S_H$ dır ve f imajiner eksen yönünde konvekstir.

İspat. Lemma 4.3.2 (4.11) de verilen ω genişlemesinde $\omega_1 = \omega_2$ olduğu kullanılırsa istenen sonuç elde edilir. ■

Teorem 4.3.4. $j = 1,2$ ve $\alpha_j \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için $f_i = h_j + \overline{g_j} \in S_H$ normalize edilmiş harmonik fonksiyonlar ve $h_j + g_j = \frac{1}{2\sin\alpha_j}\log\left(\frac{1+z^{i\alpha_j}}{1+z^{-i\alpha_j}}\right)$ olsun. $\alpha_1 = \alpha_2$ iken $0 \le t \le 1$ için $f = tf_1 + (1-t)f_2 \in S_H$ dır ve f imajiner eksen yönünde konvekstir.

İspat. Teorem 4.3.1 gereği f nin lokal yalınkat ve yön koruyan olduğunu göstermek yeterlidir. (4.11) de $\alpha_1 = \alpha_2$ alınırsa

$$\omega = \frac{t\omega_1(1+\omega_2)+(1-t)\omega_2(1+\omega_1)}{t(1+\omega_2)+(1-t)(1+\omega_1)} = \frac{t\omega_1+(1-t)\omega_2+\omega_1\omega_2}{(1-t)\omega_1+t\omega_2+1} \tag{4.14}$$

elde edilir. Buradan

$$I := |(1-t)\omega_1 + t\omega_2 + 1|^2 - |t\omega_1 + (1-t)\omega_2 + \omega_1\omega_2|^2$$
$$= 1 + 2t(1-|\omega_1|^2)\mathrm{Re}\{\omega_2\} + 2(1-t)(1-|\omega_2|^2)\mathrm{Re}\{\omega_1\}$$
$$+(1-2t)(|\omega_1|^2 - |\omega_2|^2) - |\omega_1|^2|\omega_2|^2$$

olsun. $j = 1,2$ için $\omega_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ olarak alınırsa

$$I = 1 + 2t(1-\rho_1^2)\rho_2\cos\theta_2 + 2(1-t)(1-\rho_2^2)\rho_1\cos\theta_1 + (1-2t)(\rho_1^2 - \rho_2^2) - \rho_1^2\rho_2^2$$
$$\geq 1 - 2t(1-\rho_1^2)\rho_2 - 2(1-t)(1-\rho_2^2)\rho_1 + (1-2t)(\rho_1^2 - \rho_2^2) - \rho_1^2\rho_2^2$$
$$= (1-\rho_2^2)(1-\rho_1)^2 + 2t(\rho_1 - \rho_2)[1 + \rho_1\rho_2 - (\rho_1 + \rho_2)] := II.$$

yazılabilir. $j = 1,2$ ve $\rho_j \in [0,1)$ için $0 < 1 + \rho_1\rho_2 - (\rho_1 + \rho_2) \leq 1$ dır. Buradan $\rho_1 - \rho_2 \geq 0$ alınırsa

$$I \geq II \geq (1-\rho_2^2)(1-\rho_1)^2 > 0$$

bulunur. $\rho_1 - \rho_2 < 0$ alınırsa

$$I \geq II \geq (1-\rho_2^2)(1-\rho_1)^2 + 2(\rho_1 - \rho_2)[1 + \rho_1\rho_2 - (\rho_1 + \rho_2)]$$
$$= (1-\rho_1^2)(1-\rho_2)^2 > 0$$

olduğu görülür. Böylece $I \geq II > 0$ olduğundan $|\omega| < 1$ dır. Buradan f lokal yalınkat ve yön koruyandır. ■

Lemma 4.3.5. $a \in (-1,0) \cup (0,1), t \in (0,1)$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ olsun. Bu takdirde $a(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$ için

$$(\mathbf{1}) \quad |a(2t-1) + 1| > |a(2t-1) + 1 + 2at(1-t)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)|; \qquad (4.15)$$

$$(\mathbf{2}) \; |a(2t-1) + 1 + at(1-t)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)|$$

$$> |(at+1)t\cos\alpha_2 + (1-t)(at+1-a)\cos\alpha_1| \qquad (4.16)$$

olur.

