T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ve FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

TEKNOLOJİK ORTAMDA CEBİRSEL İFADELERİN FARKLI TEMSİLLERİNİN ANLAMLANDIRILMASI SÜRECİNDE ÖĞRETMEN ADAYLARININ ENSTRÜMANTAL OLUŞUMLARININ İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

Naz MARDANİ
ORCID: 0000-0001-9944-3466

BURSA - 2025

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ve FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

TEKNOLOJİK ORTAMDA CEBİRSEL İFADELERİN FARKLI TEMSİLLERİNİN ANLAMLANDIRILMASI SÜRECİNDE ÖĞRETMEN ADAYLARININ ENSTRÜMANTAL OLUŞUMLARININ İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

Naz MARDANİ
ORCID: 0000-0001-9944-3466

Danışman
Prof. Dr. Menekşe Seden TAPAN-BROUTIN

BURSA - 2025

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim.

Naz MARDANİ
01.09.2025

TEZ YAZIM KILAVUZUNA UYGUNLUK ONAYI

"Teknolojik Ortamda Cebirsel İfadelerin Farklı Temsillerinin Anlamlandırılması Sürecinde Öğretmen Adaylarının Enstrümantal Oluşumlarının İncelenmesi" adlı doktora tezi Bursa Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan	Danışman
Naz MARDANİ	Prof. Dr. Menekşe Seden TAPAN-BROUTIN

Matematik ve Fen Bilimleri Ana Bilim Dalı Başkanı
Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ

JÜRİ ONAY SAYFASI

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı'nda 811952005 numara ile kayıtlı Naz Mardani'nin hazırladığı "Teknolojik Ortamda Cebirsel İfadelerin Farklı Temsillerinin Anlamlandırılması Sürecinde Öğretmen Adaylarınn Enstrümantal Oluşumlarının İncelenmesi" konulu Doktora çalışması ile ilgili tez savunma sınavı, 01/09/2025 günü 10:30-13:00 saatleri arasında yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin Bir öğe seçin. olduğuna **oy birliği** ile karar verilmiştir.

Sınav Komisyonu Başkanı
Prof. Dr. Menekşe Seden TAPAN-BROUTINI
Bursa Uludağ Üniversitesi
WoS ResearcherID: W-2281-2017
Scopus Author ID: 58136910000
ORCID: 0000-0002-1860-852X

Üye
Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ
Bursa Uludağ Üniversitesi
WoS ResearcherID: A-1802-2016
Scopus Author ID: 6506973222
ORCID: 0000-0001-8619-8334

Üye
Doç.Dr. Fatma KAZANOĞLU
Bursa Uludağ Üniversitesi
WoS ResearcherID: I-4271-2018
Scopus Author ID: 57103716100
ORCID: 0000-0001-6426-2753

Üye
Prof. Dr. Recai AKKAYA
Abant İzzet Baysal Üniversitesi
WoS ResearcherID: HIG-8379-2022
Scopus Author ID: 26657841000
ORCID: 0000-0001-5369-7612

Üye
Doç. Dr. Burcu DURMAZ
Süleyman Demirel Üniversitesi
WoS ResearcherID: I-1683-2015
Scopus Author ID: 57221957129
ORCID: 0000-0002-2788-434X

ÖN SÖZ

Bu tez araştırmasının her aşamasında değerli görüşleri ile bana rehberlik eden, bilgisini ve tecrübesini benden esirgemeyen; öğrencisi olmaktan gurur ve onur duyduğum danışman hocam; sayın Prof. Dr. Menekşe Seden TAPAN BROUTİN'e, tez izleme komitesinde ve aynı zamanda tez savunma jürisinde değerli katkıları ile yer alan Sayın Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ'a, tez izleme komitesi üyesi olarak ayrıntılı incelemeleri sayesinde tezimi daha iyi bir düzeye taşımama yardımcı olan ve aynı zamanda tez savunma jürimde yer alan Doç. Dr. Fatma KAZANOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez savunma jürimde yer alan kıymetli jüri üyeleri Sayın Prof. Dr. Recai AKKAYA ve Sayın Doç. Dr. Burcu DURMAZ tezimi baştan sona okuyup inceledikleri ve değerli önerilerini benimle paylaşarak tezime katkı sağladıkları için teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında bana inanan, güvenen, yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen sevgili eşime ve canım kızıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Naz MARDANİ

ÖZET

Yazar Adı ve Soyadı	Naz MARDANİ
Üniversite	Bursa Uludağ Üniversitesi
Enstitü	Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Ana Bilim Dalı	Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı
Bilim Dalı	Matematik Eğitimi
Tezin Niteliği	Doktora Tezi
Sayfa Sayısı	XX + 290
Mezuniyet Tarihi	01/09/2025
Tez Danışmanı	Prof. Dr. Menekşe Seden TAPAN-BROUTIN

TEKNOLOJİK ORTAMDA CEBİRSEL İFADELERİN FARKLI TEMSİLLERİNİN ANLAMLANDIRILMASI SÜRECİNDE ÖĞRETMEN ADAYLARININ ENSTRÜMANTAL OLUŞUMLARININ İNCELENMESİ

Cebir öğretiminde teknolojinin kullanımı, öğrenme süreci üzerinde olumlu etkiler yaratmakta ve bu nedenle alanyazında önemli bir yer edinmektedir. Ancak, teknolojinin hangi aşamalarda ve ne ölçüde kullanılacağına karar vermek çoğu zaman öğretmenler ve araştırmacılar için bir zorluk oluşturmaktadır. Enstrümantal yaklaşım, bu zorluğun aşılmasında öğretmenlere ve araştırmacılara kuramsal bir çerçeve sunmaktadır. Bu çalışma, öğretmen adaylarının teknolojik ortamda cebirsel ifadeleri temsil etme süreçlerini ve bu süreçlerde ortaya çıkan enstrümantal oluşumlarını incelemeyi amaçlamaktadır. Bu kapsamda, kağıt-kalem ve dinamik geometri ortamlarında cebirsel ifadelerin yazımı ve grafiklerinin çizimine yönelik geliştirilen enstrümanlı eylem şemalarına odaklanarak, öğretmen adaylarının matematik öğretimine yönelik teknolojik araçların öğretim sürecindeki katkısı değerlendirilmiştir. Araştırma, aynı zamanda öğretmen adaylarının cebirsel kavramları anlamlandırma süreçlerine ve teknoloji kullanımının bu süreç üzerindeki etkilerine ilişkin önemli bulgular sunmayı hedeflemektedir. Aynı zamanda, öğretmen adaylarının sınıf ortamında cebirsel ifadelerin yazımı ve grafiklerinin çizimi için programın kazanımlarına uygun teknoloji destekli etkinlikleri içeren bir öğretim deneyimi tasarlanmıştır. Bu tez çalışması, bu öğretim süreci sonrasında öğretmen adaylarının elde edilen enstrümanlı eylem şemalarını ortaya koymaktadır. Çalışmada kullanılan teknolojik araç, dinamik geometri yazılımı Cabri-Geometri yazılımıdır. Bursa Uludağ Üniversitesi ilköğretim matematik öğretmenliği programı 2. sınıfta eğitim gören öğretmen adayları ile gerçekleştirilen çalışmada, cebir, cebirsel ifadeler ve grafikleri ile ilgili farklı türde aktiviteler yazılı ve sözlü görüşmeler, çalışma yaprakları, ses kayıtları ve ekran kayıtları kullanılmıştır. Çalışmadan elde edilen veriler içerik analiz yöntemi ile analiz edilmektedir. Bunu gerçekleştirmek için öncelikle derslerde çalışma yapraklarından elde edilen ses kayıtları yazıya dökülmüştür, yazılı görüşmeler ve ek olarak, seçilen öğrencilerle yapılan sözlü mülakatlarda kaydedilen ses kayıtları ile karşılaştırılarak dökümü yapılmıştır. Daha sonra elde edilen veriler ile kategorilere ayrılmış ve enstrümantal yaklaşımın bileşenleri doğrultusunda temalar

oluşturulmuştur. Oluşturulan temalar enstrümanlı eylem şemalarının daha net anlaşılabilmesi adına gerek görüldüğü yerlerde birleştirilip ya da ayrıştırılmıştır ve elde edilen son temalar araştırmanın amacı doğrultusunda yorumlanmaktadır.

Anahtar Sözcükler: Cebir öğretimi, Enstrümantal yaklaşım, öğretmen adayları, teknoloji destekli öğretim, temsiller.

ABSTRACT

Name and Surname	Naz MARDANİ
University	Bursa Uludag University
Institution	Institute of Educational Sciences
Field	Mathematics and Science Education
Branch	Mathematics Education
Degree Awarded	PhD
Page Number	XX + 290
Degree Date	01 / 09 / 2025
Supervisor	Prof. Dr. Menekşe Seden TAPAN-BROUTIN

EXAMINING THE INSTRUMENTAL FORMATIONS OF PRE-SERVICE TEACHERS IN THE PROCESS OF MAKING SENSE OF DIFFERENT REPRESENTATIONS OF ALGEBRAIC EXPRESSIONS WITHIN A TECHNOLOGICAL ENVIRONMENT

The integration of technology into algebra instruction has been shown to positively impact the learning process and has therefore gained considerable attention in the literature. However, deciding at which stages and to what extent technology should be incorporated often presents a challenge for both teachers and researchers. The instrumental approach offers a theoretical framework that helps address this challenge by providing insights into the relationship between users and technological tools. This study aims to examine the instrumental formations of pre-service teachers as they engage in representing algebraic expressions within a technological environment. Specifically, it focuses on the instrumental action schemes developed during the writing and graphing of algebraic expressions in both paper-and-pencil and dynamic geometry environments. By doing so, the study evaluates the contribution of technological tools to the mathematics teaching process. Additionally, the research seeks to reveal important findings concerning the meaning-making processes of algebraic concepts by pre-service teachers and the influence of technology on these processes. To support this goal, a teaching experiment was designed that includes technology-supported activities aligned with curriculum objectives, aiming to support the writing and graphing of algebraic expressions in classroom settings. This dissertation presents the instrumental action schemes that emerged after the implementation of this instructional process. The technological tool used in the study is the dynamic geometry software Cabri-Geometry. The study was conducted with second-year students enrolled in the elementary mathematics teacher education program at Bursa Uludağ University. A variety of algebra-related activities were implemented using written and oral interviews, worksheets, audio recordings, and screen recordings. The collected data were analyzed using content analysis. First, the audio recordings obtained from classroom sessions were transcribed. These transcripts were then compared and cross-referenced with written interviews and additional oral interviews conducted with selected participants. The data were subsequently categorized, and

themes were generated based on the components of the instrumental approach. In order to improve the clarity and interpretability of the instrumental action schemes, the themes were either merged or separated where necessary. The final themes were interpreted in line with the objectives of the study.

Keywords: Algebra teaching, Instrumental approach, Pre-service teachers, Technology assisted teaching, Representations

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK ..... **i**
TEZ YAZIM KILAVUZUNA UYGUNLUK ONAYI ..... **ii**
JÜRİ ONAY SAYFASI ..... **iii**
ÖN SÖZ ..... **iv**
ÖZET ..... **v**
ABSTRACT ..... **vii**
İÇİNDEKİLER ..... **ix**
TABLOLAR LİSTESİ ..... **xiii**
ŞEKİLLER LİSTESİ ..... **xv**
KISALTMALAR LİSTESİ ..... **xx**
1. BÖLÜM
GİRİŞ
1.1. Problemin Durumu 1
1.2. Araştırmanın Amacı 3
1.3. Konu, Kapsam ve Literatür Özeti 4
1.4. Araştırmanın Önemi 6
1.5. Araştırmanın Varsayımları 9
1.6. Araştırmanın Sınırlılıkları 9
1.7. Tanımlar 9
2. BÖLÜM
KAVRAMSAL ÇERÇEVE
2.1. Matematik Eğitiminde Teknoloji Kullanımı 12
2.2. Cebir Öğretimi 13
2.2.1. Cebirsel Düşünme 14
2.2.2. Teknoloji Destekli Cebir Öğretimi 15
2.2.3. Cebirsel İfadeler ve İlköğretim Matematik Öğretim Programındaki Yeri 16
2.2.4. Çoklu Temsiller 17
2.2.5. Dinamik Geometri Ortamları 21
2.2.6. Cabri-Geometri 22
2.3. Enstrümantal Yaklaşım 25
2.3.1. Enstrümantal Oluşum 26

2.3.2. Araç-Artefakt İlişkisi 27
2.3.3. Araç-Enstrüman İlişkisi 29
2.3.4. Enstrümantalizasyon 31
2.3.5. Enstrümantasyon 31
2.3.6. Enstrümantal Oluşumda Öğretmen Rolü 32
2.3.7. Bilginin Yapılandırmasında Teknik ve Şemalar 33
2.4. Yapılandırmacı Yaklaşım 35
2.4.1. RBC+C Soyutlama Modeli 36
2.5. İlgili Yayın ve Araştırmalar 37
3. BÖLÜM
YÖNTEM
3.1. Araştırma Modeli 46
3.1.1. Araştırma Deseni: Öğretim Deneyi 46
3.2. Araştırma Süreci 50
3.3. Araştırmacının Rolü 51
3.4. Çalışma Ortamı ve Grubu 52
3.5. veri toplama araçları 53
3.5.1. Yazılı Görüşme Formu 56
3.5.2. Sözlü Görüşme Formu 56
3.5.3. Ses kayıtları 57
3.5.4. Ekran Kayıtları 57
3.5.5. Çalışma Yaprakları 58
3.5.5.1. Birinci Çalışma Yaprağı 58
3.5.5.2. İkinci Çalışma Yaprağı 59
3.5.5.3. Üçüncü Çalışma Yaprağı 60
3.5.5.4. Dördüncü Çalışma Yaprağı 61
3.6. Verilerin Toplanması ve Çözümlenmesi 64
3.7. Pilot Uygulama, Ders Planları ve Materyallerin Tasarımı 64
3.8. Asıl Uygulama 65
3.9. Verilerin Geçerliği ve Güvenirliği 66
4. BÖLÜM
BULGULAR VE YORUM
4.1. Çalışma Yapraklarında Kullanılan Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şemaları 67

4.1.1. Doğrusal Denklemler Çalışma Yaprağında Kullanılan Enstrümanlı Teknikler 68
4.1.1.1. Birinci Grubun Doğrusal Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması . 69
4.1.1.2. İkinci Grubun Doğrusal Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması 80
4.1.1.3. Üçüncü Grubun Doğrusal Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması 92
4.1.2. İkinci Dereceden Parabol Çalışma Yaprağında Kullanılan Enstrümanlı Teknikler 102
4.1.2.1. Birinci Grubun İkinci Dereceden Parabol Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması 103
4.1.2.2. İkinci Grubun İkinci Dereceden Parabol Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması 114
4.1.2.3. Üçüncü Grubun İkinci Dereceden Parabol Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması 124
4.1.3. Üçüncü dereceden Polinomlar Çalışma Yaprağında Kullanılan Enstrümanlı Teknikler 135
4.1.3.1. Birinci Grubun Üçüncü dereceden Polinomlar Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması 136
4.1.3.2. İkinci Grubun Üçüncü dereceden Polinomlar Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması 149
4.1.3.3. Üçüncü Grubun Üçüncü dereceden Polinomlar Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması 164
4.1.4. Ters Fonksiyonlar Çalışma Yaprağında Kullanılan Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması 177

4.1.4.1. Birinci Grubun Ters Fonksiyonlar Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması 178
4.1.4.2. İkinci Grubun Ters Fonksiyonlar Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması 189
4.14.3. Üçüncü Grubun Ters Fonksiyonlar Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması 198
4.2. Öğretmen Adaylarının Kağıt-Kalem ve Cabri-Geometri Ortamında Fonksiyonların Farklı Temsillerinin Anlamlandırılma Sürecine Yönelik Enstrümanlı Eylem Şemalarında Ortaya Çıkan Kategoriler ve Temalar 207
4.3. Uygulama öncesi ve sonrası öğretmen adayı görüşme formları ve uygulama sonrası yüz yüze görüşmeler ile ilgili bulgular 238
4.4. Alt Problemlere İlişkin Buguların Sentezi 244
5. BÖLÜM
SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER
5.1. Çalışmanın Alt Problemlerine İlişkin Sonuçlar ve Tartışma 247
5.2. Araştırmanın Sonuçlarına Yönelik Öneriler 253
5.2.1. Öğretimin Niteliğini Artırmaya Yönelik Öneriler 253
5.2.2. Gelecekte Yapılacak Araştırmalar İçin Öneriler 254

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo *Sayfa*

1 Katılımcıların grup ve cinsiyetlere göre sayıları 53
2 Veri toplama araçları kullanım amacı ve kullanım zamanı 63
3 Birinci grubun doğrusal denklemler çalıma yaprağına yönelik Kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 69
4 Birinci grubun doğrusal denklemler çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 70
5 İkinci grubun doğrusal denklemler çalıma yaprağına yönelik kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 80
6 İknci grubun doğrusal denklemler çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 81
7 Üçüncü grubun doğrusal denklemler çalıma yaprağına yönelik kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 92
8 Üçüncü grubun doğrusal denklemler çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 93
9 Birinci grubun ikinci dereceden denklemler çalıma yaprağına yönelik kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 103
10 Birinci grubun ikinci dereceden denklemler çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 104
11 İkinci grubun ikinci dereceden denklemler çalıma yaprağına yönelik kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 114
12 İkinci grubun ikinci dereceden denklemler çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 115
13 Üçücü grubun ikinci dereceden denklemler çalıma yaprağına yönelik kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 124
14 Üçüncü grubun ikinci dereceden denklemler çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 125
15 Birinci grubun Üçüncü Dereceden Polinomlar çalıma yaprağına yönelik Kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 137
16 Birinci grubun Üçüncü Dereceden Polinomlar çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 137
17 İkinci grubun üçüncü dereceden polinomlar çalıma yaprağına yönelik Kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 150
18 İkinci grubun üçüncü dereceden polinomlar çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 150
19 Üçüncü grubun üçüncü dereceden polinomlar çalıma yaprağına yönelik Kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 164
20 Üçüncü grubun üçüncü dereceden polinom denklemler çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 165
21 Birinci grubun Ters fonksiyonlar çalıma yaprağına yönelik kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 179
22 Birinci grubun Ters fonksiyonlar çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 180
23 İkinci grubun Ters fonksiyonlar çalıma yaprağına yönelik kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 189
24 İkinci grubun Ters fonksiyonlar çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 190
25 Üçüncü grubun Ters fonksiyonlar çalıma yaprağına yönelik kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 198
26 Üçüncü grubun Ters fonksiyonlar çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler 199
27 Öğretmen adaylarının doğrusal denklemler çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bileşenleri 210
28 Öğretmen adaylarının ikinci dereceden parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bileşenleri 215

29 Öğretmen adaylarının üçüncü dereceden poinmlar çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bileşenleri 221
30 Öğretmen adaylarının ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bileşenleri 227

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil *Sayfa*

1 İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler 19
2 Janvier (1987)'in Temsillerle İlgili Sunduğu Yıldız Modeli 20
3 Cabri II Plus Yazılımının Ara Yüzü 22
4 Enstrümantal Oluşum Süreci (Trouche, 2004). 27
5 Artefaktan Enstrümana Geçiş Örneği 30
6 Artefakt- Enstrüman İlişkisi Yönüyle Enstrümantal Oluşum (Guin &Trouche,1998) 30
7 Şema, teknik, jest ve işlevsel sabitler arasındaki ilişkiler 34
8 Form maddelerinin oluşturulması 54
9 Ö1'in doğrusal denklemler çalışma yaprağında doğrunun tanımına yönelik yanıtı 71
10 Ö2'nin doğrusal denklemler çalışma yaprağında doğrunun tanımına yönelik yanıtı 72
11 Birinci grubun doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik ekran kaydından bir kesit 75
12 Birinci grubun doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik ekran kaydından ikinci kesit 76
13 Birinci grubun doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde hesap makinesi kullanımına ilişkin ekran kaydından bir kesit. 77
14 Birinci grubun doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde hesap makinesi ve ölçüm aktarım araçlarının kullanımına ilişkin ekran kaydından bir kesit. 77
15 Ö2'nin elde ettiği sonuçlar nelerdir sorusuna ilişkin doğrusal denklemler çalışma yaprağından bir kesit 78
16 Ö1 ve Ö2'nin doğrusal denklemler çalışma yaprağına yönelik çözüm süreçlerinin şematik gösterimi 79
17 Ö3'ün doğrusal denklemler çalışma yaprağında koordinat sisteminin tanımına yönelik yanıtı 82
18 Ö4'ün doğrusal denklemler çalışma yaprağında koordinat sisteminin tanımına yönelik yanıtı 82
19 Ö3'ün doğrusal denklemler çalışma yaprağında Analitik geometride doğrunun tanımına yönelik yanıtı 83
20 Ö4'ün doğrusal denklemler çalışma yaprağında Analitik geometride doğrunun tanımına yönelik yanıtı 83
21 Ö4'ün doğrusal denklemler çalışma yaprağından bir kesiti 84
22 Ö3'ün doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde yeni eksenler ve açı ölçme araçlarının kullanımına ilişkin ekran kaydından bir kesit. 86
23 Ö4'ün doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde yeni eksenler ve açı ölçme araçlarının kullanımına ilişkin ekran kaydından bir kesit. 86
24 Ö4'ün doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde belirlediği noktanın konumuna ilişkin ekran kaydından bir kesit. 87
25 Ö4'ün doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 88
26 Ö3'ün doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde hesap makinesi aracının doğru kullanımına ilişkin ekran kaydından bir kesit. 89
27 Ö3'ün doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde hesap makinesi aracının doğru kullanımına ilişkin ekran kaydından ikinci kesit. 89
28 Ö4'ün elde ettiği sonuçlar nelerdir sorusuna ilişkin doğrusal denkemler çalışma yaprağından bir kesit 90
29 Ö3 ve Ö4'ün doğrusal denklemler çalışma yaprağına yönelik çözüm süreçlerinin şematik gösterimi 91
30 Ö6'ün doğrusal denklemler çalışma yaprağında koordinat sisteminin tanımına yönelik yanıtı 94
31 Ö6'ün doğrusal denklemler çalışma yaprağında Analitik geometride doğrunun tanımına yönelik yanıtı 95
32 Ö6'nın doğrusal denklemler çalışma yaprağından sabit fonksiyon grafiğine ilişkin bir kesit 96
33 Ö5'in doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde başlangıç noktası belirleme ve iz araçlarının kullanımına ilişkin ekran kaydından bir kesit. 98
34 Ö6'nın doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde nokta belirleme ve dik doğru araçlarının kullanımına ilişkin ekran kaydından bir kesit. 99
35 Ö3 ve Ö4'ün doğrusal denklemler çalışma yaprağına yönelik çözüm süreçlerinin şematik gösterimi 101
36 Ö1'in ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında parabolün tanımına yönelik yanıtı 105
37 Ö2'nin ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında parabolün tanımına yönelik yanıtı 106

38 Ö1'in ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 2'ye yönelik yanıtı 106
39 Ö2'nin ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 2'ye yönelik yanıtı 107
40 Ö2'nin ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 5'e yönelik yanıtı 107
41 Cabri II Plus Yazılımının Ara Yüzü 108
42 Ö2'nin ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 6'ya yönelik yanıtı 108
43 Ö2'nin ikinci dereceden fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik soru 2'ye ilişkin ekran kaydından bir kesit. 110
44 Ö1'in ikinci dereceden fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 110
45 Ö1'in ikinci dereceden fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 111
46 Ö2'in ikinci dereceden fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik 112
47 Ö1 ve Ö2'nin ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağına yönelik çözüm süreçlerinin şematik gösterimi 113
48 Ö3'ün ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında parabolün tanımına yönelik yanıtı 116
49 Ö4'ün ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında parabolün tanımına yönelik yanıtı 116
50 Ö3'ün ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 4'e yönelik yanıtı 117
51 Ö4'ün ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 3'e yönelik yanıtı 118
52 Ö4'ün ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 5'e yönelik yanıtı 118
53 Ö4'ün ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 6'ya yönelik yanıtı 119
54 Ö3'ün parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde nokta belirleme aracının kullanımına ilişkin ekran kaydından bir kesit 121
55 Ö3'ün parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik ekran kaydından bir kesit. 122
56 Ö2 ve Ö4'ün ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağına yönelik çözüm süreçlerinin şematik gösterimi 123
57 Ö5'in ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 2'ye yönelik yanıtı 126
58 Ö6'nın ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 2'ye yönelik yanıtı 127
59 Ö5'in ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 3'e yönelik yanıtı 127
60 Ö6'nın ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 3'e yönelik yanıtı 127
61 Ö6'nın ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 4'e yönelik yanıtı 127
62 Ö5'in ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 6'ya yönelik yanıtı 128
63 Ö6'nın ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 6'ya yönelik yanıtı 128
64 Ö6'nın parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde ölçüm aktarım aracının kullanımına ilişkin ekran kaydından bir kesit. 129
65 Ö6'nın parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde ölçüm aktarım aracının kullanımına ilişkin ekran kaydından bir kesit 130
66 Ö6'nın parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 130
67 Ö6'nın parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik denklemin çözümünde yanlış koordinat seçimine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 131
68 Ö6'nın parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik denklemin çözümünde doğru koordinat seçimine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 131
69 Ö5'in ikinci dereceden fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik soru 6'ya ilişkin ekran kaydından bir kesit. 133
70 Ö5 ve Ö6'nın ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağına yönelik çözüm süreçlerinin şematik gösterimi 134
71 Ö1'in üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağında soru 4'e yönelik yanıtı 140
72 Ö2'nin üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağında soru 4'e yönelik yanıtı 140
73 Ö1'nin üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağında soru 6'ya yönelik yanıtı 140
74 Ö2'nin üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağında soru 6'ya yönelik yanıtı 141
75 Ö1'nin üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağında soru 7'ye yönelik ilk çözüm denemesi 141
76 Ö1'nin üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağında soru 7'ye yönelik ikinci çözüm denemesi 141
77 Ö2'nin üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağında soru 7'ye yönelik yanıtı 142
78 Ö1'in üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 144
79 Ö2'nin üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 144
80 Ö1'in üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde araç kullanımıyla ilgili teknik hatalar yapıldığına ilişkin ekran kaydından bir kesit. 145

81 Ö2'nin üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağında katsayıların grafiğe etkisine yönelik ekran kaydından bir kesit. 145
82 Ö1'in üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik polinomun genel formunun garfiğine ilişkin ekran kaydından bir kesit 147
83 Ö1 ve Ö2'nin üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik çözüm süreçlerinin şematik gösterimi 148
84 Ö3'ünüçüncü.derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik polinom tanımına ilişkin yanıtı .. 152
85 Ö4'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik polinom tanımına ilişkin yanıtı . 152
86 Ö3'ün üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik polinom katsayılarına ilişkin yanıtı 152
87 Ö4'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik polinom katsayılarına ilişkin yanıtı 152
88 Ö3'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 153
89 Ö4'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 154
90 Ö3'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 154
91 Ö4'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 155
92 Ö3'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik soru 4'e ilişkin ekran kaydından bir kesit 156
93 Ö4'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik soru 4'e ilişkin ekran kaydından bir kesit. 156
94 Ö3'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik soru 5'e ilişkin yanıtı. 157
95 Ö4'ün üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik soru 5'e ilişkin yanıtı. 157
96 Ö4'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik soru 5'e ilişkin ekran kaydından bir kesit. 158
97 Ö3'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik soru 6'ya ilişkin yanıtı. 158
98 Ö4'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik soru 6'ya ilişkin ekran kaydından bir kesit. 159
99 Ö3'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik parametre özelliklerine ilişkin bir kesit 160
100 Ö4'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik parametre özelliklerine ilişkin bir kesit 160
101 Ö3'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik yedinci soruya ilişkin ekran kaydından bir kesit. 161
102 Ö3 ve Ö4'ün üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik çözüm süreçlerinin şematik gösterimi 163
103 Ö5'in üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik polinom tanımına ilişkin yanıtı ... 166
104 Ö6'nın üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik polinom tanımına ilişkin yanıtı . 166
105 Ö6'nın üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik üçüncü soruya ilişkin yanıtı 167
106 Ö5'in üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik dördüncü soruya ilişkin yanıtı 167
107 Ö5'in üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik beşinci soruya ilişkin yanıtı 168
108 Ö6'nın üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik beşinci soruya ilişkin yanıtı 168
109 Ö6'nın üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik altıncı soruya ilişkin yanıtı 169
110 Ö6'nın üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik altıncı soruya ilişkin yanıtı 170
111 Ö5'in üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik dördüncü soruya ilişkin ekran kaydından bir kesit 172
112 Ö6'nın üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik dördüncü soruya ilişkin ekran kaydından bir kesit. 172
113 Ö5'inn üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik altıncı soruya ilişkin ekran kaydından bir kesit. 173
114 Ö6'nın üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik altıncı soruya ilişkin ekran kaydından bir kesit. 173
115 Ö6'nın üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik beşinci soruya ilişkin ekran kaydından bir kesit. 174
116 Ö5'in üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik yedinci soruya ilişkin ekran kaydından bir kesit. 175

117 Ö5 ve Ö6'nn üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik çözüm süreçlerinin şematik gösterimi 176
118 Ö1'in ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik temel alan sorularına ilişkin yanıtları. 181
119 Ö2'nin ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik temel alan sorularına ilişkin yanıtları. 182
120 Ö1'in ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik doğrusal fonksiyona ilişkin yanıtı. 182
121 Ö2'nin ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik doğrusal fonksiyona ilişkin yanıtı. 182
122 Ö2'nin ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik hatalı grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 183
123 Ö2'nin ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.ı 184
124 Ö1'in ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik parabolün tersini alma çözümüne ilişkin yanıtı. 184
125 Ö1'in ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik hatalı parabol grafiği çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 185
126 Ö2'nin ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik parabol tersi grafiği çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 186
127 Ö1 ve Ö2'nin ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik enstrümantasyon süreci 188
128 Ö3'ün ters fonksiyonlar çalışma yaprağında temel tanım sorularına ilişkin yanıtı 192
129 Ö4'ün ters fonksiyonlar çalışma yaprağında temel tanım sorularına ilişkin yanıtı 192
130 Ö3'ün ters fonksiyonlar çalışma yaprağında doğrusal fonksiyonun tersine yönelik yanıtı 193
131 Ö3'ün ters fonksiyonlar çalışma yaprağında doğrusal fonksiyonun tersine yönelik yanıtı 193
132 ÖÖ3'ün ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik doğrusal fonksiyonun tersine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 194
133 Ö3'ün ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik doğrusal fonksiyonun tersine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 194
134 Ö3'ün ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik parabol fonksiyonun tersine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 195
135 Ö4'ün ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik parabol fonksiyonun tersine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 195
136 Ö6'nın ters fonksiyonlar çalışma yaprağında doğrusal fonksiyonun tersine yönelik yanıtı 197
137 Ö5'in ters fonksiyonlar çalışma yaprağında temel tanım sorularına ilişkin yanıtı 200
138 Ö6'nın ters fonksiyonlar çalışma yaprağında temel tanım sorularına ilişkin yanıtı 201
139 Ö6'nın ters fonksiyonlar çalışma yaprağında doğrusal fonksiyonun tersine yönelik yanıtı 201
140 Ö6'nın ters fonksiyonlar çalışma yaprağında doğrusal fonksiyonun tersine yönelik yanıtı 201
141 Ö5'in ters fonksiyonlar çalışma yaprağında doğrusal fonksiyonun tersine yönelik yanıtı 202
142 Ö5'in ters fonksiyonlar çalışma yaprağında doğrusal fonksiyonun tersine yönelik yanıtı 202
143 Ö5'in ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik doğrusal fonksiyonun tersine ilişkin ekran kaydından bir kesit 204
144 Ö6'nın ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik doğrusal fonksiyonun tersine ilişkin ekran kaydından bir kesit. 204
145 Ö5 ve Ö6'nın ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik enstrümantasyon süreci 206
146 Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında doğrusal denklemler çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının sentezi 211
147 Öğretmen adaylarının Cabri-Geometri ortamında doğrusal denklemler çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının sentezi 212
148 Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında ikinci dereceden parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının sentezi 218
149 Öğretmen adaylarının Cabri-Geometri ortamında ikinci dereceden parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının sentezi 218
150 Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının sentezi 224
151 Öğretmen adaylarının Cabri-Geometri ortamında üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının sentezi 225
152 Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının sentezi 230
153 Öğretmen adaylarının Cabri-Geometri ortamında ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının sentezi 230
154 Öğretmen Adaylarının Kağıt-Kalem Ortamında Geliştirdikleri Kategoriler ve Bu Kategorilere Dayalı Tematik Yapının Sentezi 233

155 Öğretmen Adaylarının Cabri-Geometri Ortamında Geliştirdikleri Kategoriler ve Bu Kategorilere Dayalı Tematik Yapının Sentezi 236

KISALTMALAR LİSTESİ

DGY : Dinamik Geometri Yazılımı

DGCG : Dinamik Geometri Cabri-Geometri

OECD : Ekonomik İşbirliği ve Kalkınma Örgütü (Organisation for Economic Co-operation and Development)

MEB : Milli Eğitim Bakanlığı

NCTM : Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics)

NAEP : Ulusal Eğitim İlerleme Değerlendirmesi (National Assessment of Educational Progress)

1. BÖLÜM
GİRİŞ

Bu bölümde araştırmanın problem durumuna, amacı ve önemine, varsayımlarına, sınırlılıklarına ve konu, kapsam ve literatür özetine yer verilmiştir.

1.1. Problemin Durumu

Cebir, özellikle ortaokul düzeyinde soyutluk düzeyi yüksek bir öğrenme alanı olarak öğrencilerin anlam kurma süreçlerinde önemli güçlükler barındırmaktadır. Değişken, eşitlik ve sembolik gösterimlerin kavranmasında yaşanan kalıcı zorluklar, çok sayıda araştırmada vurgulanmıştır (Kieran, 1992; Kaput, 1999; MacGregor & Stacey, 1993; Ersoy & Erbaş, 1998; Dede & Argün, 2003). Öğrencilerin değişken kavramını içselleştirmede, bilinmeyen ile sayı arasındaki farkı ayırt etmede ve eşitlik ile fonksiyonel düşünme gibi temel cebirsel kavramları yapılandırmada zorlandıkları görülmektedir. Bu nedenle cebir, müfredatta soyutluğu en yüksek konulardan biri olarak tanımlanmakta ve öğrencilerin öğrenme güçlükleri açısından kritik bir alan olarak değerlendirilmektedir (Kaput, 1999; Gelibolu, 2009; Taşlıbeyaz, 2010). Söz konusu güçlüklerin temel nedenlerinden biri, farklı temsiller arasındaki geçişlerde ortaya çıkan kavramsal kopukluklardır. Sözel, sembolik, tablo ve grafik temsiller arasındaki ilişkilere hâkim olamayan öğrencilerin bu temsiller arasında geçiş yaparken daha da zorlandıkları ve kavramları bütünlüklü bir şekilde anlamakta güçlük çektikleri görülmektedir. Duval'ın (2006) çoklu temsiller kuramı ve Ainsworth'un (1999) çoklu temsiller çerçevesi, bu dönüşümlerin merkezî bir role sahip olduğunu vurgulamakta ve cebirdeki yaygın hataların temsiller arası geçişlerin aksamasından kaynaklandığını göstermektedir. Bu bağlamda, soyut kavramların somutlaştırılmasına yönelik alternatif yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır.

Teknolojinin hızla gelişmesiyle birlikte eğitim sisteminde de farklı yaklaşımlar öne çıkmaktadır. Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi (NCTM), matematik öğretiminde teknolojinin gerekliliğini vurgulamış (NCTM, 2000), OECD raporlarında ise ülkelerin eğitimin kalitesini artırmak için bilişim teknolojisi yatırımlarını artırdıkları belirtilmiştir (MEB, 2015). Bu doğrultuda, matematik öğretiminde teknolojiyi merkeze alan yenilikçi uygulamaların önemi giderek artmaktadır (Harris, 2001). Cebirdeki soyut kavramların somutlaştırılmasında geometri, önemli bir köprü işlevi görmekte ve fonksiyonlar, grafikler ile cebirsel ifadelerin öğretiminde kavramsal anlamayı güçlendirmektedir. Dinamik geometri yazılımları, öğrencilerin çoklu temsiller arasında daha kolay geçiş yapmalarına olanak tanımaktadır. Örneğin Cabri-Geometri yazılımı, sunduğu sürükleme, ölçüm ve eşzamanlı grafik-sembolik bağlantılar aracılığıyla öğrencilerin matematiksel kavramları görsel olarak keşfetmelerini

sağlamaktadır (Jones, 2020). Ayrıca, yapılan meta-analizler Cabri 3D kullanımının öğrencilerin mekânsal görselleştirme becerilerini artırdığını ortaya koymuştur (Miller vd., 2018). Cabri-Geometri, cebirsel ifadeleri, sözel temsilleri ve grafiksel temsilleri eşzamanlı olarak yapılandırmayı gerektirmesi, öğrencinin kavramları adım adım inşa etmesine yardımcı olması ve kullanım düzeyi arttıkça geometri öğretiminde yeni stratejiler geliştirmelerini desteklemesi bakımından diğer yazılımlardan ayrılmakta ve onu farklı kılmaktadır (Trouche, 2005).

Bu noktada enstrümantal oluşum teorisi (Vérillon & Rabardel, 1995), araçların öğrenme sürecinde enstrümana dönüşümünü ve öğrencilerin araç kullanımıyla geliştirdikleri bilişsel şemaların öğrenmeye katkısını açıklamaktadır. Bu kuram çerçevesinde, öğrencilerin cebirsel ifadelerin yazımı ve grafik çiziminde geliştirdikleri stratejiler analiz edilebilmektedir. Literatürde dinamik geometri yazılımlarının öğrenci başarısı, kavramsal anlamaları ve geometri öğretimi üzerindeki etkileri üzerine birçok çalışma bulunmaktadır (Ruthven vd., 2009; Artigue, 2002; Haspekian, 2005; Godwin & Sutherland, 2020; Ardıç & İşleyen, 2018; Ogbonnaya & Mushipe, 2020; Kösa & Karakuş, 2010). Ancak öğretmen adayları düzeyinde, enstrümantal oluşum çerçevesiyle cebir–geometri ilişkisini inceleyen çalışmalar sınırlı kalmaktadır. Öğretmen adaylarının gelecekteki mesleki yaşamlarında öğrencilerine aktaracakları öğretim stratejilerinin şekillenmesi açısından, Cabri-Geometri yazılımını kullanarak geliştirdikleri zihinsel şemaların incelenmesi önem arz etmektedir. Bu şemalar, kağıt–kalem ortamında belirlenen eylem şemalarından farklılık göstermekte olup, öğretmen adaylarının ileride öğrencilerine aktaracakları öğretim yöntemlerini şekillendirmesine yardımcı olacaktır. Böylelikle cebirsel ifadeler daha somut öğrenme deneyimlerine dönüşerek öğrencilerin kavramsal anlamalarının gelişmesine ve zihinsel yapılarının ilerleme kaydetmesine katkı sağlayacaktır.

Cebir ve geometri arasındaki ilişkinin kurulması, matematik öğretiminde daima önemli görülmüş; ancak bu konuda literatürde az sayıda çalışma olduğu belirtilmiştir. Öğretmenlerin bu ilişkiyi bilmesi ve kullanması, öğrencilerin öğrenme süreçlerini doğrudan etkilemektedir. MEB (2008, s.141) de matematik öğretmenlerinden, geometri ile diğer öğrenme alanları ve günlük hayat arasında ilişki kurarak üst düzey düşünme becerilerini geliştirmelerini beklemektedir. Bu nedenle öğretmen adaylarının cebir–geometri ilişkisine dair bilgi düzeylerinin belirlenmesi ve bu doğrultuda eğitim faaliyetlerinin planlanması önem arz etmektedir. İlgili çalışmalar incelendiğinde öğretmen adaylarına yönelik araştırmaların daha çok geometrik düşünme düzeyleri (Bal, 2012), geometrik kavramlara karşı tutumlar (Gürefe & Kan, 2013), çoklu temsiller incelenmesi (Bulut & Köroğlu, 2000), geometrik çizim becerileri (Paksu, 2013), bilgi erişim düzeyleri (Çetin & Dane, 2004), yeterlikler (Gürbüz & Durmuş,

2009; Durmuş, Olkun & Toluk, 2002) ve bilgisayar destekli uygulamalar (Çiftçi & Tatar, 2014; Ersoy, 2009; İpek, 2010; Açıkgül, 2012; Karadeniz & Akar, 2014) üzerinde yoğunlaştığı görülmektedir. Ancak geometriyi anlamada cebirle kurulan ilişkinin nitel bir bakış açısıyla derinlemesine incelendiği çalışmalara rastlanmamaktadır. Bu nedenle cebir ve geometri arasındaki geçiş basamaklarını ortaya koyacak bir yapının belirlenmesi, öğretmen adaylarının mesleki gelişimi ve öğrencilerin cebirsel kavramları sağlam temeller üzerinde öğrenebilmeleri açısından kritik öneme sahiptir.

Bu bağlamda, öğretmen adaylarının cebirsel ifadeleri farklı temsiller aracılığıyla yapılandırma süreçlerinin ve dinamik geometri yazılımlarının bu süreçte ortaya çıkardığı enstrümantal oluşumların incelenmesi önemli bir araştırma ihtiyacı olarak görülmektedir. Bu doğrultuda yürütülen çalışmada, öğretmen adaylarının kağıt–kalem ve dinamik geometri ortamlarında geliştirdikleri enstrümanlı eylem şemalarının karşılaştırmalı olarak analiz edilmesi amaçlanmıştır.

1.2. Araştırmanın Amacı

Araştırmanın amacına yönelik olarak aşağıda belirtilen sorulara cevap aranacaktır. Araştırma problemi: Dinamik geometri ve kağıt-kalem ortamında hazırlanmış öğretim modülünün, cebirsel ifadelerin farklı temsillerinin anlamlandırılması sürecinde öğretmen adaylarının enstrümantal oluşumları nasıldır?

1. Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında cebirsel ifadelerin yazımı için oluşturdukları enstrümanlı eylem şemaları nelerdir?
2. Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında cebirsel ifadelerin grafiklerinin çizimi için oluşturdukları enstrümanlı eylem şemaları nelerdir?
3. Öğretmen adaylarının dinamik geometri ortamında cebirsel ifadelerin cebirsel ifadelerin yazımı için oluşturdukları enstrümanlı eylem şemaları nelerdir?
4. Öğretmen adaylarının dinamik geometri ortamında cebirsel ifadelerin grafiklerinin çizimi için oluşturdukları enstrümanlı eylem şemaları nelerdir?
5. Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamı ve dinamik geometri ortamında cebirsel ifadelerin yazımı için oluşturdukları enstrümanlı eylem şemaları arasındaki farklılıklar nasıldır?
6. Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamı ve dinamik geometri ortamında cebirsel ifadelerin grafiklerinin çizimi için oluşturdukları enstrümanlı eylem şemaları arasındaki farklılıklar nasıldır?

Araştırmanın amacına yönelik olarak yukarıdaki belirtilen sorulara cevap aranmıştır. Bu sorulara yönelik çalışmanın ana hedefi, öğretmen adaylarının teknolojik ve kağıt-kalem ortamlarda cebirsel ifadeleri temsil etme süreçlerini anlamak, öğretmen adaylarının enstrümantal oluşumlarını incelemek ve Kağıt kalem ortamı ile dinamik geometri ortamında cebirsel ifadelerin yazımı ve grafiklerinin çizimi için öğretmen adaylarının oluşturdukları enstrümantal eylem şemalarını ortaya çıkarmaktır. Bu amaçlara yönelik odaklanan araştırma, öğretmen adaylarının matematik öğretimine nasıl hazırlandıklarını ve bu süreçte teknolojik araçların rolünü anlamak amacı taşımaktadır. Araştırma, öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamı ile dinamik geometri ortamında gerçekleştirdikleri temsiller arasındaki farklılıkları belirleyerek, matematik öğretimi için etkili stratejilerin geliştirilmesine katkı sağlamayı hedeflemektedir. Bu çerçevede, öğretmen adaylarının cebirsel kavramları nasıl anladıkları ve teknoloji kullanımının bu anlayışı nasıl etkilediği konularında değerli bilgiler sunmayı amaçlamaktadır. Bu araştırma, öğretmen adaylarının matematik öğretimindeki enstrümantal yetkinliklerini anlamak ve geliştirmek amacıyla önemli bir katkı sunmaktadır.

1.3. Konu, Kapsam ve Literatür Özeti

Bu çalışmada, Cabri-Geometri yazılımının kullanımının vurgulanması özgün bir yaklaşım sunmaktadır. Yazılımın sağladığı interaktif ortam, öğrencilere matematiksel kavramları keşfetme ve anlama fırsatı sunmaktadır (İlhan & Aslaner, 2020). Öğrencilerin eylem şemaları bu yazılım aracılığıyla geometri ve cebir arasındaki ilişkiyi nasıl kurduklarını anlamak için ortaya çıkarılmaktadır. Bu bulgular, matematik öğretiminde Cabri-Geometri yazılımının rolünü vurgulamakta ve kağıt-kalem ortamının eksikliklerini belirterek bu yazılımın önemini ortaya koymaktadır (Kükey, 2023). Literatürde, teknoloji destekli öğretimin cebir öğretiminde etkili olduğu ve soyut matematik kavramlarının somutlaştırılmasına katkıda bulunduğu belirtilmektedir (Musan, 2012). Özellikle tablo, grafik, formüller gibi matematiksel temsiller arasında teknoloji kullanılarak bağlantı kurulması daha kolaydır (Kaput, 1998). Cabri-Geometri yazılımı, çizim sürecinde enstrümanlı eylem şemalarını doğrudan cebirsel ifade, sözel temsil (menüler) ve grafik temsili birlikte yapılandırmayı gerektirmektedir (Trouche, 2005). Bu araştırma, öğrencilerin cebirsel ifadelerin yazımı ve grafik çizimine dair şemalarını ortaya koymak ve teknoloji destekli öğrenme ortamlarının öğrencilere sağladığı kolaylıkları incelemek açısından bir hayli önem taşımaktadır. Öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımlarını cebirsel ifadeler ve grafiklerin çizimi konularında kullanabilmeleri, matematik öğretiminde yenilikçi bir yaklaşım sunmaktadır.

Teknolojinin hızla geliştiği ve eğitim sisteminin içinde daha fazla yer bulduğu son dönemlerde öğretmenlere düşen sorumluluk ve görevler farklılaşmaktadır. Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi – National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) 21. yüzyıl için standartlarını "teknolojinin matematik eğitim ve öğretimi için gerekli olduğu" şeklinde oluşturmuştur (NCTM, 2000). Cebirsel ifadeler konusu müfredatta bir hayli soyut kalan önemli bir konu kabul edilmektedir (Kieran, 1992; Kaput, 1999; Gelibolu, 2009; Taşlıbeyaz, 2010). Yapılan çalışmalar incelendiğinde öğrencilerin değişken, eşitlik, bilinmeyen gibi cebir kavramlarını anlamada güçlük çektiklerini göstermektedir (MacGregor ve Stacey, 1993; Ersoy & Erbaş, 1998; Dede & Argün, 2003). İncelenen uluslararası çalışmalarda da cebirin önemine ve cebir öğretimi konusunda farklı stratejilere değinilmiş olmasından dolayı bu çalışmanın uluslararası bir değere sahip olması beklenmektedir (NCTM, 2000; NAEP, 2002).

Enstrümantal oluşum teorisi bağlamında yapılan araştırmalar, hem öğretmenlerin hem de öğrencilerin dijital teknolojileri içselleştirdiklerini ve bu süreçte geliştirdikleri enstrümantal şemaları ortaya koymaktadır. Bozkurt (2012), GeoGebra'nın ortaokul sınıflarına entegrasyon süreçlerini ele alırken öğretmenlerin bu teknolojileri etkili biçimde sınıf ortamına yansıtmada karşılaştıkları yapısal ve pedagojik zorluklara dikkat çekmiştir. Deniz (2016) tarafından yapılan çalışma, Sketchpad kullanımıyla doğru denklemler öğretiminde öğrencilerin karşılaştığı güçlükleri nasıl aştıklarını ve bu süreçte farklı enstrümantal teknikler geliştirdiklerini açık biçimde ortaya koymuştur. Ortaokul seviyesinde deneysel bir çalışma olan Dur (2016), tablet destekli dinamik geometri yazılımlarında sürükleme ve ölçme araçlarını kullanan öğrencilerin geliştirdiği dört farklı enstrümantal eylem şemasını sınıflandırmıştır. Ayrıca, Bozkurt ve Uygan (2020) tarafından gerçekleştirilen araştırmada, bir öğretmenin profesyonel enstrümantal oluşum süreci analiz edilerek, teknoloji kullanımında yaşanan pedagojik tıkanıklıklar ve bunlara karşı geliştirilen esneklik çözümler irdelenmiştir.

Bu çalışmalara ek olarak, literatürde enstrümantal oluşum teorisini geniş bağlamlarda ele alan güncel araştırmalar bulunmaktadır. Alqahtani ve Powell (2016), Virtual Math Teams with GeoGebra adlı işbirlikçi dinamik geometri ortamında öğretmenlerin teknolojiyi kavrama biçimini ve bu süreçte geometrik anlayışlarını derinleştirdiklerini göstermiştir. Bir başka örnek olarak, Ruiz-López (2018) geleceğin öğretmen adaylarıyla GeoGebra ortamında yürütülen vaka analizlerinde enstrümantal genesis sürecinin problem çözme becerileri üzerindeki etkisini analiz etmiş ve öğrencilerin farklı "dragging" tekniklerini benimsediklerini açıklamıştır. Ayrıca, Gregersen (2024) öğrencilerin GeoGebra kullanarak dinamik davranışları tahmin etme ve

gerekçelendirme süreçlerinde, "instrumented justification" kavramının kavramsal anlamayı nasıl desteklediğini incelemiştir.

Bu bağlamda özetlenecek olursa, alanyazın incelendiğinde enstrümantal oluşum teorisinin öğrencilerin kavramsal öğrenmelerinde güçlü bir çerçeve sunduğu görülmektedir. Cabri-Geometri, GeoGebra ve Sketchpad gibi dinamik geometri yazılımlarının yalnızca teknik bir araç olmanın ötesinde, öğrencilerin bilişsel süreçlerini dönüştüren ortamlar olduğu vurgulanmaktadır. Bu araştırma, öğretmen adaylarıyla yürütülmekte olup, onların cebirsel ifade ve grafik çizimlerine yönelik enstrümanlı eylem şemalarını ortaya koyarak katkı sağladığı düşünülmektedir.

1.4. Araştırmanın Önemi

İlgili literatür incelendiğinde öğretmen adaylarına yönelik geometri konusunda yapılan çalışmaların; van Hiele geometrik düşünme düzeyleri (Bal, 2012), geometrik kavramlara karşı tutumları (Gürefe ve Kan, 2013), uzaysal yeteneklerinin incelenmesi (Bulut ve Köroğlu, 2000), geometrik yapılara ilişkin çizim becerileri (Paksu, 2013), geometrik bilgilere erişi düzeyleri, geometrinin alt konularına ilişkin yeterlik düzeyleri (Gürbüz ve Durmuş, 2009; Durmuş, Olkun ve Toluk, 2002), dinamik geometri yazılımları ve bilgisayar destekli uygulamalar odaklı çalışmalar (Çiftçi ve Tatar, 2014; Ersoy, 2009; Açıkgül, 2012; Öz, 2012) gibi çeşitli alanlara yayıldığı görülmektedir. Ancak geometriyi anlamada cebirin ilişkisini nitel bir perspektifler derinlemesine inceleyen bir çalışmaya rastlanamamıştır. Bunun için öncelikli olarak bu iki alan arasında geçişin hangi basamaklar izlenerek sağlanacağını ortaya koyan bir yapının belirlenmesi önemlidir. Çalışmanın bu anlamda önemli olduğu düşünülmektedir. Bu eksikliklere paralel olarak, cebir alanındaki çalışmalara da bakıldığında farklı bir yoğunlaşma göze çarpmaktadır. Bu çalışmalara ek olarak özellikle Fransa kökenli araştırmacıların araç kullanımına yönelik çalışmalarının çoğunun cebir konularına yoğunlaştığı görülmektedir (Artigue, 2002; Drijvers & Trouche, 2008; Guin & Trouche, 2002, Rabardel, 2002; Trouche, 2004). Bu konu üzerine yapılan araştırmalarda genellikle yapılandırmacılık (Gürhan, 2015) ve gerçekçi matematik eğitimi (Kaylak, 2014) gibi öğrencinin zihinsel süreçlerinin gözlemlenmesinin oldukça zor olduğu teorik yapıların kullanıldığı görülmüştür. Bu teorik yapılar öğrencinin belirlenen konudaki zihinsel işlemlerini ve ortaya koyduğu şemaları açığa çıkarmakta yetersiz kalmıştır. Bu noktada, Verillon ve Rabardel'in (1995) ortaya attığı enstrümantal oluşum teorisi tıpkı Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şemaları gibi sağlam bir yapı ortaya koymaya yardımcı olabilir. Dolayısıyla, bu teorinin Türkiye'deki matematik eğitimi alanına uyarlanmasının önemi daha da artmaktadır. Buna ek olarak ülkemizde enstrümantal

yaklaşımı temel alan çalışmalarında azlığı düşünüldüğünde bizim için oldukça yeni olan bu teori ışığında öğrencilerin belirlenen konudaki şemalarını ortaya koymak bir hayli önem taşımaktadır. Çünkü enstrümantal yaklaşım araç kullanımının etkisiyle öğrenmenin nasıl şekillendiğini görmeyi sağlayacak bir bakış açısına sahiptir. Bu durum öğrencilerin cebirsel ifadelerin yazımı ve grafik çizimine dair şemalarını ortaya koyulması için ışık tutacaktır ancak teknoloji farklı şekillerde kullandığında öğeler üzerinde çok farklı performans sergilediğini görünmektedir (Kendal & Stacey, 1999). Bu noktada, araştırmamızın temel odak noktası olan Cabri-Geometri yazılımı öne çıkmaktadır.

Bu araştırmanın öne çıkan bir özelliği, Cabri-Geometri yazılımının kullanımının vurgulanmasıdır. Yazılımın sağladığı interaktif ortam, öğrencilere matematiksel kavramları keşfetme ve anlama fırsatı sunmaktadır (Jones, 2020). Araştırma, öğrencilerin bu yazılım aracılığıyla geometri ve cebir arasındaki ilişkiyi nasıl kurduklarını anlamak için eylem şemalarını ortaya çıkarmayı amaçlamaktadır. Elde edilen bulgular, matematik öğretiminde Cabri-Geometri yazılımının rolünü vurgulayacak ve kağıt-kalem ortamının eksikliklerini belirterek bu yazılımın önemini ortaya koyacaktır (Miller vd., 2018). Bu çalışma sonuçlarının, ortaokullardan üniversite seviyesine kadar olan eğitim kurumlarında cebir ve geometri arasındaki ilişkiyi anlamada etkili bir öğretim alternatifini destekleyebileceği ön görülmektedir. Bunun yanında, yazılımın eğitimdeki rolü sadece öğretim süreciyle sınırlı kalmayıp öğretmen adaylarının teknolojiyi nasıl kullandığına da ışık tutmaktadır.

Bu araştırma, Cabri-Geometri yazılımının kullanımıyla öğretmen adaylarının enstrümantal oluşumlarının incelemesine odaklanarak, matematik eğitimine yenilikçi bir bakış sunmaktadır. Gelişen teknolojiyle birlikte eğitimdeki dönüşümü vurgulayarak, öğretmenlerin teknolojiyi etkili bir şekilde kullanarak öğrencilere alternatif öğrenme yolları sunmalarının önemini vurgulamaktadır. Aynı zamanda, matematik öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımlarını cebirsel ifadeler ve grafiklerin çizimi konularında etkili bir şekilde nasıl kullanabileceğini inceleyerek, özgün bir yaklaşım sunmaktadır. Ayrıca, bu çalışma, dinamik geometri yazılımlarının öğrencilere soyut matematiksel kavramlarını daha somut ve görsel bir şekilde anlama fırsatı sunmaktadır. Bu bağlamda, çalışmanın eğitim politikalarıyla da doğrudan ilişkili olduğunu söylemek mümkündür. Bu çalışma kapsamında, Millî Eğitim Bakanlığı (MEB, 2018) tarafından da önemi vurgulanan eğitim sisteminde bilgisayar destekli yöntemler ele alınacaktır. Özellikle ortaokul düzeyinde, öğrencilerin soyut düşünmeye başladığı yaşlarda cebir öğretimine odaklanmanın önemini belirtmektedir. Bilgisayar destekli öğretimin, soyut kavramları somutlaştırma ve öğrencilere zenginleştirilmiş bir öğrenme ortamı sunma açısından cebir öğretiminde etkili bir araç olduğunu vurgulamaktadır. Ayrıca, araştırma, öğretmen

adaylarının yaşadığı zorlukları, teknoloji destekli öğretimin avantajlarını araştırmaktadır. Öte yandan, Cabri-Geometri yazılımının sahip olduğu farklı özellikler, çalışmayı literatürdeki diğer araştırmalardan ayırmaktadır. Diğer yandan, Cabri-Geometri yazılımı, diğer dinamik geometri yazılımlarından farklı olarak, çizim sürecinde enstrümanlı eylem şemaları doğrudan cebirsel ifade, sözel temsil (menüler) ve grafik temsili birlikte yapılandırmayı gerektirmektedir (Trouche, 2005). Literatürde, Cebir ve Geometri arasındaki geçişleri, çoklu temsiller arasındaki geçiş sürecindeki yaşantılar ile ilgili enstrümantal yaklaşım çerçevesinden inceleyen çalışmaya rastlanmamıştır. Bu bağlamda, temsiller arası geçişe yönelik kuramsal yaklaşımlar önem kazanmaktadır.

Janvier (1987), yıldız modeli ile yaptığı temsiller arası geçişi şematizasyon olarak tanımlamaktadır. Bir noktadan diğerine bir geçiş gerçekleşir. Örneğin; tablodan sözel tanımlamalara geçişte okuma eylemi gerçekleşir (Çıkla-Akkuş, 2004). Janvier (1998), yukarıda ifade edilen temsil modelinin yanında bir de doğrudan ve doğrudan olmayan geçişlerden bahsetmektedir. Doğrudan geçişler, bu geçiş arasında başka bir temsil modu kullanılmadan bir temsil modundan diğerine yapılabilir; örneğin, bir grafikten bir denklemin geçişi. Doğrudan olmayan geçişlerde, temsiller arası geçiş yapılırken farklı temsiller kullanılır; örneğin, grafikten denkleme geçişte tablonun kullanılması (Akyıldız & aktaş, 2022). Temsiller arası geçişin etkileri, öğretim materyalleri ve teknolojinin sağladığı imkanlarla daha da belirginleşmektedir. Cebir öğrenme/öğretme sürecinde öğretim materyalleri ile somut nesnelerin kullanılması, teknoloji destekli öğrenme ortamlarının oluşturulması ile çoklu temsillerden yararlanılması öğrencilerin cebir kavramlarını anlama, birbiriyle ilişkilendirebilme ve yapılandırma süreçlerini olumlu yönde etkilemektedir (Çıkla-Akkuş, 2004). Günümüzde hayatımızın her alanında yer alan teknoloji sayesinde zenginleştirilmiş bir öğrenme ortamı oluşturularak soyut ve anlaşılması güç kavramların öğrenilmesi kolaylaşabilmektedir. Çoklu temsilleri oluşturmada kolaylık ve etkinlik açısından oldukça önemli fırsatlara sahip olan teknoloji, öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinin genişletilmesinde önemli bir rol oynayabilmektedir (İpek & Baran, 2011). Özellikle tablo, grafik, formüller gibi matematiksel temsiller arasında teknoloji kullanılarak bağlantı kurulması daha kolaydır (Kaput, 1998). Diğer yandan teknolojinin etkin kullanımı öğrencilere soyutsal ilkeleri çoklu gösterimler yoluyla somutlaştırma ve sonrasında daha üst bir seviyedeki sorunsallığa göre somut görünecek bir hale getirmelerinde ve problem çözme süreçlerine eşlik etmede güçlü bir araçtır (Türer & Günhan, 20). Bu kuramsal çerçeve içinde yapılan deneysel uygulamalar da araştırmanın önemini artırmaktadır.

Çalışmada öncesinde öğretmen adaylarına yönelik cebir başarı testi araştırmacı tarafından uygulanmış ve bilgisayar cebir sistemi yazılımı destekli öğretim sonunda tekrar aynı

test uygulanmış, bu sayede sürecin başarıyı ne yönde etkilediği araştırılmıştır. Bu süreçte öğretmen adaylarının yaşadığı zorluklar ve bu yazılımların cebir öğretim ve öğreniminde sağlayan kolaylıklar gözlemlenmiştir. Öğrencinin derse karşı başarısını ve olumlu tutumunu artırmak öğreticiler için oldukça önemli olduğundan bu çalışmanın önemi bir kat daha artmış olmaktadır. Bu çalışma, matematik öğretmen adaylarının Cabri-Geometri yazılımını ve kağıt-kalem ortamlarını kullanarak enstrümantal oluşumlarını incelemeyi ve bu süreçte öğretmen adaylarındaki oluşan enstrümanlı eylem şemalarının ortaya çıkarmasını ve karşılaştırılmasını amaçlamaktadır. Bu sayede cebir ve geometri arasındaki ilişkiyi anlamak ve matematik öğretimindeki stratejileri geliştirmek için önemli bir bakış açısı sunacaktır. Geçmişten günümüze kadar matematikçilerin geometri ve cebir arasındaki ilişkiyi kurmada zorluk yaşadığı literatürden bilinmektedir. Konu ile ilgili az sayıda çalışmanın literatürde mevcut olduğu anlaşılmıştır. Bu çalışmanın özgünlüğü, öğretmen adaylarının enstrümantal eylem şemalarını belirleyerek bu alandaki boşluğu doldurması olmaktadır.

1.5. Araştırmanın Varsayımları

Bu araştırmada,

1. Veri toplama araçları geliştirilirken alınan uzman görüşlerinin yeterli ve geçerli olduğu,
2. Öğretmen adaylarının yapılan çalışma yaprakları ve formları ciddiyetle cevapladıkları,
3. Öğretmen adaylarının yapılan sözlü ve yazılı görüşmelerde gerçek fikirlerini samimiyetle ortaya koydukları varsayılmıştır.

1.6. Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu başlıkta, araştırmanın genellenebilirliğini etkileyen sınırlılıklar ele alınmıştır. Araştırmanın daha iyi anlaşılması için ilgili sınırlamalar aşağıda belirtilmiştir.

1. Bu araştırmanın uygulaması, 2023-2024 güz döneminde Bursa Uludağ Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde öğrenim gören altı matematik öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir.
2. Araştırmanın Pilot uygulaması, COVID-19 pandemisi döneminde online ortamda gerçekleştirilmiştir.
4. Araştırmanın uygulaması yaklaşık 28 ders saati ile sınırlıdır.

1.7. Tanımlar

Teknoloji: Teknoloji, insanın bilimi kullanarak doğaya üstünlük kurmak için tasarladığı rasyonel bir disiplindir (Simon, 1983).

Bilgisayar Destekli Öğretim: Öğrencinin bilgisayar başında, göreceği türlü tepkileri göz önünde bulundurarak hazırlanmış ders yazılımı ile karşılıklı etkileşimde bulunarak kendi

öğrenme hızına göre kullanabileceği öğretim türü, bu soruna ilişkin uygulama ve araştırma alanıdır (Demirel vd., 2003).

Cebir: Karşılaştırma, sayma ve sayılarla işlem yapma eylemlerini içeren aritmetiğin soyutlanmasıyla matematiğin önemli bir dalı olan cebir doğmuştur(Akgün, 2006). Geleneksel anlamda "genelleşmiş aritmetik" olarak tanımlanan cebir, çoğunlukla aritmetiğin sembolik tarafı üzerinde yoğunlaşmıştır (Kaput, 2017).

Cebirsel düşünme: Kieran (2004, b), cebirsel düşünmeyi nicel durumlara göre değişken kullanımı ve bu değişkenler arasındaki ilişkiyi açık hale getirebilme kapasitesi olarak tanımlamaktadır. Herbert ve Brown (1997) ise, cebirsel düşünmeyi durumlardan bilginin çıkarılması ve bu bilginin kelimelerle, şekillerle, grafiklerle, denklemlerle matematiksel olarak ifade edilmesi olarak ifade etmişlerdir. Bu bağlamda cebirsel düşünme akıl yürütme, gösterimleri kullanma ve gösterimler arasında dönüşümler yapma, değişkenleri anlama ve modellerle çalışma gibi becerileri içermektedir (Sibgatullin, vd., 2022).

Çoklu temsil temelli öğretim: Cebir öğrenme alanının içerisinde yer alan cebirsel ifadeler, denklemler ile koordinat sistemi gibi alt öğrenme alanları işlenirken çoklu temsil öğretimi yaklaşımından yararlanılması, anlamlı öğrenmeye önemli katkılar sağlayabilir. Nitekim matematiksel bir kavramı anlamlı kılabilmek birçok görsel temsilin birada kullanımına bağlıdır. Öğretim sırasında öğrencilerin matematiksel fikirlerini sembol, grafik, tablo, günlük yaşam durumları ve somut modellerle ifade etmeleri daha nitelikli öğrenmeye olanak sağlamaktadır (MEB, 2013).

Dinamik matematik yazılımları: Dinamik matematik yazılımları matematiksel kavramların grafik, tablo, denklem ve çeşitli temsillerini görme, modelleme yapma ve yorumlama imkânı sağlayarak çoklu temsilleri birleştiren bir sistemdir (Healy & Hoyles, 1999).

Dinamik geometri yazılımları: Çizim ile geometrik şekil arasındaki ilişkileri yani görsel ve matematiksel bilgi arasındaki farklılıkları görmede kullanılabilen, etkileşimli geometri öğrenme ortamı sunan ve görsel ve matematiksel bilgi arasında tutarlı bağlantıların kurulmasını sağlayan yazılımlardır (Tapan-Broutin, 2010)

GeoGebra: GeoGebra, eğitimin tüm seviyeleri için geometri, cebir, hesap tabloları, grafik, istatistik ve analizi kullanımı kolay bir pakette birleştiren dinamik bir matematik yazılımıdır (GeoGebra, 2025).

Cabri-Geometri: Cabri-Geometri yazılımı bir araç olarak ekran üzerindeki matematiksel nesneleri değiştirerek matematiksel düşünceleri güçlendirmektedir. kağıt-kalem ortamlarında görülemeyen, oluşturulamayan birçok ilişki, özellik, genelleme rahatlıkla

çalışılabilmektedir. Cabri-Geometri yazılımının kendine özgü özellikleri sayesinde geometriyi dinamik olarak inceleme fırsatı vermektedir (Baki, 2001).

Enstrümantal yaklaşım: Teknoloji kullanımı alanında, didaktiğe dokümantal yaklaşım (DDY)'nin temel dayanağı enstrümantal yaklaşımdır. Bu teori Rabardel (Vérillon & Rabardel 1995) tarafından bilişsel ergonomide geliştirilmiş ve daha sonra matematik öğretimine uyarlanmıştır (Guin vd., 2005). Bu teori belirli bir kullanıcı için uygun ve mevcut olan bir araç ile kullanıcı tarafından geliştirilen bir enstrüman arasındaki farklılıkları inceler (Baştürk vd., 2020).

Enstrümanlı Eylem Şeması: Bir görevi yerine getirirken kullanılan enstrümanlı teknikler ve bu tekniklere rehberlik eden işlevsel sabitlerden oluşan bilişsel bir yapıdır (Trouche & Drijvers, 2010). Bu bağlamda yapılan çalışmada, öğrencilerin kullandıkları enstrümanlı teknikler ve dayandıkları işlevsel sabitler, enstrümanlı eylem şemalarının temel bileşenleri olarak ele alınmıştır.

Enstrümanlı Teknikler: Teknolojik ortamlarda özel bir problem türünü çözmek için kullanılan kurallar ve teknikler kümesidir (Drijvers & Gravemeijer, 2005).

Enstrümantal Oluşum: Bireyin belli bir görev için kullandığı araca yönelik birtakım şemalar geliştirdiği, başka deyişle aracın enstrümana dönüştüğü süreci açıklayan kuramsal bir çerçevedir (Verillon & Rabardel, 1995)..

2. BÖLÜM
KAVRAMSAL ÇERÇEVE

Bu bölümde, araştırmanın temelini oluşturan teorik yaklaşımlar ve kavramlar açıklanmıştır. Bu kavramlar, matematik eğitiminde teknoloji kullanımı, cebir öğretimi, enstrümantal yaklaşım, yapılandırmacı yaklaşım ve ilgili yayın ve araştırmalar alt başlıklar altında incelenmiştir.

2.1. Matematik Eğitiminde Teknoloji Kullanımı

Matematik eğitiminde teknoloji kullanımını kaliteli matematik eğitiminin altı ilkesinden biri olarak kabul eden Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi, teknolojinin matematik öğrenmek ve öğretmek için gerekli olduğunu ve öğrencilerin matematik becerilerini geliştirdiğini belirtiyor (NCTM, 2000).

Yapılan araştırmalara göre öğrencilerin teknolojiyi eğitimde ve matematik öğretiminde yardımcı araç olarak kullanımına yönelik tutumlarının olumlu olduğu görülmüştür. (Zulkipli, & Musa, 2022; Buabeng-Andoh, 2012). Olumlu tutum geliştiren öğrencinin aynı oranda ilgi ve motivasyonunun artacağı ve bu durumun derse karşı motive olmasına neden olacağı söylenebilir. Teknolojinin öğrencinin ilgisini ve motivasyonunu artıracağı, öğrenciye birden fazla duyu organına ve zeka türüne hitap etme şansı vereceği düşünülmektedir. Güven ve Karataş (2003) ’a göre matematik eğitiminde bilgisayarların etkin kullanımının amacı, öğrencilere üst düzey becerileri ve matematikçi deneyimi kazandırarak kendi matematiğini geliştirmelerini sağlamak olmalıdır.

NCTM' ye (2000) dayanarak teknolojinin faydalarını şu şekilde özetleyebiliriz:

- Teknoloji öğrencilerin matematik öğrenmesine yardımcı olur. Örneğin, hesap makineleri ve bilgisayarlarla öğrenciler elle yapılandan daha fazla örneği inceleyebilir ve matematiksel yargılarda bulunmalarını kolaylaştırır.
- Teknolojik cihazlar, rutin matematiksel işlemlerin hızlı ve doğru bir şekilde gerçekleştirilmesini sağlayarak öğrencilerin üzerinde çalıştıkları problemlerin kavramsal yönüne daha fazla ilgi duymalarını sağlar.
- Teknoloji, öğretmenlere öğretimlerini özel ihtiyaçları olan öğrencilerin durumlarına uyarlamak için seçenekler sunar. Dikkati çabuk dağılan öğrenciler bilgisayar etkinliklerine daha isteyerek odaklanabilir ya da organizasyon sıkıntısı çeken öğrenciler bilgisayar ortamındaki düzenlemelerden yararlanabilirler.

- Fiziksel engelli öğrencileri matematikle buluşturmak için sunulan imkanlar teknoloji ile birlikte artmaktadır.

Teknolojinin yararları incelendiğinde, yapısı gereği teknoloji kullanımının matematik öğretiminin bir parçası olduğu söylenebilir. Okullarda teknoloji kullanımına yönelik iki yaklaşım vardır. Bunlar 'teknolojiden öğrenme' ve 'teknolojiyle öğrenme' olarak ifade edilmektedir (Jonassen vd., 1999). Teknoloji ile öğrenme yaklaşımında içerik teknoloji yardımıyla sunulur ve bunun öğrenme ile sonuçlanacağı varsayılır. Bu yaklaşım daha çok geleneksel öğretim sırasında içeriğin teknoloji ile sunulduğu durumlarda kullanılmaktadır. Ayrıca teknolojiden öğrenme yaklaşımında teknoloji, eleştirel düşünmeye ve üst düzey öğrenmeye yardımcı bir araç olarak kullanılmakta ve teknolojinin öğrenci için zihinsel bir ortak işlevi görmesi amaçlanmaktadır.

Matematik eğitiminde teknolojinin kullanımı, öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerinin gelişiminde önemli bir rol oynamaktadır. Teknolojik araçlar, öğrencilere soyut cebirsel kavramları daha somut ve görsel biçimlerde deneyimleme olanağı sunarak, kavramsal anlamlandırmayı desteklemektedir. Bu sayede öğrenciler, yalnızca bilgiyi edinmekle kalmayıp, aynı zamanda öğrendiklerini uygulama ve farklı bağlamlarda kullanma fırsatı da bulmaktadır. Teknolojinin bu yönü, öğrencilerin cebirsel ifadelere yönelik ilgilerini artırmakta ve öğrenme süreçlerine daha aktif katılım göstermelerini sağlamaktadır. Dolayısıyla, teknoloji destekli öğrenme ortamlarının, matematiğin temel konularından biri olan cebir öğretiminde, öğrencilerin konuyu anlamlandırmalarına katkı sağladığı ve ayrıca başarıyı artırıcı bir etkiye sahip olduğu söylenebilir.

2.2. Cebir Öğretimi

Araştırmacılar, yetişkinlerin genellikle cebir hakkında olumsuz düşüncelere sahip olduğunu ve çoğu öğrencinin cebiri anlamlı kılmakta başarısız olduğunu belirtmektedir. Bunun nedenlerinden biri geleneksel cebir öğrenmesidir. Cebir genellikle öğrencilere katı bir matematik konusu olarak sunulur. Geleneksel eğitim, cebirin bazı sözdizimsel kurallarıyla başlar ve öğrencilere ilişki kuramayacakları sembolik bir dille gösterilir. Öğrencilerden cebirin amacı ve kullanımı öğretilmeden sembolik işleme becerilerinde ustalaşmaları beklenir. Cebir uygulaması (problem çözme veya genelleme ilişkileri) ikinci sırada yer almaktadır. Geleneksel yaklaşımın bir başka özelliği de cebirsel sözdiziminin hızlı formülasyonudur. Bununla birlikte, öğrencilerin matematik deneyimi giderek artan bir şekilde aritmetiğin profesyonelliğinin ötesine geçerek yeni şeyler yaratmaktadır. 21. yüzyıl matematiğinin artan karmaşıklığını

destekleyebilecek zihinsel davranışların ortaya çıkması gerektiğine inanılmaktadır. (Kaput, 1999; Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi [NCTM], 2000; Romberg & Kaput, 1998).

Türkiye'nin ve birçok ülkenin matematik müfredatı incelendiğinde lise matematik müfredatı, somut ilköğretim müfredatı ile oldukça resmileştirilmiş lise matematik müfredatı arasında bir köprü görevi görmektedir (Teke & durmuş, 2023). Bu, aritmetik ve cebir arasında önemli bir dönüşümdür. Cebir Matematik, bilinmeyenler veya değişkenler hakkında düşünmeyi ve özel ve genel durumlar arasındaki farkı anlamayı gerektirir. Bilinen sayılarla hesaplamayı içerir. Harflerin, sembollerin, ifadelerin ve eşitlik kavramının yorumlanmasında farklılıklar vardır. Örneğin; Cebirsel harfler bilinmeyen değişkenlere veya sayılara atıfta bulunurken, aritmetik harfler genellikle kısaltmaları veya birimleri belirtir. Cebir eğitimine kalite katmak için öğrencilerin cebirsel kavramları ve işlemleri hangi yaşta anlayabildiklerini bilmek ve eğitimi buna göre düzenlemek gerekmektedir.

Cebir öğretiminde teknolojinin etkin kullanımı, öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerini geliştirmekte ve soyut kavramları somutlaştırarak öğrenmeyi desteklemektedir. Bu sayede öğrencilerin cebire yönelik tutumları olumlu yönde değişmekte ve matematiksel düşünme becerileri gelişmektedir (NCTM, 2000).

Uluslararası testler, öğrencilerin matematik becerilerinin ülkeler arasında büyük farklılıklar gösterdiğini ve kültürel özelliklerinin bu farkların temel nedeni olduğunu göstermektedir. Bu durum, matematik eğitimi uygulamalarında kültürel özelliklerin dikkate alınmasını gerektirir (Breton, 2023). Kültür toplumu oluşturan birçok değeri içinde barındırması sebebiyle toplumdaki bireylerin eğitim öğretim sürecinde görmezden gelinmesi çok mümkün olmayabilir. Öyle ki kültürel pek çok öğe eğitim sürecine istemli ya da istemsiz olarak dâhil olmaktadır. Mevcut araştırmanın bağlamını da kültürel öğeler oluşturmaktadır. Bu sebeple bir sonraki başlıkta kültür bağlamında geometri eğitimi detaylı olarak açıklanacaktır.

2.2.1. Cebirsel Düşünme

Cebir öğretiminde, öğrencilerin cebir kavramına ilişkin bilgi ve deneyimlerinin artırılmasıyla birlikte, cebirsel düşünme becerisinin geliştirilmesi ve bu yeteneğin günlük yaşamda karşılaşılan problem durumlarına genellenebilmesi büyük önem taşımaktadır. Cebirsel düşünme, nicel durumları betimleyerek değişkenler arasındaki ilişkileri açık bir biçimde ortaya koyma yetisi olarak tanımlanır (Driskell, 1999). Windsor ve Norton (2011) ise cebirsel düşünmeyi, ilköğretim düzeyinde geliştirilen matematiksel fikir ve kavramlara dayanan bir süreç olarak tanımlamakta ve bu fikirlerin karmaşık problem çözüm süreçlerinde kullanılabileceğini savunmaktadır. Bu bağlamda, öğrencilerin cebirin doğasında yer alan

gizemi ve doğal karmaşıklığı keşfetmeleri teşvik edilmeli; dolayısıyla, öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerinin yapılandırılması hedeflenmelidir.

Farklı ve değişik gösterimlerin kullanılarak cebirle ilgili durumları açıklamayı; değişken, bilinmeyen ve eşittir kavramlarını idrak edebilmeyi; örüntü, tümevarım, tümdengelim ve akıl yürütebilmeye cebirsel düşünme denilmektedir (Greenes, & Findell, 1998). Bir problem durumu için kullanılan durumun diğer durumlara da aktarılabilmesi ya da tam tersi olarak bütün durumlarda kullanılan sentezlerin indirgenerek problemlerin çözümünde kullanılabilme, gösterimlerden faydalanabilme, dönüşümler yapabilme, değişkenleri anlayabilme ve akıl yürütme cebirsel düşünmenin adımlarındandır (Kaf, 2007). Matematiksel modeller kullanarak sayısal ilişkileri temsil etme, matematiksel olay ve durumların yeniden gösterilmesini analiz etme ve farklı durumlardaki değişiklikleri analiz etme yeteneği cebirsel düşünme olarak anlaşılmaktadır (NCTM, 2000). İlkokul yıllarında cebirsel düşünme, harflerin ve sembollerin kullanıldığı cebir bir araç olarak kullanılabilir ve aynı zamanda nicelikler arasındaki ilişkilerin analizi, yapının tanınması, değişimlerin incelenmesi, genelleme, problem çözme, modeller yapımı, doğrulama, ispat ve tahmin gibi sembolik cebir kullanılmadan gerçekleştirilebilecek etkinliklerde düşünme stillerinin geliştirilmesini içerir (Kieran, 2004, a). Cebirsel düşünme, matematiksel düşünmenin bir alt basamağı ve özel bir hali olup matematiksel akıl yürütme, problem çözme ve farklı ve farklı temsillerden yararlanma olarak ifade edilmektedir (Çelik, 2007).

Cebirsel düşünme matematiksel problem çözme ve analiz becerilerinin temelini oluştururken, öğretmenlerin bu becerileri geliştirme konusunda öğrencilere rehberlik etmesi önemlidir. Cebirsel düşünme becerisinin kazanılmasında öğrencilere soyut kavramları somut örneklerle ilişkilendirme ve günlük yaşamdaki durumları matematiksel modellerle analiz etme fırsatları sağlanmalıdır. Bu noktada teknoloji kullanımı, öğrencilere etkileşimli ve dinamik öğrenme deneyimleri sağlayarak cebirsel düşünme becerilerini güçlendirebilir.

2.2.2. Teknoloji Destekli Cebir Öğretimi

Öğrencilerin hem günlük yaşamlarında hem de derslerdeki başarılarını artırmak için değişken ve cebirsel düşünme kavramını daha fazla kullanmaları gerekmektedir. Bu konuda eğitimcilere büyük görev düşmektedir (Bybee vd., 2006). Öğretmenlerin öğrencilerine oldukça soyut olan cebiri anlama ve hatırlama düzeylerini yükseltecek şekilde öğretmeleri gerekmektedir (Leitze & Kitt, 2000). Birçok konuda olduğu gibi ülkemizdeki eğitimciler de derste geleneksel yöntemlere bağlı kalarak öğretime devam etmeyi tercih ettikleri için öğrencilere bireysel çalışma alanı sunma konusunda isteksiz davranmaktadırlar (Aşkar, 2013).

Dede ve Argün'e (2003) göre değişken kavramında bu kadar sıkıntı olmasının sebebi; bilinmeyenleri anlamlandıramayıp onun bir bilineni temsil ettiğini düşünememeleri ve problem durumuna uyarlayamamalarıdır. Öğrencilerin belirtilen olumsuzlukları çözebilmeleri için ezberden uzak daha çok zihinlerinde anlamlandırarak öğrenme yapmaları, problemleri kendi içinde yorumlamaları ve somutlaştırmaları gerekmektedir (MacGregor & Stacey 1993).

Teknoloji destekli cebir öğretimi, öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerini güçlendirmede etkili bir araç olduğu belirlenmiştir. Bu bağlamda, öğretmenlerin etkileşimli öğrenme ortamları oluşturmak için sadece geleneksel yöntemleri değil, teknolojiyi de kullanmaları, öğrencilerin matematik anlayışlarını derinleştirebilir (Ziatdinov & Valles, 2022). Öğrencilere, cebirin soyut kavramlarını somut örneklerle ilişkilendirme ve günlük hayattaki problemleri matematiksel modellerle çözme fırsatlarının sağlanması, öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerini artırmaktadır.

2.2.3. Cebirsel İfadeler ve İlköğretim Matematik Öğretim Programındaki Yeri

Cebirsel işlemlerde öğrencilerin değişkenlerin görevlerini doğru bir şekilde anlamaları önemlidir. Arcavi & Schoenfeld (1988) 'e göre aritmetikten cebire geçişte değişkenler önemli bir rol oynamaktadır. Değişkenler konusunu anlamayan bir öğrenci için cebir öğrenmek zor olacaktır. Skemp (1971), "değişkenin cebirde anahtar bir kavram olduğu" fikrini ileri sürmüştür (Kieran, 1981). Bu nedenle cebir ve ileri matematik kavramlarını öğrenmek için değişken kavramını öğrenmek gerekmektedir (Schoenfeld & Arcavi, 1988). Değişken kavramı cebirde bu kadar önemli bir yere sahip olmasına rağmen öğrenciler tarafından anlaşılması zor bir konudur (Akgün, 2007; Davidenko, 1997; English ve Warren, 1998; Küchemann,1978; Macgregor ve Satcey,1997; Philipp, 1992; Soylu, 2008; Wagner,1983). Bu durum öğrencilerin cebirsel ifadeleri anlamakta güçlük çekmelerine ve bu konuda hata yapmalarına neden olmaktadır.

Tekin Sitrava (2017), "Matematik Öğretmen Adaylarının Cebirsel İfadeler ve Denklemlerin Kavram İmajları" adlı makalesinde ilkokul matematik öğretmeni adaylarının cebirsel ifadeler ve denklemler kavramlarına ilişkin kavram imajları incelenmiştir. Araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. Çalışma, üniversitenin 3. sınıfında öğrenim gören 57 öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Seçilen 15 öğretmen adayı ile bire bir yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılarak derinlemesine çalışma yapılmıştır. Araştırmanın sonuçlarına göre öğretmen adaylarının cebirsel ifadeler ve denklemlerle ilgili eksik veya yanlış kavram imgelerine sahip oldukları ortaya çıkmıştır.