İspat. (1) $a \in (-1,0) \cup (0,1)$ ve $t \in (0,1)$ için $a(2t-1)+1 > 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla sadece aşağıdaki eşitsizlik ispatlanmalıdır:

$$a(2t-1)+1 > a(2t-1)+1+2at(1-t)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) > -[a(2t-1)+1].$$

Buradan

$$0 > at(1-t)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) > -[a(2t-1)+1] \qquad (4.17)$$

elde edilir. İlk olarak $\alpha_1, \alpha_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için $a(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$ dır. Böylece $a(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) < 0$ yazılabilir. Dolayısıyla $t \in (0,1)$ için

$$0 > at(1-t)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) \qquad (4.18)$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi (4.17) deki ikinci eşitsizliğin ispatı iki durumda incelenecektir:

Durum 1: $a \in (0,1)$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için $a(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$ dır. Böylece $-1 < \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 < 0$ olur. Dolayısıyla $t \in (0,1)$ için

$$at(1-t)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) > -at(1-t) > -[a(2t-1)+1] \qquad (4.19)$$

elde edilir. Buradaki son eşitsizlik $t \in (0,1)$ ve $a \in (0,1)$ için $a(t^2 + t - 1) > -1$ olduğundan sağlanır.

Durum 2: $a \in (-1,0)$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için $a(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$ dır. Böylece, $0 < \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 < 1$ olur. Dolayısıyla $t \in (0,1)$ için

$$at(1-t)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) > at(1-t) > -[a(2t-1)+1] \qquad (4.20)$$

sağlanır. Buradaki son eşitsizlik $t \in (0,1)$ ve $a \in (-1,0)$ için $a(-t^2 + 3t - 1) > -1$ olduğundan sağlanır. Böylece (4.19) ve (4.20) eşitsizlikleri ile (4.17) deki ikinci eşitsizlik elde edilir.

(2) Eğer $a(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$ ise $a \in (-1,0) \cup (0,1), t \in (0,1)$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için (4.17) eşitsizliği kullanılarak $a(2t-1) + 1 + at(1-t)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) > 0$ elde edilir. Dolayısıyla (4.16) da verilen eşitsizlik aşağıdaki eşitsizliğe denktir:

$$\begin{aligned} &a(2t-1) + 1 + at(1-t)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) \\ &> (at+1)t\cos\alpha_2 + (1-t)(at+1-a)\cos\alpha_1 \\ &> -[a(2t-1) + 1 + at(1-t)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)]. \end{aligned} \qquad (4.21)$$

Şimdi,

$$f(a,t) \coloneqq a(2t-1)+1+at(1-t)(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2) \\ -[(at+1)t\cos\alpha_2+(1-t)(at+1-a)\cos\alpha_1]$$

$$=(1-a)(1-\cos\alpha_1)+t[(1+a)(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)+2a(1-\cos\alpha_1)]$$

olsun. Buradan

$$\frac{\partial f(a,t)}{\partial a}=-(1-\cos\alpha_1)+t[\cos\alpha_1-\cos\alpha_2+2(1-\cos\alpha_1)];$$

$$\frac{\partial f(a,t)}{\partial t}=(1+a)(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)+2a(1-\cos\alpha_1)$$

olduğu görülür.

$$\frac{\partial f(a,t)}{\partial a}=0 \text{ ve } \frac{\partial f(a,t)}{\partial t}=0$$

olsun. Bu takdirde

$$a=a_0=\frac{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}{2-(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)} \text{ ve } t=t_0=\frac{1-\cos\alpha_1}{2-(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)}$$

elde edilir. Böylece

$$f(a,t) \geq f(a_0,t_0) = \frac{2(1-\cos\alpha_1)(1-\cos\alpha_2)}{2-(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)} > 0 \qquad (4.22)$$

olduğu açıktır. (4.22) eşitsizliği (4.21) deki ilk eşitsizliği verir. Şimdi

$$I \coloneqq (at+1)t\cos\alpha_2 + (1-t)(at+1-a)\cos\alpha_1 + a(2t-1) + 1 + at(1-t)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$
$$= [a(2t-1)+1][1+\cos\alpha_1 - t(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)] \qquad (4.23)$$

olsun. $\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 > 0$ ise

$$I > [a(2t-1)+1][1+\cos\alpha_1 - (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)]$$
$$= [a(2t-1)+1](1+\cos\alpha_2) > 0 \qquad (4.24)$$

elde edilir. $\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 < 0$ için

$$I > [a(2t-1)+1](1+\cos\alpha_1) > 0 \qquad (4.25)$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.24) ve (4.25) eşitsizlikleri $I > 0$ olduğunu gösterir. Buradan (4.21) deki ikinci eşitsizlik de ispatlanır. ■

Teorem 4.3.6. $j = 1,2$ ve $\alpha_j \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için $f_i = h_j + \overline{g_j} \in S_H$ normalize edilmiş harmonik fonksiyonlar ve $h_j + g_j = \frac{1}{2\sin\alpha_j}\log\left(\frac{1+z^{i\alpha_j}}{1+z^{-i\alpha_j}}\right)$ olsun. $a \in (-1,1)$ için

$\omega_1(z) = z$, $\omega_2(z) = \frac{z+a}{1+az}$ ve $a(\alpha_1 - \alpha_2) \geq 0$ ise $0 < t < 1$ için $f = tf_1 + (1-t)f_2 \in S_H$ dır ve f imajiner eksen yönünde konvekstir.

İspat. Teorem 4.3.1 gereği $|\omega| < 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak $a(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$ durumu ele alınsın. $a = 0$ alınırsa $\omega_1(z) = \omega_2(z) = z$ olur ve Teorem 4.3.3 gereği $f \in S_H$ dır ve f imajiner eksen yönünde konvekstir. Eğer $\alpha_1 = \alpha_2$ alınırsa Teorem 4.3.4 gereği $f \in S_H$ dır ve f imajiner eksen yönünde konvekstir. Şimdi $a(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$ olsun. (4.11) de $\omega_1(z) = z$ ve $\omega_2(z) = \frac{z+a}{1+az}$ yazılırsa

$$\omega = \frac{t\left(1+\frac{z+a}{1+az}\right)(1+2z\cos\alpha_2+z^2)z + (1-t)(1+z)(1+2z\cos\alpha_1+z^2)\frac{z+a}{1+az}}{t\left(1+\frac{z+a}{1+az}\right)(1+2z\cos\alpha_2+z^2) + (1-t)(1+z)(1+2z\cos\alpha_1+z^2)}$$

$$= \frac{t(1+a)(1+2z\cos\alpha_2+z^2)z + (1-t)(1+2z\cos\alpha_1+z^2)(z+a)}{t(1+a)(1+2z\cos\alpha_2+z^2) + (1-t)(1+2z\cos\alpha_1+z^2)(1+az)}$$

$$= \frac{p(z)}{p^*(z)}$$

elde edilir. Buradan

$$p(z) = (at+1)z^3 + [2t(1+a)\cos\alpha_2 + 2(1-t)\cos\alpha_1 + a(1-t)]z^2 + [1+at+2a(1-t)\cos\alpha_1]z + a(1-t)$$

$$\coloneqq a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$$

ve

$$p^*(z) = a(1-t)z^3 + [1+at+2a(1-t)\cos\alpha_1]z^2 + [2t(1+a)\cos\alpha_2 + 2(1-t)\cos\alpha_1 + a(1-t)]z + (at+1)$$

$$= z^3\overline{p\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

dır. Böylece p nin sıfırı z_0 ve $z_0 \neq 0$ olmak üzere p^* ın sıfırı $\frac{1}{\bar{z}_0}$ dır ve

$$\omega(z) = \frac{(z+A)(z+B)(z+C)}{(1+\bar{A}z)(1+\bar{B}z)(1+\bar{C}z)}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbb{E}$ de $|\omega| < 1$ olduğunu göstermek için $|A| \leq 1$, $|B| \leq 1$ ve $|C| \leq 1$ olduğunu ve bu modüllerden en az birinin kesin olarak birden küçük olduğunu göstermek yeterlidir. Her $a \in (-1,0) \cup (0,1)$ ve $t \in (0,1)$ için $|a_3| = at + 1 > |a_0| = |a(1-t)|$ olduğundan p ye Cohn kuralı uygulanabilir. Böylece