Melhuish, Lew, Hicks, Kandasamy (2020), “Soyut Cebir Öğrencilerinin Fonksiyonlar ve Homomorfizmlere ilişkin Kavram İmajları” isimli çalışmalarında “AA” seviyesinde yer alan öğrencilerin fonksiyon ve homomorfizma kavramlarına ilişkin imajlarını ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır. Çalışmanın teorik çerçevesini Tall ve Vinner (1981) tarafından oluşturulan kavram tanımı ve kavram imajı kuramı oluşturmaktadır. Araştırma 3 farklı üniversiteden gönüllü olarak katılan 3 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmacılar verileri içlerinde çeşitli görevlerin bulunduğu yazılı anketler ve anketlerden sonra alınan cevapları detaylandırmak için yapılan yarı yapılandırılmış mülakatlar yardımıyla toplamışlardır. Araştırmanın sonuçlarına göre öğrencilerin “AA” düzeyinde olmalarına rağmen fonksiyon kavramına ilişkin sınırlı bir kavram imajına sahip oldukları belirtilmiştir. Ayrıca fonksiyon kavramına ilişkin kavram imajlarının homomorfizma kavramı üzerinde destekleyici veya engelleyici bir etkiye sahip olduğu vurgulanmıştır.

Cebirsel ifadelerin öğrenilmesinde karşılaşılan zorluklar, öğrencilerin değişken kavramını anlamalarını ve bu kavramı cebirsel düşünme süreçlerine entegre etmelerini zorlaştırabilmektedir. Bu durum, değişkenlerin yapısal rolüne dair kavrayış eksikliğinden kaynaklanmakta ve cebirsel ifadelerin anlamlandırılmasını güçleştirmektedir (Kieran, 2004, a). Öğretmenlerin, değişkenlerin işlevsel özelliklerini vurgulayan ve cebirsel ifadeleri somut örneklerle ilişkilendiren öğretim yaklaşımları benimsemeleri, bu tür zorlukların aşılmasında etkili oldğu düşünülmektedir. Matematik öğretiminde çoklu temsillerin rolü, öğrencilerin kavramları farklı biçimlerde anlamalarına ve ifade etmelerine olanak tanımaktadır. Temsil çeşitliliği, öğrencilerin problem çözme süreçlerinde esneklik kazanmalarını sağlamakta ve matematiksel düşünme becerilerini geliştirmektedir. Özellikle cebirsel kavramların grafiksel, sözel, tablo ve sembolik temsiller üzerinden sunulması, öğrencilerin kavramsal anlayışlarını derinleştirmektedir (Dreher & Kuntze, 2015). Bu nedenle, matematik eğitiminde çoklu temsil yaklaşımının yapılandırıcı bir öğrenme anlayışıyla bütünleştirilmesi, öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerini daha etkili biçimde inşa etmelerine katkı sağlamaktadır.

2.2.4. Çoklu Temsiller

Çoklu temsil, matematiksel bir ilişkinin veya kavramın farklı şekillerde ifade edilmesi anlamına gelmektedir (Haque, 2024). Okumuş (2012), çoklu temsili 'tablolar, kartezyen grafikler veya denklemler kullanarak bir süreci veya kavramı tanımlamak' olarak tanımlar. Ainsworth ve arkadaşları (2002) çoklu temsillerle öğrenmede kilit noktanın temsiller arasında başarılı bir şekilde dönüşüm yapabilmek olduğunu vurgulamaktadır. NCTM (2000) standartlarında öğrencilerin nasıl öğrendiklerini ortaya koymak önemlidir ve temsil kavramı

üzerinde durarak; Öğrencilerin kullandıkları temsilleri inceleyerek kavramları nasıl öğrendiği hakkında bilgi sahibi olunabileceğini belirtmektedir. Ayrıca, öğrencilere çoklu temsil kullanmanın öğretilmesinin yeterli olmadığı, öğrencilerin matematiksel araçları uygun şekilde oluşturabilmeleri, kullanabilmeleri ve temsiller arasında geçiş yapabilme becerisi kazanmaları gerektiği belirtilmektedir (İpek & Okumuş, 2012).

Cebirsel ifadelerin öğrenilmesinde karşılaşılan zorluklar, öğrencilerin değişken kavramını anlamalarını ve bu kavramı cebirsel düşünme süreçlerine entegre etmelerini zorlaştırabilmektedir. Öğretmenlerin, değişkenlerin rolünü vurgulayarak ve cebirsel ifadeleri somut örneklerle ilişkilendirerek öğretmeleri, bu zorlukların aşılmasında önemli bir adım olabilir. Matematik öğretiminde çoklu temsillerin rolü, öğrencilerin kavramları farklı şekillerde anlamalarına ve ifade etmelerine olanak sağlar. Temsil çeşitliliği, öğrencilere problem çözme süreçlerinde esneklik kazandırabilir ve matematiksel düşünme becerilerini güçlendirebilir. Bu nedenle, matematik eğitiminde çoklu temsil yaklaşımının benimsenmesi, öğrencilerin matematiksel kavramları derinlemesine anlamalarına katkı sağlayabilir.

Son yıllarda yapılan çalışmalar, çoklu temsillerin kullanımının öğrencilerin matematiksel yaratıcılıklarını da artırabileceğini göstermektedir. Örneğin, Hoffler ve Leutner (2007) ile Malone ve diğerleri (2020) tarafından yapılan araştırmalar, öğrencilerin kelimelerle desteklenen nesne ve resimlerle daha kavramsal öğrendiklerini ve bu sayede matematiksel kavramlar ve bağlantılar hakkında daha derin bir anlayış geliştirdiklerini belirtmektedir. Ayrıca, Van Meter ve diğerleri (2020) çalışmasında, çoklu temsillerin kullanımının öğrencilerin matematiksel kavramları daha iyi anlamalarına yardımcı olduğunu ve bu temsiller arasında geçiş yapabilme becerisi kazanmalarının önemini vurgulamaktadır.

Günümüzde iletişim, muhakeme etme, problem çözme ve problemleri günlük yaşam durumlarıyla ilişkilendirme gibi beceriler yeniden çok önemlidir. Bu nedenle matematik eğitiminde son yıllarda çoklu temsil kavramının ön plana çıktığı açıkça görülmektedir. Temsil, bireylerin durumları yönettiği ve anlamlandırdığı araçlardır (Kaput, 1991). Bir matematiksel problem durumunun temsili, durumdaki ilişkilerin ve işlemlerin bir görüntüsüdür. Temsiller, sözlü den sembolik temsile kadar çeşitli biçimler alabilir ve belirli veya genel durumu temsil edebilirler.

Duvall (1987) temsilleri, "bir kavramın anlamını kavramaktan ve aynı kavramı farklı temsillerle ifade ederek benzer anlamlar yaratmak gibi doğal yorumlama alanı" olarak tanımlamaktadır. Duvall (1987) 'a göre problemdeki temsiller arasındaki anlamsal tutarlılığın olmaması problemin yorumlanmasını engelleyebilir. İki temsil arasında anlam yokluğunda, temsiller arasında aktarım zorlaşır.

Kaput (1991), sunduğu temsil modeline dayanarak temsilleri zihinsel yapılar ve notasyonal yapılar olarak ikiye ayırmaktadır. Bireyin deneyim akışını düzenlediği ve yönettiği araçları zihinsel yapılar olarak tanımlarken, bir kültür veya dil topluluğu tarafından paylaşılan maddi olarak gerçekleştirilebilir kültürel veya dilsel eserleri notasyonal yapılar olarak ifade etmektedir. Bu temsil modelinde teknoloji kullanımı önemli bir yer tutmaktadır. Notasyon sistemleri, bireylerin kendi zihinsel yapılarını bir bilgisayar ekranında kağıt, ses veya elektrik tabanlı sinyallerle somutlaştırarak oluşturmalarını ve detaylandırmalarını organize etmek için kullanılmaktadır. Notasyon sistemlerinden bahsederken zihinsel yapılar da dikkate alınmalıdır. Kaput (1987) 'a göre temsiller arasında Şekil 1'deki gibi sürekli bir etkileşim söz konusudur ve bu etkileşim matematikte anlamlı bir öğrenme için şarttır (akt. Bayık, 2010).

Şekil 1

İç ve Dış Temsiller Arasındaki Etkileşimler

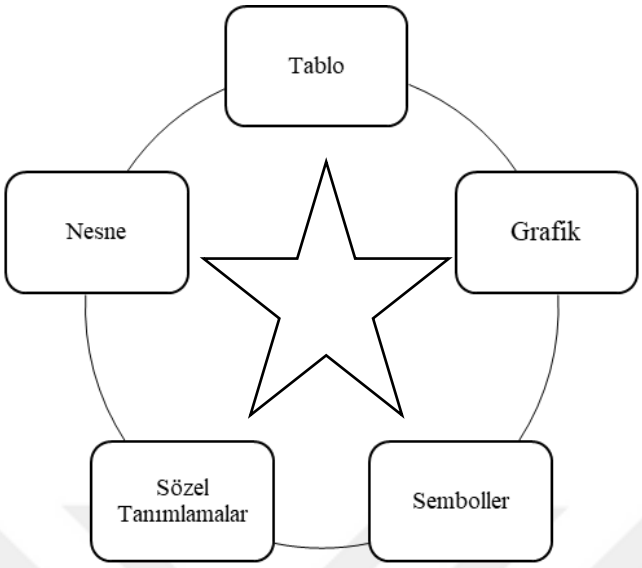


Golgin ve Kaput (1994), temsiller arasındaki geçişin temsil eden durum ile temsil edilen durum arasındaki ilişkide gerçekleştiğini belirterek yapılandırmacı temsil görüşünü vurgulamaktadır. Diğer bir ifadeyle matematikte anlamlı ve kalıcı bir öğrenmenin sağlanabilmesi için temsil edilen dünya ile temsil edilen dünya arasında bir ilişki kurulmalıdır.

Janvier (1987), temsil modelini iç ve dış temsil olarak ikiye ayırmaktadır. Dış temsiller, duyuları harekete geçiren fikir ve kavramların eylemleri olarak tanımlanırken, iç temsiller, yanıltıcı olan ve doğrudan gözlemlenmeyen bilişsel veya zihinsel modeller, şemalar, kavramlar ve zihinsel nesneler olarak kabul edilir. Janvier (1987), dış temsilleri daha detaylı ifade edebilmek için beş temsil modeline odaklanmıştır. Bunlar; semboller, grafikler, tablolar, nesneler ve sözlü açıklamalardır. Janvier (1987) bu gösterimleri Şekil 2'deki gibi yıldız modeliyle ifade etmiştir (akt. Bayık, 2010).

Şekil 2

Janvier (1987)'in Temsillerle İlgili Sunduğu Yıldız Modeli



Janvier (1987), yıldız modeli ile yaptığı temsiller arası geçişi şematizasyon olarak tanımlamaktadır. Bir noktadan diğerine bir geçiş gerçekleşir. Örneğin; tablodan sözel tanımlamalara geçişte okuma eylemi gerçekleşir (Çıkla-Akkuş, 2004). Janvier (1998), yukarıda ifade edilen temsil modelinin yanında bir de doğrudan ve doğrudan olmayan geçişlerden bahsetmektedir. Doğrudan geçişler, bu geçiş arasında başka bir temsil modu kullanılmadan bir temsil modundan diğerine yapılabilir; örneğin, bir grafikten bir denklemin geçişi. Doğrudan olmayan geçişlerde, temsiller arası geçiş yapılırken farklı temsiller kullanılır; örneğin, grafikten denkleme geçişte tablonun kullanılması (Bayık, 2010).

Bir temsil, kaynağı ve hedefi oluşturan en az iki temsil içermelidir. Janvier (1987) "Verilen bir temsile doğrudan ve doğru bir şekilde ulaşmak için, geçişten sonra hangi temsil moduna sahip olunması gerektiğini ve sonuçların türetilmesi anlamına gelen hedef bakış açısından bakılması gerektiğini" vurgulamaktadır.

Öğrencilere çoklu temsil kavramının tanıtılması, onların matematiksel kavramları farklı açılardan değerlendirebilmelerini teşvik eder. Ancak yalnızca temsil çeşitliliği sunmak yeterli değildir; öğrencilerin bu temsiller arasında geçiş yapabilme becerilerini geliştirmeleri de büyük önem taşımaktadır. Temsiller arası dönüşüm, öğrencilerin matematiksel düşünme esnekliğini artırmakta ve kavramsal anlayışlarını derinleştirmektedir. Bu konuda yapılan güncel bir çalışma, öğretmenlerin temsiller arası bağlantıları açıkça vurgulamalarının, öğrencilerin matematiksel kavramları daha derinlemesine anlamalarına katkı sağladığını göstermektedir (Dreher vd., 2024). Bu bağlamda, dinamik geometri yazılımları matematik öğretiminde teknolojinin etkili ve anlamlı biçimde kullanılmasına olanak tanımaktadır. Söz konusu

yazılımlar, öğrencilere geometrik nesneleri etkileşimli biçimde manipüle etme ve bu nesneler arasındaki ilişkileri keşfetme imkânı sunmaktadır. Böylece öğrenciler, soyut matematiksel kavramları somut deneyimlerle ilişkilendirerek daha anlamlı bir öğrenme süreci yaşarlar. Dinamik geometri ortamları, öğrencilerin yalnızca geometriye dair görsel ve kavramsal anlayışlarını güçlendirmekle kalmamakl beraber, aynı zamanda matematiksel düşünme becerilerinin gelişimine de katkı sağlamaktadır.

2.2.5. Dinamik Geometri Ortamları

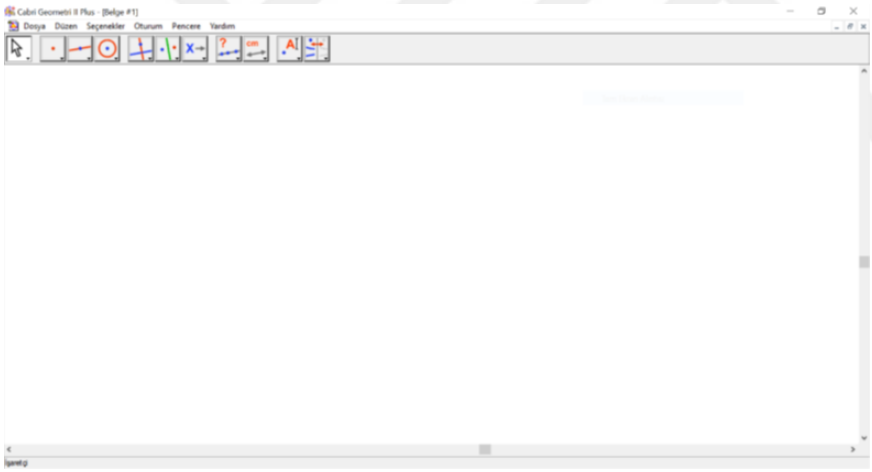
Matematikte "dinamik" terimi, hareket eden ve değişen durumlar olarak tanımlanır (University of Illinois at Urbana-Champaign, n.d.). Teknolojinin gelişmesiyle birlikte dinamik geometriye yönelik yazılımlar matematik eğitiminde yer almaya başlamıştır. Bu yazılım, programların sağladığı komutlar yardımıyla geometrik şekiller çizebilen ve istediği şekilde çeşitli şekillerde hareket ettirebilen, döndürebilen, yansıtabilen ve hareket edebilen bir yazılımdır. Bunlar, geometrik nesnelerin çizilmesine olanak sağlayan programlardır. Dinamik geometri yazılımlarının en belirgin özelliklerinden biri geometrik nesnelerin oluşturulmasına ve aralarındaki ilişkilerin belirlenmesine olanak sağlamasıdır. Bilgisayar ortamında fare yardımı ile şekiller değiştirilebilir, hareket ettirilebilir ve yeniden şekillendirilebilir. Bu yazılımlar sayesinde kağıt ve kalemle çizilen sabit şekiller istenildiği gibi hareket ettirilebilir, öğrenciler görsellik açısından derse daha fazla ilgi gösterebilir, belirli komutlar ve araçlarla kısa sürede şekil çizilmesi de zamandan tasarruf sağlayabilmektedir. Dinamik geometri yazılımlarının öğrenme ortamında kullanılması, öğrenci ve yazılım arasındaki etkileşimi sağlar çünkü yeni bilgi edinme sürecinde öğrenciler eski bilgilerini gözden geçirir, tamamlar veya reddederler Dinamik bir geometri yazılım ara yüzü, öğrencilere matematikte görsel akıl yürütmeyi kullanma fırsatı verir ve problemleri ve ilişkileri genelleştirmeye yardımcı olur (Jones, 2000). Bu programlarının sağladığı interaktif olarak taşınma veya baştan şekillendirme gibi özellikler sayesinde öğrenciler kağıt ve kalem ortamında yapamadıkları şekilde matematiği çeşitli yollarla yapabilirler (Aviram, 2000). Bu nedenle, öğrencilerin bu yazılımlarla etkileşimi, hesaplama ve çizim yaparken kağıt ve kaleme harcanan zamandan ve emekten tasarruf sağladığı belirtilmiştir (Lavy, 2015). NCTM 2000 yılında yayınladığı raporunda, dinamik geometri yazılımının grafik seçeneği sayesinde geometrik dönüşümlere odaklanmaya, geometrik şekillerle pratik yapmaya ve fonksiyonları keşfetmeye olanak tanıdığını belirtmiştir (Coelho & Cabrita, 2015). Bu yazılımlardan biri de Cabri-Geometri' dir. Bu programı aşağıdaki bölümde detaylı bir şekilde açıklanmıştır.

2.2.6. Cabri-Geometri

"Cabri Geometri programı, 80'li yılların sonunda, Joseph Fourier Üniversitesi ve CNRS'nin (Ulusal Bilimsel Araştırma Merkezi) ortak laboratuvarlarından biri olan IMAG'da matematik eğitimi için tasarlanmış ve geliştirilmiş, aktif öğrenme ve yapılandırmacılık ilkelerini izleyen dinamik bir geometri programıdır." (Tapan-Broutin, 2010, s. 27). Bu yazılım dinamik geometri yazılımlarının ilki olarak kabul edilmektedir. Geometri öğretiminde kullanılmak üzere tasarlanmış "etkileşimli karalama defteri" olarak da bilinir. Cabri-Geometri kullanımı açısından hesap makinelerinde ve bilgisayar ortamlarında kullanıma uygun bir yazılımdır (Clarou vd., 2001). İki boyutlu düzlem geometrisi için Cabri II Plus yazılımı ve üç boyutlu uzay geometrisi için Cabri 3D yazılımı geliştirilmiştir. Cabri-Geometri' II Plus yazılımının arayüzü Şekil 3'te verilmiştir. Bu çalışmada Cabri-Geometri' II Plus yazılımına kısaca Cabri-Geometri olarak yazılmıştır.

Şekil 3

Cabri-Geometri' II Plus Yazılımının Ara Yüzü



Pratt ve Ainley (1997), Cabri-Geometry'nin bileşenlerini dört temel başlık altında toplamıştır (aktaran: Güven, 2002):

a) Temel Elemanlar: Nokta, doğru, ışın, doğru parçası, üçgen, çember ve çokgen gibi elemanların temel çizimlerdir. Bu elemanlar kullanılarak daha karmaşık yapılar ve şekiller de çizilebilir (Cabri Geometry II manual, n.d.).

b) Fonksiyon: Matematikteki fonksiyon kavramına benzeyen ve yeni bir yapı oluşturmak için temel elemanlara uygulanan işlemlerdir. Örneğin "Dik Doğru" aracıyla bir nesneye dik doğru çizilebilir. Aynı şekilde açıortay, orta dikme gibi farklı fonksiyonlar da Cabri Geometri yazılımında mevcuttur (Cabri II Plus user manual, 2005).

c) Yapı: Yazılımın temel elemanlarına uygulanan bir fonksiyon sonucunda oluşan yeni şekiller yapı olarak tanımlanır (Cabri Geometry II manual, n.d.).

d) Fonksiyonel Bağımlılık: Yapı ile yapıyı oluşturan temel elemanlar arasındaki ilişkidir (Laborde, 2003).

Cabri-Geometri yazılımı nokta, doğru, ışın, doğru parçası, açı, üçgen vb. temel geometrik kavramlardan oluşan ve geometrik yapılarla çalışmak için çeşitli kolaylıklar sağlayan bir yazılımdır (Baki, 2002). Öğrencilerin geometrik şekiller oluşturmasına ve keşfetmesine yardımcı olan yazılım, şekiller ve matematiksel kavramlar arasındaki ilişkilerin içselleştirilmesini kolaylaştıran bir mikro dünyadır. Bu programı kullanmak, başka ortamlarda fark edilmeyecek matematiksel kavramların somutlaştırılması açısından önemlidir. Bu programı kullanmak, başka ortamlarda fark edilmeyecek matematiksel kavramların somutlaştırılması açısından önemlidir (Clarou vd., 2001).

Cabri-Geometry programında oluşturulan şeklin çiziminin doğruluğu test edilebilir, ölçü ve hesaplamalar yapılabilir, kullanılan nesneler silinip veya gizlenebilir, renkleri ve görünümleri değiştirilebilir. Bu programın orijinali Fransızca olup İspanyolca, İtalyanca, Japonca, İngilizce ve Türkçe gibi birçok dile çevrilmiştir (Tapan-Broutin, 2010). Cabri-Geometri, matematiksel yapıları bir araç olarak iyi bir şekilde kullanarak matematiksel düşünmeyi güçlendirmektedir. Öğrencilere geometrik şekiller oluşturma ve bunları hareket ettirme, değiştirme, döndürme ve küçültme fırsatları sunarak diğer birçok programdan ayrılmaktadır. Kağıt-kalem ortamlarında doğru bir şekilde oluşturulamayan veya görülemeyen birçok ilişki, özellik ve genelleme Cabri-geometrisi ile kolayca görülüp oluşturulmaktadır Cabri-Geometry yazılımı, kullanıcılara etkileşimli bir ortam sağlamasının yanı sıra, Cabri-Geometry yazılımını dönütler yardımıyla geometri ve bazı analiz kavramlarının öğretiminde ön plana çıkarmıştır (Baki, 2001; Tapan-Broutin, 2010). Öğrenciler kendi oluşumlarını üretmelerini sağlayan bu yazılım ile şekiller arasındaki ilişkileri keşfetme ve özümsemelerini kolaylaştıracak anlamlı bilgiler edinme fırsatı buluyorlar. Cabri-Geometri aynı zamanda öğrencilere derinlemesine bir çalışma ortamı sağlarken teoremler ve problemler hakkında varsayımlarda bulunma ve hipotezleri test etme fırsatı sunmaktadır (Pandiscio, 2002).

Günlük hayatımızda kullandığımız birçok aracın iki boyutlu veya üç boyutlu versiyonları bu yazılım ile geometrik cisimler kullanılarak çizilebilmektedir. Bu, öğrencilerin ilgilerini artırmalarına ve çizim ile oluşturulan yapı arasındaki geometrik ilişkiyi anlamlandırmalarına yardımcı olacaktır. Böylece öğrenci günlük hayatta karşılaştığı nesnelere geometrik bir bakış açısıyla bakmayı öğrenecektir. Bu noktada çizim ile dinamik şekil (yapı) arasındaki fark iyi bilinmelidir. Kağıt-kalem ortamında, kumaşta veya bilgisayar ekranında yapılan herhangi bir geometrik "çizim", o nesnenin açılar ve kenarlarla ilgili özelliklere sahipmiş gibi görünen somut bir temsilidir. Ancak “geometrik şekil”, matematiksel bir nesne

olarak nesnenin tüm özelliklerini taşır. Bu sayede şekil hareket ettirildiğinde nesnenin tüm geometrik özellikleri korunur. Cabri geometrisi ve diğer etkileşimli geometri programları, çizim ve geometrik şekil arasındaki bu önemli farkla onu geometri öğretiminde etkili ve güçlü kılmaktadır (Tapan-Broutin, 2010).

Duval (1995), öğrencilerin çizimleri yorumlamalarında ve üzerinde işlemler yapmalarında farklı anlama türlerinin etkili olduğunu belirtmektedir.

Bu tutuş türleri şunlardır (Duval, 1995);

1. Algısal Kavrama: çizime ilk bakıldığında görülen nesne hakkında bir isimlendirme yapılır. Bu kavram, çizimdeki geometrik şekilleri ayırt etmek ve tanımlamak için kullanılır.

2. Sıralı Kavrama: Bir çizim oluşturmak veya çizimin yapısını tanımlamak için sıralı kavrayış gereklidir. Şekilleri oluşturmak için belirli bir düzene gerek vardır. Sıralı olarak yapılacak işlemler, algısal ipuçlarından ziyade matematiksel özelliklere ve kullanılan araçlara göre değişen teknik sınırlamalara bağlıdır.

3. İşlevsel Kavrama: Bir çizimdeki matematiksel özellikler algısal anlama ile belirlenmemeli, bazı özellikler önceden konuşularak verilmelidir. Bu kavrama da, teorik bilgilerle çizimin neyi temsil ettiğini belirledikten sonra, çizim materyali üzerinde veya zihinsel olarak değişiklikler yapmak mümkündür.

4. Söylemsel Kavrama: Bir şekle bakarken bir çözüm fikrinin elde edilmesi söylemsel anlama ile gerçekleşir. Şeklin özellikleri varsayımlarla belirlenir, tümdengelimli açıklamalarda aksiyomlar ve teoremler kullanılır.

Söylemsel anlamanın temeli ispattır (Tapan-Broutin, 2015). Dinamik ortamlarda oluşturulan çizimlerde, öğrencilerin çizimden geometrik yapıya geçişlerinde öğrencilerin bilgilerinin yanı sıra anlama biçimlerinin de etkili olduğu görülmektedir.

Dinamik geometri ortamlarında düzenli olarak etkinlikler gerçekleştiren öğrenciler, zamanla çizimden geometrik şekillere geçerek matematiksel düşünme becerilerini görsel deneyimleriyle kazanırlar. Cabri-Geometri yazılımının en önemli özelliklerinden biri olan sürükleme aracının bu becerinin kazanılmasında büyük yeri vardır. Bu araç sayesinde öğrenciler, yalnızca birbiriyle ilişkili iki hareketin durumunu değil, aynı zamanda yapılandırılmış veya basit noktaların karşılıklı bağımlılığını da anlayabilir. Böylece öğrenciler, soruları cevaplarken, cevapları matematiksel bir teoriye dayandırma alışkanlığı kazanırlar. Böylece öğrenci zamanla gördüğü geometrik şekillerin temel anlamının matematiksel özelliklerden ve teoriden kaynaklandığını kavrayacaktır (Falcade vd., 2007; Tapan-Broutin, 2010). Bahsedilen tüm özelliklerin yanı sıra Cabri-Geometry yazılım uygulamalarının

öğrencilerin bilişsel gelişimini desteklemesi için yazılımın sınıf ortamında kullanımının incelenmesinin önemli olduğu düşünülmektedir.

2.3. Enstrümantal Yaklaşım

Bu bölümde araştırma konusu ile ilgili Enstrümantal Yaklaşıma yer verilmektedir. enstrümantal yaklaşım, enstrümantal oluşum, Araç-Artefakt İlişkisi, Artefact-Enstrüman İlişkisi, Enstrümantalizayon, Enstrümantasyon ve enstrümantal oluşumda öğretmen rolü başlıkları altında sunulmaktadır.

Teknolojiyi matematik öğretimi ve öğrenimine entegre etmek, genellikle beklenenden daha fazla karmaşıklıkla sonuçlanır (Lagrange, 2024; Guin & Trouche, 2002; Trouche, 2000). Teknolojinin öğrencilerin kavramsal anlamaya odaklanabilmeleri için bir şeyler yapması fikri aslında çok basittir. Buradaki asıl sorun, öğrencilerin teknoloji ortamında işlemlere uygun anlamlar vermelerinin nasıl sağlanacağıdır. Anlayış oluşturmak, teknoloji kullanımının gerektirdiği teknik becerilerde ustalaşmayı gerektirir. Teknolojinin öğretime entegrasyonuna ve teknolojik araçların kullanımına odaklanan çalışmalarda, teknolojik araçların kullanımını anlamak ve açıklamak için bazı teorik çerçeveler dikkatlice incelenmiş ve uygun teorik çerçeveler geliştirilmiştir (Goss vd., 2013; Trouche, 2005). Teknolojik ortamda matematik eğitiminde öğrencilerin öğrenme süreçlerini anlamaya yardımcı olan teorik bakış açılarından biri de Enstrümantal Yaklaşımdır (Drijvers, vd, 2013). Teknolojinin kullanıldığı bu çalışmada, ağırlıklı olarak Fransız araştırmacılar tarafından teknolojinin matematik eğitimine entegrasyonu kapsamında geliştirilen Enstrümantal Yaklaşım (Trouche, 2002), araç kullanımının gelişimini açıklamaya yönelik teorik bir çerçeve sunmaktadır (Özdemir Erdoğan, 2016, s. 805).

Literatürde bulunan farklı çalışmalarda Enstrümantal Yaklaşım, bir görev tipini gerçekleştirmek için araç kullanımıyla ortaya çıkan farklı şemaların tanımlandığı, öğrencilerin araç kullanım tekniklerine ve bilişsel gelişime odaklanan, araç kullanımının ve öğrenme arasındaki ilişkinin araştırıldığı psikolojik bir süreç olarak tanımlanmaktadır (Artigue, 2002; Gravemeijer, 2005; Mariotti, 2002; Tabach, 2011).

Cabri-Geometri programı, matematik öğretimine dinamik ve etkileşimli bir boyut kazandırarak öğrencilere geometrik kavramları somut deneyimlerle keşfetmek için imkan sunmakta olup, öğrencilerin temel geometrik elemanlar, yapılar ve fonksiyonel bağıntılar aracılığıyla geometriyi yapılandırarak öğrenmelerine olanak tanımaktadır. Bu bağlamda, Enstrümantal Yaklaşım, teknoloji destekli matematik öğretimini anlamlandırmada teorik bir çerçeve sunamakta olup, söz konusu yaklaşım, teknolojik araçların kullanımına ilişkin teknik

beceriler ile öğrencilerin bilişsel gelişimleri arasındaki ilişkiyi açıklamayı ve bu etkileşimi pedagojik açıdan anlamayı hedeflemektedir.

2.3.1. Enstrümmantal Oluşum

Öğrenme ortamındaki aracın nasıl kullanışlı ve anlamlı bir araca dönüştüğü önemlidir. Aracın uygun ve mantıklı bir şekilde kullanıldığı bu gelişen sürece enstrümantal oluşum denir. Enstrümantal oluşum, artefaktın özelliklerine, görevin türüne, bireyin mevcut bilgilerine ve önceki çalışma alışkanlıklarına bağlı, zaman gerektiren karmaşık ve zorlu bir süreçtir. (Guin & Trouche, 2002; Ruthven, 2002; Trouche, 2004). Enstrüman, verilen eser temelinde, uygulama prosedürleri dahilinde enstrümantal oluşum süreci yoluyla öznenin yapılandırılmasının sonucudur. Enstrüman, belirli bir bileşen (belirli bir görevi yerine getirmek için harekete geçirilen artefakt parçası) ve psikolojik bir bileşen (belirli bir görevi gerçekleştirmek için oluşturulan şemalar) içeren karma bir varlıktır.

Artefaktın bir enstrümana dönüşebilmesi için bireyin artefakt kullanma becerileri ve artefakttan yararlanabileceği durumları içeren zihinsel şemalarını geliştirmesi gerekmektedir. Enstrümanın doğuşu, artefaktın aktiviteye aracılık etmek için kullanıldığı süreçleri gerektirir. Bu karmaşık sürece enstrümantal oluşum denir (Drijvers & Trouche, 2008). Başka bir deyişle, artefactın enstrümana dönüşümündeki inşa sürecine enstrümantal oluşum denilmektedir. Bu karmaşık ve zaman alıcı bir süreçtir. Enstrümantal oluşum bir yandan artefactın özelliklerine bağlı iken diğer yandan öğrencinin şemalarının oluşumu ve gelişimi üzerinde etkisi olan görev türü ile yakından ilgilidir. Kısacası enstrümantal oluşum matematiksel anlamların gömülü olduğu eski artefaktların kullanımına yönelik zihinsel şemaların ve tekniklerin birlikte ortaya çıkışını içerir. Enstrüman; artefact (veya artefact parçası) ve görev türleriyle başa çıkmak için oluşturulan şemalar tarafından tanımlanır.

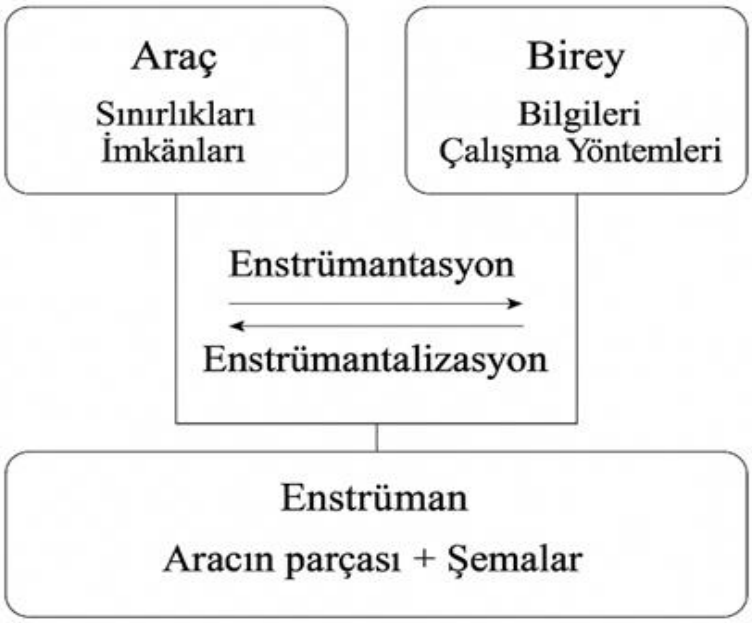
Ayrıca enstrümantal oluşum sürecinde aynı enstrüman birçok farklı enstrümanın doğmasını da sağlar (Guin & Trouche, 2002) ve bu enstrümanlar verilen görev türünde ortaya çıkan bireyin zihinsel şemalarına bağlıdır (Maschietto & Soury- Lavergne, 2013). Öte yandan bir araç, farklı kişiler tarafından aynı enstrümana dönüştürülemeyebilir. Öğrencilerin kullandığı bir enstrümanın sınıf ortamında farklı enstrümanlara dönüştürülerek bir enstrüman koleksiyonu oluşturması, enstrümanın çözüm sürecindeki etkililiğini ve öğrencilerin oluşturduğu şemaların zenginliğini göstermektedir (Özdemir Erdoğan, 2016, s. 806)

Enstrümantal oluşum, küçük, sıradan süreçlerden uzaktır. Hem öğretmen hem de öğrenci için zaman ve çaba gerektirir. Enstrümantal oluşum çift yönlü bir süreçtir. Artefactın donanımı ve sınırlamaları bireyin kavramsal anlamasını ve tekniklerini şekillendirir.

Enstrümantal oluşumun iki yapısı vardır; Diğer bir deyişle, artefakta yönelik enstrümantalizasyon, diğer bir deyişle zihinsel şemalarının düzenlenmesi ile ilgili bireysel yönelimli enstrümantasyon (Trouche, 2004). Daha basit bir ifade ile enstrümantal oluşum aracın kullanımı ile ilgili şemaların oluştuğu enstrümantalizasyon ve verilen görevi yerine getirmek için birey tarafından bilişsel şemaların geliştirildiği enstrümantasyondan oluşan çift taraflı bir süreçtir (Özdemir Erdoğan, 2016, s. 806). Enstrümantasyon ve enstrümantalizasyon süreçleri, net çizgilerle birbirinden ayrılmanın mümkün olmadığı, aralarında ilişkili bir diyalektiğin olduğu ve zihinsel şemaların ve artefactın karşılıklı olarak birbirini şekillendirdiğinde süreçlerdir (Drijvers vd., 2013; Noss ve Hoyles, 2003; Trouche, 2004). Enstrümantal oluşumun gerçekleşmesini sağlayan bu iki bileşen şekil 4'te gösterilmiştir.

Şekil 4

Enstrümantal Oluşum Süreci (Trouche, 2004).



2.3.2. Araç-Artefakt İlişkisi

Araç terimi, makine terimi yerine tercih edilmekte ve insan faaliyetini destekleyici anlamda kullanılmaktadır (Trouche, 2004). Noss ve Hoyles (1996) 'a göre araçlar, ortamın bazı matematiksel özelliklerini özetler; fikir ve davranışlar, öğrenenin öğrenme ortamında kullandığı araçlara gömülüdür (Ndlovu vd., 2013). Araçlar matematiksel anlamlar içerir ve öğrenmeyi sağlayan zengin matematiksel durumlar oluşturur (Rivera & Becker, 2007). Kullanılan sembolik veya fiziksel bir nesneye (Trouche, 2004; Noss & hoyles, 2003; Kieran & Drijvers,

2006; Rabardel,1995; Drijvers & Gravemeijer, 2005; Trouche, 2005; Verıllon & Andreuccı, 2006) araç denilirken; Matematiksel uygulamalarda malzeme olarak kullanılan araçlar artefakt olarak tanımlanmaktadır (Drijvers vd., 2013). Artefakt, bir aracın öğrenci tarafından kullanılmadan önceki halini ifade eder; insan yapımı olan bu materyaller, değişkenlerin belirli amaçlara ulaşması için kasıtlı olarak düzenlenmiştir. Artefakt, işlevlerini ve etkililiğini yalnızca kullanıcısının işlemleri süresince göstermektedir. (Verillon & Andreucci, 2006). Rabardel (1995)'e göre de artefakt, kullanıcı tarafından kullanılmadan ya da kullanıcı aracın başkaları tarafından kullanıldığını görmeden önce anlamsız olabilen bir şeydir.

Artefact kavramının daha iyi anlaşılması için şu şekilde örnekler verilebilir:

- Bir dili, kullanıcılarını ve nasıl kullanıldığını düşünmeden konuştuğumuzda, bu dil yapaydır (Trouche, 2004).
- Bilgisayar, öğrenen tarafından daha önce kullanılmamış bir materyal veya nesne ise, aynı zamanda bir artefakttır (Ndlovu vd., 2013).
- Anlamını yitirmiş sözcükler gibi kullanımlarını yitirmiş araçlar da artefakt örnekleri olarak gösterilebilir (Verillon & Andreuccı, 2006).
- Kullanıcıya verilen bir hesap makinesi veya ikinci dereceden denklemleri çözmek için bir algoritma da bie artefakt olabilir (Trouche, 2004)
- Drijvers ve arkadaşlarına göre artefakt, belirli bir görevi yerine getirmek için her zaman olmasa da genellikle fiziksel olan bir nesnedir; kültürel ve sosyal deneyimleri bir araya getiren insan faaliyetinin bir ürünüdür. Bir çekiç, piyano, hesap makinesi ya da bilgisayardaki bir dinamik geometri yazılımı artefakt örnekleri arasında yer alabilir. Bununla birlikte, bir artefakt için her zaman kesin ve net bir tanım yapılamayacağını da vurgulamaktadırlar. Örneğin, dinamik geometri yazılımı bir kişi tarafından tek bir artefakt olarak görülürken, bir başkası aynı sistemi ölçme artefaktı, sürükleme artefaktı gibi birden fazla artefaktın birleşimi şeklinde değerlendirebilmektedir (Drijvers vd., 2013).

Matematik öğrenme süreçlerinde kullanılan araç ve gereçler, öğrencilere matematiksel düşünme becerilerini geliştirme olanağı sunar. Bu araçlar, yalnızca bilişsel gelişimi desteklemekle kalmaz; aynı zamanda öğrencilerin matematiksel kavramları anlamlandırma ve yapılandırma süreçlerinde rol üstlenir. Öğrenen tarafından aktif biçimde kullanılan bir araç, zamanla yalnızca bir fiziksel nesne ya da komut aracı olmaktan çıkar; öğrenenin zihinsel yapılarıyla bütünleşerek enstrümantal bir işlev kazanır. Başka bir ifadeyle, araçlar kullanım süreci içerisinde öğrenenin matematiksel şemalarının bir bileşeni hâline gelir. Bu nedenle,

araçların öğrenme sürecindeki dönüşümünü ve öğrenen tarafından anlamlandırılarak işlevsel hâle getirildiğini kavramak, etkili bir öğretim süreci tasarlamak açısından kritik öneme sahiptir. Bu yaklaşım, araç ile artefakt arasındaki dönüşümü merkeze alan Enstrümantal Yaklaşım'ın temel varsayımlarıyla örtüşmektedir.

2.3.3. Araç-Enstrüman İlişkisi

Bireyin artefaktı kendine uygun hale getirmesiyle ve aktivitesine uyarlamasıyla meydana gelen psikolojik bir yapı inşası enstrüman olarak tanımlanır. (Trouche, 2004; Trouche, 2005; Tabach, 2011; Drijvers & Gravemeijer, 2005). Artefakt, verilen soyut bir nesne, bir materyal olup (Trouche,2004; Trouche,2005; Tabach,2011; Drijvers ve Gravemeijer, 2005); enstrüman, vücudun bir uzantısı; artefakt öğelerinde oluşan fonksiyonel bir organ ve kendi kendine var olamayan psikolojik bir öğedir (Trouche, 2004). Verillon ve Andreuccı (2006) artefaktın nesnel dünyaya ait olduğunu ve kullanıcının fiziksel ya da psikolojik olarak katılımının olmadığını beyan ederken; enstrümanın özne ile dünya arasındaki arayüz olduğuna ve kullanıcının fiziksel ve psikolojik olarak işin içinde olduğuna dikkat çekmektedir. Rabardel (1995) ve Verillon ve Rabardel (1995) artefaktın, görevden bağımsız olduğunu; enstrümanın, görevi yerine getirmeye çalışan kullanıcı ile artefakt arasında anlamlı bir ilişki olduğunda; aracın aktiviteye aracılık ederek gelişmesiyle oluştuğunu belirtmektedir. Trouche (2004) artefaktın verildiğini, enstrümanın ise aktivite süresince inşa edildiğini; artefaktın kullanmadan, tanımadan, alışmadan önceki halidir; enstrümanın ise kullandıkça aktif olarak inşa edilen ve böylece daha tanıdık, alışılmış hale gelmiş hali olduğunu ifade etmektedir. Artefakttan enstrümana dönüş süreci boyunca kullanıcı, problem çözme stratejilerini düzenleyen zihinsel şemalar geliştirmektedir. Aynı zamanda aracın teknik kullanımını da organize etmektedir (Drijvers & Gravemeijer, 2005). Matematiksel artefaktın matematiksel işlemler yoluyla bir enstrüman haline geldiği süreç 'kişisel şemaların inşasını veya daha genel olarak önceden var olan sosyal şemaların uygun hale getirilmesini' kapsamakta ve artefakt, zihinsel şemaların geliştirilmesiyle bir enstrümana dönüşmektedir (Drijvers & Gravemeijer,2005).

Enstrüman = Artefakt+ Şema (Drijvers & Trouche, 2008).