$$p_1(z) = \frac{a_3 p(z) - a_0 p^*(z)}{z} = (1+a)\widetilde{p_1}(z)$$

ve

$$\widetilde{p_1}(z) = [a(2t-1)+1]z^2 + [2(1-t)(at+1-a)\cos\alpha_1 + 2t(at+1)\cos\alpha_2]z + a(2t-1) + 1 + 2at(1-t)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

$$:= b_2 z^2 + b_1 z + b_0$$

olmak üzere p_1 in tüm sıfırlarının birim çember üzerinde ve içinde olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 4.3.5 gereği $|b_2| > |b_0|$ dır. Dolayısıyla $\widetilde{p_1}$ ya tekrar Cohn kuralı uygulanabilir. Buradan

$$p_2(z) = \frac{b_2\widetilde{p_1}(z) - b_0\widetilde{p_1}^*(z)}{z} = -4at(1-t)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\widetilde{p_2}(z)$$

ve

$$\widetilde{p_2}(z) = [a(2t-1) + 1 + at(1-t)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)]z + (at+1)t\cos\alpha_2$$

$$+(1-t)(at+1-a)\cos\alpha_1$$

$$\coloneqq c_1 z + c_0$$

olmak üzere p_2 nin tüm sıfırlarının birim çember üzerinde ve içinde olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 4.3.5 gereği $|c_1| > |c_0|$ dır. Böylece $\widetilde{p_2}, p_2, \widetilde{p_1}$ ve p_1 in tüm sıfırları birim çember içerisinde bulunur. Dolayısıyla $|\omega| < 1$ olduğu görülür. ■

Örnek 4.3.7. $j = 1,2$ ve $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ için $h_j + g_j = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$ olsun. $\omega_1(z) = \frac{g_1'(z)}{h_1'(z)} = z$ alınırsa

$$h_1(z) = \frac{1}{4}\log\frac{(1+z)^2}{1+z^2} + \frac{1}{2}\arctan z,$$

$$g_1(z) = -\frac{1}{4}\log\frac{(1+z)^2}{1+z^2} + \frac{1}{2}\arctan z$$

elde edilir. Ayrıca $\omega_2(z) = \frac{g_2'(z)}{h_2'(z)} = -z^2$ alınırsa

$$h_2(z) = \frac{1}{4}\log\frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2}\arctan z\,,$$

$$g_2(z) = -\frac{1}{4}\log\frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2}\arctan z$$

elde edilir. Teorem 4.3.4 gereği $0 < t < 1$ için $f = tf_1 + (1-t)f_2$ lineer kombinasyonu yalınkattır ve imajiner eksen yönünde konvekstir.

4.4. Şerit Dönüşümlerinin Yatay Kesmelerinin Lineer Kombinasyonu

Bu bölümde $j = 1,2$ ve $\alpha_j \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için $\vartheta_j(z) = \frac{1}{2i\sin\alpha_j}\log\left(\frac{1+z^{i\alpha_j}}{1+z^{-i\alpha_j}}\right)$ asimetrik şerit dönüşümlerinin çeşitli genişlemelerle yatay olarak kesilmesiyle elde edilen harmonik dönüşümlerin lineer kombinasyonları incelenmiştir.

Teorem 4.4.1. $j = 1,2$ ve $\alpha_j \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için $f_i = h_j + \overline{g_j} \in S_H$ normalize edilmiş harmonik fonksiyonlar ve $h_j - g_j = \frac{1}{2i\sin\alpha_j}\log\left(\frac{1+z^{i\alpha_j}}{1+z^{-i\alpha_j}}\right)$ olsun. $0 \le t \le 1$ için $f = tf_1 + (1-t)f_2$ lineer kombinasyonu lokal yalınkat ve yön koruyan ise $f \in S_H$ dır ve f reel eksen yönünde konvekstir.

İspat. Kesme teoremi gereği $f = tf_1 + (1-t)f_2 \in S_H$ lineer kombinasyonunun reel eksen yönünde konveks olduğunu göstermek için $F = t(h_1 - g_1) + (1-t)(h_2 - g_2)$ analitik fonksiyonunun reel eksen yönünde konveks olduğunu göstermek gerekir. $\varphi(z) = \frac{z}{1-z^2}$ alınırsa

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zF'(z)}{\varphi(z)}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{z[t(h_1'-g_1')+(1-t)(h_2'-g_2')]}{\varphi(z)}\right)$$
$$= t\mathrm{Re}\left(\frac{1-z^2}{(1+ze^{i\alpha_1})(1+ze^{-i\alpha_1})}\right)+(1-t)\mathrm{Re}\left(\frac{1-z^2}{(1+ze^{i\alpha_2})(1+ze^{-i\alpha_2})}\right)$$

elde edilir. Teorem 4.3.1 in ispatında $K_j(z)=\frac{1-z^2}{(1+ze^{i\alpha_j})(1+ze^{-i\alpha_j})}$ olmak üzere her $z\in\mathbb{E}$ için $\mathrm{Re}[K_j(z)]>0$ olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla her $z\in\mathbb{E}$ için

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zF'(z)}{\varphi(z)}\right) = tRe[K_1(z)]+(1-t)Re[K_2(z)]>0$$

olduğu görülür. Böylece Lemma 3.2.9 gereği F nin reel eksen yönünde konveks olduğu görülür. ■

Lemma 4.4.2. $j=1,2$ ve $\alpha_j\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ için $f_i=h_j+\overline{g_j}\in S_H$ normalize edilmiş harmonik fonksiyonlar ve $h_j-g_j=\frac{1}{2i\sin\alpha_j}\log\left(\frac{1+z^{i\alpha_j}}{1+z^{-i\alpha_j}}\right)$ olsun. Ayrıca ω_1 ve ω_2 sırasıyla f_1 ve f_2 nin genişlemesi olsun. Bu takdirde $0\le t\le 1$ için $f=tf_1+(1-t)f_2$ lineer kombinasyonunun genişlemesi

$$\omega=\frac{t\omega_1(1-\omega_2)(1+2z\cos\gamma_2+z^2)+(1-t)\omega_2(1-\omega_1)(1+2z\cos\gamma_1+z^2)}{t(1-\omega_2)(1+2z\cos\gamma_2+z^2)+(1-t)(1-\omega_1)(1+2z\cos\gamma_1+z^2)} \qquad (4.26)$$

dir.

İspat. $f=tf_1+(1-t)f_2=th_1+(1-t)h_2+\overline{tg_1+(1-t)g_2}$ olduğundan f nin genişlemesi

$$\omega=\frac{tg_1'+(1-t)g_2'}{th_1'+(1-t)h_2'}=\frac{t\omega_1h_1'+(1-t)\omega_2h_2'}{th_1'+(1-t)h_2'} \qquad (4.27)$$

dır. $h_j-g_j=\frac{1}{2i\sin\alpha_j}\log\left(\frac{1+z^{i\alpha_j}}{1+z^{-i\alpha_j}}\right)$ ve $\omega_j=g_j'/h_j'$ $(j=1,2)$ olduğundan

$$h_j' = \frac{1}{\left(1+\omega_j(z)\right)\left(1+2z\cos\alpha_j+z^2\right)}$$

elde edilir. h_j' (4.27) de yerine yazılarak (4.26) elde edilir. ■

Teorem 4.4.3. $j = 1,2$ ve $\alpha_j \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için $f_i = h_j + \overline{g_j} \in S_H$ normalize edilmiş harmonik fonksiyonlar ve $h_j - g_j = \frac{1}{2i\sin\alpha_j}\log\left(\frac{1+z^{i\alpha_j}}{1+z^{-i\alpha_j}}\right)$ olsun. $\alpha_1 = \alpha_2$ iken $0 \le t \le 1$ için $f = tf_1 + (1-t)f_2 \in S_H$ dır ve f reel eksen yönünde konvekstir.

İspat. Teorem 4.4.1 gereği f nin lokal yalınkat ve yön koruyan olduğunu göstermek yeterlidir. (4.26) denkleminde $\alpha_1 = \alpha_2$ yazılarak

$$\omega = \frac{t\omega_1(1-\omega_2)+(1-t)\omega_2(1-\omega_1)}{t(1-\omega_2)+(1-t)(1-\omega_1)} = \frac{t\omega_1+(1-t)\omega_2-\omega_1\omega_2}{(t-1)\omega_1-t\omega_2+1}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} I :&= |(t-1)\omega_1 - t\omega_2 + 1|^2 - |t\omega_1 + (1-t)\omega_2 - \omega_1\omega_2|^2 \\ &= 1 + 2t(|\omega_1|^2 - 1)\mathrm{Re}(\omega_2) + 2(t-1)(1-|\omega_2|^2)\mathrm{Re}(\omega_1) \\ &+ (1-2t)(|\omega_1|^2 - |\omega_2|^2) - |\omega_1|^2|\omega_2|^2 \end{aligned}$$