Drijvers vd. (2013) artefakttan enstrümana geçişi bir örnekle şu şekilde açıklamıştır: harflerin kullanımı bilinmedikçe kalem, yazmak için işe yaramaz bir artefakttır, ancak yazmayı öğrendikçe bir çizim artefaktı olmaktan çok daha fazlası haline gelip yazı yazmak için de kullanılan bir artefakt haline dönüşür ve gelişen becerilerle birlikte yazı yazma enstrümanı haline gelir.

Şekil 5

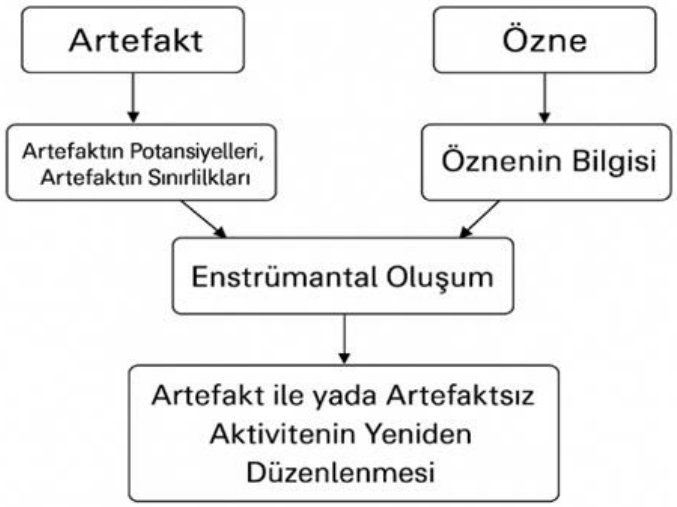
Artefaktan Enstrümana Geçiş Örneği



Verillon ve Rabardel (1995)'e göre kullanıcının, aracı kullanırken geliştirdiği ve geliştirmeye devam ettiği şemalarla birlikte araç, kullanıcının elinde enstrümana dönüşmektedir (Tabach, 2011). Artefakt-enstrüman ilişkisi açısından enstrümantal oluşum sürecini aşağıdaki şekilde açıklanabilir (Guin & Trouche,1998):

Şekil 6

Artefakt- Enstrüman İlişkisi Yönüyle Enstrümantal Oluşum (Guin &Trouche,1998)



Not. Trouche, 2004, s.289'dan uyarlanmıştır.

Bir artefacttan çeşitli enstrümantal oluşumlar ile farklı enstrümanlar ortaya çıkabilir; tüm bunlar konuya, özneye ya da verilen göreve göre değişir (Maschietto ve Soury-Lavergne, 2013). Enstrümantal oluşum zaman gerektiren uzun, karmaşık ve zor bir süreçtir (Verıllon & Andreuccı, 2006; Ruthven, 2002; Trouche, 2004). artefaktın özellikleri (potansiyelleri ve

sınırlılıkları), öznenin aktivitesi, kişinin bilgisi ve çalışma yöntemleri ile yakından ilişkili olmaktadır.

Bireyin bir artefaktı enstrümana dönüştürme sürecinde, kullanıcının kişisel tercihleri, deneyimleri ve ihtiyaçları belirleyici bir rol oynamaktadır. Artefaktın sahip olduğu potansiyel ve sınırlılıkların fark edilmesiyle birlikte enstrümantalizasyon süreci başlamaktadır. Bu süreçte birey, artefaktı kendi öğrenme amaçlarına uygun şekilde kişiselleştirmekte ve özelleştirmektedir (Trouche, 2004). Böylece, söz konusu nesne bir enstrüman hâline gelmekte ve bireysel kullanımın bir ürünü olarak yeniden şekillenmektedir.

2.3.4. Enstrümantalizasyon

Artefactın birey tarafından kullanımını kolaylaştıracak şekilde şekillendirildiği ve kişiselleştirildiği, aracın potansiyel ve sınırlılıklarının bilinmeye başlandığı sürece enstrümantalizasyon (instrumentalization) denilir (Drijvers & Trouche, 2008; Drijvers vd., 2013). Bir bireyin algıları ve tercihleri artefactı kullanma şeklini değiştirir ve hatta belki de artefactı değiştirmeye ve düzenlemeye yol açar. Bu süreç enstrümantal oluşumun artefact odaklı bileşenidir (Trouche, 2004). Enstrümantalizasyon artefactın kendiyle ilgili olan farklılaşma sürecidir ve bu süreç ilgili işlevlerin seçilmesi ve keşfedilmesi, artefaktın özelleştirilmesi ve dönüştürülmesi gibi farklı aşamalardan geçebilmektedir (Trouche, 2005). Bu aşamalarda birey hangi aracı kullandığını ve nasıl kullanılabileceğini araştırarak bir enstrüman oluşumuna hazırlanır (Özdemir Erdoğan, 2016). Enstrümantasyon sürecinde bireyler, verilen görevi yerine getirmeyi kolaylaştıracak şekilde kullanmak için artefaktı içselleştirmeli ve farklı çözümler üretmelidir (Rivera & Becker , 2007).

Enstrümantalizasyon sürecinde birey, bir artefaktı kişiselleştirerek kullanımını şekillendirir; bu kişisel gelişim, enstrümantasyon sürecini de etkilemektedir. Noss ve Hoyles (2003), enstrümantasyon sürecini, artefaktın sınırlılıklarını anlama ve aşma çabalarını içeren bir süreç olarak tanımlamaktadır. Bu bağlamda, artefaktın içsel sınırlılıkları, komut sınırlamaları ve kısıtlamaları, enstrümantasyon sürecinin önemli unsurlarını oluşturmakta ve enstrümantasyon sürecinin temel unsurlarından biri olan kullanıcının şemaları, aracın özellikleriyle etkileşerek matematiksel düşünce becerilerinin gelişimine katkı sağlamaktadır.

2.3.5. Enstrümantasyonn

Noss ve Hoyles enstrümantasyon sürecinin, artefact konusunu etkilediğini söylemiş; aktiviteyi, bazı sınırlılıkları ile beraber kişinin geliştirmesine izin veren (Noss & Hoyles,1996 akt. Trouche, 2004); aracın sınırlılıkları ve olanaklarının öğrencinin görevi yerine getirme

biçimini etkilediği ve ortaya çıkan ilgili kavramları da etkileyen bir süreç (Noss ve Hoyles, 2003) olarak tanımlamaktadır. Noss ve Hoyles (2003), dijital teknolojilerin matematiksel anlamayı nasıl etkilediğini ve öğrencilerin bu teknolojilerle nasıl etkileşime girdiğini ele almışlardır. Bu çalışmada, teknolojik araçların öğrenme süreçlerinde nasıl dönüştürüldüğü ve kişiselleştirildiği üzerine odaklanılmıştır. Bu yaklaşım, enstrümantasyon sürecinin temel bileşenlerinden biri olan artefaktın birey tarafından kişiselleştirilerek anlamlı bir öğrenme aracına dönüşmesini açıklayan bir örnek sunmaktadır.

Guin ve Trouche enstrümantasyon sürecini anlayabilmek için öncelikle artefactın sınırlılıklarını, yapabilirliklerini anlayabilmenin önemine vurgu yapmakta ve üç tür sınırlılıktan bahsetmektedir:

- Içsel sınırlılıklar: yazılımla ilgili
- Komut sınırlaması: çeşitli komutların varlığı, şekli ve biçimi ile ilgilidir.
- Organizasyon kısıtlaması: artefact ile kullanıcı arasındaki arayüzün organizasyonu ile ilgilidir (Guin &Trouche, 2002).

Enstrümantasyon sürecinin tanımında geçen sınırlılıktan kasıt, ‘kullanıcıyı tek bir yola iten ve diğer yoldan uzaklaştıran’ iken; etkinleştirmeden kasıt ise ‘kullanıcının görevleri etkili bir şekilde yapabilmesini sağlayan’ olmuştur (Noss ve Hoyles, 1996; Trouche, 2004). Enstrümantasyon sürecini oluşturan iki temel unsurdan birinin aracın özellikleri, diğerinin ise bu süreçte kişilerin oluşturduğu şemalar olduğu söylenebilir.

Öğretmen, enstrümantasyon sürecini öğrenci grubuna uygun şekilde yönlendirerek karşılaşılan zorlukları öğrenme fırsatlarına dönüştürmeli ve öğrencilerin şemalarını zenginleştirerek matematiksel gelişimlerine rehberlik etmelidir (Trouche, 2004). Bu doğrultuda, öğrenme ortamları oluşturan öğretmen, öğrencilerin sürece bilinçli katılımını sağlayarak enstrümantal oluşumlarını desteklemektedir.

2.3.6. Enstrümantal Oluşumda Öğretmen Rolü

Öğrencilerin enstrümantal oluşum süreçlerini anlamaları için bu süreci yöneten öğretmenlere ve öğretimi tasarlayan öğretim mühendislerine (Trouche, 2004) çok önemli görevler düşmektedir. Öğretmenlerin ensrtümantal oluşum sürecinde dikkat etmesi gerekenlere aşağıda yer verilmektedir. Tek bir öğrenciyle ya da bir sınıfta yapılan enstümantal oluşum süreci arasında önemli bir fark olduğu için öğretmenin ne tür bir öğrenci grubuyla çalıştığını bilmesi ve ortamı buna göre düzenlemesi hayati önem taşımaktadır (Hoyles vd., 2004).

Trouche (2004)’a göre, bir artefakt çeşitli enstrümanlara ve şemalara yol açabileceğinden, öğretmenin artefaktları düzenleme şekli önemlidir. Örneğin; Hesap

makinelerinin ekranları küçük olduğu için sosyalleşememe bir sınırlama olarak görülür ve hesap makinesinin ekranı yansıtılabilir (Trouche, 2004). Guin ve Trouche (1998)'a göre öğrencilerin ve öğretmenin, diğerlerinin ekranlarını görmesi enstrümantal oluşum sürecinde farklı yaklaşımların farkına varmasını sağlamakla beraber ve bilginin inşasında gerekli olan sosyal yöndeki boşluğu da doldurmaktadır. Bartolini Bussi (1998), öğrenenlerin enstrümantl eylemler geliştirmelerine yardımcı olacak en önemli faktörün, öğretmenlerin sınıfta anlamlı matematiksel tartışma ortamları oluşturabilmeleri ve destekleyebilmeleri olduğunu belirtmektedir (Rivera & Becker, 2007). Trouche (2004) etkinliklerin öğrencinin yapısına göre düzenlenmesi ve orkestrasyonun farklı adımlara bölünmesi gerektiğini belirtmektedir. Birinci adımda öğrenci problemi anlamalı ve kendisine uyarlamalı, ikinci adımda bazı özel örnekler keşfedilmeli, üçüncü adımda ise çeşitli varsayımlar tartışılmalıdır (Trouche, 2004). Orkestrasyonda kişisel şemaları ve matematiksel teknikleri yeniden düzenlemeye, geliştirmeye ve üretmeye çalışmak gerekli görülmektedir (Ruthven, 2002). Psikolojik olarak başarılı bir entegrasyon süreci geçirebilmeleri için, etkinlikleri uyarlamak için öğrencilerin profiline saygı gösterilmeli ve rehberlik süreci, daha zayıf öğrencilerin bilinçsizce çalışmasını önlemek için özel olarak düzenlenmelidir (Guin & Trouche, 1998).

Ndlovuve arkadaşları'na (2011) göre, öğretmen, bir artefaktın enstrümana dönüşüm sürecinde öğrencinin matematiksel bilgi ve anlayışını geliştirirken, aynı zamanda öğrenenin şemalarını zenginleştirmesine yardımcı olmalıdır. Drijvers ve Gravemeijer (2005) ise, öğrencilerin karşılaştıkları zorlukların öğrenme fırsatları sunduğunu ve bu zorlukların fırsata dönüştürülmesinde öğretmenin önemli bir rol oynadığını vurgulamaktadır. Ayrıca, öğrencilerin fazla çaba gerektiren araçları kullanırken bu araçlara yönelik farkındalık geliştirmeleri ve kendi öğrenme süreçlerini sorgulamaları gerektiğine dikkat çekmektedirler.

Öğretmenin yönlendirici rolü, öğrencilerin farklı artefaktlarla etkileşim kurmasına olanak tanımakta ve bu etkileşim, tekniklerin gelişimiyle birlikte şemaların oluşumuna katkı sağlamaktadır.

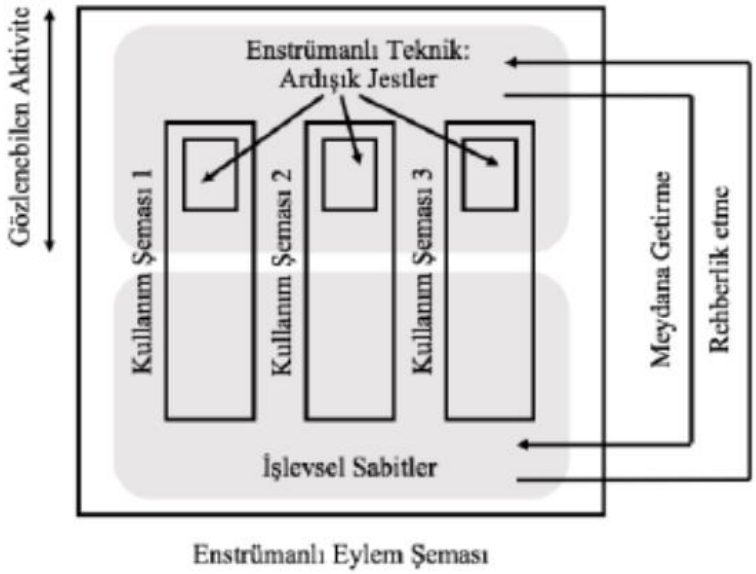
2.3.7. Bilgi Yapılandırılmasında Teknik ve Şemalar

Rabardel (akt. Trouche, 2003; 2004), bir görevin gerçekleştirilmesi ile ilişkilendirilen bir araçla aktiviteyi düzenleyen bir şema olarak tanımladığı "aracın faydalanma şemasını (utilization scheme of an artifact)" ikiye ayırmıştır. Bunlardan birincisi, aracın idaresine yönelik olan kullanım şemaları (usage schemes), diğeri ise belirli bir görevi yerine getirmeye yönelik olan enstrümanlı eylem şemalarıdır (instrumented action schemes). (Şekil 7). Kullanım

şemaları doğrudan araçla bağlantılıdır ve daha genel olan enstrümanlı eylem şemalarına basamak oluşturur (Drijvers & Gravemeijer, 2005; Trouche, 2000).

Şekil 7

Şema, teknik, jest ve işlevsel sabitler arasındaki ilişkiler



Not. Trouche, 2005, s.155'den uyarlanmıştır.

Kullanım şemaları ile enstrümanlı eylem şemaları arasındaki fark her zaman açık değildir; bu bazen kullanıcının seviyesiyle bazen de gözlemin düzeyi ile ilgilidir (Drijvers & Gravemeijer, 2005). Bu sebeple, bu alanda çalışma yapan araştırmacılar faydalanma şemasına (utilization scheme) enstrümanlı eylem şeması (instrumented action scheme) kavramını kullanmaktadır (Drijvers & Gravemeijer, 2005; Trouche, 2004). Bu çalışmada da şema kavramı Rabardel'in tanımladığı anlamda faydalanma şeması (utilization scheme) olarak ele alınmış olup, bahsi geçen çalışmalar ışığında enstrümanlı eylem şeması şeklinde ifade edilmiştir. Lagrange (akt. Drijvers & Gravemeijer, 2005) matematikte kurallı çalışmanın sadece beceriler ve prosedürler olarak görülmemesi gerektiğini, bunun aksine belli bir konudaki kurallı çalışmanın bir grup kurallar ve metotlardan (tekniklerden) oluştuğunu, çünkü bunların daha az özel olduğunu ve prosedürlere göre daha etkili olduğunu vurgulamaktadır. Ayrıca teknikler kavramsallaştırma ve bağlantılı eylemler bakımından öğrenme ve öğretme sürecinde temel bir role sahiptir, yani; teknikler matematiksel nesneleri anlamada kurucu bileşenlerdir (Trouche, 2005). Bu anlayışla enstrümanlı teknikler teknolojik ortamlarda özel bir problem türünü çözmek için kullanılan kurallar ve metotlar (teknikler) kümesi olarak ele alınabilir (Drijvers & Gravemeijer, 2005). Bu yüzden enstrümanlı teknik gözlenemeyen enstrümanlı eylem şemasının gözlenebilen bir parçası olarak düşünülebilir (Trouche, 2005). Enstrümanlı teknikler

enstrümanlı eylem şemalarının dışsal ve gözlenebilen bir parçası iken, enstrümanlı eylem şemaları enstrümantal oluşumun görünmeyen zihinsel yönüne vurgu yapmaktadır (Drijvers & Gravemeijer, 2005). Bu bilgilere dayanarak, bu çalışmada enstrümanlı eylem şeması ifadesi ile bir görevi yerine getirirken kullanılan enstrümanlı teknikler ve bu tekniklere rehberlik eden işlevsel sabitlerden oluşan bilişsel bir yapı (Trouche & Drijvers, 2010) kastedilmiştir. Enstrümantasyon sürecinin anlaşılmasında aracın imkân ve kısıtlarının da dikkate alınması gerekmektedir (Guin & Trouche, 2002). Bu bağlamda ilgili alan yazında bir araç için üç tür kısıttan söz edilmektedir (Guin & Trouche, 2002; Trouche, 2003; 2005). Bunlar; işlemcinin doğası, hafıza kapasitesi, ekranın yapısı gibi doğası itibariyle donanımla bağlantılı içsel kısıtlar (internal constraints), bazı komutları önceden programlamak bazılarını ise programlamamak gibi aracı tasarlayan kişinin seçimi ile bağlantılı olan bir diğer değişle, çeşitli komutların yapısı ve varlığıyla bağlantılı olan komut kısıtları (command constraints) ve özellikle klavye, menü ya da daha genel ifadeyle araçla kullanıcı arasındaki ara yüzün organizasyonu ile bağlantılı olan, diğer bir değişle ergonomi ile ilgili olan organizasyon kısıtlarıdır (organization contraints). Sonuç olarak birey verilen aracı isteğine göre kullanmada özgür değildir (Trouche, 2005) ve aracın bu kısıtları kullanıcının kavramsal gelişimini şekillendirmektedir (Drijvers & Gravemeijer, 2005).

Dolayısıyla, enstrümantal oluşum sürecinde teknikler, şemalar ve bu şemaları yönlendiren kısıtlar arasındaki etkileşim, öğrenmenin yapılandığını anlamak için zemin oluşturmakta olup, öğrencilerin bilgiyi edindikleri kadar, onu nasıl dönüştürüp yeniden yapılandırdıkları da önem kazanmaktadır. Bu bağlamda, yapılandırmacı yaklaşım öğrenme-öğretme sürecinin açıklanmasında ve ders tasarımlarının şekillendirilmesinde kuramsal ve yol gösterici bir çerçeve sağlamaktadır.

2.4. Yapılandırmacı Yaklaşım

Yapılandırmacılık, Ausubel'in öğrencinin hazır bilgisinin öğrenmeye etkisi hakkındaki düşüncelerine dayanan bir bilgi ve öğrenme kuramıdır (Cunningham & Piburn, 1997). Bu teori, öğrenme sırasında temelden başlayarak öğrenciye öğretme ilkesine dayanmaktadır. Öğrencilerin bilgiyi nasıl öğrendiklerine dair bir teori olarak gelişmeye başlayan yapılandırmacılık, zamanla öğrencilerin bilgiyi nasıl yapılandırdıkları sorusunu sorgulayan bir teori haline gelmiştir. Yapılandırmacılığın içerdiği şey, bilginin transferi ve yeniden yapılandırılmasıdır. Öğrencinin bilgiyi yapılandırması, oluşturması, yorumlaması ve geliştirmesine odaklanan bir öğrenme yaklaşımıdır. Gelenekselin dışında kalan bu öğrenme biçiminde bilgi alınmaz, yapılandırılır. Öğrenci yeni bilgilerle karşılaştığında bu bilgileri

çevresiyle uzlaştırmaya çalışmalıdır. Yapılandırmacılık, çevre ile insan beyni arasında bir bağ kurmaktır ve ancak bu bağ kurulduğunda amacına ulaşır. Bu yaklaşımda öğretmen merkezli eğitime öncelik verilmekte ve öğrencilerin davranışlarından çok zihinsel becerilerinin geliştirilmesine önem verilmektedir (Gürol, 2005; Özmen, 2004).

Bu yaklaşımla birlikte öğrenme ve eğitimin tanımında, ilkelerinde, müfredatında, ölçme ve değerlendirmesinde, sınıf yönetiminde, öğretmenin rollerinde, okul yönetiminde, denetim ve rehberlikte önemli değişiklikler olmuştur. Yapılandırmacı yaklaşıma göre bilginin zihinde yapılanması özümseme ve alışma olmak üzere iki aşamada gerçekleşir. Yeni bilgiler önceki bilgileriyle çelişmiyorsa kolayca özümsenir ve kalıcı bilgiler olarak hatırlanır. Ancak yeni bilgi, bireyin daha önce öğrendiği bilgilerle çelişiyorsa, yeni bilgilerin zihne yerleşebilmesi için zihinsel bir düzenleme yapılır. Mevcut zihinsel şemalar düzenlenir ve yeni duruma uyarlanır. Kişi yeni bilgilere uyum sağlayarak zihnini dengeler. Böylece özümseme, düzenleme ve denge yoluyla yeni bilgiler öğrenir. Kişi daha önce öğrendiği bilgilere özgün bir anlam katar, zihninde oluşturduğu düzen ile ilişkilendirir ve ezberden uzak bir öğrenme gerçekleştirir.

Bu araştırma, yapılandırmacı yaklaşımı kullanarak ders hazırlamak için son derece uygundur. DGY sayesinde öğrenci, bilgisayar başında derse girerken çevresiyle etkileşime girerek ve aktif çaba göstererek öğrenir. Öğrenci, soru sorarak ve problem çözerek bilgiyi aktif olarak alır ve işler, önceki bilgileriyle bağlantı kurar, kendi yorumlarını katar ve zihnine yerleştirir. Öğrenciler birbirleriyle etkileşime girerek, iletişim kurarak ve kendilerini ifade ederek öğrenirler. Öğrenci soruları ile kendi anlayışlarını oluştururken bir yandan da sınıf arkadaşlarının gelişimine katkıda bulunurlar. Bilgiyi doğrudan alır, önceki bilgilerle ilişkilendirir, harmanlar, kendinden bir şeyler katarak analiz eder, ezberden ve ham bilgiden uzak bir öğrenme gerçekleştirir (Arcavi &Hadas, 2000). Yapılandırmacılık dâhilinde E5, E7, RBC gibi pek çok model bulunmaktadır. Bu modellerden biri olan RBC+C bu tezin ders planlarının yapılmasında konu olan modeldir. RBC+C soyutlama modeli aşağıda sunulmuştur.

2.4.1. RBC+C Soyutlama Modeli

Tanıma, kullanma ve oluşturma eylemleri sonucunda öğrencinin yeni bir yapı oluşturması, oluşturulan bu yeni yapıya her zaman özgürce ve esnek bir şekilde erişilebileceği anlamına gelmemektedir (Dreyfus vd., 2015). Çünkü öğrenci oluşturduğu yeni yapının tam olarak farkında bile olmayabilir ya da oluşturduğu yeni yapı yalnızca belirli bir bağlamda, belirli koşullar altında, belirli temsillerde ve belirli türden problemlerle uğraşırken öğrencinin tanımasına yol açabilir. Ayrıca yeni oluşturulan yapılar oldukça kırılgandır. Bu nedenle yeni

oluşturulmuş bilgileri sağlamlaştırmak için soyutlama sürecinin daha ileri aşamalarına ihtiyaç vardır (Tsamir ve Dreyfus 2005).

Bu ihtiyacı gidermek amacıyla Dreyfus ve Tsamir, 2004 yılında yaptıkları çalışmada modele "pekiştirme" eylemini de ekleyerek modeli RBC+C modeli olarak geliştirmişlerdir. Böylece model tanıma (recognizing), kullanma (building-with), oluşturma (constructing) eylemlerinin yanında pekiştirme (consolidation) eylemini de içeren bir model haline gelmiştir.

Pekiştirme, öğrencinin kendi oluşturduğu yapısının farkına vardığı ve yapıyı kullanmadaki güveninin arttığı; yapının ise giderek daha az kırılgan ve daha fazla kullanılabilir hale geldiği sürekli devam eden bir süreçtir (Tsamir ve Dreyfus 2005). Öğrenciler yeni oluşturdukları yapıları ne kadar çok pekiştirirlerse, yeni yapılar o kadar anlamlı ve erişilebilir hale gelir ve öğrenciler karşılaştıkları zorluklara karşı daha özgüvenli ve dirençli olurlar (Ozmantar & Monaghan, 2007).

Pekiştirme yani yeni oluşturulan yapının sağlamlaştırılması; öğrencilerin oluşturdukları yeni yapıyı, daha sonra ihtiyaç duyduğu durumlarda tanımasına ve kullanmasına olanak sağlar. Oluşturulan yeni yapı daha sonradan karşılaşılan bir problemde tanındığında ve kullanıldığında giderek daha sağlam bir hale gelir. Bu nedenle pekiştirme; tanıma, kullanma ve oluşturma eylemlerinden bağımsız değil, aksine bu eylemler ile iç içe geçmiş haldedir (Dreyfus vd., 2006).

Tüm bunlardan yola çıkarak Dreyfus vd. (2001) ortaya koydukları RBC+C soyutlama modelinin işleyişini yani soyutlamanın oluşumunu üç aşamada özetlemişlerdir:

1. Yeni bir yapıya ihtiyaç duyulması,
2. Var olan yapıların tanınması ve kullanılması sonucu yeni bir soyut yapının oluşturulması,
3. Yeni oluşan soyut yapının sağlamlaştırılması, kişinin bu yapıyı giderek artan bir kolaylıkla tanıması ve daha sonra karşılaştığı durumlarda kullanması.

2.5. İlgili Yayın ve Araştırmalar

Son yıllarda yapılan çalışmalar, dinamik geometri yazılımlarının yalnızca geometri değil aynı zamanda cebirsel ifadelerin öğretiminde de enstrümantal oluşum süreçlerini desteklediğini göstermektedir. Örneğin, Ruiz-López (2018) öğretmen adaylarının GeoGebra kullanarak geliştirdikleri enstrümanlı eylem şemalarını analiz etmiş ve sürükleme tekniklerinin kavramsal anlayışı nasıl şekillendirdiğini ortaya koymuştur. Bretscher (2008) Cabri-Geometre ile yürüttüğü sınıf içi çalışmalarda öğretmenin orkestrasyonunun öğrenci şemalarının

oluşumuna etkisini incelemiş, öğretmen stratejilerinin belirleyici rolünü vurgulamıştır. Alqahtani ve Powell (2017), öğretmenlerin çevrimiçi GeoGebra tabanlı işbirlikçi ortamlarda yürüttükleri etkinliklerde enstrümantasyon süreçlerini derinlemesine incelemiştir. Araştırmada özellikle sürükleme (dragging) eylemleri ve bu eylemler sonucunda gelişen enstrümanlı şemalar odak noktası olmuştur. Bulgular, sürükleme eyleminin yalnızca teknik bir araç olarak değil, öğrencilerin kavramsal ilişkiler kurmasına aracılık eden bilişsel bir köprü olarak işlev gördüğünü ortaya koymuştur. Öğrenciler, sembolik ifadeler ile grafiksel temsilleri dinamik olarak ilişkilendirirken, sürükleme sayesinde hipotez kurma, test etme ve genelleme gibi üst düzey düşünme süreçlerini geliştirmiştir. Çalışma ayrıca, öğretmenlerin çevrimiçi işbirlikçi ortamlarda orkestrasyon stratejilerinin öğrencilerin bu süreçlerden en üst düzeyde fayda sağlamasında kritik rol oynadığını göstermektedir. Özellikle öğretmenlerin, GeoGebra'nın sunduğu çoklu temsil imkânlarını planlı bir pedagojik çerçeve içinde yönlendirmesi, öğrencilerin cebirsel kavramları yalnızca işlemsel değil aynı zamanda kavramsal düzeyde anlamlandırmalarını desteklemiştir. Bu açıdan Alqahtani ve Powell'in çalışması, dinamik geometri yazılımlarının işbirlikçi öğrenme ortamlarındaki potansiyelini vurgulayan önemli bir katkı olarak değerlendirilmektedir.

literatürde cebir öğretiminde teknoloji kullanımının öğrencilerin hem kavramsal hem de prosedürel bilgilerini geliştirdiğine dair bulgular bulunmaktadır. Gregersen (2024) öğrencilerin GeoGebra aracılığıyla fonksiyon kavramını gerekçelendirme süreçlerinde geliştirdikleri enstrümanlı şemaları ayrıntılandırmıştır. Ainsworth, Pratt ve Nardi (2011) cebir öğretiminde çoklu temsillerin dinamik yazılımlarla birlikte kullanılmasının öğrencilerin sembolik, grafiksel ve sayısal düşünme arasında esnek geçiş yapmalarını sağladığını göstermiştir. Ayrıca Sacristán, Calder ve Rojano (2010) Cabri ile yürüttükleri çalışmalarda, öğrencilerin eşitlik ve değişken kavramlarını görselleştirerek daha sağlam enstrümanlı eylem şemaları geliştirdiklerini belirtmişlerdir.

Artigue (2002) ve Haspekian (2005) enstrümantal oluşum teorisini Cabri-Geometri bağlamında kullanarak öğrencilerin cebirsel ilişkileri deneyimleyerek inşa ettiklerini göstermiştir. Godino, Batanero ve Font (2007) ise enstrümantal yaklaşımın, öğrencilerin cebirsel ifadeleri yalnızca işlemsel olarak değil, kavramsal olarak anlamalarını da desteklediğini vurgulamıştır. Ayrıca Drijvers & Trouche (2008) teknoloji destekli cebir öğretiminde öğretmenin orkestrasyonunun, öğrencilerin enstrümanlı şemalarının kalitesini belirlemede kritik olduğunu ortaya koymuştur.

Bir çok çalışmada ortaokul ve üst düzeyi sınıflarında yer alan Cebir alanının öğretiminde, teknoloji destekli öğretimin öğrencilerin erişi düzeyine, tutumuna ve kalıcılığına

etkisi incelenmiştir ayrıca teknoloji destekli ve kağıt-kalem öğretim yöntemleri olmak üzere iki öğretim stratejisinin etkililiği karşılaştırılmış, GeoGebra ve Cabri 3D gibi yazılımların analitik geometri alanını öğretmek için yararlı bir araç olup olamayacağını ve teknoloji destekli öğretimin öğrencilerin çizim yapma başarısı üzerindeki etkililiği araştırılmaktadır (Nwabueze, 2006; Ruthven vd. 2009; Artigue, 2002; Haspekian, 2005; Abdullayeva, 2021; Godwin & Sutherland, 2004; Ardıç & İşleyen, 2018; Ogbonnaya & Mushipe, 2020; Kösa & Karakuş, 2010).

Baccaglini-Frank ve Mariotti (2010), Cabri-Geometri ortamında yaptıkları araştırmada öğrencilerin "maintaining dragging" stratejisini kullanarak genelleme ve ispat süreçlerini destekleyen enstrümanlı eylem şemaları geliştirdiklerini ortaya koymuştur. Öğrencilerin geometrik figürleri sürüklerken değişmeyen özellikleri keşfetmeleri, matematiksel genelleme yapabilme becerilerini geliştirmede önemli bir rol oynamıştır. Bu bulgular, Cabri-Geometri'nin yalnızca görsel bir araç değil, aynı zamanda öğrencilerin düşünsel süreçlerini dönüştüren bir öğrenme ortamı olduğunu göstermektedir. Benzer şekilde, Laborde (2002) tarafından yürütülen çalışmalar, Cabri-Geometri ile tasarlanan görevlerin öğrencilerin kavram inşasında kritik bir araç olduğunu vurgulamaktadır. Laborde'un çalışmasında, öğrencilerin Cabri-Geometri üzerinden gerçekleştirdikleri etkinliklerde geometrik ilişkileri keşfederek kavramsal anlamaya ulaştıkları ve öğrenme sürecinde aktif bir rol üstlendikleri belirlenmiştir. Buna ek olarak, GeoGebra üzerinde yapılan araştırmalar, özellikle ikinci derece ve üstel fonksiyonların parametrik sürgüler yardımıyla incelenmesinin, öğrencilerin cebirsel ve grafiksel temsiller arasında bağ kurmalarına katkı sağladığını göstermektedir (Lagrange, 2010; García-Cuéllar & Martínez-Miraval, 2018). Öğrenciler, parametreleri değiştirerek farklı grafiksel temsiller ürettiklerinde, sembolik ifadelerin grafiksel karşılıklarını daha kolay ilişkilendirmekte ve böylece fonksiyon kavramını derinlemesine anlamaktadırlar. Bu süreç yalnızca teknik bir beceri kazandırmakla kalmamakta, aynı zamanda öğrencilerin kavramsal düzeyde esnek düşünme geliştirmelerine de yardımcı olmaktadır. Son yıllarda yapılan çalışmalar, dinamik geometri yazılımlarının fonksiyon öğretimindeki rolünün giderek öne çıktığını göstermektedir. Sebsibe'nin 2025 yılında gerçekleştirdiği araştırma, dinamik geometri yazılımı destekli ikinci derece fonksiyon öğretiminin öğrencilerin motivasyonunu artırdığını ve kavramsal anlamaya olumlu katkı sağladığını rapor etmiştir. Araştırmada, öğrencilerin yazılım aracılığıyla fonksiyonların özelliklerini somut biçimde gözlemleyebildikleri, parametrelerle oynayarak farklı durumları deneyimledikleri ve bu sayede soyut kavramları daha kolay içselleştirdikleri belirtilmiştir.

Artigue (2002) ve Haspekian (2005) enstrümantal oluşum teorisini Cabri-Geometri bağlamında kullanarak öğrencilerin cebirsel ilişkileri deneyimleyerek inşa ettiklerini göstermiştir. Godino, Batanero ve Font (2007) ise enstrümantal yaklaşımın, öğrencilerin cebirsel ifadeleri yalnızca işlemsel olarak değil, kavramsal olarak anlamalarını da desteklediğini vurgulamıştır. Ayrıca Drijvers & Trouche (2008) teknoloji destekli cebir öğretiminde öğretmenin orkestrasyonunun, öğrencilerin enstrümanlı şemalarının kalitesini belirlemede kritik olduğunu ortaya koymuştur.

Bu çalışma, dinamik geometri yazılımlarıyla zenginleştirilmiş bir öğrenme ortamı sunduğu için öğretmen adaylarının cebirsel ifadeler ve grafik çizimlerine yönelik algılarında olumlu sonuçlar doğurması beklenmektedir. Bilgisayar destekli öğrenme ortamında, öğrenciler bilgiyi pasif olarak almaktan ziyade aktif araştırma yaparak, karmaşık problemleri çözerek ve kendi yöntemlerini geliştirerek öğrenmektedirler. Öğretmenin sunduğu yazılımları kullanarak matematiksel çalışmalar tasarlayabilirler veya öğretmenin hazırladığı senaryolarla etkileşime geçerek yeni bilgileri keşfedebilirler. Bilgiye kendi başlarına ulaşabilir, düzenleyebilir, değerlendirebilir ve organize bir şekilde sunabilirler. Matematiksel sonuçlara ulaşmak için deneyimlerini kullanır, varsayımlarda bulunur ve doğruluğunu çeşitli örnekler üzerinde kontrol edebilirler, dolayısıyla bu araştırma farklı bir öğretim alternatifi olarak yol gösterici nitelik taşımaktadır. Yalnızca cebirsel ifadeler konusunda değil diğer soyut kalmış bütün matematik konularına uyarlanabilecektir (Akpınar, 2006).

Ortaokul ve üst düzeyi sınıflarında yer alan Cebir alanının öğretiminde, teknoloji destekli öğretimin öğrencilerin erişi düzeyine, tutumuna ve kalıcılığına etkisi incelenmiştir ayrıca teknoloji destekli ve kağıt-kalem öğretim yöntemleri olmak üzere iki öğretim stratejisinin etkililiği karşılaştırılmıştır. Bilgisayar cebiri ve kağıt- kalem ortamında birlikte ortaya çıktıkça, teorik düşünme ve teknik arasındaki karşılıklı ilişkiyi ele alınmış ve enstrümental oluşum süreci içinde, öğrencilerin teorik düşünmeleri ile her iki medyada kullandıkları tekniklerin iç içe geçmesini ortaya çıkarmaktadır (Kieran & Drijvers, 2006).

Bu çalışmalara ek olarak özellikle Fransa kökenli araştırmacıların araç kullanımına yönelik çalışmalarının çoğunun cebir konularına yoğunlaştığı görülmektedir (Drijvers & Trouche, 2008; Guin & Trouche, 2002, Rabardel, 2002; Trouche, 2004). Bu konu üzerine yapılan araştırmalarda genellikle yapılandırmacılık (Gürhan, 2015) ve gerçekçi matematik eğitimi (Kaylak, 2014) gibi öğrencinin zihinsel süreçlerinin gözlemlenmesinin oldukça zor olduğu teorik yapıların kullanıldığı görülmüştür. Bu teorik yapılar öğrencinin belirlenen konudaki zihinsel işlemlerini ve ortaya koyduğu şemaları açığa çıkarmakta yetersiz kalmıştır. Bu noktada, Verillon & Rabardel'in (1995) enstrümantal oluşum teorisinin ve Trouche'un

(2004) orkestrasyon yaklaşımının bugün hâlâ geçerli olduğunu, DGS ve GeoGebra tabanlı sınıf çalışmalarında kavramsal anlamayı en iyi açıklayan çerçevelerden biri olarak kullanıldığını göstermektedir. Özellikle öğretmen adaylarıyla yapılan yeni araştırmalarda bu teorinin, soyut matematiksel ifadelerin çoklu temsillerle kavratılmasında etkili olduğu doğrulanmıştır (Hollebrands vd., 2018).

Ayrıca Ruthven, Drijvers ve colleagues (2023) yakın tarihli bir meta-analiz çalışmasında enstrümantal oluşum teorisinin dinamik geometri yazılımları bağlamında en çok cebir öğretiminde kullanıldığını ve öğrencilerin fonksiyonel düşünme becerilerini geliştirdiğini vurgulamıştır. Benzer şekilde, Pierce ve Stacey (2010) Cabri ve GeoGebra'nın enstrüman olarak kullanımının öğrencilere "algebraic insight" kazandırdığını ve kavramsal genellemeleri kolaylaştırdığını rapor etmişlerdir.

Verillon ve Rabardel'in (1995) ortaya attığı enstrümantal oluşum teorisi tıpkı Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şemaları gibi sağlam bir yapı ortaya koymaya yardımcı olmaktadır. Enstrümantal oluşum teorisi, cebirsel ifadelerin ve grafiklerin çizimi konusunda öğrencilere önemli avantajlar sağlamaktadır. Dinamik geometri yazılımları gibi teknolojik araçlar, öğrencilere cebirsel ifadeleri ve grafiklerini görsel olarak gözlemleme ve etkileşimli olarak işlem yapma imkânı sunmaktadır (Trouche, 2004; Kieran & Drijvers, 2006). Bu süreç, öğrencilerin soyut matematik kavramlarını daha iyi anlamalarına katkıda bulunmaktadır (Haspekian, 2005; Godwin & Sutherland, 2004). Öğretmenler, bu teknolojik araçları kullanarak öğrencilere matematiksel düşünme becerilerini geliştirme ve cebirsel ifadeleri grafiksel olarak temsil etme konusunda rehberlik edebildikleri görünmektedir (Artigue, 2002; Drijvers & Trouche, 2008).

Martinez & López (2021) çalışması, GeoGebra ile desteklenen cebirsel ifade çalışmalarında öğrencilerin parametrik işlemlerle kurdukları eylem şemalarının nasıl kavramsal anlamaya dönüşebildiğini göstermiştir ve öğrencilerin sembolik formu grafik ile gerçek zamanlı eşleştirme becerilerindeki gelişimi vurgulmıştır.

Antonini ve Baccaglini-Frank (2016), dinamik geometri yazılımlarında "maintaining dragging" (sürükleme sırasında belirli bir geometrik özelliği koruma) stratejisinin öğrencilerin kavramsal öğrenmelerinde oynadığı kritik rolü ayrıntılı biçimde incelemiştir. Çalışmada, öğrencilerin sürükleme eylemiyle farklı figürler üzerinde deneyler yaptıkları ve bu sırada gözlemledikleri değişmezleri (invariant) fark ederek varsayımlar oluşturdukları ortaya konulmuştur. Bu süreç, özellikle değişken ve parametre ilişkilerinin daha açık bir şekilde anlaşılmasına imkân tanımaktadır. Öğrenciler, sürükleme yoluyla ürettikleri çoklu temsiller sayesinde yalnızca görsel destekten yararlanmakla kalmamakta, aynı zamanda düşünsel

modeller kurarak matematiksel gerekçelendirmelerini daha sağlam temellere oturtabilmektedirler. Çalışma, sürükleme eyleminin öğrencilerin kavramlar arasında bağlantı kurmalarını, soyut ilişkileri somutlaştırmalarını ve kanıt üretme süreçlerine aktif katılım sağlamalarını teşvik ettiğini göstermektedir. Böylece dinamik geometri yazılımı, yalnızca bir araç değil, aynı zamanda öğrencilerin bilişsel gelişimini yönlendiren güçlü bir enstrümantal oluşum mekanizması olarak tanımlanmıştır.

Vízek (2024) çalışması, dinamik geometri yazılımlarının öğrencilerin kavramsal bilgi yapılarını derinleştirdiğini deneysel ve tasarım odaklı bir analiz ile ortaya koymaktadır. Araştırmada, "dragging family" temelli görevlerin öğrencilerin geometrik ve cebirsel düşünme süreçlerinde enstrümantal oluşum şemalarına dönüştüğü incelenmiştir. Özellikle öğrencilerin sembolik, grafiksel ve dinamik temsiller arasında geçiş yapmalarını sağlayan sürükleme eylemleri, onların kavramsal kavrayışlarını geliştirmede etkili olmuştur. Öğrenciler, şekilleri sürükleyerek farklı temsiller üretmiş ve bu süreçte değişken-parameter ilişkilerini daha iyi anlamışlardır. Böylece dinamik geometri yazılımlarının yalnızca görsel destek değil, aynı zamanda öğrencilerin eylem şemalarını giderek otomatikleştiren ve enstrümantal oluşumu içselleştirmelerinde katalizör rolü oynayan güçlü bir düşünsel araç olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Borg & Fahlgren (2025) çalışması, dinamik geometri yazılımlarının ötesine geçerek, programlama ortamlarında öğrencilerin limit kavramlarını kullanarak enstrümamlı eylem şemalarının geliştirdiklerini deneysel bir vaka çalışmasıyla ortaya koymaktadır. Araştırma, özellikle öğrencilerin belirli bir kod yapısını kullanarak sayısal olarak limit bulma stratejilerini nasıl yapılandırdıklarını analiz etmiştir. Bu süreç, yazılımın teknik kullanımından kavramsal anlamaya geçişte, "enstrümantal oluşum" sürecinin bir katalizör işlevi gördüğünü göstermektedir. Elde edilen bulgular, bu şemaların hem yüz yüze hem çevrimiçi ortamlar için geçerli olduğunu ve çalışmanın teorik çerçevesine güçlü metodolojik bir temel sunduğunu ortaya koymaktadır.