ve $\omega_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ $(j = 1,2)$ yazılarak

$$\begin{aligned} I &= 1 - 2t(1-\rho_1^2)\rho_2\cos\theta_2 + 2(t-1)(1-\rho_2^2)\rho_1\cos\theta_1 + (1-2t)(\rho_1^2-\rho_2^2) - \rho_1^2\rho_2^2 \\ &\ge 1 - 2t(1-\rho_1^2)\rho_2 - 2(t-1)(1-\rho_2^2)\rho_1 + (1-2t)(\rho_1^2-\rho_2^2) - \rho_1^2\rho_2^2 \\ &= (1-\rho_2^2)(1-\rho_1)^2 + 2t(\rho_1-\rho_2)[1+\rho_1\rho_2-(\rho_1+\rho_2)] := II \end{aligned}$$

olduğu görülür. $j = 1,2$ ve $\rho_j \in [0,1)$ için $1+\rho_1\rho_2-(\rho_1+\rho_2) > 0$ olduğu kolayca görülebilir. Aslında $j = 1,2$ ve $\rho_j \in [0,1)$ için $0 < 1+\rho_1\rho_2-(\rho_1+\rho_2) \le 1$ dir. Eğer $\rho_1 - \rho_2 \ge 0$ ise

$$I \geq II \geq (1-\rho_2^2)(1-\rho_1)^2 > 0$$

olduğu görülür. Ayrıca, eğer $\rho_1 - \rho_2 < 0$ ise

$$\begin{aligned} I \geq II &\geq (1-\rho_2^2)(1-\rho_1)^2 + 2(\rho_1-\rho_2)[1+\rho_1\rho_2-(\rho_1+\rho_2)] \\ &= (1-\rho_2^2)(1-\rho_1)^2 > 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $I \geq II > 0$ dır. Böylece $|\omega| < 1$ olur. Buradan da f nin lokal yalınkat ve yön koruyan olduğu ispatlanır. ■

Örnek 4.4.4. $j = 1,2$ ve $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ için $h_j(z) - g_j(z) = \frac{-i\sqrt{3}}{2}\log\left(\frac{1+ze^{i\frac{2\pi}{3}}}{1+ze^{-i\frac{2\pi}{3}}}\right)$ olsun. $\omega_1(z) = \frac{g_1'(z)}{h_1'(z)} = z^2$ alınırsa

$$h_1(z) = \frac{1}{6}\ln(z+1) - \frac{1}{2}\ln(z-1) + \frac{1}{6}\ln(1-z+z^2) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}z - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

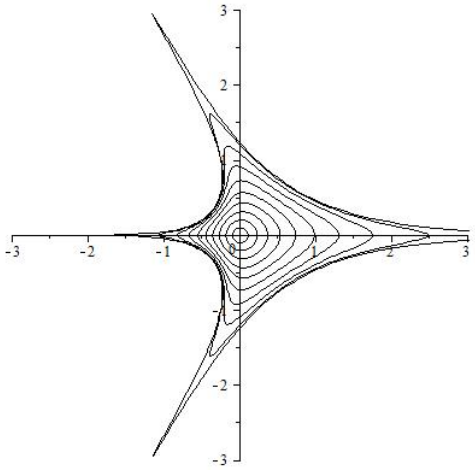
$$g_1(z) = \frac{1}{6}\ln(z+1) - \frac{1}{2}\ln(z-1) + \frac{1}{6}\ln(1-z+z^2) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}z - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

elde edilir. Ayrıca $\omega_2(z) = \frac{g_2'(z)}{h_2'(z)} = -z$ alınırsa

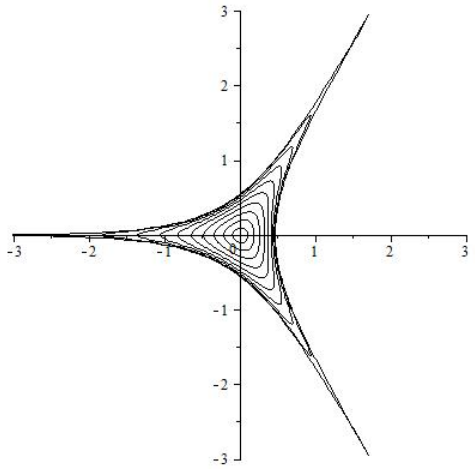
$$h_2(z) = \frac{1}{3}\ln(z+1) - \frac{1}{6}\ln(1-z+z^2) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}z - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$g_2(z) = \frac{1}{3}\ln(z+1) - \frac{1}{6}\ln(1-z+z^2) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}z - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