Aliu ve arkadaşları (2025), GeoGebra'yı temel alan bir öğretim yaklaşımıyla lise öğrencilerinin vektör kavramlarını kavramsal ve işlemsel düzeyde ne ölçüde geliştirebildiklerini incelemiştir. Araştırmalar, coğrafi temsillerle sembolik ifadeler arasında GeoGebra aracılığıyla kurulan etkileşimli bağların, öğrencilerin derinlemesine anlayış geliştirmelerine olanak sağladığını göstermektedir. Öğrenciler, sembolik formülleri dinamik grafiklerle eşleştirirken soyut kavramları somutlaştırabilmekte ve bu süreç görsel-temsi ve sembolik-temsil dönüşümlerini kolaylaştırmaktadır. Özellikle, GeoGebra'nın sunduğu

sürükleyici dinamik ortamların öğrencilerin kavramsal tutarlılığı artırarak, kavramları birden fazla temsille anlama ve uygulama yetilerini güçlendirdiği bulgulanmıştır.

Ziatdinov ve Valles (2022) araştırmasında, öğrencilerin GeoGebra aracılığıyla sembolik ifadeleri dinamik grafiklerle ve programlama bileşeni ile birlikte kullanarak çoklu temsiller arasında geçiş yaptıkları, bu sayede cebirsel genellemeleri daha kavramsal bir düzeye taşıdıkları nicel olarak desteklenmiştir. Bu yaklaşım, sadece görsel destek sağlamakla kalmayıp, öğrencilerin bilişsel şema (eylem şeması) gelişimlerine katkıda bulunan bir araçsallaşma süreci olarak işlev görmektedir.

Hayati & Ulya (2022) çalışmasında, dinamik geometri yazılımı kullanılarak öğrencilerin dönüşüm geometrisi kavramlarındaki kavramsal anlayışlarının geliştiğini nitel analizle incelenmiştir. Araştırma, öğrencilerin sembolik ifadeleri, grafiksel temsil ve dönüşümsel süreçlerle ilişkili olarak daha güçlü bilişsel şemalar inşa ettiklerini ortaya koymuştur. Yazılımın dinamik ve görsel destekli ortamı, soyut kavramların somut görsel temsillerle anlamlandırılmasını kolaylaştırmıştır. An Thi Tan Nguyen ve arkadaşları (2023) ise ters-yüz sınıf modeli ile birleşik GeoGebra kullanımının, öğrencilerin matematik problem çözme becerilerini ve öğrenme tutumlarını olumlu yönde etkilediğini nicel olarak göstermişlerdir. Bu eğitsel model, öğrencilerin sembolik–grafiksel temsilleri etkileşimli bir şekilde kullanmasını destekleyerek, kavramsal genellemeleri daha sağlam bir temelde kurmalarına yardımcı olmuştur.

Aldon, Cusi, Schacht ve Swidan (2021) çalışmalarında, farklı ülkelerdeki matematik öğretmenlerinin dijital teknolojileri nasıl kullandıklarını incelemiş ve özellikle öğretim süreçlerinde teknoloji entegrasyonunun öğrencilerin matematiksel kavramları anlamlandırmalarına katkı sağladığını ortaya koymuştur. Araştırmada, dijital araçların sadece içerik sunumunda değil, aynı zamanda öğrencilerin farklı temsiller arasında geçiş yapmalarına ve kavramsal ilişkiler kurmalarına olanak tanıdığı vurgulanmıştır. Bulgular, teknoloji destekli öğrenme ortamlarının öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini daha görünür ve erişilebilir kıldığını göstermektedir. Bu sonuçlar, cebirsel ifadeler ve fonksiyon öğretiminde Cabri-Geometri gibi dinamik geometri yazılımlarının kullanılmasının, öğrencilerin kavramsal öğrenmelerine güçlü bir destek sunduğunu teyit etmektedir.

Turgut ve Drijvers (2021), öğrencilerin cebirsel denklem sistemlerini Dinamik Geometri Yazılımı kullanarak çözerken geliştirdikleri dört ayrı enstrümantasyon şemasını (parametre şeması, cebir-geometri birleşik şeması, figürler kesişimi şeması, echelon-form şeması) incelemiştir. Çalışma, dinamik geometri yazılımı ile cebirsel ve geometrik düşünmenin nasıl iç içe geçtiğini göstermesi açısından dikkat çekmektedir. Salazar ve arkadaşları (2025) ise

öğretmenlerin GeoGebra kullanarak dörtgenlerle ilgili matematiksel çalışmalarında teknolojik içerik bilgisi ve özgüvenlerinin geliştiğini ortaya koymuştur. Bu bulgu, teknolojik araçların öğretmenlerin pedagojik yeterliliklerini güçlendirdiğini göstermektedir. Benzer biçimde, Turgut ve Drijvers (2021) öğrencilerin cebirsel denklem sistemlerini Dinamik Geometri Yazılımı kullanarak çözerken geliştirdikleri dört farklı enstrümantasyon şemasını (parametre şeması, cebir-geometri birleşik şeması, figürler kesişimi şeması ve echelon-form şeması) analiz etmiştir. Bu çalışma, dinamik geometri yazılımlarının öğrencilerin cebirsel ve geometrik düşünmelerini nasıl bütünleştirdiğini göstermesi açısından dikkat çekicidir. Bu bulgular, Aldon vd. (2021)'in dijital teknolojilerin öğretmen uygulamaları üzerindeki etkilerini ortaya koyan çalışmasıyla birlikte düşünüldüğünde, hem öğretmenlerin pedagojik yeterlilikleri hem de öğrencilerin kavramsal gelişimleri açısından dijital teknolojilerin güçlü katkılar sunduğunu göstermektedir.

Villa-Ochoa ve Suárez-Téllez (2022), bilgisayar cebir sistemleri (CAS) ve dinamik geometri yazılımlarının (DGS) matematiksel modelleme ve akıl yürütme becerilerine katkılarını ele almış; bu teknolojilerin öğrencilerin kavramsal yapılarını zenginleştirmede epistemolojik, ontolojik ve bilişsel düzeyde önemli araçlar olduğunu vurgulamıştır. Bulgular, Cabri veya GeoGebra tabanlı dinamik ortamların, öğrencilerin cebirsel ifadeleri kavramsallaştırmalarında ve çoklu temsiller arasında geçiş yapmalarında birer düşünsel araç (cognitive tool) işlevi gördüğünü desteklemektedir.

Weigand, Hollebrands ve Maschietto (2025), 2013–2024 döneminde yayınlanmış geometri eğitimi araştırmalarını PRISMA yöntemiyle inceleyerek, argüman geliştirme, ispatlama, problem çözme, modelleme gibi bilişsel süreçlerin yanı sıra düzlem ve uzay geometri, ölçme, değerlendirme, oyunlaştırma ve hesaplamalı düşünme başlıklarındaki eğilimleri belirlemiştir. Bulgular, DGy gibi dinamik ortamların bu becerileri destekleyen araçlar olarak eğitimdeki yerini vurgulamaktadır. Buna ek olarak, Seloane, Ramaila ve Ndlovu (2023) mühendislik öğrencileriyle yürüttükleri çalışmada, GeoGebra temelli modelleme aktivitelerinin karmaşık sayılar alanında hem kavramsal hem de işlemsel anlamda güçlü gelişimlere katkı sağladığını ortaya koymuştur; öğrenciler, soyut matematiksel ifadeleri somutlaştırma ve farklı temsiller arasında geçiş yapma becerilerini kazandıklarını göstermişlerdir.

Sonuç olarak, güncel araştırmalar dinamik geometri yazılımlarının yalnızca birer görselleştirme aracı olmanın ötesinde, öğrencilerin kavramsal anlamalarını, problem çözme becerilerini ve çoklu temsiller arasında kurdukları ilişkileri derinleştiren güçlü bir enstrüman hâline geldiğini ortaya koymaktadır. Cabri ve GeoGebra gibi yazılımlar aracılığıyla öğrenciler, cebirsel ifadeleri yalnızca sembolik düzeyde değil; grafiksel, parametrik ve dinamik düzeylerde

de deneyimleyebilmekte ve bu süreçte “enstrümanlı eylem şemaları” geliştirerek kavramsal bilgilerini daha kalıcı hâle getirmektedirler. Özellikle öğretmen adayları üzerinde yapılan çalışmalar, bu yazılımların pedagojik tasarımlarla bütünleştiğinde hem teknik becerileri hem de kavramsal anlayışı eşzamanlı geliştirdiğini göstermektedir. Bu nedenle, Cabri ve benzeri dinamik yazılımlarda öğrencilerin cebirsel ifadelerle kurdukları enstrümanlı eylem şemalarının hem kağıt-kalem ortamı hem de teknoloji destekli ortam bağlamında karşılaştırmalı olarak incelenmesi, literatürdeki boşluğu doldurmakta ve matematik eğitimi alanına özgün ve güncel bir katkı sunmaktadır.

3. BÖLÜM
YÖNTEM

Bu bölümde araştırma modeline, bu araştırma modelinin seçimine karar verilme şekline kullanılan modelin yapısına, araştırmanın ortam ve katılımcılarına, katılımcıların belirlenme kıstaslarına, öğretim sürecinde kullanılan materyallerin ve ders planlarının tasarımına, pilot çalışma ve uygulama sürecinde yaşananlara, araştırma modeli ve problemine yönelik olarak kullanılan veri toplama araçlarının seçimine, veri toplama araçlarının pilot uygulamaları ve kullanım sürecine ve toplanan verilerin analizine değinilecektir. Ayrıca veri toplama süreci ve analizinin geçerlik ve güvenirlik çalışmalarından bahsedilmştir.

3.1. Araştırma Modeli

Yapılan çalışmada öğretmen adaylarının bilgisayar destekli yazılımı ortamı ve kağıt-kalem ortamındaki enstrümantal süreçlerinin derinlemesine incelenmesi amaçlandığından nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Nitel araştırma, "gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma" (Yıldırım & Şimşek, 2013, s. 45) olarak tanımlanmaktadır. Bunun yanı sıra nitel araştırma araştırmacının esnek olmasını, toplanan veriler ışığında araştırma sürecini yeniden biçimlendirmesini ve genel çerçeve olarak tümevarıma dayalı bir yaklaşım izlemesini gerektirir (Yıldırım & Şimşek, 2013). Frankel ve Devers'a göre (2000) nitel araştırma süreci doğrusal ve ardışık olmamakla birlikte bu süreçte veri toplama ve veri analizi eş zamanlı olarak yapılabilmektedir. Aynı araştırmacılara göre bu yaklaşımı benimseyen eğitim araştırmalarının amacı ise nelerin başkalarınca nasıl anlamlandırıldığının anlaşılmasıdır. Bu çalışmada öğretmen adaylarının belirlenen konuda oluşturdukları enstrümanlı eylem şemalarının neler olabileceğinin ortaya çıkarılması amaçlandığından bu yaklaşım uygundur. Nitel araştırmada veri toplamanın ana bileşenlerinden biri katılımcıların davranışlarını onların aktivitelerine katılarak gözlemlemektir (Creswell, 2013). Bu sebeple araştırmacı veri toplama işlemini belirlenen sınıf ortamında ve öğretmen adaylarının aktivitelerine rehberlik etmek kaydıyla gerçekleştirmiştir. Bu çalışma, öğretmen adaylarının sınıf ortamında cebirsel ifadelerin yazımı ve cebirsel ifadelerin grafiklerinin çizimi için programın kazanımlarına uygun teknoloji destekli etkinlikleri içeren bir öğretimin uygulamasını ve yapılan öğretim sonrasında konuyla ilgili enstrümanlı eylem şemalarını ortaya çıkarmayı amaçlayan bir öğretim deneyidir.

3.1.1. Araştırma Deseni: Öğretim Deneyi

Nitel araştırma yaklaşımları çerçevesinde yer alan yöntemlerden biri öğretim deneyidir. Öğretim deneyinde nitel veriler klinik görüşme, gözlem, alan notları ve öğretim bölümlerine ilişkin öğrenme ortamında çekilen video kayıtları ile toplanmaktadır (Knuth ve Elliot, 1997). Ayrıca öğretim deneyinin kalbinde yer alan klinik görüşmelerin analiz edilmesi süreci öğrencilerin gözlemler içinde gömülü kalmış olan zihinsel yapılarının ve süreçlerinin modellerinin oluşturulmasında kritik bir öneme sahiptir. Öğretim deneyi dört aşamadan oluşan bir döngüye sahiptir. Araştırmacının varsayımlarına dayalı öğretim sürecini tasarlaması ve planlaması, öğretim bölümleri olarak adlandırılan sınıf içi uygulamalar, geçmişe yönelik analizler, bilişsel yapıların modellenmesidir. Öğretim deneyinde araştırmacı öğretmen rolü üstlenmekte olup yapılandırmacı yaklaşım çerçevesinde, çalıştığı bağlamda öğretim gerçekleştirilmektedir (Steffe & Ulrich, 2014). Bu çalışma kapsamında öğretim deneyinin aşamalarına ilişkin araştırmacı, alan yazını tarayarak Dinamik Geometri Yazılımı (DGY) kullanarak matematik öğretmen adaylarının cebirsel ifadeleri nasıl anladıklarını, farklı temsillerin anlamlandırılma süreçlerindeki etkisini, adayların görüşlerini ve karşılaştıkları zorlukları incelemeyi amaçlamıştır. Çalışma kapsamında ğretim programının konuları ve kazanımları belirlenmiş, katılımcılar seçilmiş ve sınıf uygulamaları için akademik kitaplar ve etkinlik örnekleri incelenerek bir uygulama planı hazırlanmıştr. DGY'nin hangi özelliklerinin kullanılacağı belirlenerek ve Cabri-Geometri (DGYCG) yazılımıyla zenginleştirilmiş materyaller oluşturulmuştur. RBC+C modeline göre tasarlanmış ders planları, cebirsel ifadeler ve grafiklerin çizimi konusunu içermektedir. Hazırlanmış olan materyaller ve ders planları, uygulama kapsamında sınıf ortamında uygulanmış ve değerlendirilmiştir. Asıl uygulama sürecinde ses ve ekran kayıtları, dinamik materyaller ve çalışma yaprakları ve yazılı ve sözlü görüşme transkriptleri kullanılmıştır. Ders anlatımları akıllı tahtada ve öğretmn adaylarının çalışma sayfaları ve talimatlara akıllı tahtadan erişebilecek şekilde düzenlenmiştir. Öğretmen adayı çalışma kâğıtları ve notları araştırma için saklanmıştır. Araştırmacılar, öğretmen adaylarının bilgisayar ekranlarını izleyerek yönergelerde bulunmuştur. Tüm öğretim oturumları uzman akademisyen ve araştırmacı gözlemci tarafından gözlemlenmiştir. Bu çalışmada sınıf ortamında yapılan çalışma yaprakları ve ona bağlı olarak ses ve ekran kayıtları temel veri kaynağı olarak kullanılmıştır. Uygulama sonrasında yazılı ve sözlü görüşler alınmış ve son analiz aşamalarında öğretmen adaylarının enstrümanlı eylem şemaları belirlenmiştir ve elde edilen veriler analiz edilerek sonuçlar yorumlanmıştır. Matematik eğitimi araştırmacılarının öğrencilerin zihinsel süreçlerine dâhil olma gerekliği ve bu süreçteki zorluklar öğretim deneyi yöntemini değerli kılmaktadır. Çünkü araştırmacılar öğretim deneyi yöntemi ile öğretim

bölümlerinde yeni öğretim programını, yaklaşımını ya da tekniklerini doğal sınıf ortamında uygulayabilir ve öğrencilerin bilişsel, duyuşsal ve kavramsal gelişiminin nelerden etkilendiğini ve nelerin şekillendirdiğini derinlemesine inceleyebilir ve her anlamda öğrencilerin zihinsel sürecine dahil olabilirler (Engelhardt, Corpuz, Ozimek ve Rebello, 2003; Steffe & Ulrich, 2014). Özellikle matematik eğitiminde kullanılan, öğrencilerin düşünme sürecini betimleme ve yorumlama yolu ile model oluşturma fırsatı veren öğretim deneyi yöntemi, matematik öğrenme sürecindeki zihinsel gelişimleri incelemek için kullanılan bir yöntemdir. Steffe ve Ulrich, (2014) göre öğretim deneyi için standart bir form tanımı yapılamaz. Çünkü her öğretim deneyi araştırmacı tarafından belirli bir bağlam kapsamında araştırmacının kendi bakış açısına göre tasarlanır. Aynı zamanda sınıf ortamındaki öğrencilerin düşünmelerinin betimlenmesi ve incelenmesi bu yöntemi "canlı" hale getirmektedir. Öğretim deneyi "araştırmacıların aktivitelerinin organizasyonunda kullandıkları kavramsal bir araç" (Steffe vd., 2012) olmanın yanı sıra, "matematik öğrenmenin doğasını, öğrencilerin matematiksel düşünmelerinin gelişimini, öğretim sürecinde öğretmenlerle, araştırmacılarla ve sınıf içindeki etkileşimle ilgili konuları incelemeyi sağlayan öğretim temelli deneysel bir araç" (Czarnocha & Maj, 2008) olarak da tanımlanmaktadır. Engelhardt vd., (2004) öğretim deneyinin öğrencinin yakından gözlemlenebilmesine olanak tanıdığını ve bu sayede öğrencinin düşüncelerinin gerek verdiği yanıtlardan gerekse mimiklerinden daha net anlaşılabildiğini belirtmişlerdir. Steffe ve Ulrich, (2014), öğretim deneyinin öğrencilerin geniş bir zaman diliminde kaydettiği ilerlemeyi anlamaya yönelik olduğunu, istenilen sonuca ulaşılabilmesi için araştırmacıların önceden hipotez geliştirmeleri ve bu hipotezler doğrultusunda bir öğretim sergilemeleri gerektiğini ifade etmektedir. Çünkü bu hipotezler öğrencilerin matematiksel fikirlerinin yorumlanabilmesi için önem arz etmektedir. Bu çalışma kapsamında öğretmen adayları dersler sırasında, çalışma yapraklarını yanıtlarken ve Cabri-Geometri yazılımını kullanırken araştırmacı gözlemci ve sınıf ortamında bulunan uzman akademisyen tarafından detaylı bir şekilde, gerek öğrenci tarafından sorulan sorulardan ve verilen yanıtlardan gerek bilgisayar yazılımını kullanma şeklinden hatta yüz ifadelerinden gözlemlenmiştir. Öğretmen adaylarının bir dönem boyunca, yani 14 hafta sürecek şekilde ne ölçüde ilerlediklerini görmek için çalışma yapraklarının seviyesi artacak şekilde düzenlenmiştir. Öğretimin doğru şekilde sergilenmesi için gerekli zamanlarda, ders öncesinden hazırlanan çalışma yapraklarında soruların seviyesi, sayısı veya soru türlerinde değişiklik yapılmıştır. Olası hatalar tespit edilmiş, düzeltmeler ypılmış ve öğretmen adaylarının matematiksel düşüncelerini ortaya çıkarmak için çaba harcanmıştır. Bu anlamda bu araştırmanın sınıftaki öğretimin nasıl şekilleneceği ve bilgisayar yazılımı araçlarının nasıl

enstrümana dönüştürülebileceğine dair hipotezler geliştirilmiştir ve öğretim esnasında bunlar test edilerek gerektiğinde düzeltmeler yapılmıştır. Engelhardt vd., (2004), öğretim deneyini detaylandırırken şu hususlara dikkat çekmiştir. Bu modelde öğretim bölümleri mülakatlardaki gibi kaydedilir ve analiz edilir sonrasında bu analizler bir sonraki öğretim bölümüne rehberlik etmesi için kullanılır. Bu aşamada öğrencilerin verdiği cevaplara dayanarak araştırmacının hipotezi test edilebilmektedir. Öğretim bölümleri sırasında odak nokta öğrencilerin muhakemeleridir. Öğretim deneyi araştırmacının çalıştığı bağlama göre farklı biçimlerde örneğin; küçük bir grubu kapsayan birebir öğretim deneyi türünde ya da bir sınıf ortamındaki tüm öğrencileri kapsayan sınıf öğretim deneyi türünde tasarlanabilir (Cobb vd., 2003). Bu çalışma, tüm dersler ve mülakatlar boyunca belirlenen öğretmen adayı gruplarının ses kaydı yapılmıştır ve bir sonraki hafta için ses kayıtları, verilen cevaplar ve ekran kayıtları incelenmiş ayrıca hipotezler incelenerek test edilmiştir. Olağan değişiklikler yapılmış ve bir sonraki ders için hazır hale getirilmiştir. Bunlara bakılarak, bu çalışma öğretmen adaylarının sınıf ortamında cebirsel ifadelerin yazımı ve cebirsel ifadelerin grafiklerinin çizimi için programın kazanımlarına uygun teknoloji destekli etkinlikleri içeren bir öğretimin uygulamasını ve yapılan öğretim sonrasında konuyla ilgili enstrümanlı eylem şemalarını ortaya çıkarmayı amaçlayan bir öğretim deneyidir. Öğretim deneyi sürecinde ele alınacak matematik kazanımları, öğretmen adaylarının cebirsel ifadeler ve geometrik kavramlar arasındaki ilişkiyi anlamalarını sağlamaya yönelik olmaktadır. Öğretmen adayları, cebirsel ifadeleri tanımlama, anlama ve doğru bir şekilde yazma becerilerini geliştirmiştir. Bu süreçte, cebirsel denklemlerin grafiklerini çizme ve bu grafikler üzerinden yorum yapabilme yetilerini kazanmaları hedeflenmektedir. Öğretmen adayları, geometri ve cebir arasındaki ilişkiyi kurarak problemlere çözüm üretme becerilerini geliştirmiştir. Burada Dinamik matematik yazılımları, özellikle Cabri-Geometri, kullanılarak matematiksel kavramların keşfi ve anlaşılması desteklenmektedir. Cabri-Geometri'nin tercih edilme nedeni, çözüm sürecini adım adım ortaya koymayı zorunlu kılmasıdır. Otomatik sadeleştirme ve cebirsel sonuç verme özellikleri sınırlı olduğu için öğrenciler ara basamakları kendileri ifade etmek zorunda kalmış, bu da araştırmacının enstrümanlı süreçleri daha ayrıntılı görmesine imkân tanımıştır. Böylelikle öğretmen adaylarının hangi teknikleri nasıl geliştirdikleri, hangi işlevsel sabitlerle ilişkilendirdikleri ve hangi aşamalarda zorlandıkları daha açık şekilde gözlemlenmiştir.

Teknolojinin matematik öğretiminde nasıl kullanılabileceğini ve bu araçların öğrenme sürecine nasıl entegre edilebileceğini öğrenen öğretmen adayları, bu bilgilerini derslerinde uygulayamıştır. Bu kazanımlar doğrultusunda, öğretim deneyinin amacı, öğretmen adaylarının

cebir ve geometri arasındaki ilişkileri anlamalarını sağlamak ve teknolojiyi etkili bir şekilde kullanarak bu kavramları öğretme becerilerini geliştirmek olmuştur. Bu süreç boyunca, öğretmen adaylarının enstrümantal şemaları belirlenmiş ve analiz edilmiştir. Bu analizler öğretim stratejilerinin geliştirilmesinde kullanlmıştır. Bu sayede, öğretim deneyinin sonunda öğretmen adaylarının matematiksel kavramlara yönelik derin bir anlayış kazanmaları hedeflenmektedir.

3.2. Araştırma Süreci

Bu tez araştırması için ön çalışma olarak bir pilot çalışma yapılmıştır. Pilot çalışma kapsamında ilk olarak, alan yazının taranması yapılmıştır ve bu tarama sonucunda araştırmanın amacı belirlenmiştir. Bu amaç doğrultusunda, Dinamik geometri yazılımı (DGY) kullanarak matematik öğretmen adaylarının cebirsel kavramlarını nasıl anladıkları, farklı temsillerin anlamlandırılma süreçlerindeki etkisi, adayların görüşleri ve karşılaştıkları zorluklar incelenmiştir. Ayrıca, öğretim programının hangi konuları ve kazanımlarını içereceği belirlenmiştir ve katılımcılar seçilmiştir. Belirlenen öğrenme hedeflerine uygun olarak sınıfta nasıl bir uygulama yapılması gerektiği konusunda akademik kitaplar ve etkinlik örnekleri incelenmiştir. Ayrıca, öğretim programındaki kazanımlar için hangi DGY'nin ve özelliklerinin kullanılabileceği belirlenmiştir. Yapılan araştırmalar sonucunda, Dinamik Geometri Yazımı Cabri-Geometri (DGYCG) kullanarak zenginleştirilmiş öğrenme ortamları oluşturmayı amaçlayan materyaller hazırlanmıştır. Bu materyaller, öğretim programının belirlediği kazanımlarla uyumlu hale getirilmiştir. Ayrıca, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı tarafından cebirsel ifadeler ve grafiklerin çizimi konusunu içeren ders planları oluşturulmuştur. Bu ders planları, uzman görüşü alınarak ve mevcut öğretim kaynaklarından yararlanılarak RBC+C modeline göre tasarlanmıştır. Geliştirilen ders planları ve çalışma yaprakları, Eğitim Fakültesi matematik eğitimi bölümünden iki alanında uzman profesöre sunulmuştur. Bu profesörler, Temel Matematik Kavramları, Bilgisayar Destekli Matematik Öğretimi, Geometri Öğretimi ve Analitik Geometri gibi dersleri vermektedir. Uzmanların geri bildirimleri doğrultusunda ders planları ve etkinlikler ve çalışma yaprakları iyileştirilmiştir. Ardından, pilot uygulama için hazır hale getirilmiştir. Pilot uygulama öncesi, katılımcıların cebir alanındaki bilgi düzeyi, başarıları, muhakeme yetenekleri ve algıları hakkında veri toplamak amacıyla araştırma araçları hazırlanmıştır ve pilot uygulama nitel yöntemler kullanılarak yapılmıştır. Pilot uygulama, 12 hafta boyunca haftada bir buçuk saatlik oturumlarla gerçekleştirilmiştir. Bu süreçte, öğrencilerin Materyal Tasarım dersindeki bilgi yapılandırma süreçlerini izlemek ve hipotezler oluşturmak için araştırmacıya yardımcı olmuştur. Ayrıca,

teknolojik aksaklıklar ve diğer oluşan sorunlar pilot uygulama sırasında tespit edilip çözülmüştür, böylece asıl uygulama için en iyi ortamın oluşturulmasına yardımcı olmuştur. Asıl uygulama öncesinde öğrencilere, ders notlarını etkilemeyecekleri belirtilerek bilgisayar getirmeleri istenmiştir, bilgisayarları olmayan öğrencilere ise bilgisayar temin edilmiştir. Öğretim deneyi teknoloji kullanarak, yazılımlar ve etkinliklerle öğrencilerin düşünme süreçlerini incelemek amacıyla tasarlanabilir (Lesh & Kelly, 2008).

Deneyin ilk aşamasında öğrencilere Cabri-Geometri programı tanıtılmıştır ve programın temel özellikleri öğrencilere gösterilmiştir. Öğrencilere bilgisayar kullanımı hakkında bilgi verilerek programı kullanmaları için basit uygulamalar yapılmıştır. Asıl uygulama sürecinde, ses kayıtları, ekran kayıtları, dinamik materyaller ve çalışma yaprakları kullanılmıştır. Ders anlatımları akıllı tahtada gösterilmiştir ve öğrenciler, talimatlara akıllı tahtadan erişebilmiştir. Öğrenciler ders akışını takip edecrek, akıllı tahtadan çalışma sayfaları ve talimatları kullanmış, dersin konusunu ve talimatlarlara ilişkin notlar almıştır. Öğrenci defterleri ve notları daha sonra araştırma için saklanmaktadır. Ayrıca, araştırmacı, öğrencilerin bilgisayar ekranlarını izleyerek yönergelerde bulunmuştur. Öğrenciler talimatları takip ederek ve etkinlikleri tamamlayarak, fikirlerini ortaya koymuş ve bilgisayarda test edebilmiştir. Öğretmen adayları problemlere kendi çözümlerini üretmiş, çözümlerini açıklamış, diğer öğrencilerin çözümlerini anlamaya çalışmış ve grup tartışmalarında işbirliği yapmıştır. Öğrencilerin, problemlere kendi çözümlerini ürettikleri, bu çözümleri destekledikleri ve diğer öğrencilerle etkileşimde bulundukları öğrenme ortamının öğrenmelerine katkı sağlayacağı düşünülmektedir (Weber vd., 2008). Uygulama sonrasında, matematik öğretmen adaylarından uygulamayla ilgili yazılı görüşler alıp ve bu araştırmanın odak katılımcıları olarak 6 matematik öğretmen adayıyla yarı yapılandırılmış sözlü görüşmeler yapılmıştır. Elde edilen veriler, geçerlilik ve güvenilirlik analizlerine tabi tutularak, sonuçlar yorumlanmıştır.

3.3. Araştırmacının Rolü

Nitel araştırma yöntemlerinin kullanıldığı çalışmalarda araştırmacının rolü oldukça önemlidir. Çünkü nitel araştırma yönteminin kullanıldığı çalışmalarda araştırmacının kendisi de veri toplama aracı olarak değerlendirilmektedir (Yıldırım & Şimşek, 2005). Çalışmada Steffe ve Ulrich (2014) öğrencilerle etkileşimde bulunma ve bu etkileşimi gözlemlemenin zorluğu nedeniyle, öğretmen ve gözlemci rollerini üstlenen iki kişi, yani bir akademisyen ve bir araştırmacı tarafından yürütülmüştür. Bu yaklaşım, öğrencilerle etkileşim halindeyken onları gözlemleme imkanı sağlamıştır. Akademisyen, matematik eğitimi alanında profesör unvanına

sahiptir ve matematik öğretiminde teknoloji kullanımı konusunda deneyime sahiptir. Ayrıca, araştırmacının doktora tez danışmanlığını yapmaktadır. Akademisyen ve araştırmacı, zaman zaman gözlemci ve öğretici rollerini de üstlenmiş, öğrencilerin söylediklerini yorumlamış, dersler sırasında öğrencilere yönlendirmelerde bulunarak ihtiyaçlarına cevap vermiştir. Öğrencilere düşüncelerini ifade etme ve değiştirme fırsatları sunmuş, bilgisayar destekli etkinlikler sırasında bilgisayar ekranlarını gözlemleyerek yönlendirme yapmış ve rehberlik etmiştir. Bir öğretim deneyi sürecinde araştırmacı, öğrencilerin daha iyi öğrenmelerini sağlamak için gerektiğinde önlemler almış ve öğretim ortamında gerekli değişiklikleri yapma yetkisine sahiptir. Her öğretim seansı sonrasında araştırmacı, sonuçları ve gözlemleri tartışmış ve gerekli düzeltmeleri yapmak için işbirliği yapmıştır. Araştırmacı, öğrenme ortamında 'katılımcı gözlemci' olarak aktif bir rol oynamıştır. Bir öğretim deneyi sırasında, öğrencilere sorulacak sorular ve davranışlar özenle planlanmalıdır. Bu nedenle araştırmacı ve akademisyen, öğrencilerin düşüncelerini ifade etmeleri ve değiştirmeleri için uygun fırsatlar yaratmış ve öğrencilere rehberlik etmiştir. Öğretim deneyi süreci, öğretimin tasarlanması, uygulanması ve analiz olmak üzere üç aşamadan oluşur. Elde edilen veriler, sürekli analiz ve geriye dönük analiz olmak üzere iki tür analize tabi tutulur. Sürekli analiz kapsamında, her öğretim seansı sonrasında araştırmacı çalışma yapraklarının içeriğini ve katılımcıların yanıtlarını inceleyerek bir sonraki çalışma yaprağında bu yönde düzeltmeler ve değişiklikler yaparak öğretimi iyileştirmeye çalışmıştır. Ayrıca, uygulama öncesi katılımcı görüş formlarındaki yanıtları inceleyip karşılaştırarak öğretmen adaylarının bilişsel gelişimlerini izlemiştir. Geriye dönük analiz aşamasında ise, tüm öğretim seanslarında yapılan dersler ve çalışmayaprakları, döküm haline getirilmiş ve bu veriler asıl uygulamanın geliştirilmesinde kullanılmıştır. Pilot çalışmanın sonucunda elde edilen veriler analiz edilmiş, geçerlilik ve güvenirlik çalışmaları yapılmış ve veri toplama araçlarının son haline getirilmiştir.

3.4. Çalışma Ortamı ve Grubu

Bursa Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi dersliklerinde gerçekleştirilen çalışma, Cabri-Geometri programı ile uyumlu akıllı tahta, öğretmen masası ve yazı tahtasının bulunduğu sınıflarda yürütülmüştür. Öğrenciler genellikle tahtaya dönük olarak oturmuş; ancak bazı oturumlarda, sınıf içi iletişimi artırmak amacıyla gruplar hâlinde oturumlar düzenlenmiştir. Araştırma, Bursa Uludağ Üniversitesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda ikinci sınıfta öğrenim gören öğretmen adayları ile gerçekleştirilmiştir. İkinci sınıf öğretmen adaylarının seçilme nedeni, o zamana kadar bilgisayar destekli matematik eğitimi almamış olmalarıdır. İlk kez Cabri-Geometri yazılımını kullanan öğretmen adayları, çizim sürecinde kendi yöntemlerini

geliştirmiş, kendi matematiksel çalışmalarını tasarlamış, yeni bilgileri keşfetmiş ve cebirsel ifadeler, sözel temsiller ile grafik temsiller arasında çeşitli ilişkiler kurmuşlardır. Bu sayede, daha önce deneyimledikleri kağıt-kalem ortamı ile bilgisayar yazılımı ortamı arasındaki farklılıkları fark etmeleri sağlanmış ve ortaya çıkarılması hedeflenen enstrümanlı eylem şemalarının daha net bir biçimde oluşması beklenmiştir.

Çalışmanın asıl uygulamasında, tüm sınıfa yönelik etkinliklerin yanı sıra öğretmen adaylarının enstrümanlı eylem şemalarını daha ayrıntılı inceleyebilmek amacıyla altı öğretmen adayı, ikişerli gruplar hâlinde özel çalışma grupları olarak seçilmiştir. Bu seçim sürecinde amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmış ve araştırmacı ile alanda uzman bir akademisyen tarafından öğrencilerin başarı seviyeleri dikkate alınarak üç farklı grup belirlenmiştir: birinci grup orta, ikinci grup yüksek, üçüncü grup ise düşük başarı düzeyine sahip öğretmen adaylarından oluşturulmuştur. Grupların seviyeleri belirlenirken, öğretmen adaylarının uygulama öncesinde almış oldukları üç ders saatlik Cabri-Geometri dersi göz önünde bulundurulmuş, ayrıca uygulamaya başlamadan önce cebir alanına yönelik sorular ve açık uçlu ön görüşme formları kullanılarak öğrencilerin mevcut bilgi düzeyleri tespit edilmiştir. Farklı başarı düzeylerindeki öğrencilerin seçilmesi, enstrümantal oluşum süreçlerinin farklı öğrenme düzeylerinde nasıl geliştiğini incelemek ve elde edilen bulguların genellenebilirliğini artırmak açısından önemlidir. Bu çeşitlilik, araştırma bulgularının geniş bir öğrenci kitlesine uygulanabilirliğini sağlamış ve her seviyedeki öğrenci için öğretim stratejilerinin geliştirilmesine katkı sunmuştur. Katılımcıların grup ve cinsiyetlere göre sayıları Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1

Katılımcıların Grup ve Cinsiyetlere göre sayıları

	Kadın	**Erkek**	**Toplam**
Pilot Uygulama	18	2	20
Asıl Uygulama	29	5	34

Seçilen öğrencilerle yapılan yüz yüze görüşmeler, başarı düzeyleri dikkate alınarak yürütülmüş ve ders saatleri dışında gerçekleştirildiği için tamamen gönüllülük esasına dayanmaktadır.

3.5. Veri Toplama Araçları

Araştırma, teknoloji destekli bir sınıf ortamında yürütüldüğü için, bilgisayarlara derslerde kullanılacak olan Cabri-Geometri yazılımı önceden yüklenmiştir. Öğretmen

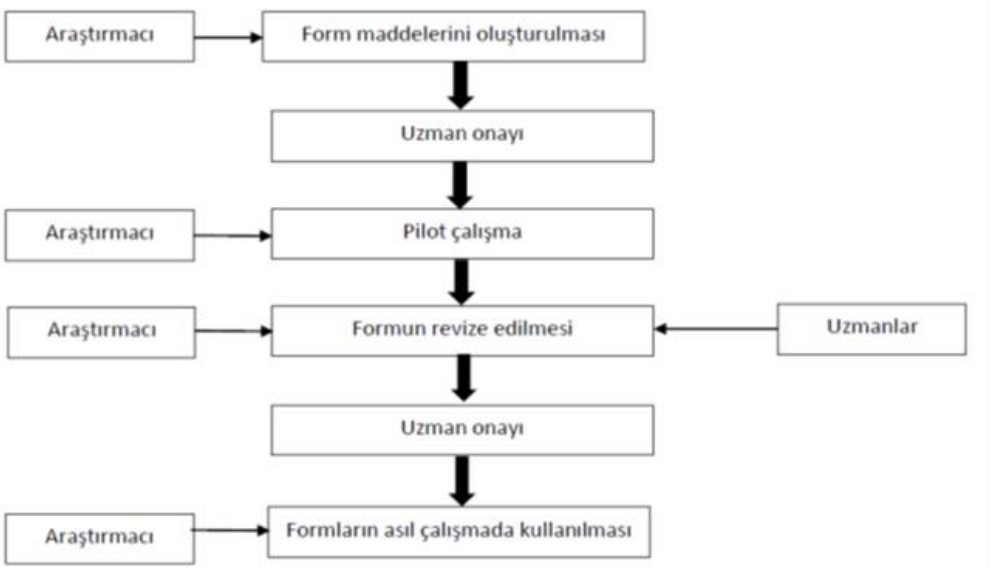
adaylarının bilgisayar ortamında gerçekleştirdikleri çalışmaların yanı sıra, derslerde dağıtılan çalışma yaprakları da veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. Ayrıca, seçilen öğretmen adayları ile gerçekleştirilen mülakatlarda, öğrencilerin çalışma yapraklarını birlikte tamamlarken yaptıkları konuşmaların ses kaydı alınmış ve bu kayıtlar analizlerde kullanılmıştır. Bu bağlamda, "Dinamik geometri ve kağıt-kalem ortamlarında hazırlanmış öğretim modülünün, cebirsel ifadelerin farklı temsillerinin anlamlandırılması sürecinde öğretmen adaylarının enstrümantal oluşumları nasıldır?" temel araştırma problemi doğrultusunda araştırma soruları belirlenmiştir. Bu araştırma sorularını cevaplamak amacıyla aşağıdaki veri toplama araçları oluşturulmuştur:

- Yazılı görüşme
- Sözlü görüşme
- Ses kayıtları
- Ekran yayıtları
- Ders çalışma yaprakları

Veri toplama araçlarının oluşturulmasında takip edilen genel yaklaşım Şekil 1'de sunulmuştur.

Şekil 8

Form maddelerinin oluşturulması



Ön çalışma kapsamında, formlar ile ilgili soruları oluşturmak için öncelikle yapılan ilgili çalışmalarda kullanılan maddeler incelenmiştir. Bu doğrultuda, her bir form için sorular düzenlenerek formların ilk halleri oluşturulmuş ve daha sonra uzman tarafından gözden

geçirilmiştir. Pilot çalışma sürecinde ilgili formların çalışma ve kullanma durumuna ilişkin hem formu kullanan katılımcıların görüşleri hem de araştırmacı formlara ilişkin notlar alınmıştır. Araştırma kapsamında, uzmanların da görüşleri doğrultusunda bu dönütlerden faydalanılarak formlar revize edilmiştir. Daha sonra formlar asıl çalışmada kullanılabilecek hale getirilecektir.

Niteliksel araştırmalarda, veri toplama sürecinin önemli bir bileşeni araştırmacının kendisidir. Katılımcı gözlemci olarak gözlem yapacağı gruptan izin alır ve gruba katılır. Araştırmacı, grubun güvenini kazandığında, bu gruptaki bireylerden grupla ilgili ayrıntılı ve tutarlı bilgi toplama fırsatına sahip olabilir (Uzuner, 1999). Bu tür araştırmalarda, araştırmacı, araştırdığı ortama bir katılımcı olarak dahil olsa bile, gruptan bağımsız biri gibi davranır ve ilk defa bu ortamda bulunan bir kişi olarak o ortamın özelliklerini incelemektedir. Araştırmacı, araştırma grubuyla doğal, rahatsız ve tehdit etmeyecek şekilde iletişim kurar.

Piaget, var olan standart testlerle öğrencileri sınamak yerine onların düşüncelerinin doğasını anlamanın daha önemli olduğu düşüncesiyle öğrencilerin düşünce zenginliğini keşfetmek, bu zenginliğin temel faaliyetlerini anlamak ve öğrencilerin bilişsel yeteneklerini belirlemek amacıyla esnek bir sorgulama metodu olan mülakat yöntemini ortaya atmıştır (Gingsburg, 1981). Hunting (1997) bu yöntemin öğrencinin matematiksel davranışını gözlemlemek ve yorumlamak için kullanılan bir araç olduğunu ifade etmiştir. "Mülakatın amacı öğrencinin o esnadaki muhakeme örneklerini onları değiştirmeye teşebbüs etmeden anlamaya çalışmaktır" (Engelhardt vd. , 2004, s.1). Mülakatta öğrenci ile araştırmacının doğrudan etkileşim içerisinde olması öğrencinin düşünceleri hakkında daha derin bir bilgiye ulaşılmasına imkân vermektedir. Araştırmada her ders sonrasında seçilen öğretmen adaylarıyla mülakat yapılarak onların gözden kaçan anlayışlarını daha derinden keşfetmek amaçlanmaktadır.

Bu araştırmada uygulamanın sonunda seçilen öğretmen adaylarıyla mülakat yapılarak onların gözden kaçan anlayışlarını daha derinden keşfetmek amaçlanmaktadır. Mülakatlar eğer öğrencinin temel problemleri anlayışını geliştirecekse birtakım değişiklikler yapmak kabul edilebilir (Gingsburg, 1981). Bu sebeple mülakatlar esnasında hazırlanmış olan sorular öğretmen adaylarının belirlenen konuya dair bilgilerini ortaya çıkarmada eksik kaldığında araştırmacı sözlü olarak ek sorular sorarak öğrencinin enstrümanlı eylem şemasını ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Bu anlamda mülakatlar yarı yapılandırılmış olarak gerçekleştirilmiştir. Bu çalışma kapsamında, öğrencilerin Dinamik geometri yazılımı Cabri-Geometri kullanarak gerçekleştirilen cebir ve cebirsel ifadelerin öğretim sürecine ilişkin düşüncelerini incelemek amacıyla yarı yapılandırılmış yazılı ve sözlü görüşme yöntemleri kullanılmıştır. Pilot

uygulamada yapıldığı gibi asıl uygulama sonrasında da yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerde, öğretmen adaylarının Cabri-Geometri yazılımı kullanarak tasarlanan öğretim deneyine yönelik görüşlerini, karşılaştıkları zorlukları ve uygulamanın etkililiği hakkındaki düşüncelerini belirlemek amaçlanmıştır. Ayrıca, aynı zamanda akademisyen olan bir matematik öğretmenine inceleme için sunulan sorular, uzman görüşlerini almak amacıyla özel olarak düzenlenmiştir. Sözlü görüşme ve yazılı görüşme formları farklı sorular içermektedir.

Pilot ve asıl uygulama sürecinde kullanılan uyulama öncesi bilgi ve görüşme formları ayrıca uyguama sonrasında kullanılan bilgi formu ve yüz yüze görüşme formu Ek 2'de verilmiştir.

3.5.1. Yazılı Görüşme Formu

Araştırmada, öğretmen adaylarının görüşlerini belirlemek için standartlaştırılmış açık uçlu soru tekniğine uygun yarı yapılandırılmış bir görüşme formu hazırlanmıştır. Bu tür görüşme formları, esneklikleri, belli bir standartı korumaları ve derinlemesine bilgi toplama imkanı sunmaları nedeniyle araştırmacılar tarafından sıkça tercih edilmektedir. Bu yöntem, katılımcıların düşüncelerini özgürce ifade etmelerini sağlar ve görüşmeci etkisini en aza indirir (Yıldırım ve Şimşek, 2005; Ekiz, 2003; Balcı, 2009).

Yarı yapılandırılmış ölçme aracı geliştirilirken ilgili literatür taranmış ve açık uçlu görüşme soruları araştırmacılar tarafından oluşturulmuştur. İç geçerliliği sağlamak amacıyla uzman görüşü (eğitim bilimleri alanında uzman 2 öğretim üyesi) ve katılımcı teyidi alınmıştır. Uzman görüşleri doğrultusunda form düzenmiş olup, pilot ve asıl uygulamalar gerçekleştirilmiştir. Ön uygulama sonuçlarına dayanarak, görüşme sorularının anlaşılır ve cevaplanabilir olduğu belirlenmiştir. Bununla birlikte, yeterli düzeyde yorumlama ve analiz yapılması için soru sayısının artırılması kararı alınmıştır. Revize edilen sorular, daha derinlemesine cevaplanabilir olmalarını sağlayacak şekilde düzenlenmiştir. Ayrıca, konu dışına çıkma eğiliminde olan sorular gözden geçirilmiş ve asıl uygulama için hazır hale getirilmiştir. Veri toplama araçlarının denenmesi, araştırmanın geçerlik ve güvenirliği ile doğrudan ilişkilidir (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

3.5.2. Sözlü Grüşme Formu

Uygulama kapsamında sözlü görüşmeler yapılmadan önce öğretim sürecine katılan öğrenci sayısının oldukça yüksek olması ve her bir öğrencinin görüşmeye katılımda gönüllü olmayabileceği gibi sebepler katılacak öğrencilerin sınırlandırılarak seçilmesini gerektirecektir.

Sözlü görüşmeye katılacak öğrencilerin seçiminde amaçlı örnekleme yöntemine başvurulmuştur.

Bu doğrultuda öğrencilerin üç farklı başarı düzeyinden olmaları ve kendilerini ifadeye açık olmalarına dikkat edilmiştir. Ayrıca görüşmeler ders saatleri dışında gerçekleştiğinden gönüllülük şartı aranmıştır. Öğretim süreci tamamlandıktan sonra araştırmacı ve uzman akademisyen tarafından düşük, orta ve yüksek başarı düzeyinden seçilmiş altı öğrenci ile sözlü görüşmeler yapılmıştır. Öncesinde öğrencilerle tek tek görüşülerek görüşmenin kapsamı hakkında bilgi verilip ve çalışmaya katılıp katılmama konusunda gönüllü olup olmadıkları sorulmuştur. Sözlü görüşmeler araştırmacı ve öğrencinin yalnız kalabileceği sessiz sınıf ortamında gerçekleştirilmiştir.

3.5.3. Ses Kayıtları

Bu araştırmanın verilerini toplamak amacıyla, öğrencilerin Cabri-Geometri kullanımlarını detaylı bir şekilde inceleyebilmek için 6 öğrenciyi ikişerli gruplara ayırmıştır. Öğrencilerin çalışma yapraklarını yanıtlarken, doğal ortamı bozmamak adına öğrencilerden izin alınarak masalarına ses kayıt cihazı yerleştirilmiştir. Tüm ders boyunca, öğrenciler arasındaki konuşmalar, fikir alışverişleri ve benzeri etkileşimler kaydedilmiştir. Bu kayıtlar daha sonra araştırmacı tarafından derinlemesine incelenmiş ve yorumlanmıştır. Ayrıca, çalışma yapraklarından ve ses kayıtlarından elde edilen veriler karşılaştırılarak analiz edilmiştir. Örnek olarak iki öğrenci arasındaki ses kaydının transkripti Ek3'te verilmiştir.

3.5.4. Ekran Kayıtları

Araştırma sürecinde, öğretmen adaylarının Cabri-Geometri ortamında gerçekleştirdikleri etkileşimlerin ayrıntılı biçimde analiz edilebilmesi amacıyla ekran kayıtları alınmıştır. Her bir grup çalışması sırasında, yazılım üzerinde yapılan işlemler, grafik oluşturma süreçleri ve araç kullanım biçimlerini gerçekleştirirken etkileşimler ekran kaydedici programlar aracılığıyla kayda alınmıştır. Bu kayıtlar, öğretmen adaylarının teknik kullanım örüntülerini, sezgisel yaklaşımlarını ve matematiksel yapılarla kurdukları ilişkileri gözlemleme imkânı sunmuştur. Ayrıca, ekran kayıtları, çalışma yaprakları ve ses kayıtlarıyla karşılaştırmalı olarak analiz edilerek, öğretmen adaylarının enstrümantal oluşum süreçlerinin ve geliştirdikleri enstrümanlı eylem şemalarının daha bütüncül bir şekilde incelenmesine olanak tanımıştır. Bulgular bölümünde çoklu sayıda ekran kayıtlarından kesitler verildiği için Ekler kısmında ekran kayıtları örneklerine yer verilmeye gerek duyulmamıştır.

3.5.5. Çalışma Yaprakları

Öğretim esnasında seçilen bilgisayar yazılımı ile hazırlanan derslere ek olarak derslerin hazırlanmasında faydalanılacak olan uzman görüşünden yararlanılarak bir takım çalışma yaprakları da hazırlanmıştır. Araştırmacı, tüm derslerde öğretmen adaylarından çalışma yapraklarını doldurmalarını istemiştir. Çalışma yapraklarında yer alan soruların, önce kağıt-kalem ortamında, ardından bilgisayar ortamında çözülmesi gerekmektedir. Bu derslerde, öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamından ayrılarak, çalışma yapraklarında belirtilen fonksiyonları bilgisayar destekli olarak gerçekleştirmeleri beklenmiştir. Buradaki amaç, öğretmen adaylarının bilgisayar yardımıyla yaptıkları işlemler üzerine düşünmelerini sağlamaktır. Çünkü bu öğretim sürecinde yazılımın, bir araç olarak anlamlı şekilde kullanılması hedeflenmiştir. Bu çalışma kapsamında 5 çalşma yaprağı, sabit ve doğrusal fonksiyonlar, parabol, üçüncü dereceden polinm fonksiyonları ve son olarak ters fonksiyonlar isimli çallışma yaprakları hazırlanmıştır ve farklı ders seanslarında katılımcılar arasında dağıtılmıştır. Bu çalışmada kullanılan çalışma yapraklarına Ek 4'te yer verilmiştir.

3.5.5.1. Birinci Çalışma Yaprağı

Birinci çalışma yaprağı beş soru kalem-kağıt ortamı ve beş soru dinamik geometri yazılımı ortamında yapılacak şekilde toplam on sorudan oluşmaktadır. Bu çalışma yaprağında öğretmen adaylarından x=a ve y=b formundaki doğrusal denklemleri, sözel ifadeleri ve grafik temsilleri ile eşleştirebilmeleri; benzer durumu (x=3, y hep 4 olsun gibi) sağlayan temsilleri anlamlandırabilmeleri istenmektedir. Ayrıca y= ax formundaki doğrusal denklemleri, grafikleri ile eşleştirebilmeleri ve cebirsel ifadesindeki 'a' değerinin değişiminin doğruyu nasıl etkilediğini, yazılımı kullanarak görebilmeleri ve yorumlayabilmeleri beklenmektedir. Öğretmen adaylarından y=x+b ve y=ax+b formundaki doğrusal denklemlerde 'b' değerinin değişiminin doğruların duruşlarında meydana getirdiği etkiyi yorumlayabilmeleri ve cebirsel ifade ile grafiğini eşleştirebilmeleri beklenmektedir.

Birinci Çalışma Yaprağı ile Hedeflenen Matematiksel Kazanımlar

x=a ve y=b formundaki doğrusal denklemler soruları için 'x hep sabit bir sayı olsun, y'ler istedikleri değeri alabilir' sözel ifadesine Göre uygun grafiği Cabri-Geometri kullanarak çizebilir; çizdiği grafiğin cebirsel karşılığını Cabri-Geometri yardımıyla bulabilir.

'x=a' şeklinde cebirsel ifadeyi eksenlere diklik ve paralellik boyutundan yorumlayabilir.

‘x=a’ şeklinde cebirsel ifadeyi verilen doğru denkleminde x’in sabit bir değer aldığını y’nin ise istediği değerleri alabileceğini bilir ve bu şartı sağlayan (x,y) ikililerini koordinat düzleminde gösterebilir.

Öğretmen adaylarından cebirsel denklemleri x=a ve y=b biçiminde ifade eden doğru denklemlerinin grafiklerini tanımalarını, cebirsel ifade ile grafik temsili arasındaki ilişkiyi ve benzerliklerini görmelerini hedeflemiştir.

Bu nedenle öğrencilerden sözel ifadeye uygun koordinat düzleminde ve yazılım yardımıyla göstermeleri istenmiştir. Doğruyu çizen öğrencinin, çizdiği doğrunun ekseni kestiği noktanın koordinatı ile x=a cebirsel ifadesindeki ‘a’ değerinin aynılığını görüp cebirsel ifade ile grafik arasındaki bağı keşfetmesi beklenmiştir. Doğrusal denklemin grafiği ile cebirsel ifadesi arasındaki ilişkiyi keşfeden öğrencinin, dersin sonunda, öğrendiklerini kullanabileceği ve pekiştirebileceği beklenilmektedir.

Öğretmen adayları, y=ax tipi doğrusal denklemlerde ‘a’ değerinin değişiminin, grafiğin görünümü üzerindeki etkisini incelemek için bu tür soruları Cabri'nin sürükleme özelliğini dinamik bir şekilde kullanarak değerlendirirler. Bu tür örnekler çözüldükten sonra ‘a’ değeri ile grafik arasındaki ilişkiyi keşfedip uygulayıp ve yorumlamaları beklenmiştir. y=ax tipi doğrusal denklemlerde ‘a’ değerinin değişmesinin, grafiğin pozisyonu üzerindeki etkisini gözlemleyerek (‘a’ değeri arttıkça doğru daha dik bir hal alır ve y eksenine yaklaşırken, ‘a’ değeri (-1, -2, -3 gibi) azaldıkça eğim artar ve y ekseniyle yaklaşır, ancak farklı konumlarda bulunur).

Bu etkinlikte, y=x doğrusuna sabit bir sayı eklenmesinin (y=x+b) doğrunun görünümünde nasıl değişikliklere neden olduğunu gözlemlemek, yorumlamak ve açıklamak amaçlanmıştır. Aynı zamanda, y=x doğrusunun koordinat düzlemindeki uzaklığını anlamak, pozitif veya negatif sabit sayıların doğrunun pozisyonunu nasıl etkilediğini gözlemlemek ve y=ax formundaki doğrusallara eklenen sabit sayıların doğrunun görünümündeki etkilerini anlamak hedeflenmiştir. Öğretmen adayları Cabri-Geometri yazılımı kullanarak bu etkinlikte tahminlerde bulunarak, gözlemler yaparak, değişiklikleri kendi cümleleriyle ifade ederek, matematiksel kavrayışlarını geliştirmekte ve öğrenilenleri uygulamak için grafikler ve cebirsel ifadeleri eşleştirmektedirler.

3.5.5.2. İkinci Çalışma Yaprağı

İkinci çalışma yaprağı yedi kalem- kağıt ortamı ve dinamik geometri yazılımı ortamında yapılacak şekilde oluşmaktadır. Bu çalışma yaprağında öğretmen adaylarından $f(x) = ax^2$,

$f(x) = ax^2 + bx$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(x) = ax^2 + c$ formundaki parabol denklemleri, sözel ifadeleri ve grafik temsilleri ile eşleştirebilmeleri; benzer durumu sağlayan temsilleri anlamlandırabilmeleri istenmektedir. Ayrıca $y = ax^2 + bx + c$, formundaki parabol denklemleri, grafikleri ile eşleştirebilmeleri ve cebirsel ifadesindeki 'a', 'b' , 'c' değerlerinin değişiminin grafiği nasıl etkilediğini, yazılımı kullanarak görebilmeleri ve yorumlayabilmeleri beklenmektedir.

İkinci Çalışma Yaprağı ile Hedeflenen Matematiksel Kazanımlar

İkinci çalışma yaprağının temel amacı, öğretmen adaylarının parabol denklemleriyle ilgili matematiksel kavramları anlamalarını ve farklı temsillerle ilişkilendirmelerini sağlamaktır. Bu bağlamda, ikinci çalışma yaprağı öğretmen adaylarından aşağıdaki matematiksel kazanımları hedeflemektedir:

Parabol Denklemleri ile Eşleştirme: Öğretmen adaylarının, farklı parabol denklemleri ($f(x) = ax^2$, $f(x) = ax^2 + bx$, $f(x) = ax^2 + bx + c$) ile denklemlerin sözel ifadeleri ve grafik temsilleri arasındaki ilişkiyi anlamlandırmaları beklenmektedir.

Grafik Analizi: Öğretmen adaylarından, $y = ax^2 + bx + c$ formundaki parabol denklemlerini grafikleri ile eşleştirebilmeleri ve cebirsel ifadesindeki 'a', 'b', 'c' değerlerinin değişiminin grafiği üzerindeki etkisini görebilmeleri beklenmektedir.

Yazılım Kullanımı: Öğretmen adayları, Cabri-Geometri yazılımını kullanarak parabol denklemlerini görselleştirmeli ve yazılımın sunduğu araçlarla 'a', 'b', 'c' değerlerini değiştirerek grafik üzerindeki değişiklikleri gözlemlemelidir.

Benzer Durumları Anlamak: Öğretmen adaylarından, benzer durumu sağlayan parabol temsillerini anlamaları ve bu temsillere matematiksel olarak açıklık getirmeleri istenmektedir.

Bu kazanımlar, öğretmen adaylarının matematiksel düşünme becerilerini geliştirmelerini, soyut matematik kavramlarını somut örneklerle ilişkilendirmelerini ve DGY'yi etkili bir şekilde kullanarak matematiksel kavramları keşfetmelerini amaçlamaktadır.

3.5.5.3. Üçüncü Çalışma Yaprağı

Üçüncü çalışma yaprağı 8 kalem- kağıt ortamı ve dinamik geometri yazılımı ortamında yapılacak şekilde oluşmaktadır. Bu çalışma yaprağında öğretmen adaylarından $f(x) = ax^3$, $f(x) = ax^3 + bx^2$, $f(x) = ax^3 + cx$, $f(x) = ax^3 + d$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, $f(x) = ax^3 + cx + d$ formundaki polinomları, sözel ifadeleri ve grafik temsilleri ile eşleştirebilmeleri ve cebirsel

ifadesindeki ‘a’, ‘b’ , ‘c’, ‘d’ değerlerinin değişiminin grafiği nasıl etkilediğini, yazılımı kullanarak görebilmeleri ve yorumlayabilmeleri beklenmiştir.

Üçüncü çalışma yaprağının temel amacı, kalem-kağıt ortamı ve dinamik geometri yazılımı kullanılarak gerçekleştirilmiştir, bu çalışma ile aşağıdaki matematiksel kazanımlar hedeflenmektedir:

Üçüncü Çalışma Yaprağı ile Hedeflenen Matematiksel Kazanımlar

Bu çalışma, öğretmen adaylarının polinom fonksiyonları ile ilgili matematiksel kavramları anlamalarını ve öğrenim süreçlerinde enstrümantal oluşumlarını desteklemeyi hedeflemektedir.

Polinom Fonksiyonları ile Eşleştirme: Öğretmen adayları, $f(x) = ax^3$, $f(x) = ax^3 + bx^2$, $f(x) = ax^3 + cx$, $f(x) = ax^3 + d$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, ve $f(x) = ax^3 + cx + d$ formundaki polinom fonksiyonları ile bunların sözel ifadeleri ve grafik temsilleri arasındaki ilişkileri anlamlandırma becerisi kazanmalıdır.

Cebirsel İfade Analizi: Öğretmen adayları, polinom fonksiyonlarının cebirsel ifadesindeki ‘a’, ‘b’, ‘c’, ‘d’ değerlerinin değişiminin grafik üzerindeki etkilerini gözlemleme ve analiz etme yeteneğini edinmelidir.

Grafik Analizi: Öğretmen adayları, polinom fonksiyonlarını grafikleri ile eşleştirme yeteneği kazanmalı ve grafik üzerindeki değişiklikleri anlama becerisi geliştirmelidir.

Yazılım Kullanımı: Adaylar, dinamik geometri yazılımını etkili bir şekilde kullanarak polinom fonksiyonlarını görselleştirmeli, yazılımın sunduğu araçları kullanarak değişkenlerin grafik üzerindeki etkilerini inceleme yeteneğini kazanmalıdır.

Bu çalışma, öğretmen adaylarının sadece matematiksel bilgisini artırmakla kalmayıp, aynı zamanda teknolojiyi etkili bir şekilde sınıf içinde entegre etme ve öğrencilere matematiksel kavramları daha derinlemesine keşfetme ve anlama becerilerini geliştirmelerine odaklanmaktadır. Dinamik geometri yazılımı kullanımı, adayların enstrümantal oluşumlarını destekleyerek matematik öğretimi ve öğrenimi için etkili stratejiler geliştirmelerine yardımcı olacaktır.

3.5.5.4. Dördüncü Çalışma Yaprağı

Bu çalışma yaprağı öğretmen adaylarının doğrusal ve parabolik fonksiyonlara ait ters fonksiyonları anlamalarını hedeflemektedir. Hem kalem-kağıt ortamında hem de Cabri-

Geometri kullanarak, öğretmen adaylarına bu fonksiyonların ters fonksiyonlarını incelemeleri, bu fonksiyonların sözel ifadelerini ve grafik temsillerini eşleştirmeleri istenir. Ayrıca, fonksiyonların ters fonksiyonlarını grafikleri ile ilişkilendirmeleri ve cebirsel ifadesindeki a, b, c değerlerinin değişiminin grafiği üzerindeki etkilerini kalem-kağıt ortamında ve Cabri-Geometri yazılımı kullanarak görmeleri beklenmektedir. Bu çalışma, öğrencilere doğrusal ve parabolik fonksiyonlara ait ters fonksiyonlar konusunda teorik bilgilerin yanı sıra görsel anlamda da kavramları anlamalarına katkı sağlamayı amaçlamaktadır.

Dördüncü Çalışma Yaprağı ile Hedeflenen Matematiksel Kazanımlar

Fonksiyon ve Ters Fonksiyon İlişkisi: Öğrenciler, fonksiyonların temel kavramlarını (birebir ve Örten olma) anlamalı ve bu kavramları kendi ifadeleriyle açıklayabilmeli ve fonksiyon ve ters fonksiyon arasındaki matematiksel ilişkiyi ($f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$) kavrayabilmelidir.

Ters Fonksiyonun Matematiksel İfadesi: Bir fonksiyonun tersini alırken kullanılan adımları anlamalıdır. Yani, $y = f(x)$ fonksiyonundan $x = f^{-1}(y)$ fonksiyonuna nasıl geçildiğini bilmelidir.

Grafiksel Temsil: Fonksiyonların ve ters fonksiyonların grafiklerinin nasıl çizileceğini bilmelidir. Grafik üzerinde işlemlerin örneğin simetrinin matematiksel ifadelerle nasıl bağlantılı olduğunu görüp anlamalıdır.

Cabri-Geometri Yazılımı Kullanımı: Cabri-Geometri yazılımını etkili bir şekilde kullanarak fonksiyonların grafiklerini çizip inceleyebilmelidir. Cabri'nin interaktif özelliklerini kullanarak öğrencilere matematik kavramları hakkında görsel deneyim sağlaması gerekir.

Grafik Değişimlerin Anlaşılması: Fonksiyonlardaki a, b, c gibi katsayıların grafik üzerindeki etkilerini anlamalıdır. Özellikle, bu değerlerin değişimlerinin grafiğe nasıl etki ettiğini görsel olarak gösterebilmelidir.

Bu çalışma yaprağı, öğretmen adaylarının matematik kavramlarını hem kalem-kağıt ortamında hem de Cabri-Geometri yazılımı kullanarak anlamalarına olanak tanıyarak, öğretim pratiğinde daha etkili olmalarına katkı sağlamayı hedeflemektedir.

Bu çalışmada farklı veri toplama araçlarının kullanılması nedeniyle, bu verilerin araştırma sorularını yanıtlamaya yönelik biçimde düzenlenmesine açıklık getirilmiştir. Bu kapsamda, araştırma soruları ile veri toplama araçları ve analiz süreçlerini eşleştiren tablo 2'de yer verilmiştir.

Tablo2

Veri toplama araçları kullanım amacı ve kullanım zamanı

Araştırma souları	Analiz süreci	Araçlar
Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında cebirsel ifadelerin yazımı için oluşturdukları enstrümanlı eylem şemaları nelerdir?	Çalışma yaprakları (kağıt-kalem ortamı soruları), Ses kaydı, analiz edilerek kullanılan enstrümanlı teknikler, enstrüantal oluşum süreci ve kağıt kalem ortamındaki enstrümanlı eylem şemaları belirlenecek ve şemalara göre kodlar ve temalar oluşturulacak.	Çalışma yaprakları(kağıt-kalem ortamı soruları, Ses kaydı,
Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında cebirsel ifadelerin grafiklerinin çizimi için oluşturdukları enstrümanlı eylem şemaları nelerdir?	Çalışma yaprakları(kağıt-kalem ortamı soruları), Ses kaydı, yazılı görüşmeler analiz edilerek kullanılan enstrümanlı teknikler, enstrüantal oluşum süreci ve kağıt kalem ortamındaki enstrümanlı eylem şemaları belirlenecek ve şemalara göre kodlar ve temalar oluşturulacak.	Çalışma yaprakları(kağıt-kalem ortamı soruları, Ses kaydı,
Öğretmen adaylarının dinamik geometri ortamında cebirsel ifadelerin grafiklerinin çizimi için oluşturdukları enstrümanlı eylem şemaları nelerdir?	Çalışma yaprakları(Cabri-Geometri ortamı soruları), Ses kaydı, ekran kayıtları, yazılı ve sözlü görüşmeler analiz edilerek kullanılan enstrümanlı teknikler, enstrüantal oluşum süreci ve kağıt-kalem ortamındaki enstrümanlı eylem şemaları belirlenecek ve şemalara göre kodlar ve temalar oluşturulacak.	Çalışma yaprakları(Cabri -Geometri ortamı soruları, Ses kaydı, Ekran kaydı, yazılı ve sözlü görüşme, Ekrn kayıtlrı
Öğretmen adaylarının dinamik geometri ortamında cebirsel ifadelerin yazımı için oluşturdukları enstrümanlı eylem şemaları nelerdir?	Çalışma yaprakları(Cabri-Geometri ortamı soruları), Ses kaydı, Ekran kaydı, yazılı ve sözlü görüşmeler analiz edilerek kullanılan enstrümanlı teknikler, enstrüantal oluşum süreci ve kağıt-kalem ortamındaki enstrümanlı eylem şemaları belirlenecek ve şemalara göre kodlar ve temalar oluşturulacak.	Çalışma yaprakları(Cabri -Geometri ortamı soruları, Ses kaydı, Ekran Kaydı, yazılı ve sözlü görüşme, Ekran kayıtları
Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamı ve dinamik geometri ortamında cebirsel ifadelerin yazımı için oluşturdukları enstrümanlı eylem şemaları arasındaki farklılıklar nasıldır?	Her iki ortamda kullanılan enstrümanlı teknikler, enstrüantal oluşum süreçleri ve oluşan enstrümanlı eylem şemaları karşılaştırılarak analiz edilecek ve temalar oluşturulacak.	Çalışma yaprakları, Ses kaydı, Ekran kaydı, yazılı görüşme, sözlü görüşme, Ekran kayıtları
Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamı ve dinamik geometri ortamında cebirsel ifadelerin grafiklerinin çizimi için oluşturdukları enstrümanlı eylem şemaları arasındaki farklılıklar nasıldır?	Her iki ortamda kullanılan enstrümanlı teknikler, enstrüantal oluşum süreçleri ve oluşan enstrümanlı eylem şemaları karşılaştırılarak analiz edilecek ve temalar oluşturulacak.	Çalışma yaprakları, Ses kaydı, Gözlem, yazılı görüşme, sözlü görüşme, Ekran kayıtları

3.6. Verilen Toplanması ve Çözümlenmesi

Pilot çalışma belirlenen üniversitenin matematik eğitimi bölümündeki Materyal Tasarım dersi kapsamında 20 öğrenci ile 2022-2023 bahar döneminde yapılmıştır.

Aşağıdaki maddelerde tezin çalışma planı kısaca özetlenmiştir:

Öncelikle öğretmen adaylarına uygulanması planlanan ve halihazırda müfredatta işlenen cebirsel ifadeler konusu bir dinamik geometri yazılımına uygun olarak ve enstrümantal oluşum teorisinin gerekliliklerini dikkate alarak hazırlanmıştır. Bu dersler öğretmen adaylarının cebirsel ifadeler konusunu bilgisayar araçları yardımıyla anlamlandırmasına yardımcı olacak ve onların enstrümanlı eylem şemalarını ortaya koyabilecek şekilde ayrıntılı bir şekilde düzenlenmiştir. Her bir kazanım için ayrıntılı ders planları hazırlanmıştır.

2022-2023 bahar dönemi-pilot uygulama: Araştırma için hazırlanan ders planları Türkiye'yi sarsan 6 Şubat Kahramanmaraş depremi dolayı eğitimin mecburi çevrim içi yapılması gerekçesiyle online ortamda uygulanmıştır ve bu sayede tasarımının sınıf içerisinde uygulamaya uygun olup olmadığı sınanmış olup, gerekli yerler ve olası hatalar revize edilmiştir.

2023-2024 güz dönemi-asıl uygulama: Hazırlanan ders modülü öğretmen adaylarına uygulanmıştır.

Uygylama sürecinde toplanan veriler içerik analizi yöntemiyle çözümlenmiş ve enstrümantal oluşum teorisi çerçevesinde analiz edilmiştir. Anlamlı örüntüleri ortaya çıkarmak amacıyla ve Verilerin çeşitliliği dikkate alarak veriler, benzer ifadeler gruplanarak önce kategorilre ayrılmış sonrasında temalar oluşturulmuştur. Verilerin çeşitliliği nedeniyle bu yapılandırma gerekli görülmüştür. Analiz süreci, öğretmen adaylarının farklı ortamlardaki enstrümantal oluşum süreçlerini anlamaya yönelik yürütülmüştür.

3.7. Pilot Uygulama, Ders Panları ve Materyallerin Tasarımı

Ön çalışma kapsamında gerçekleşen pilot uygulaması, Bursa Uludağ üniversitesi Matematik Eğitimi Bölümü'ndeki Materyal Tasarım dersi kapsamında 20 öğretmen adayı ile yapılmıştır. Matematik öğretmen adaylarının Cabri-Geometri yazılımını ve kağıt-kalem ortamlarını kullanarak enstrümantal oluşumlarını incelemesi amaçlanmıştır. Pilot dönem uygulaması için çalışma yaprakları, uygulama öncesi ve sonrası katılımcı görüş formları hazırlanmıştır ve alanında uzaman iki öğretim üyesinin onayından geçtikten sonra son halini almıştır. Araştırma için hazırlanan ders planları Türkiye'yi sarsan 6 Şubat Kahramanmaraş depremi dolayı eğitimin mecburi çevrim içi yapılması gerekçesiyle online ortamında uygulanmıştır. Bu sayede yapılan tasarımın sınıf içerisinde uygulamaya uygun olup olmadığı

sınanmış olup, gerekli yerler ve olası hatalar revize edilmiştir. Böylece, asıl uygulama için hazırlanacak olan ders modülü öğretmen adaylarına uygulanacaktır. Pilot uygulamadaki amaç, araştırmacının çalışmayı deneyimlemesi, araştırma sorularının netleştirilmesi ve hazırlanan veri toplama araçlarının test edilmesi, süreçte aksayan yönlerin tespit edilmesi ve asıl uygulamaya hazır hale getirilmesi olmaktadır. Pilot uygulamada araştırmacı, uygulamaya katılacak öğretmen adaylarını bir araya gelerek araştırmanın amacı, konusu ve ders konusu hakkında bilgi vermiştir. Bu uygulama sürecinde öğretmen adaylarının cebirsel ifadeler konusunu geometri yazılımı ortamında öğrenme ve öğretme sürecinde karşılaştıkları zorluklar, yazılımın sağladığı kolaylıklar ve enstrümantal eylem şemalarını belirlenmeye çalışılmıştır. Öğretmen adaylarının çoklu temsil kullanımlarını, temsiller arası geçişleri nasıl kullandıkları ve bunun öğrencideki karşılığı üzerine odaklanılmıştır.

3.8. Asıl Uygulama

Bu araştırma kapsamında, cebirsel ifadeler ve grafiklerin çizimi konusuna yönelik uygulama, 14 hafta süresince yüz yüze ve sınıf ortamında gerçekleştirilmiştir. Buna ek olarak, öğretmen adaylarına bilgisayar ortamında çalışmayı öğretmek ve kullanılacak olan Cabri-Geometri programını tanıtmak amacıyla 3 ders saati ayrılmıştır. Araştırmada, araştırmacının bir sınıfta yürüttüğü pilot uygulama sonucunda yenilenen ve geliştirilen ders modülü, başka bir ikinci sınıf öğrencileriyle "Bilgisayar Destekli Matematik" dersi kapsamında uygulanmıştır. Ders saatleri süresince revize edilen çalışma yaprakları tüm sınıfa uygulanmıştır. Ayrıca, belirlenen grupların soruları hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında çözdükleri ve grafiklerini oluşturdukları süreçte ses ve ekran kayıtları alınmıştır. Ses kayıtları, çalışma yaprakları ve ekran kayıtları analiz edilmiş; söz konusu süreç ayrıntılı bir biçimde gözden geçirilmiş ve bu süreçte kullanılan kağıt-kalem ve teknolojik ortamlardaki teknikler belirlenmiştir. Bu uygulama, öğretmen adaylarının enstrümantal oluşum süreçlerinin belirlenmesine katkı sağlamıştır. Öğrencilerin enstrümantal oluşumları, kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarını öğrenme ve öğretme enstrümanı olarak kullanım biçimini ortaya koymuştur. Bu sayede, her iki ortamda ortaya çıkan enstrümanlı eylem şemaları belirlenmiş ve bu şemalar karşılaştırılarak aralarındaki farklılıklar analiz edilmiştir. Elde edilen veriler doğrultusunda, matematik öğretmen adaylarının Cabri-Geometri yazılımını ve kağıt-kalem ortamlarını kullanarak geliştirdikleri enstrümantal oluşum süreçleri ve bu süreçte şekillenen enstrümanlı eylem şemaları ortaya konmuş ve karşılaştırmalı olarak incelenmiştir.

3.9. Verilerin Geçeerliği ve güvenirliği

Nitel araştırmalarda geçerlik ve güvenirlik, nicel araştırmalardaki kavramlardan farklı olarak, araştırmanın doğasına uygun şekilde ele alınmaktadır. Bu doğrultuda, "dış geçerlik" yerine "aktarılabilirlik"; "iç geçerlik" yerine "inandırıcılık"; "dış güvenirlik" yerine "teyit edilebilirlik"; ve "iç güvenirlik" yerine "tutarlılık" kavramları kullanılmaktadır (Yıldırım & Şimşek, 2011). Bu araştırmada inandırıcılığı artırmak amacıyla aşağıdaki stratejiler uygulanmıştır:

Öğretmen adaylarıyla araştırma sürecinde kurulan etkileşimler, uzun süreli ve güven temelli olarak sürdürülmüştür.

Veri toplama ve analiz süreci, bir dönem boyunca titizlikle yürütülmüş, elde edilen veriler ayrıntılı şekilde gözden geçirilmiştir İçerik analiziyle ulaşılan kategoriler ve temaların güvenirliğini sağlamak amacıyla, Bursa Uludağ Üniversitesi İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda görev yapan alanında uzman öğretim üyesine veriler sunulmuş; ilgili kişi tarafından bağımsız şekilde incelenerek uygun tematik yapılarla karşılaştırmalı analiz yapılması sağlanmıştır. Araştırmada, tüm dersler araştırmacı ve alanında uzaman öğretim üyesi tarafından gözlemlenmiştir. Aktarılabilirliği sağlamak amacıyla, çalışma grubu, veri toplama araçları, araştırma süreci ve analiz yöntemleri ayrıntılı olarak açıklanmış; ilgili bölümlerde doğrudan alıntılara da yer verilmiştir. Görüşme yapılacak grupların seçiminde amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Araştırmanın tutarlılığını desteklemek amacıyla, her aşamada iki farklı öğretim elemanından görüş alınmış ve bu görüşler doğrultusunda analiz süreci yönlendirilmiştir. Teyit edilebilirliği sağlamak amacıyla, araştırmanın tüm aşamaları, araştırmacının rolü, kullanılan veri kaynakları, veri toplama araçları, veri elde etme ve yorumlama süreçleri ile teorik çerçeve ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

4. BÖLÜM
BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde, öncelikle çalışmaya katılan altı öğretmen adayından oluşan ve ikişerli gruplar halinde çalışan araştırmanın odak katılımcıları, ders saatleri süresince çalışma yapraklarına yönelik ortaya koydukları enstrümanlı teknikler, çalışma yaprakları bazında değerlendirilerek sunulmuştur. Ardından her bir öğretmen adayı grubunun bu çalışma yapraklarına yönelik enstrümantal oluşum sürecine detaylı olarak yer verilmiştir. Bu süreçler aktarılırken, enstrümantal oluşumun bileşenlerine (enstrümantasyon- enstrümantalizasyon) yer verilmiş ve öğrencilerin enstrümanlı eylem şemalarının oluşumundaki yapı taşları (işlevsel sabitler) belirlenmeye çalışılmıştır. Sürekli olarak değişmekte ve gelişmekte olan enstrümanlı eylem şemalarının son haline ilgili gruba ilişkin aynı başlık altında yer verilmiştir.

Bulgularda yer alan enstrümantal oluşum süreçleri ve enstrümanlı eylem şemaları başlığı altında, gruba yönelik veriler sunulmuş olup, farklılaşan kısımlar öğrenci bazında belirtilmiştir.

4.1. Çalışma Yapraklarında Kullanılan Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şemaları

Bu başlık altında araştırmaya katılan toplam 6 öğrencinin ikişer gruplar halinde cebirsel ifadeler ve grafiklerinin çizimine (doğrusal, ikinci ve üçüncü dereceden denklemler, ters fonksiyonlar) yönelik enstrümanlı teknikleri çalışma yaprakları bazında sunulmuştur. Ayrıca her bir grubun verilen çalışma yaprakları temelinde hem kağıt-kalem ortamını hem de Cabri-Geometri yazılımını enstrümana dönüştürme süreçlerine yer verilmiştir. Bu yapılırken enstrümantasyon ve enstrümantalizasyon süreçlerine değinilerek işlevsel sabitlerin değişimi aktarılmıştır. Bulgular sunulurken enstrümantasyon süreçlerine enstrümantalizasyon sürecine nazaran daha çok yer verilmiştir. Çünkü Cabri-Geometri ortamında çalışma sürecinde aracın kısıtlanmalarından dolayı veya aracın kısıtlanmalarına rağmen öğrencilerin araç bilgisindeki eksiklikler enstrümantalizasyon sürecini kısıtlamıştır. Ancak bazı öğrencilerin tüm bu kısıtlamayı dikkate almayarak yazılımı kendi istekleri doğrultusunda değiştirmeye çalıştığı gözlenmiş ve ilgili kısımlarda bu durumlar aktarılmıştır. Enstrümanlı eylem şemalarının enstrümanlı teknikler ve işlevsel sabitlerden oluştuğu göz önüne alınmıştır.

4.1.1. Doğrusal Denklemler Çalışma Yaprağında Kullanılan Enstrümanlı Teknikler

Doğrusal denkemler ile ilgili çalışma yaprağı bilgisayar ve kağıt-kalem ortamında yapılan ve 10 farklı sorunun (f(x)=a, f(x)=ax, f(x)=ax+b) incelenmesini içeren bir çalışma yaprağıdır. Bu yaprakta, öğrencilerden verilen çeşitli doğrusal denklemlerin çözümünü ve grafiklerinin çizimini kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarında yapmaları istenmiştir. Bu çalışma yaprağı, analitik düzlemde bir noktanın hareket edişiyle oluşturduğu yolun geometrik görüntüsünün koordinatları, öğrencilere koordinat sistemi, analitik düzlem ve doğru grafiklerinin kavramlarıyla ilgili yapılandırmalarını tekrar ele almak ve bu kavramları görsel olarak göstermek için tasarlanmıştır. Bu bağlamda öğrencilerin her bir soru tipine yönelik bazı teknikler kullandığı gözlenmiştir.

Öğrenciler bu çalışma yaprağında, verilen fonksiyonları çözmeye ve grafiklerini çizmeye çalışırken kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarında çoğunlukla benzer enstrümanlı teknikleri kullandıkları tespit edilmiştir. Kağıt-kalem ortamındaki benzer teknikler:

- X ve Y eksenlerini kullanarak nokta belirleme ve doğruların grafiğini çizme
- Grafikler üzerinde matematiksel ilişkileri anlamak için görsel analiz yapma
- Doğrunun eğimini etkileyen katsayıların etkisini incelemek için eğim analizi
- Doğrunun sabit terim değişikliklerinin grafiği yukarı veya aşağı kaydırma etkisini incelemek için kaydırma
- Şeklinde olup, Cabri-Geometri ortamında kullanılan benzer teknikler:
- Koordinat eksenlerini görüntüleme
- X ve Y eksenlerine paralel veya dik doğruların çizimi
- Sürükleme özelliğinin, tam sayı olan nokta koordinatlarını reel/küsuratlı sayıya dönüştürmek için kullanımı
- Doğruların kesişim noktalarını belirleyerek grafiklerini oluşturma
- İz aracı yardımıyla noktaları veya doğruları hareket ettirerek gözlem yapma
- Nesne üzerinde nokta belirleme
- Sayı ve metin belirleme
- Sayıların belirlenen eksenlere aktarılması
- Hesap makinesini kullanma
- Belirli noktalar arasında doğru çizimi

dir. Doğrusal denklemler çalışma yaprağında kullanılan bu benzer teknikler bir sonraki paragraflarda grup bazında ayrıntılı olarak sunulmuştur.

4.1.1.1. Birinci Grubun Doğrusal Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması

Bu kısımda ikinci grup öğrencilerinin doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı tekniklere yer verilmiştir.

Birinci Grubun Doğrusal Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Kağıt-Kalem Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo 3'te öncelikle öğrencilerin kağıt-kalem ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 3

Birinci grubun doğrusal denklemler çalıma yaprağına yönelik Kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayları	**Ö1**	**Ö2**
Teknikler		
x ve y eksenlerini kullanarak nokta belirleme ve doğruların grafiğini çizme	+	+
Grafikler üzerinde matematiksel ilişkileri anlamak için görsel analiz yapma	+	+

Tablo 3'deki verilere göre, Ö1 ve Ö2 her ikisi de x ve y eksenlerini kullanarak nokta belirleme ve doğruların grafiğini çizme ve grafikler üzerinde matematiksel ilişkileri anlama tekniklerini kullanmışlardır. Bu bulgu, her iki öğrencinin de kağıt-kalem ortamında belirtilen matematiksel bilgilerini görsel olarak temsil etme ve analiz etme becerilerine sahip olduğunu göstermektedir.

Birinci Grubun Doğrusal Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Cabri-Geometri Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Birinci grubun kullandıkları teknikler Tablo 4'de verilmiştir.

Tablo 4

Birinci grubun doğrusal denklemler çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayları	Ö1	Ö2
Teknikler		
Koordinat eksenlerini görüntüleme	+	-
x ve y eksenlerine paralel veya dik doğruların çizimi	+	+
Sürükleme özelliğinin tam sayı çıkan noktanın koordinatını küsuratlı sayı yapmak için kullanımı	+	-
Doğruların kesişim noktalarını belirleyerek grafiklerini oluşturma	+	+
İz aracı yardımıyla noktaları veya doğruları hareket ettirerek gözlem yapma	+	-

Ö1 ve Ö2 Cabri-Geometri üzerinde doğrusal denklemlerin grafiklerini çizerken, ilk adımında koordinat eksenlerini görüntülemek amacıyla yazılımın araçlarını deneyerek "eksenleri göster" aracından, eksenler üzerinde tam sayı olarak belirledikleri noktaların koordinatını küsuratlı sayı yapmak için Sürükleme tekniğinden faydalanmışlar ve grafiklerin çizimi amacıyla oluşturdukları dik doğruların kesişim noktalarını belirleme tekniğini kullanmışlardır. Sabit fonksiyonların çiziminde diklik ve paralellik özeliklerini kullanmak amacıyla yazılımın araç menüsünden dik doğru ve paralel doğru araçlarını seçerek, x ve y eksenlerine paralel veya dik doğrular çizimi tekniğini uygulamışlardır. Son olarak iz aracı yardımıyla kesişim noktalarını hareket ettirerek oluşan grafiği gözlemlemişlerdir. Söz konusu tekniklerin kullanımı öğrencilerin matematiksel bilgilerini araç üzerinde görsel olarak temsil etme ve analiz etme becerilerine sahip oldukları şeklinde yorumlanmıştır.