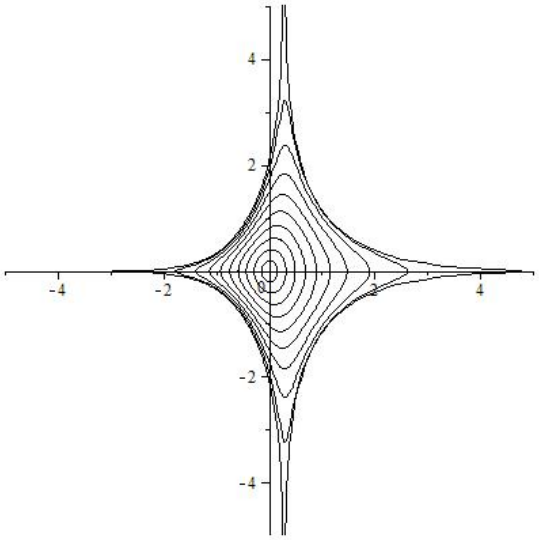
elde edilir. Teorem 4.4.3 gereği $0 \leq t \leq 1$ için $f = tf_1 + (1-t)f_2$ lineer kombinasyonu yalınkattır ve reel eksen yönünde konvekstir. $t = 0, \frac{1}{2}$ ve 1 için f nin $\mathbb{E}$ yi resmettiği bölgeler Şekil 4.1, Şekil 4.2 ve Şekil 4.3 de verilmiştir.



Şekil 4.1. $t = 0$ için f nin $\mathbb{E}$ yi resmettiği bölge.



Şekil 4.2. $t = \frac{1}{2}$ için f nin $\mathbb{E}$ yi resmettiği bölge.



Şekil 4.3. $t = 1$ için f nin $\mathbb{E}$ yi resmettiği bölge.

5. SONUÇ

Bu tezde, görüntü kümesi bir yönde (reel eksen veya imajiner eksen yönünde) konveks olan yalınkat harmonik fonksiyonların lineer kombinasyonlarının yine yalınkat ve bir yönde konveks olma koşullarını araştıran çalışmalar yer almaktadır.

Tezin ikinci bölümünde, tezde kullanılacak temel tanım ve teoremler verilmiştir. Tezin üçüncü bölümü iki alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, Clunie ve Sheil-Small tarafından verilen kesme teoremi verilmiştir. İkinci alt bölümde ise Dorff (2012) un $\mathbb{E}$ de harmonik ve yalınkat f_1 ve f_2 fonksiyonları için f lineer kombinasyonunun yalınkat ve imajiner eksen yönünde konveks olması için elde ettiği yeter koşullara yer verilmiştir. Yine aynı çalışmada başka hangi koşullar altında f lineer kombinasyonunun yalınkat ve imajiner eksen yönünde konveks olabileceği açık problemi verilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde ise dört alt bölüm bulunmaktadır. Birinci alt bölümde, Wang ve ark. (2013) tarafından yapılan makale incelenmiştir. Bu çalışmada harmonik yalınkat dönüşümlerin lineer kombinasyonlarının yalınkat ve reel eksen yönünde konveks olabilmesi için yeter koşullar elde edilmiştir. İkinci alt bölümde, Kumar ve ark. (2016) tarafından yapılan makale ele alınmıştır. Bu çalışmada, $\alpha \in [-1,1]$ olmak üzere $F_\alpha = h_\alpha + g_\alpha = \frac{z(1-\alpha z)}{(1-z^2)}$ analitik fonksiyonunun verilen $\omega = \frac{g_{\alpha'}}{h_{\alpha'}}$ genişlemesi altında dikey kesimi ile elde edilen $f_\alpha = h_\alpha + \overline{g_\alpha}$ harmonik yalınkat dönüşümlerinin lineer kombinasyonları incelenmiştir. Farklı ω_i ve α_i seçimleri ile lineer kombinasyonun yalınkat ve imajiner eksen yönünde konveks olması için yeterli koşullar elde edilmiştir. Üçüncü alt bölümde, Long ve Dorff (2018) tarafından yapılan çalışma ele alınmıştır. Bu çalışmada $j = 1,2$ ve $\alpha_j \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için $\vartheta_j(z) = \frac{1}{2i \sin \alpha_j} \log\left(\frac{1+z^{i\alpha_j}}{1+z^{-i\alpha_j}}\right)$ asimetrik dikey şerit dönüşümlerinin çeşitli genişlemelerle dikey olarak kesilmesiyle elde edilen harmonik dönüşümlerin lineer kombinasyonlarının yalınkat ve imajiner eksen yönünde konveks olması için yeter koşulları elde edilmiştir. Dördüncü alt bölümde, $j = 1,2$ ve $\alpha_j \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için $\vartheta_j(z) = \frac{1}{2i \sin \alpha_j} \log\left(\frac{1+z^{i\alpha_j}}{1+z^{-i\alpha_j}}\right)$ asimetrik şerit dönüşümlerinin çeşitli genişlemelerle yatay olarak kesilmesiyle elde edilen harmonik dönüşümlerin lineer kombinasyonlarının