Bu tekniklerin öğretmen adaylarının enstrümantal oluşum sürecine yansıma şekli ve kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamındaki kullanım biçimleri, sonraki paragraflarda ayrıntılı olarak ele alınmaktadır.

Birinci gruptaki öğrenciler (Ö1, Ö2) doğrusal denklemler çalışma yaprağını inceledikten sonra araştırmacının açıklama yapmasını beklemişlerdir. Araştırmacı öncelikle bu çalışma yaprağının konuyla ilgili 2 adet temel matematik alan bilgisi sorusu ve 7 adet fonksiyonların çözümü ve grafiklerinin çizimi ile ilgili hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında sorudan oluştuğunu açıklamıştır. Fonksiyonlar ile ilgili soruların öncelikle kağıt-kalem ortamında çözülüp grafiğinin çizilmesi, sonrasında Cabri-Geometri ortamını inceleyerek grafiklerin çizilmesini istemiştir. Öğrenciler çalışma yapraklarındaki soruları sırasıyla 'Koordinat sistemi nedir ve özellikleri nelerdir?' ve 'Analitik düzlemde doğrunun tanımı nedir ve özellikleri nelerdir?' sorularını yanıtladıktan sonra ilk önce sabit

fonksiyonlar sonrasında doğrusal fonksiyonların çözümüne başlamışlardır. Gruptaki öğrencilerin çalışma sürecinde aralarında geçen diyalog aşağıda verilmiştir.

Ö1: koordinat sistemi nedir ve özellikleri nelerdir?

Ö2: koordinat sistemi Bence evreni temsil eder. Bir noktanın yerini temsil eder. Yerini gösterir. Sadece noktanın değil doğrunun da yerini gösterebilir.

Ö1: nokta tek boyutlu mudur?

Ö2: Hayır 2 boyutludur.

Ö1: E tamam o zaman 2 boyutlu evrende her şeyin yerini gösterebiliriz

Ö2: koordinat sistemi 2 doğrudan oluşuyor

Ö1: Evet evet sonsuza giden iki doğrudan oluşur birini x birini y deniliyor

Ö1: Analitik düzlemde doğrunun tanımı nedir ve özellikleri nelerdir? Doğru aynı doğrultudaki noktalar bütünüdür. İki ucu da sonsuza kadar gider

Ö2: Bence doğru İki noktadan geçen sonsuz bir çizgi Yok yok

Ö1: Ama bence doğru aslında İki noktadan geçmiyor ki

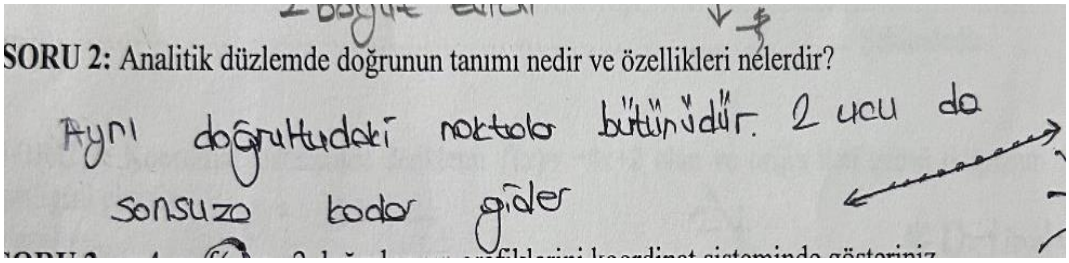
Ö2: neden? Doğruyu oluşturmak için en az iki nokta gereklidir.

Ö1: Ama bir doğruyu oluşturmak için değil mi. Mesela ben tek noktadan sonsuz tane doğru oluşturabilirim ama ben bir tane doğrunun yerini bulmak istersem gerekebilir.

Bu diyaloğun ardından grup doğru tanımıyla ilgili soruyu şekil 9 ve 10'da görüldüğü üzere yanıtlamıştır.

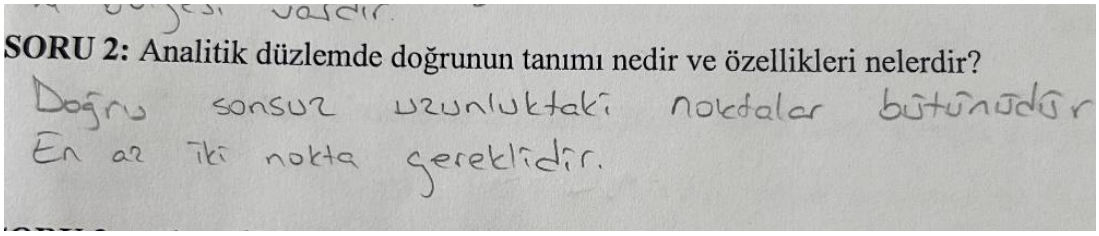
Şekil 9

Ö1'in doğrusal denklemler çalışma yaprağında doğrunun tanımına yönelik yanıtı



Şekil 10

Ö2'nin doğrusal denklemler çalışma yaprağında doğrunun tanımına yönelik yanıtı



Ö1 ve Ö2 'Analitik düzlemde doğrunun tanımı nedir? ' sorusunu 'Aynı doğrultudaki noktalar bütünüdür' şeklinde yanıtlamıştır. Verilen yanıttan yola çıkarak grubun doğru tanımına yönelik zihinsel şemaları 'aynı doğrultuda ve sonsuz uzunluktaki noktalar bütününe doğru denir' eylemdeki teoremi ile 'doğru özelliği' , 'koordinat sistemi özelliği', 'uzunluk' ve 'sonsuzluk özelliği' eylemdeki kavramlarına dayandığı söylenebilir.

Sonrasında Ö1 ve Ö2, x=4 ve f(x)=-2 doğrularının koordinat sistemindeki grafiğini çizmeye çalışmışlardır. Ö1 x= 4 doğrusunu çizerken, Ö2 f(x)=-2'yi temsil eden bir başka doğru çizmiştir. Ancak, başlangıçta fonksiyonların sabit fonksiyon olduklarını fark etmemişler, aralarında denklemi açıklayarak x=4 doğrusunda "y'ye hangi değeri verirsek verelerim x'in değeri değişmeyecek" ve aynı şekilde "f(x)=-2 doğrusu için x'e hangi değeri verirsek verelim y değeri -2 olacak" diyerek sabit değerlerin değerinin değişmeyeceğini fark etmişlerdir. Böylelikle bu fonksiyonların sabit fonksiyon olduğunu anlamışlardır.

'x=4 ve $f(x) = -2$ doğrularının grafiklerini koordinat sisteminde gösteriniz.' Sorusuna Ö1 ve Ö2 koordinat sistemini çizerek x ekseni üzerinde 4 değerini ve y ekseni üzerinde -2 değerini belirleyerek 4 ve -2 den geçen ve sırasıyla y ve x eksenlerinde paralel doğrular çizmişlerdir. Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamındaki kullandığı eylemdeki teoremin "Eğer sabit bir fonksiyonun grafiği çizilecek ise sabit fonksiyona ait bir nokta belirlenir bu noktadan x veya y eksenine paralel çizilir" olduğu tespit edilmiştir. Bu eylemdeki teoremi ile 'değer verme özelliği' ve 'paralel doğru' eylemindeki kavramlarına dayandığı söylenebilir.

Daha sonra, öğrenciler aynı örneği Cabri-Geometri ortamını kullanarak çözmeye çalışmışlardır. İlk olarak, araçları deneyerek eksenleri gösterme aracını bulup koordinat sistemi ekranlarında görüntülemişlerdir. Sonrasında x ekseninde 4'ü belirleyip y eksenine paralel doğruyu çizmişler ve doğruyu x=4 olarak adlandırmışlardır. Ancak, Cabri yazılımında başladıkları noktayı hareket ettirerek denklemin değiştiğini fark edince doğru bir şekilde çizemediklerini anlamışlardır. Bu hatalarını düzeltmek için paralellik aracı yerine diklik aracı

denemişler ve x ekseninde 4'ten geçen ve x eksenine dik olan bir doğruyu hareket ettirerek sorunu çözmeye çalışmışlardır. Ancak, denklemi doğru şekilde tanımlayamadıklarında yine sorun yaşamışlardır. Araştırmacının rehberliğinde, hangi nesneyi hareket ettirdiklerini ve başlangıç nesnesinin doğru olup olmadığını sorgulamışlardır. Ö1, x ekseninde 4'ten geçen ve x eksenine dik olan bir doğruyu hareket ettirerek sorunu çözmeye çalışmıştır.

Bu esnada öğrencilerin ve araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıda verilmiştir.

Ö1: Buldum eksenleri göster diyor ona tıkla (Ö2 bu arada Ö1'in dediklerini bilgisayardan yapıyor). Şimdi x ekseninde 4'ü bul ve oradan y eksenine paralel doğruyu çiz. Şimdi isimlendirelim x= 4 yazalım. Diğeri de y = -2 doğrusunu çizelim y ekseninde -2'yi bul. Şimdi de x'e paralel çiziyoruz. Biz biliyorduk ki bunu zaten uygulamadan elde ettiğimiz sonuçlar Biz bunu daha önceden biliyorduk ki çizdik işte. Hocam biz buradakilerin hepsini biliyorduk Ne yapalım şimdi.

Araştırmacı: Başladığınız noktayı hareket ettirin elde ettiğiniz denklem değişiyor mu?

Ö1: Evet değişiyor hocam.

Araştırmacı: O zaman olmamış başka bir yol deneyebilirsiniz. Hangi nesneyi hareket ettirdiniz?

Ö1: doğruyu

Araştırmacı: başlangıç nesne doğru muydu?

Ö1: Evet ilk önce doğruyu yaptık. A evet hocam hareket ediyor Ama denklem de değişiyor olmamış o zaman. Benim hareketime göre başka bir şey yazabilir miyiz biz buraya?

Ö1: x ekseninde 4'ten geçen ve x eksenine dik doğruyu çizelim

Ö2: hareket ettiriyorum

Ö1: nereden yaptın

Ö2: denklem ve koordinat aracından

Ö1: hıım tamam istediğimiz gibi hareket ettirebiliyoruz.

Ö2: doğruyu niye hareket ettiriyorsun x noktasını hareket ettir.

Ö1: hareket ettiriyorum denklem değişmiyor ama yine de tam olmadı sanki.

Araştırmacı akıllı tahtada Cabri-Geometri Yazılımı üzerinden x=4 doğrusunun çizimini adım adım anlatmaya başlamıştır. Öğrenciler araştırmacının anlatımı üzerine grafiği çizmeye devam etmişlerdir.

Ö1: Sabit sayıyı 4 olarak seçelim, Ölçüm aktarımla X eksenine aktaralım, Tesadüfi bir y noktası seç.

Ö2: Bence 3 olsun. 3'ten x eksenine paralel doğruyu çiz

Ö1: şimdi y doğrusunu çizmemiz gerekiyor, hareket edebilen. Hareket ettireceğiz ki izini görelim

Ö2: Çizim hareket etmiyor

Araştırmacı: iz aracını seçtiniz mi?

Ö1: hemen seçelim. Doğruyu hareket ettir.

Ö2: hareket etmiyor

Ö1: noktadan tut hareket ettir. A niye böyle oldu

Ö1: Z noktasının izini alacağız çünkü. Z noktasını yapmadık. Önce Z noktasını belirleyelim Kesişim noktası aracından.

Ö2: Iz aracını aldım. Z noktasını hareket ettirdiğimde y eksenine paralel bir sürü yeşil doğru çıkıyor Ama kırmızı iz çıkmıyor. Sanırım y ekseni üzerindeki noktayı tam sayı seçtiğimiz için böyle oldu

Öğrenciler yeni öğrendikleri tekniklerin kullanımında başarısız olduklarını anlayıp bir daha tekrar çözmeye başlamışlar.

Ö1: gel tekrardan yapalım. x noktasını belirledik x eksenine aktardık o noktadan y eksenine paralel x eşittir 4 doğrusunu çizdik. Geometrik yeri Hoca nerede kullandı? Biz onu hiç kullanmadık. x sabit sayı olduğu için hareket etmez y noktasını hareket ettir. Şimdi kesme noktasının izini bakalım. Oldu hocam biz yaptık. Ama biz yine de geometrik yeri kullanmadık Hoca nerede kullandı onu da bilmiyorum, ama doğrunun izini elde ettik.

Ö1: Biz buradan ne öğrendik

Ö2: Bir doğru noktalardan oluşuyor diye öğrendik

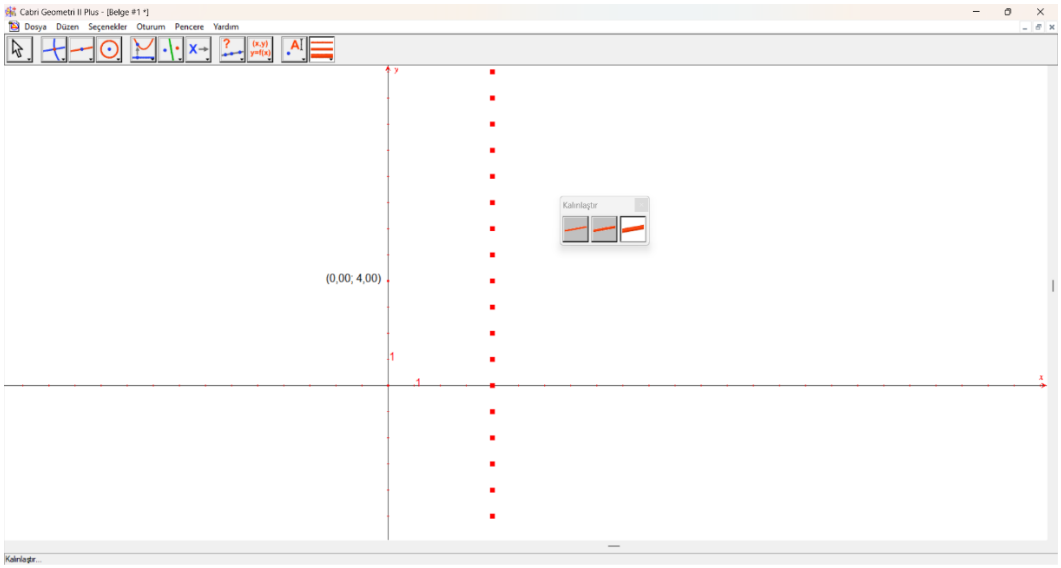
Ö1: Doğrunun birbirine bitişik denilecek kadar yakın noktalardan oluştuğunu öğrendik. y=-2 doğrusu için öncelikle Y ekseninde -2 doğrusunu çizdik x eksenine paralel ardından x

ekseninde rastgele bir nokta seçtik o noktadan paralel doğrumuzu tekrar çizdik kesişim noktasını belirledik ondan sonra iz aracını kullanarak kesişim noktasını hareket ettirdik ve Z'nin izi ortaya çıktı evet yaptık. Ama biz ölçüm aktarım aracını kullanmadık çünkü -2'nin tam nerede olduğunu görüyorum o yüzden sayı verip eksene aktarmama gerek yok sanki.

Yukarıda verilen öğrencilerin konuşmalarından görüldüğü üzere Ö1, y ekseni üzerinde herhangi bir tamsayı belirleyip o noktadan x eksenine paralel doğru çizip ve x=4 doğrusuyla kesiştiriyorlar. İkinci bir doğru ekleyerek denkleminin değişmediğini fark etmişlerdir. Ama yine bir sorun ortaya çıkmıştır, kesişim noktasının izini görüntülemek istediklerinde z noktasının bağımlı nokta olduğunu fark edip y noktasını sürüklemeye başlıyorlar ancak y eksinindeki tüm tamsayılardan geçen ve x eksenine paralel çok sayıda iz değil de doğru karşılarına çıkıyor. 'Doğrunun denklemini elde ettik ve aynı zamanda y noktasını sürüklediğimizde denklemin sabit kaldığını da gördük, ama neden izi bu şekilde çıktı' diye kendilerine soruyorlar ve y ekseni üzerindeki belirledikleri noktadan x eksenine paralel doğru değil de y eksenine dik doğru çizmenin gerektiğinin farkına varıyorlar. Şekil 11'de görüldüğü üzere bu doğrultuda değişikliği yaptıklarında y noktasının izi x=4 üzerinde noktalar halinde çıkıyor.

Şekil 11

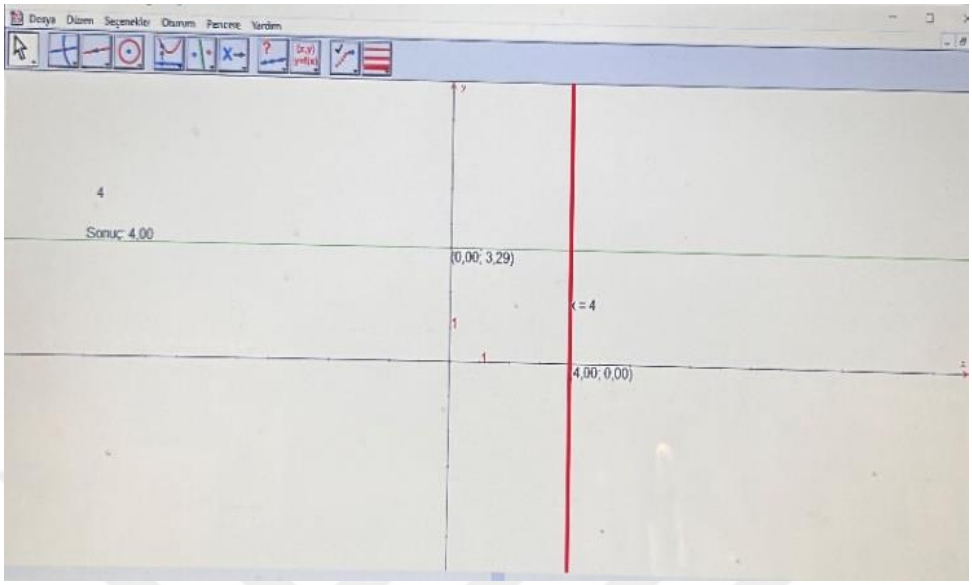
Birinci grubun doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik ekran kaydından bir kesit



Öğrenciler sıkıntının ne olduğunu araştırmacıya sorup ve y ekseni üzerindeki noktanın bir tam sayı olarak seçildiği ortaya çıkıyor. Bu sorunu ortadan kaldırmak için noktasını tam sayı olmayacak şekilde belirleyip ve izini tam da x=4 doğrusunun üzerinde şekil 12'te görüldüğü üzere kırmızı iz olarak görüntülüyorlar.

Şekil 12

Birinci grubun doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik ekran kaydından ikinci kesit

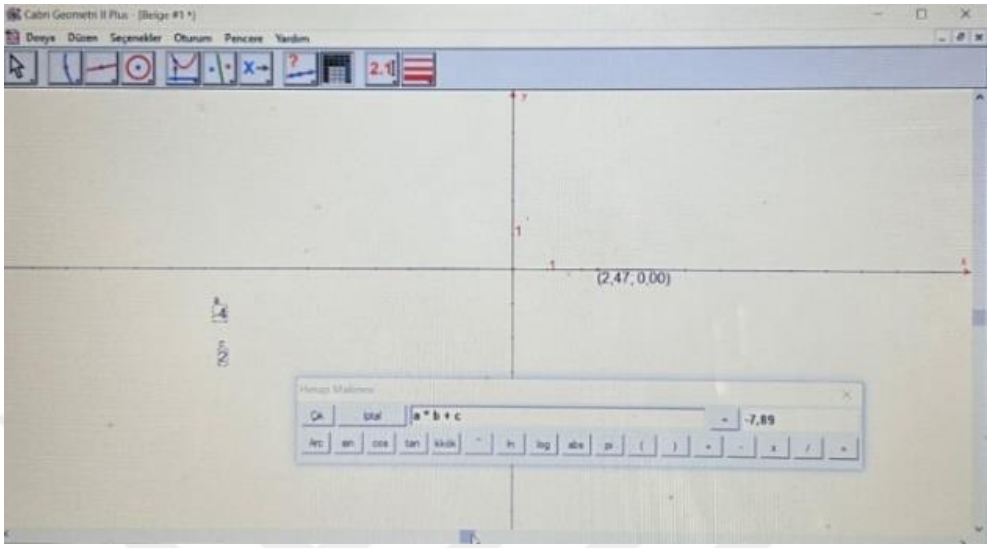


x=4 doğrusunu çizmek için dayandığı "x=4 doğrusu x ekseni üzerinde 4 noktasından geçen ve y eksenine paralel olan doğrudur" ve "x=4 doğrusu x ekseni üzerinde 4 noktasından geçen ve x eksenine dik olan doğrudur' işlevsel sabitlerinin Cabri-Geometri ortamında çalışma aşamasında yazılıma bağlı olarak "x=4 doğrusu x yani başlangıç noktasının belirli bir yönde ve oranda hareket etmesi sonucu ortaya çıkan izidir." işlevsel sabitinin kullanıldığı görülmüştür. Yani Ö1'in doğrusal denklem şeması kağıt-kalem ortamındaki modelden araca dayalı dinamik bir modele dönüşmüştür ki bu süreçte Cabri-Geometri yazılımı öğrencinin şemalarını geliştirdiğinden süreç enstrümantasyon süreci olarak değerlendirilmiştir.

Bundan sonra öğrenciler f(x)= ax+b şekilde olan doğruların grafiğini çalışma yaprağı üzerinde farklı değerler vererek çizmişlerdir ve Cabri-Geometri ortamında hesap makinesi aracını kullanarak problemleri çözüp grafik çizimini tamamlamışlardır. Şekil 13 ve 14'te, öğrencilerin Cabri-Geometri ortamındaki hesap makinesi aracını kullanarak koordinat sisteminde f(x)=-4x+2 denkleminin grafiğini çizdikleri gösterilmiştir.

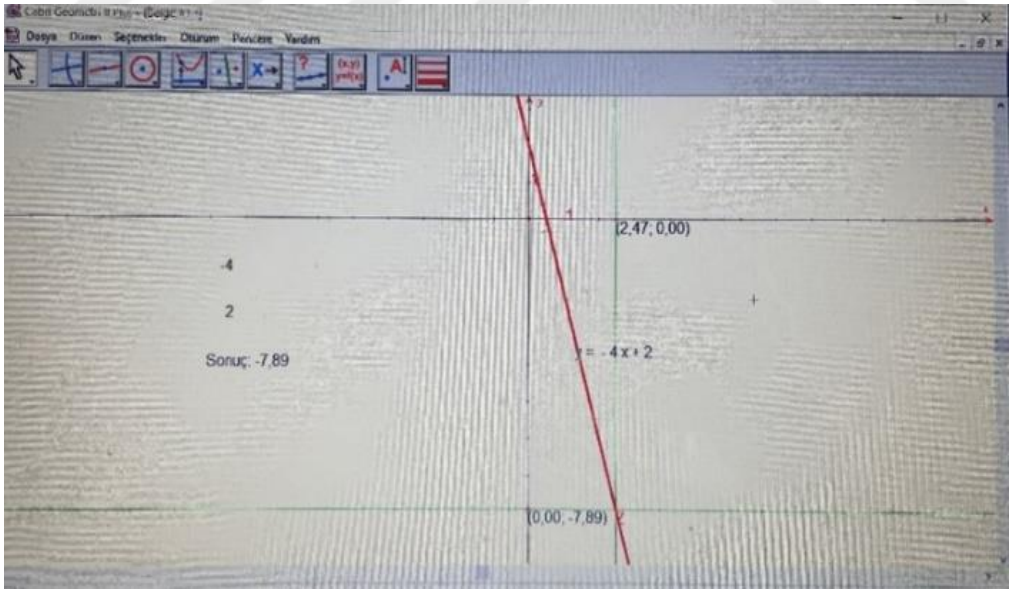
Şekil 13

Birinci grubun doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde hesap makinesi kullanımına ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Şekil 14

Birinci grubun doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde hesap makinesi ve ölçüm aktarım araçlarının kullanımına ilişkin ekran kaydından bir kesit.

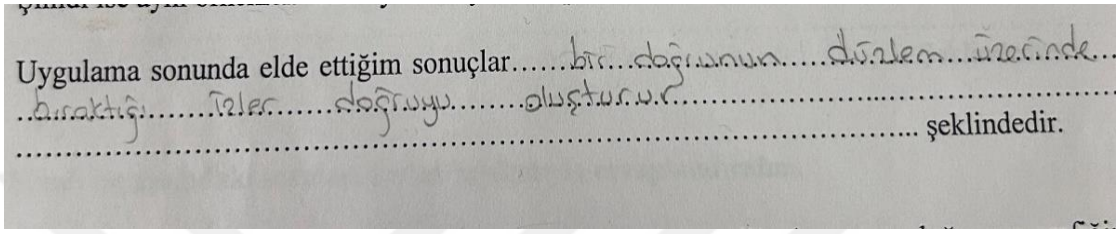


Bu çalışma yaprağında öğrencilerin kağıt-kalem ortamında sabit fonksiyonlara yönelik matematiksel bilgilerini çalışma yaprağında verilen sorular doğrultusunda kullanmışlardır, ancak Cabri-Geometri ortamına gelince araç bilgisindeki eksiklikler ve araçtan kaynaklanan kısıtlamalar nedeniyle yetersiz oldukları ancak yazılımı inceleyerek ve araştırmacının rehberliği doğrultusunda aracın enstrümana dönüştürebilecekleri ve Ö2'nin çalışma yaprağında

analitik düzlemde doğrunun tanımı ve sabit fonksiyonların grafiğinin çizimi sorularına yönelik verdiği yanıta dayanarak enstrümanlı eylem şemalarına ait elemanların değiştiği görülmiştür. Ö2'nin uygulama sonunda elde ettiği sonuçlar nelerdir sorusuna verdiği yanıt Şekil 15'de verilmiştir

Şekil 15

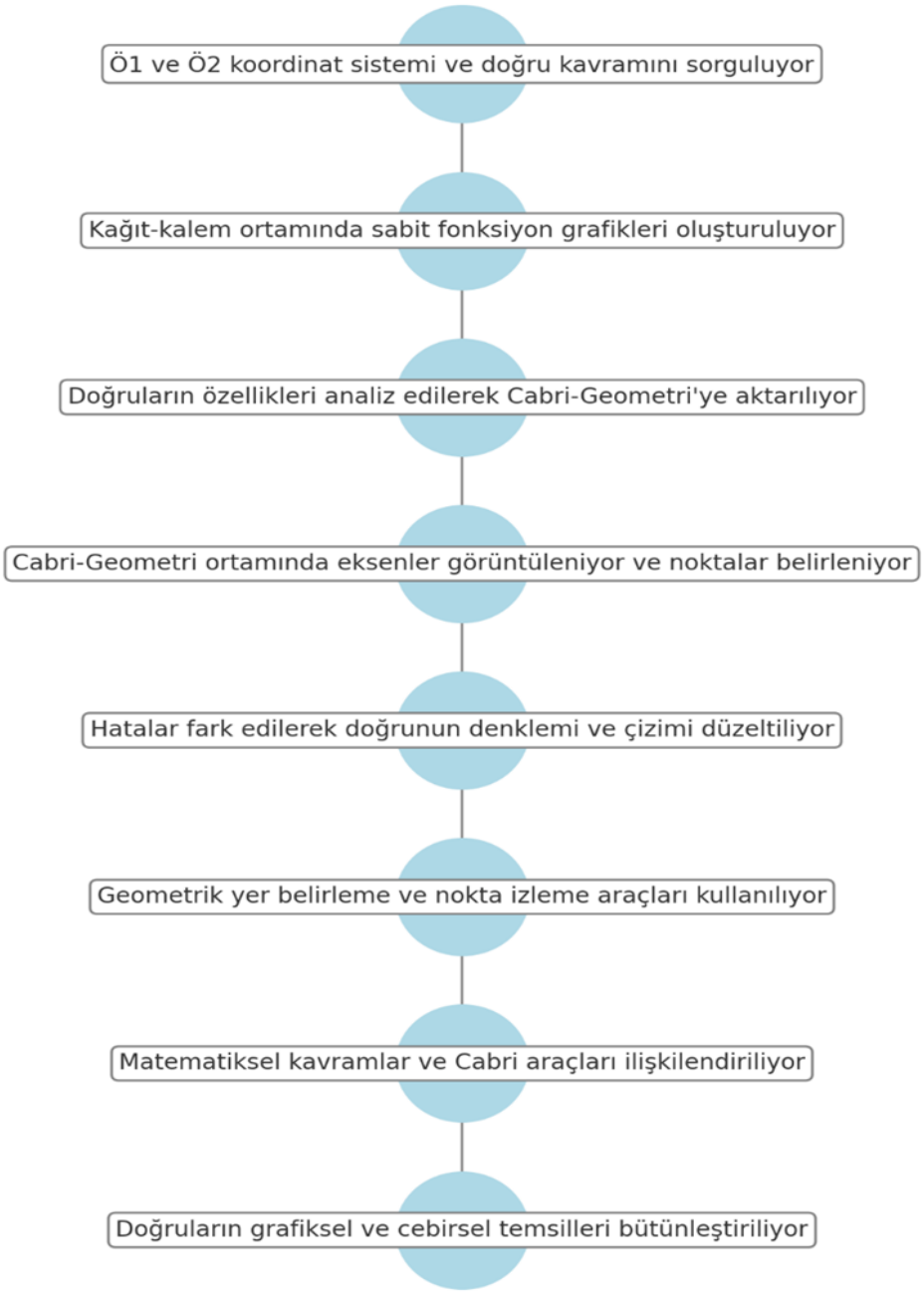
Ö2'nin elde ettiği sonuçlar nelerdir sorusuna ilişkin doğrusal denklemler çalışma yaprağından bir kesit



Şekil 16'da Ö1 ve Ö2'nin enstrümantal oluşum sürecinde geçtikleri aşamaların özeti olarak gösterilmektedir.

Şekil 16

Ö1 ve Ö2'nin doğrusal denklemler çalışma yaprağına yönelik çözüm süreçlerinin şematik gösterimi



Şekşl 16'daki veriler, Ö1 ve Ö2'nin doğrusal denklemler çalışma yaprağına yönelik enstrümantasyon sürecini göstermektedir. Süreç, öğrencilerin koordinat sistemi ve doğrusal fonksiyon kavramlarını tartışmasıyla başlamakta olup, kağıt-kalem ortamında doğrusal

denklemleri çözerek grafik çizimleriyle devam etmektedir. Daha sonra, Cabri-Geometri ortamına geçerek doğruların grafiklerini dinamik olarak oluşturmuş, yazılımın araçlarını kullanarak doğruların kesişim noktalarını belirleme ve iz aracıyla grafik değişimlerini gözlemleme gibi teknikleri denenmiştir. Sürecin ilerleyen aşamalarında yazılımın sunduğu araçları keşfetmiş, başlangıçta yaptıkları hataları fark ederek düzeltmiş ve doğrusal fonksiyonların cebirsel ve grafiksel temsillerini ilişkilendirmişlerdir. En sonunda, öğretmen adayları tarafından elde edilen matematiksel bilgiler dinamik geometri ortamında bütünleşerek enstrümantasyon süreç tamamlanmıştır.

4.1.1.2. İkinci Grubun Doğrusal Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması

Bu kısımda ikinci grup öğrencilerinin doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı tekniklere yer verilmiştir.

İkinci Grubun Doğrusal Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Kağıt-Kalem Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo 5'te öncelikle öğrencilerin kağıt-kalem ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 5

İkinci grubun doğrusal denklemler çalıma yaprağına yönelik kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayı	**Ö3**	**Ö4**
Teknikler		
Doğrunun grafiğini çizmek için x ve y'ye farklı değerler vererek koordiat sistemi üzerinde nokta belirleme	+	+
Doğruları grafiksel olarak göstermek için elde edilen noktaları birleştirme	+	+

Tablo 5'deki verilere göre, Ö3 ve Ö4 her ikisi de doğruların grafiklerini çizmek amacıyla verilen denklemler doğrultusunda x ve y'ye farklı değerler vererek *nokta belirleme ve sonrasında belirledikleri noktaları birleştirme tekniğini* kullanmışlardır. Bu sayede, her iki öğrencinin de kağıt-kalem ortamında belirtilen tekniklere dayanarak cebirsel işlemler yapıp matematiksel bilgilerini görsel olarak temsil etme becerilerine sahip olduğunu göstermektedir.

İkinci Grubun Doğrusal Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Cabri-Geometri Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo 6'da öncelikle öğrencilerin Cabri-Geometri ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 6

İknci grubun doğrusal denklemler çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayı	**Ö3**	**Ö4**
Teknikler		
Koordinat eksenlerini görüntüleme	+	-
Nesne üzerinde nokta belirleme	+	+
Açı ölçümü yapma	+	-
x ve y eksenlerine dik doğru çizimi	+	-
Sürükleme özelliğinin tam sayı çıkan noktanın koordinatını reel sayı yapmak için kullanımı	+	+
Doğruların kesişim noktalarını belirleyerek grafiklerini oluşturma	+	+
Sayı ve metin belirleme	+	+
Sayıların belirlenen eksenlere aktarılması	+	+
Hesap makinesini kullanma		
İz aracı yardımıyla noktaları veya doğruları hareket ettirerek gözlem yapma	+	+

Ö3 ve Ö4, Cabri-Geometri üzerinde sabit fonksiyonların çizimini yaparken, başlangıç noktasını belirlemek için koordinat eksenlerini görüntüleme, nesne üzerinde nokta belirleme ve açı ölçümü yapma, sonrasında ise sürükleme özelliğini kullanarak tam sayı çıkan noktanın küsuratlı sayı yapılması tekniklerini kullanmıştır. Ayrıca, grafiklerin çizimi amacıyla x ve y eksenlerine dik doğru çizimi ve doğruların kesişim noktalarını belirleme tekniklerinden faydalanmışlardır. Doğrusal fonksiyonların matematiksel çözümü amacıyla sayı ve metin belirleme, bu sayıların eksenlere aktarılması için ölçüm aktarma ve hesap makinesi araçlarını kullanma tekniklerini, son olarak da iz aracı ve geometrik yer araçları yardımıyla noktaları veya doğruları hareket ettirerek gözlem yapmıştır. Söz konusu tekniklerin kullanımı öğrencilerin matematiksel bilgilerini araç üzerinde görsel olarak temsil etme ve analiz etme becerilerine sahip oldukları düşünülmektedir.

İkinci gruptaki öğrenciler (Ö3 ve Ö4), birinci grup gibi doğrusal denklemler çalışma yaprağını inceledikten sonra, araştırmacının açıklamalarını beklemişlerdir. Araştırmacı, bu çalışma yaprağının 2 temel matematik bilgisi sorusu ve 7 fonksiyon sorusundan oluştuğunu ve bu soruların hem kağıt-kalem hem de Cabri-Geometri ortamında çözülmesi ve grafiklerinin çizilmesi gerektiğini belirtmiştir. Soruların ilk olarak kağıt-kalem ortamında ardından Cabri-Geometri ortamında yanıtlanması istenmiştir. Öğrenciler, önce "Koordinat sistemi nedir ve özellikleri nelerdir?" ve "Analitik düzlemde doğrunun tanımı nedir?" sorularını yanıtlayarak çalışmaya başlamışlardır. Aralarındaki konuşma şu şekilde gelişmiştir:

Ö4: koordinat sistemi neydi

Ö3: koordinat sistemi noktanın yerini belirtir

Ö4: düzlemde noktanın veya nesnenin diyeyim konumunu belirleyen sistemdir. Koordinat sisteminin özellikleri nelerdir?

Ö3: İki tane kolu vardır. Yani En az iki kolu var çünkü x, y, z de olabilir.

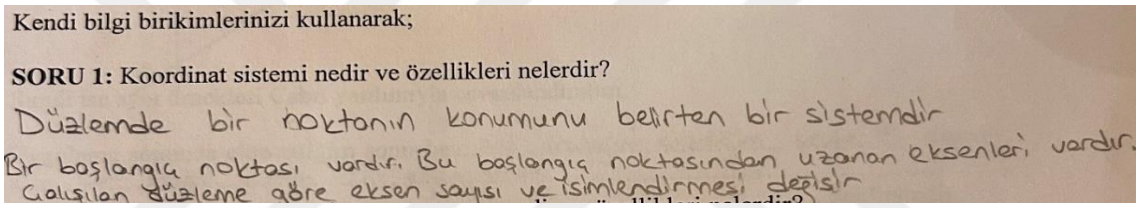
Ö4: başlangıç noktası ve orijinden uzanan kolları vardır diyorum. Eksenleri vardır desek daha doğru olmaz mı?

Ö3: Çalışılan düzleme göre eksen sayısı ve isimleri değişir.

Bu diyaloğun ardından grup doğru tanımıyla ilgili soruyu şekil 17 ve 18'de görüldüğü üzere yanıtlamıştır.

Şekil 17

Ö3'ün doğrusal denklemler çalışma yaprağında koordinat sisteminin tanımına yönelik yanıtı


Kendi bilgi birikimlerinizi kullanarak;

SORU 1: Koordinat sistemi nedir ve özellikleri nelerdir?

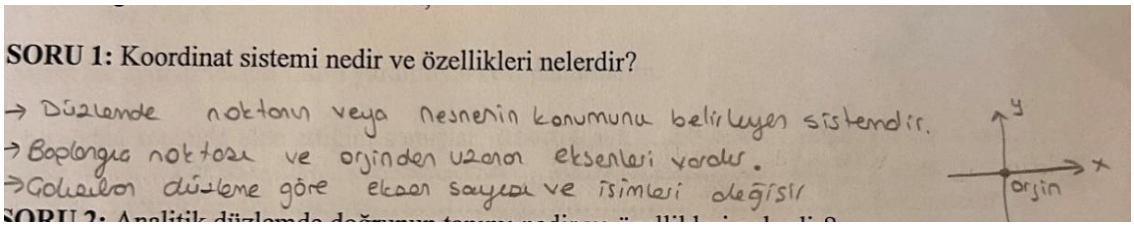
Düzlemde bir noktanın konumunu belirten bir sistemdir

Bir başlangıç noktası vardır. Bu başlangıç noktasından uzanan eksenleri vardır.

Çalışılan düzleme göre eksen sayısı ve isimlendirmesi değişir

Şekil 18

Ö4'ün doğrusal denklemler çalışma yaprağında koordinat sisteminin tanımına yönelik yanıtı


SORU 1: Koordinat sistemi nedir ve özellikleri nelerdir?

→ Düzlemde noktanın veya nesnenin konumunu belirleyen sistemdir.

→ Başlangıç noktası ve orijinden uzanan eksenleri vardır.

→ Çalışılan düzleme göre eksen sayısı ve isimleri değişir

Başlangıçta Ö3 koordinat sisteminin tanımını yaparak "Koordinat sistemi noktanın yerini belirtir" diyerek koordinat sisteminin temel kavramlarını ifade etmiştir. Ö4 ise bu tanımı daha da genişleterek, "Düzlemde noktanın veya nesnenin konumunu belirleyen sistemdir" demiştir ve koordinat sisteminin geometrik özelliklerine de vurgu yapmıştır.

Ö3 ve Ö4'ün "Koordinat sistemi nedir?" sorusuna verdikleri yanıtlar, öğrencilerin bu konudaki zihinsel şemalarının nasıl şekillendiğine dair ipuçları vermektedir. Ö3, "Koordinat sistemi noktanın yerini belirten sistemdir" diyerek, koordinat sisteminin en temel işlevini tanımlamış ve zihinsel şeması koordinat sistemini yer belirleme aracı olarak şekillenmiştir. Ö4 ise bu tanımı genişleterek, koordinat sisteminin "Düzlemde noktanın veya nesnenin konumunu

belirleyen bir sistem" olduğunu söylemiş ve buna ek olarak "başlangıç noktası" ve "eksenden uzanan kollar" gibi daha kapsamlı özelliklere değinmiştir, bu da Ö4'ün koordinat sistemi ile ilgili zihinsel şemasının daha geniş ve soyut olduğunu göstermektedir.

Yanıtlarından yola çıkarak grubun koordinat sistemi tanımı zihinsel şeması 'analitik geometri' eylemdeki kavramına dayanmaktadır. Bu kavram, düzlemin x ve y eksenleri ile bölünmesi ve bu eksenlerin orijinde kesişmesi esasına dayanmaktadır. Ö4'ün "başlangıç noktası" ve "eksenden uzanan kollar" ifadeleri ile Ö3'ün "noktanın yerini belirtir" ve "eksene bağlı olarak değişir" açıklamaları, bu eylemdeki kavramı yansıtmaktadır. Zihinsel şemalarının orijin, eksenler ve nokta yer belirleme gibi kavramlara dayandığı görülmektedir.

Sonrasında ‘doğrunun tanımı ve özellikleri nelerdir?’ sorusunu yanıtlarken aralarında aşağıda verilen konuşma geçmiştir:

Ö3: Analitik düzlemde doğrunun tanımı nedir ve özellikleri nelerdir diye sormuş.

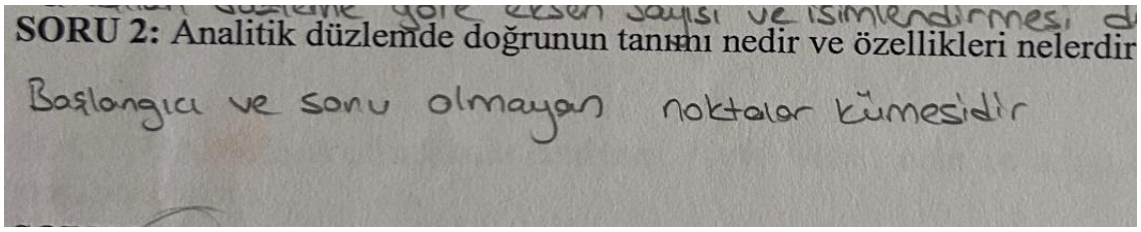
Ö4: Ama doğrunun tanımı Öklid geometrisinde vardı sanki

Ö3: Başlangıcı ve sonu belli olmayan sonsuzdan gelip sonsuza uzanan noktalar kümesidir.