yalınkat ve reel eksen yönünde konveks olmaları için yeter koşulları elde edilmiştir. Yapılacak yeni çalışmalarda, asimetrik şerit dönüşümlerinin farklı genişlemeleri alınarak elde edilecek harmonik dönüşümlerin lineer kombinasyonları incelenebilir.

KAYNAKLAR

Bieberbach, L. (1916). Über die koeffizienten derjenigen potenzreihen. *Welcheeine Schlicte abbildurg des einheitskreises vermitteln, Sitzungiber, Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. KL.*, 940-955.

Branges, L. (1985). A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta Mathematica*, 154, 137-152.

Clunie, J., & Sheil-Small T. (1984). Harmonic univalent functions. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae A*, 3-25.

Cohn, A. (1922). Uber die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise. *Mathematische Zeitschrift*, 14(1), 110-148.

Dorff, M. (2012). *Anamorphosis, Mapping Problems, and Harmonic Univalent Functions, Explorations in Complex Analysis: Math. Assoc. of America*, Inc.: Washington, DC, pp: 197-269.

Duren, P. (2004). *Harmonic mappings in the plane*. Cambridge University Press.

Goodman, A.W. (1983). Univalent Functions, Vols. I and II, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey, 556 pp.

Hayman, W.K. (1967). Research Problems in Function Theory. The Athlone Press, London.

Hengartner, W., & Schober, G. (1987). Univalent harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 299 (1), 1-31. 89

Koebe, P. (1907). Über die üniformisierung beliebeger analytischer kruven. *Nach. Ges. Wiss. Gottingen*, 191-210.

Kumar, R., Gupta, S., & Singh, S. (2016). Linear combinations of univalent harmonic mappings convex in the direction of the imaginary axis. Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 39(2), 751–763.

Lewy, H. (1936). On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42, 689-692.

Long, B-Y, & Dorff, M. (2018). Linear combinations of a class of harmonic univalent mapings, *Filomat,* 32(9), 3111-3121.

MacGregor, T.H. (1969). The univalence of a linear combination of convex mappings, J. London Math. Soc., 44, 210-212.

Pommerenke, C. (1963). On starlike and close-to-convex functions, *Proc. London Math. Soc.*, 13(3), 290-304.

Pommerenke, C. (1975). Univalent Functions: Vandenhoeck& Ruprecht: Göttingen, 376 pp.

Özdemir, Ö. (2019). Konveks harmonik dönüşümlerin konvolüsyonları [Doktora tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi].

Riemann, B. (1851). Grundlagen für eine allgemeine thoerie der functionen einer veranderlichen complexen Grosse [PhD thesis, University of Göttingen].

Wang, Z.G, Liu, Z.H. & Li, Y.C. (2013). On the linear combinations of harmonic univalent mappings. J. Math. Anal. Appl., 400(2), 452–459.