Bu konuşmanın ardından grup doğru tanımıyla ilgili soruyu şekil 19 ve 20’de görüldüğü üzere yanıtlamıştır.

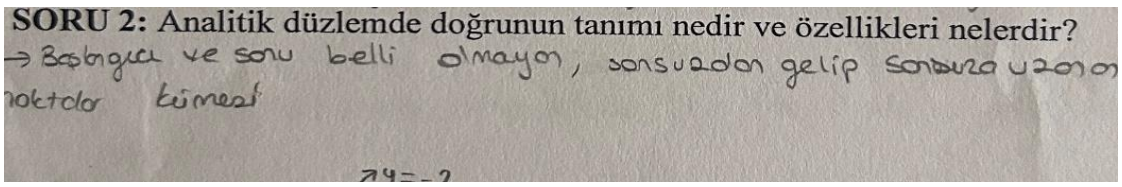
Şekil 19

Ö3’ün doğrusal denklemler çalışma yaprağında Analitik geometride doğrunun tanımına yönelik yanıtı



Şekil 20

Ö4’ün doğrusal denklemler çalışma yaprağında Analitik geometride doğrunun tanımına yönelik yanıtı

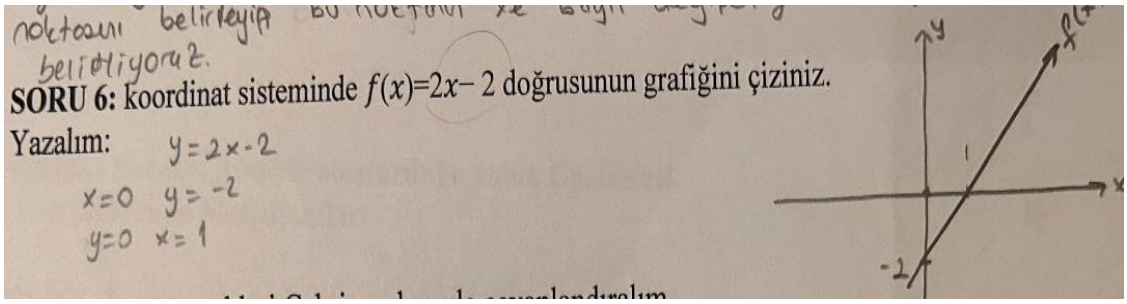


Ö3 ve Ö4 ’Analitik düzlemde doğrunun tanımı nedir?’ sorusunu ’Başlangıcı ve sonu belli olmayan, sonsuzdan gelip sonsuza uzanan noktalar kümesidir’ şeklinde yanıtlamıştır. Verilen yanıttan yola çıkarak grubun doğru tanımı zihinsel şemaları ‘Sonsuz uzunluktaki noktalar kümesine doğru denir.’ tanımının ‘doğru özelliği’, ’uzunluk’ ve ’sonsuzluk özelliği’ eylemdeki kavramlarına dayandığı söylenebilir.

Ö3 ve Ö4 iki temel soruyu cevapladıktan sonra sabit fonksiyonların çözümüne ve grafiklerinin çizimine başlamıştır. Ö4, "x=4 ve f(x)=-2 doğrularının grafiğini koordinat sisteminde gösteriniz. Değer veriyorum ve doğruların ikisini de çiziyorum" ifadesiyle, grafik çizimi sırasında fonksiyonlara değer vererek doğruyu çizdiğini belirtmiştir. Bu adımlar, fonksiyonların nasıl çözüleceğine dair işlemleri sırasıyla gerçekleştirdiğini göstermektedir. "y=3x grafiğini çiziniz demiş, önce x'e 0 veriyoruz y, 0 oluyor, sonra y'ye 0 veriyoruz x, 0 oluyor" ifadesinde ise, hem x hem de y’ye değerleri vererek doğruyu çizmek ve fonksiyonun çözümü için gereken adımları tamamlamıştır. Bu süreçte, doğrusal fonksiyonların grafiklerini çizmek amacıyla noktaları belirleyip doğruları oluşturmuştur. Ö4, ayrıca, "Şimdi f(x)=x-1 doğrusuna geçelim. x'e 1 veriyorum y=0, x'e 2 veriyorum, y eşittir -1" diyerek doğrusal fonksiyonların grafiklerini çizerken yine aynı yöntemi devam etmiştir. Her bir fonksiyon için adım adım değerler vermiş, bu değerleri grafik üzerinde göstererek doğruyu oluşturmuştur. Benzer şekilde, koordinat sisteminde f(x)=2x-2 doğrusunun grafiğini çizmek için yine x ve y'ye değerler vererek aynı stratejiyi diğer fonksiyonlar için de uyguladığı görünmektedir. Ö4, kağıt-kalem ortamında fonksiyonların çözümü ve grafiklerinin çizimi işlemlerini gerçekleştirirken, Ö3’te aynı adımları izlemiştir. Şekil 21’de, Ö4’ün kağıt-kalem ortamındaki ‘Koordinat sisteminde f(x)=2x-2 doğrusunun grafiğini çiziniziz’ sorusuna verdiği yanıt gösterilmiştir.

Şekil 21

Ö4’ün doğrusal denklemler çalışma yaprağından bir kesit



Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamındaki kullandığı eylemdeki teoremin "Eğer sabit veya doğrusal fonksiyonların grafiği çizilecek ise fonksiyonlarda bulunan x ve y değişkenlerine değer vererek iki nokta belirlenir, bu noktalar bir doğru belirler." olduğu

görülmüştür. Bu eylemdeki teoremi ile ’değer verme özelliği’ eylemindeki kavramlarına dayandığı söylenebilir. Doğrusal ve sabit fonksiyonların çözümü ve grafiklerinin çizimi sürecinde verdiği yanıtlar, enstrümantal oluşum sürecinin nasıl ilerlediğini göstermektedir.

Daha sonra, öğrenciler aynı örneği Cabri-Geometri ortamını kullanarak çözmeye çalışmışlardır. İlk olarak, Ö3 verilen fonksiyonların grafiğini çizmeye başlamıştır. Bunun için öncelikle koordinat sistemini açması gerekmektedir. Ö3, öncelikle eksenleri aynı kağıt-kalem ortamında yaptığı adımları yani iki dik doğruyu kesiştirerek oluşturmak istemiştir ama sonradan araç çubuğundan ‘yeni eksenler’ aracını fark edince bu işlemi yanlışlıkla ‘eksenleri göster’ aracını kullanarak değil de ‘yeni eksenler’ aracını kullanarak gerçekleştirmiştir. Ö4’ün "Ama onu dik olduğunu bilmiyoruz" demesi üzerine Ö3, x ve y eksenlerin birbirine dik olup olmadığını kontrol etmek amacıyla ‘açı ölçme’ aracı kullanmıştır ve eksenlerin arasındaki açının dik bir açı olduğunu tespit etmiştir. Bu işlemleri yaparken aralarında aşağıda verilen konuşma geçmektedir.

Ö3: O soruları şuan Cabri de yapmalıyız.

Ö4: Şimdi koordinat sistemini çizmemiz gerekiyor şimdi nasıl çizeceğiz? O zaman dik doğru mu yapsak. Bak burada yeni eksenler diye bir şey yazıyor bu mu acaba Hayır hayır bu değil ya.

Ö3: Bak yaptım buradan işte yeni eksenler diye.

Ö4: Dik olduğunu nereden biliyorsun kendisi mi yapıyor.

Egemen: Bak nasıl yapacağız biliyor musun bir nokta at oraya sıfırı oluştur burada sonra bir koordinat sistemi oluşturdu.

Ö4: Tamam da.

Ö3: Bak hareket ettir hiç kırıklık olmadı.

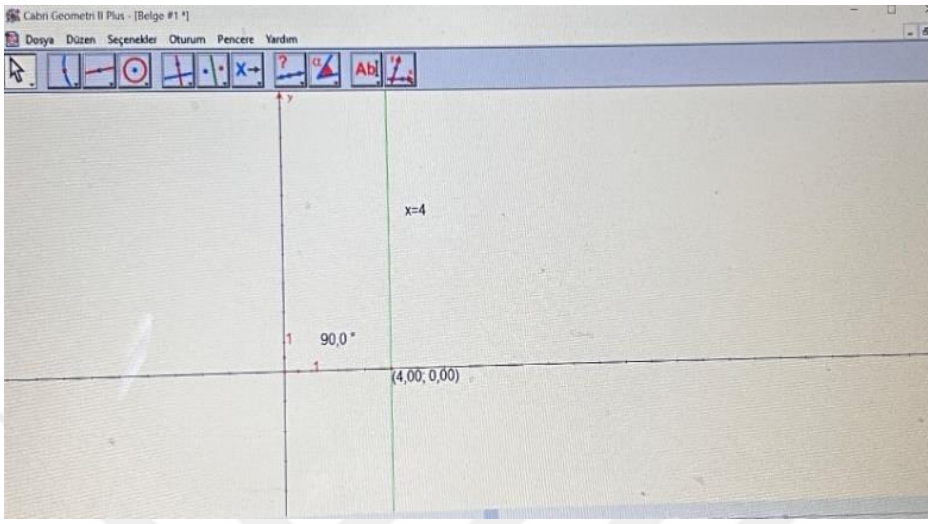
Ö4: Ama onu dik olduğunu bilmiyoruz.

Ö3: Ölçeyim o zaman bak 90 derece.

Bu diyaloğun ardından şekil 22’de Ö3’ün Cabri-Geometri ekranına ait x=4 doğrusunun grafiği verilmiştir.

Şekil 22

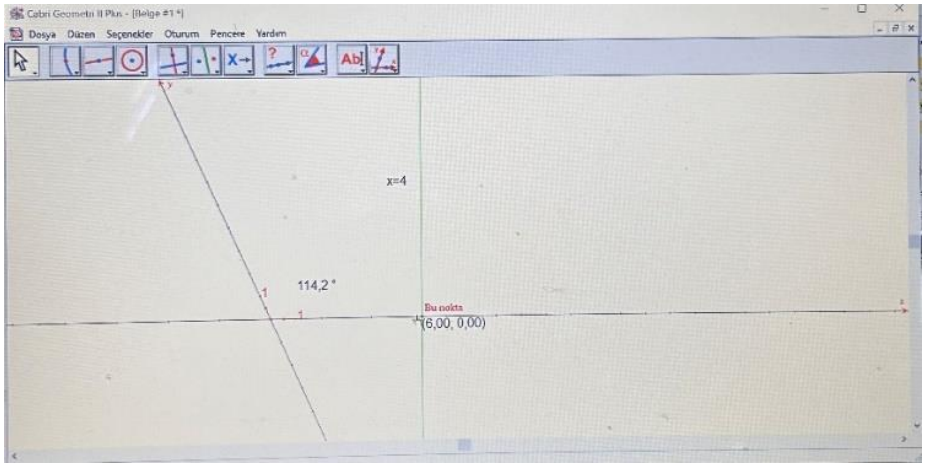
Ö3'ün doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde yeni eksenler ve açı ölçme araçlarının kullanımına ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Ö4, x= 4 doğrusunu çizerken "benim doğrum yamuk oldu" diyerek grafiği çizemediğini ifade etmiştir. Ö3, " Nokta seç, bu noktadan geçen ve x eksenine dik yapacaksın. Hareket ettirelim" diyerek yardım etmeye çalışmıştır. Ö4, "şimdi f(x)=-2'yi de aynı şekilde yapalım noktayı seçip ve x eksenine dik bir doğru çizelim -2'den geçen. Hareket ettiriyorum şimdi ama olmadı yanlış oldu doğru hareket ediyor". Ö3, "Sanırım koordinat sistemini yanlış çizdik" diyerek koordinat sistemini yanlış kullandıklarını anlamıştır. Şekil 23'te Ö4'ün Cabri-Geometri ekranına ait x=4 doğrusunun grafiği verilmiştir.

Şekil 23

Ö4'ün doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde yeni eksenler ve açı ölçme araçlarının kullanımına ilişkin ekran kaydından bir kesit.

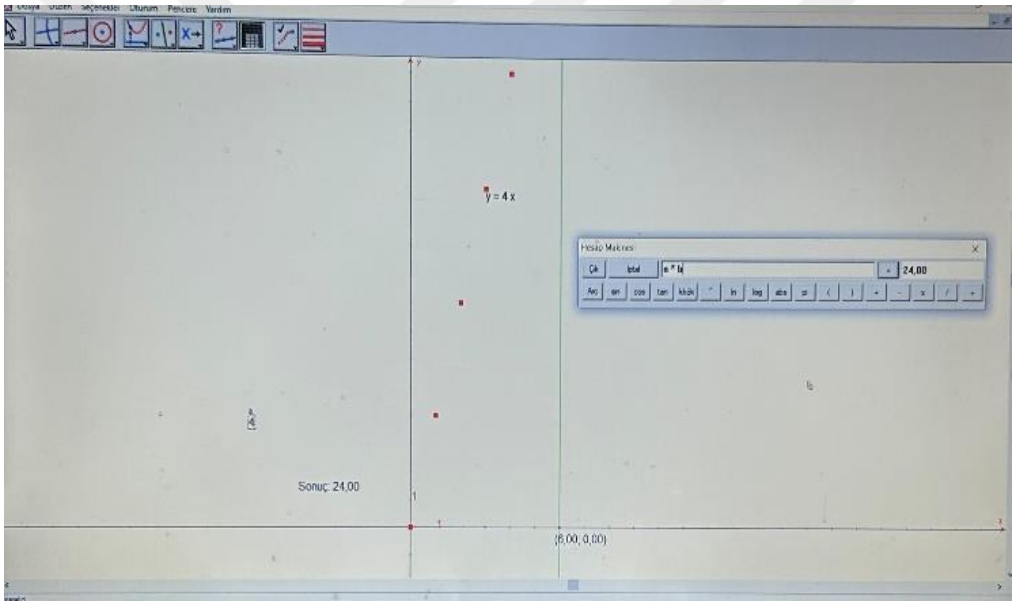


Şekilden görüldüğü gibi araç bilgisi eksikliğinden dolayı yanlış aracın seçilmesi sonucunda y ekseninin x ekseni ile dik bir açı oluşturmadığı ve x=4 doğrusunun hareket ettirildiğinde, denklemin metin olarak girilmiş olmasından dolayı değişmediği görünmektedir.

Daha sonra, Ö3, "Bir dakika, burada denklem ya da koordinatlar diyor, aha bak değişiyor işte" diyerek, denklem aracını fark etmiştir ve yazdıkları denklemin sabit olma sebebinin metin girişine bağlı olduğunu anlamıştır. Ancak şekil 24'te görüldüğü üzere Ö4, x ekseni üzerindeki noktayı tam sayı olarak seçtiği için grafiğin izinin tam sayı kümesi üzerinde kaldığını görmüştür.

Şekil 24

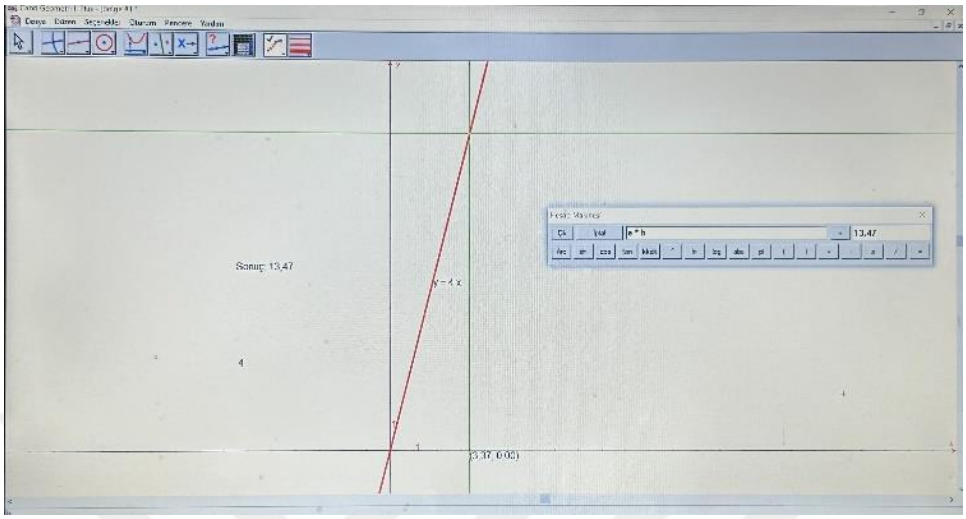
Ö4'ün doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde belirlediği noktanın konumuna ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Ö4, "Tam sayı olarak seçtiğimizde tanım kümemiz tam sayı çıkıyor" diyerek, noktanın tam sayı yerine reel sayıdan seçilmesi gerektiğini anlamış ve bu hatayı düzelterek, "Şimdi oldu, iz tam da x=4 doğrusunun üzerinde" diyerek doğru çizimini yapmıştır. Araştırmacının rehberliği doğrultusunda noktaların izlerini ve grafiklerin nasıl oluştuğunu öğrenerek, grafik çiziminde noktasal kavrayışın önemini, Ö4'ün "Bu dersten aldığımız sonuç, bir doğru noktalar kümesinden oluşuyor. Bir nokta hareket ederken kendinden iz bırakıyor, oluşan iz bir doğruyu oluşturuyor" cümlesi ile anlamlandırdıkları görülmektedir. Ö4'ün bu soru ile ilgili oluşturduğu grafik şekil 25'de verilmiştir.

Şekil 25

Ö4'ün doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



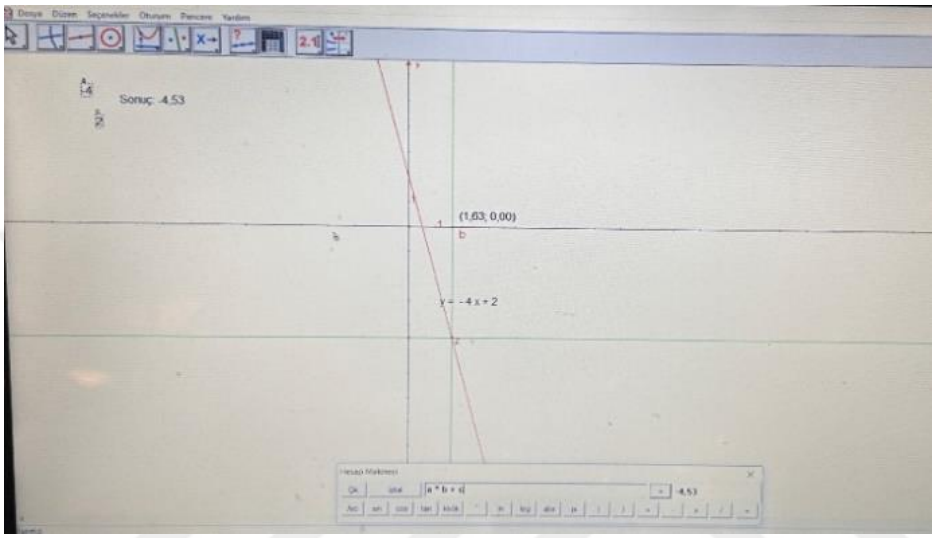
Cabri-Geometri ortamında sabit fonksiyonların grafiklerinin çizimini tamamlayan ikinci grup öğrenciler, doğrusal fonksiyonların çözümüne başlamışlardır. y=3x fonksiyonunun çözümü doğrultusunda sabit fonksiyonlarda yaptıkları gibi reel sayı kümesine ait x noktasını giriş noktası olarak ve kat sayı olarak 3 sayısını belirlemişlerdir. Fonksiyonu çözmek ve y çıktısını elde etmek amacıyla daha önce hiç kullanmadıkları hesap makinesi aracını kullanarak giriş noktası (x) ve belirlenen kat sayıyı hesap makinesine girdikten sonra y çıktısını elde etmiş ve elde edilen sonucu ölçüm aktarım aracıyla y eksenine aktarmışlardır. Belirlenen x ve y noktalarından geçen ve sırasıyla x ve y eksenlerine dik doğruları çizmiş ve kesişim noktası olarak z noktasını belirlemişlerdir. Sonrasında geometrik yer aracını kullanarak denklemin grafiğini başarılı bir şekilde elde etmişlerdir. Aynı şekilde y=x-1 ve y=2x-2 gibi fonksiyonların grafiğini hatasız bir şekilde çizdikleri gözlemlenmiştir.

Sadece y=ax+b formdaki fonksiyonların çözümünde a ve b sayılarını hesap makinesinin tuşlarını kullanmadan yani bilgisayara ait tuşlardan sabit sayı olarak girdiklerinden dolayı elde edilen grafiğin üzerinde oynamalar yapamamışlardır yani grafiğin eğimini istedikleri yönde değiştiremeyip ve y ekseni üzerinde farklı konumlara getirememişlerdir. Ancak hatalarını fark edip ve sorunu ortadan kaldırmışlardır. Bu şekilde Cabri-Geometri ortamında çizdikleri grafiklerde x noktasının hareket ettirildiğinde z noktasının bıraktığı izi ve katsayıların değiştirildiği taktirde doğrunun eğimi ve konumunun farklı olarak görünmesini görsel olarak analiz edebilmiş ve bu şekilde Cabri-Geometri ortamını doğrusal fonksiyonların grafiğinin

çizimi için bir enstrümana dönüştürüldüğü görünmektedir. Şekil 26 ve 27'de, Ö3'e ait f(x)=-4x+2 denkleminin grafiği çiziminde, Cabri-Geometri ortamındaki hesap makinesi aracının doğru kullanımı ile ilgili örnekler gösterilmiştir.

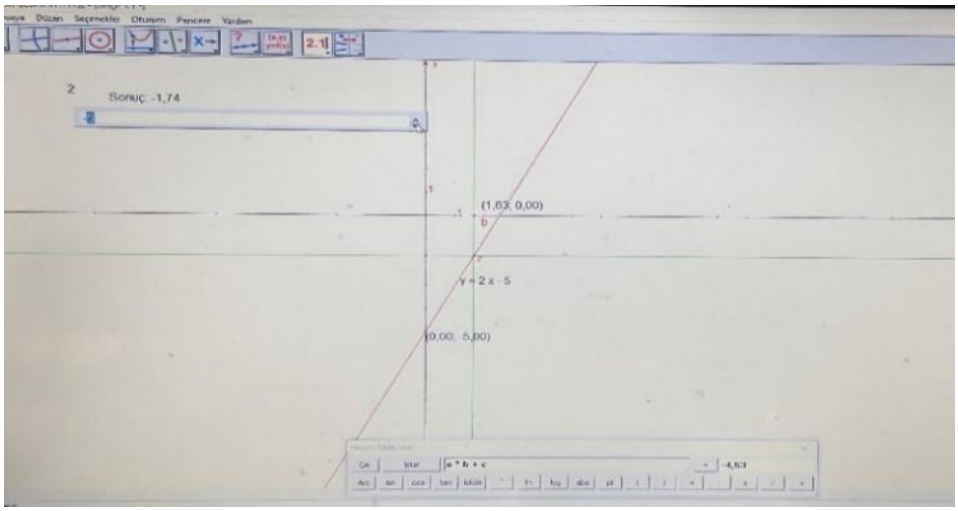
Şekil 26

Ö3'ün doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde hesap makinesi aracının doğru kullanımına ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Şekil 27

Ö3'ün doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde hesap makinesi aracının doğru kullanımına ilişkin ekran kaydından ikinci kesit.

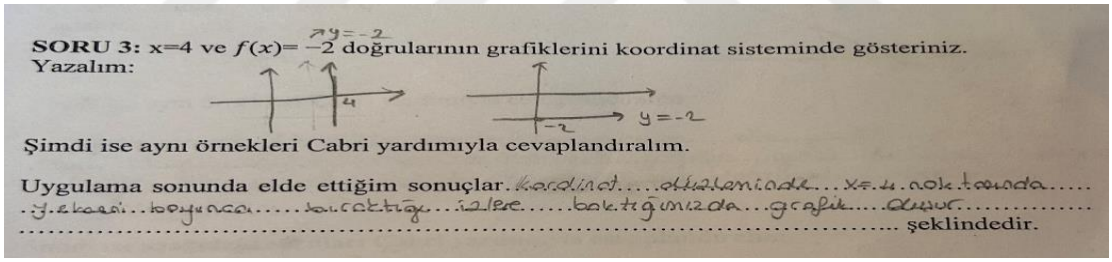


Bu çalışma yaprağında ikinci grup öğrencileri, kağıt-kalem ortamında sabit fonksiyonlara yönelik matematiksel bilgilerini kullandıkları görünmektedir. Ancak, Cabri-Geometri ortamına geçtiklerinde, yazılımın sunduğu çeşitli araçlar hakkında yeterli bilgiye

sahip olmamaları nedeniyle başlangıçta bazı zorluklar yaşamaktadırlar. Araştırmacının rehberliği doğrultusunda, yazılımda grafik çizme işlevini öğrenmiş ve matematiksel bilgilerini kullanarak bu ortamı daha verimli kullanabilecekleri bir seviyeye ulaşmışlardır. Öğrencilerin, çalışma yaprağında analitik düzlemde doğru tanımı ve sabit fonksiyon grafiği çizimine yönelik verdikleri yanıtlara bakıldığında, Cabri-Geometri ortamındaki işlemlerinin, kendi öğrenme süreçlerine katkı sağladığı ve geliştirdikleri eylem şemalarında değişim olduğu gözlemlenmiştir. Ö3 ve Ö4, doğrusal denklemlerin tanımını başlangıçta yalnızca 'iki noktadan bir doğru geçer' önermesiyle ilişkilendirirken, süreç içerisinde doğruyu, 'bir geometrik yer olarak' tanımlamıştır. Ö4'ün uygulama sonunda verdiği "koordinat düzleminde x=4 noktasında ekseni boyunca bıraktığı izlere baktığımızda grafik oluşur" ifadesi, öğrendiklerini yansıtmaktadır. Ö4'ün uygulama sonunda elde ettiği sonuçlar nelerdir sorusuna verdiği yanıt Şekil 28'de verilmiştir.

Şekil 28

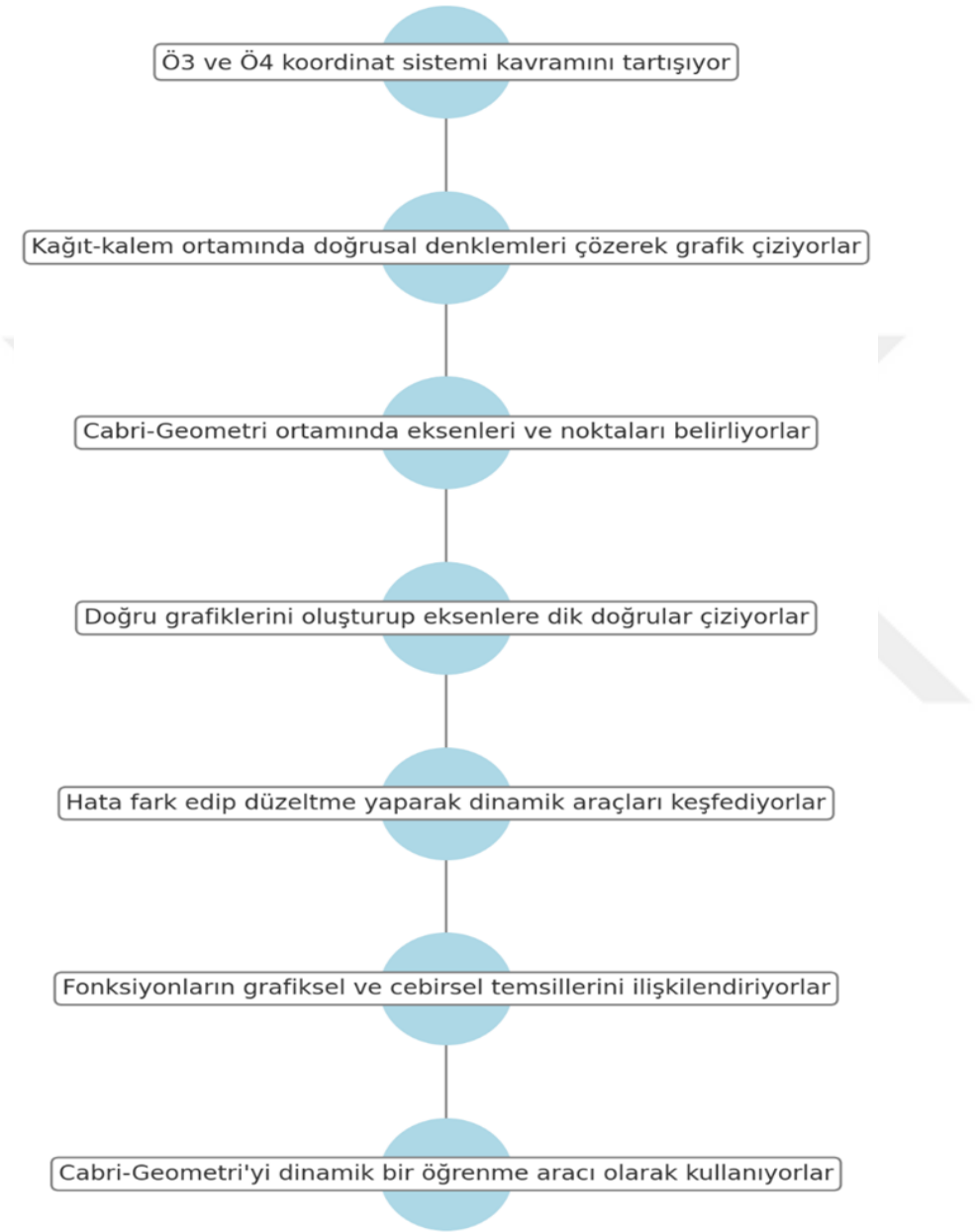
Ö4'ün elde ettiği sonuçlar nelerdir sorusuna ilişkin doğrusal denkemler çalışma yaprağından bir kesit



Şekil 29'da Ö3 ve Ö4'ün enstrümantal oluşum sürecinde geçtikleri aşamaların özeti olarak gösterilmektedir.

Şeki 29

Ö3 ve Ö4'ün doğrusal denklemler çalışma yaprağına yönelik çözüm süreçlerinin şematik gösterimi



Şekil 29, Ö3 ve Ö4'ün doğrusal fonksiyonlarla ilgili enstrümantasyon sürecini aşamalar halinde göstermektedir. Enstrümantal oluşum süreci, öğrencilerin koordinat sistemi kavramını tartışmasıyla başlamaktadır. Kağıt-kalem ortamında doğrusal denklemleri çözerek grafik çizmeleri, onların matematiksel ilişkileri görselleştirmelerini sağlamaktadır. Cabri-Geometri

ortamına geçtiklerinde eksenleri ve noktaları belirleyerek dinamik araçlarla etkileşime girmekle beraber, doğru grafiklerini oluşturmaları ve eksenlere dik doğrular çizmeleri, grafiksel temsilleri anlamalarına katkı sağlamaktadır. Ancak sürecin ilerleyen aşamalarında hata fark edip düzeltmeler yaparak dinamik araçları keşfetmeleri, onların Cabri-Geometri'yi etkin bir şekilde enstrümana dönüştürmelerini sağlamıştır. Son olarak, fonksiyonların grafiksel ve cebirsel temsillerini ilişkilendirerek Cabri-Geometri'yi bir öğrenme aracı olarak nasıl kullanabileceklerini kavramaktadır.

4.1.1.3. Üçüncü Grubun Doğrusal Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler ve Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması

Bu kısımda üçüncü grup öğrencilerinin doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı tekniklere yer verilmiştir.

Üçüncü Grubun Doğrusal Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Kağıt-Kalem Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo 7'de öncelikle öğrencilerin kağıt-kalem ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 7

Üçüncü grubun doğrusal denklemler çalıma yaprağına yönelik kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayı	**Ö5**	**Ö6**
Teknikler		
Doğrunun grafiğini çizmek için x ve y'ye farklı değerler vererek koordiat sistemi üzerinde nokta belirleme	+	+
Doğruları grafiksel olarak göstermek için elde edilen notaları birleştirme	+	+
Doğrunun eğimini etkileyen katsayıların etkisini incelemek için eğim analizi	+	+
Doğrunun sabit terim değişikliklerinin grafiği yukarı veya aşağı kaydırma etkisini incelemek için kaydırma	+	-

Tablo 5'teki verilere göre, Ö5 ve Ö6, doğrusal denklemler çalışma yaprağındaki fonksiyonları çözmek ve grafiklerini çizmek için çeşitli teknikler kullanmıştır. Doğrunun grafiğini çizmek amacıyla, x ve y'ye farklı değerler vererek koordinat sistemi üzerinde nokta belirleme tekniği kullanmakta olup ve ardından bu noktaları birleştirerek doğru çizme tekniği ile grafiği oluşturmaktadır. Örneğin Ö5, $f(x) = 3x$ fonksiyonuna yönelik x'e değer vererek $f(x)$ sonuçlarını elde etmiş ve bu noktaları koordinat sisteminde işaretlemiştir.

Öğrenciler eğim analizi ve kaydırma tekniklerini kullanarak fonksiyonların özelliklerini incelemiştir. Bu doğrultuda Ö5, eğim analizi ile katsayının büyümesinin doğrunun daha dik görünmesine neden olduğunu göstermektedir. Ayrıca, kaydırma tekniği kullanarak sabit terimin pozitif veya negatif olmasının grafiği yukarı ya da aşağı kaydırdığı sonucuna varılmıştır. Öğrenciler kağıt-kalem ortamında söz konusu tekniklere dayanarak, cebirsel işlemler yapıp matematiksel bilgilerini görsel olarak temsil etme becerilerine sahip oldukları görülmektedir.

Üçüncü Grubun Doğrusal Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Cabri-Geometri Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo 8'de öncelikle öğrencilerin Cabri-Geometri ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 8

Üçüncü grubun doğrusal denklemler çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayı	**Ö5**	**Ö6**
Teknikler		
Koordinat eksenlerini görüntüleme	+	+
Nesne üzerinde nokta belirleme	+	+
Sürükleme özelliğinin tam sayı çıkan noktanın koordinatını küsuratlı sayı yapmak için kullanımı	-	+
Belirli noktalar arasında doğru çizimi	-	+
x ve y eksenlerine paralel doğruların çizimi	+	-
x ve y eksenlerine dik doğruların çizimi	-	+
Sayı belirleme	-	+
Hesap makinesini kullanma	-	+
Belirlenen değerleri eksenlere aktarılması	-	+
Doğruların kesişim noktalarını belirleyerek grafik yer belirleme	-	+
Noktaları veya doğruları hareket ettirerek gözlem yapma	+	+

Ö5 ve Ö6, Cabri-Geometri üzerinde sabit ve doğrusal fonksiyonların çizimini yaparken, başlangıç noktayı belirlemek için *koordinat eksenlerini görüntüleme, nesne üzerinde nokta belirleme sonrasında ise sürükleme özelliğini kullanarak tam sayı çıkan noktanın küsuratlı sayı yapılması* tekniklerini kullanmıştır. Ayrıca, grafiklerin çizimi amacıyla *belirli noktalar arasında doğru çizimi* ayrıca, *x ve y eksenlerine dik ve paralel doğru çizimi ve doğruların kesişim noktalarını belirleme* tekniklerinden faydalanmıştır. Doğrusal fonksiyonların matematiksel çözümü amacıyla *sayı belirleme, bu sayıların eksenlere aktarılması için ölçüm aktarma ve hesap makinesi araçlarını kullanma* tekniklerini kullanmıştır, son olarak *geometrik yer aracı* yardımıyla noktaları veya doğruları hareket ettirerek gözlem yapmışlardır. Söz konusu

tekniklerin kullanımı öğrencilerin matematiksel bilgilerini araç üzerinde görsel olarak temsil etme ve analiz etme becerilerine sahip olduklarını göstermektedir.

Üçüncü gruptaki öğrenciler (Ö5 ve Ö6), diğer gruplar gibi doğrusal denklemler çalışma yaprağını inceledikten ve araştırmacının açıklamalarını duyduktan sonra öncelikle kağıt-kalem ardından Cabri-Geometri ortamında çözülmesi ve grafiklerinin çizilmesi gereken soruları çözmeye başlmıştır. Bu amaçla ilk olarak "Koordinat sistemi nedir ve özellikleri nelerdir?" ve "Analitik düzlemde doğrunun tanımı nedir ve özellikleri nelerdir?" sorularını yanıtlayarak çalışmaya başlamışlardır. Aralarındaki konuşma aşağıdaki şekilde gelişmiştir:

Ö6: koordinat sistemini yaptım ama özelliklerini yapmaya gerek var mı? Koordinat sisteminin özellikleri ne olabilir. Koordinatlardan oluşur.

Ö5: x ve y den oluşuyor diyelim. Ya da x ve y olmak üzere farklı koordinatlardan oluşuyor diyelim

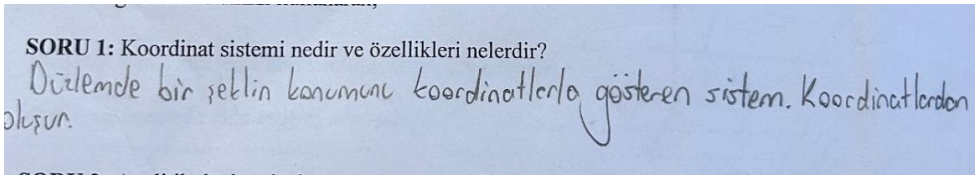
Ö6: Sadece x ve y olmuyor işte

Ö5: doğru

Aralarında geçen bu konuşmanın ardından grup koordinat sistemi sorusuna yönelik yaklaşık aynı cevapı vererek soruyu şekil 30'da görüldüğü üzere yanıtlamıştır.

Şekil 30

Ö6'ün doğrusal denklemler çalışma yaprağında koordinat sisteminin tanımına yönelik yanıtı



Ö5 ve Ö6, koordinat sisteminin tanımını yaparak "Düzlemde bir şeklin konumunu koordinatlarla gösteren sistem. Koordinatlardan oluşur." diyerek koordinat sisteminin temel işlevlerinden biri olan 'konum belirleme' işlevini ifade etmiştir. Bu yanıttan yola çıkarak grubun koordinat sistemi tanımı zihinsel şeması, 'nesnenin düzlem üzerindeki konumunu belirleme' eylemindeki kavramına dayandığı görülmüştür. Bu kavram, konum belirleme ve noktalar arasındaki ilişki esasına dayanmaktadır. Öğrencilerin zihinsel şemalarının, nokta, eksen ve düzlem gibi kavramlara dayandığı şeklinde yorumlanmıştır.

İkinci soru olarak, koordinat sisteminde doğrunun tanımı ve özelliklerine ilişkin aralarında geçen konuşma aşağıda verilmiştir:

Ö5: 2. soruyu da ben yapayım. Analitik düzlemde doğrunun tanımı istenmiş. İki taraftan sonsuza uzanan, iki yönlü değişmeyen şey.

Ö6: İki yönlü diyemezsin ama iki yöne sonsuz uzanan diyelim.

Ö5: iki zıt yöne desek olur mu?

Ö6: Fark etmez

Ö5: Öyle diyeyim o zaman. İki zıt yöne uzanan doğru parçası mı diyeyim.

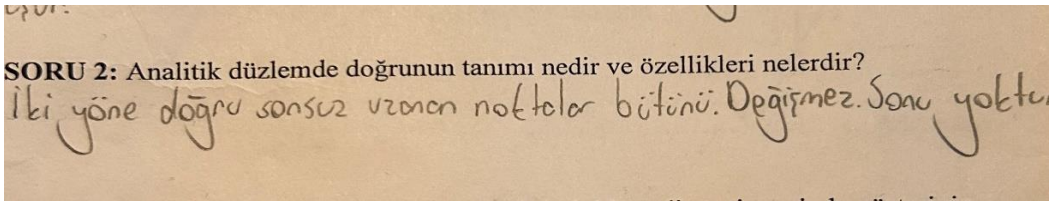
Ö6: İki zıt yöne uzanan noktalar bütünü olmaz mı acaba? Bence olur.

Ö5: Özelliği olarak da sonu yoktur diyelim.

Aralarında geçen bu diyaloğun ardından grup ‘doğrunun tanımı ve özellikleri nelerdir?’ sorusuna yaklaşık aynı cevabı vererek şekil 31’de görüldüğü üzere yanıtlamıştır.

Şekil 31

Ö6’ün doğrusal denklemler çalışma yaprağında Analitik geometride doğrunun tanımına yönelik yanıtı



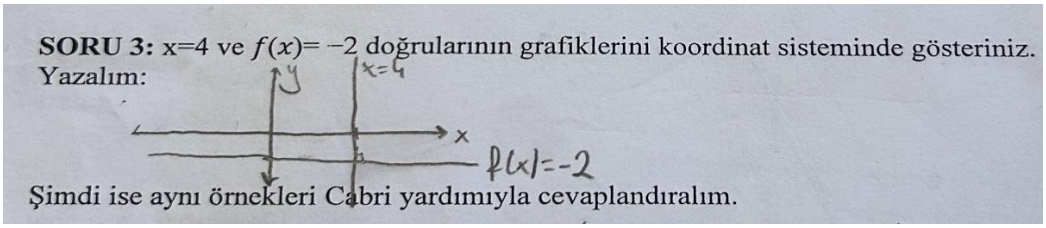
Ö5 ve Ö6 ’Analitik düzlemde doğrunun tanımı nedir?’ sorusunu ’Sonu olmayan iki zıt yöne uzanan noktalar bütününe doğru denir.’ şeklinde yanıtlamıştır. Verilen yanıttan yola çıkarak grubun doğru tanımı zihinsel şemaları ‘Sonsuz uzunluktaki noktalar kümesine doğru denir.’ tanımı ile ‘doğru özelliği’, ’uzunluk’, ’sonsuzluk özelliği’ ve ‘zıt yönler özelliği’ eylemdeki kavramlarına dayandığı söylenebilir.

Üçüncü grup öğrencileri iki temel soruyu cevapladıktan sonra sabit ve doğrusal fonksiyonların çözümü ve grafiklerinin çizimine başlamıştır. Ö6, "Doğrulara geçelim x=4 ve f(x)=-2 bunlar kolay." Diyerek işleme başlamıştır. Sonrasında Ö6, Ö5’in , "x=4 böyle mi oluyor?" sorusuna, "Hayır Senin çizdiğin y=4 yanlış yapmışsın" diye cevap vermiştir ve "f(x)=2 böyle oluyor" diyerek grafiği şekil 32’de verildiği üzere çizmiştir. Yani Ö6 grafik çizimi için

koordinat sisteminde nokta belirleme yöntemini değil de alışkın olduğu ve teorik bilgilerine dayalı olan bir yöntemi kullanmıştır.

Şekil 32

Ö6'nın doğrusal denklemler çalışma yaprağından sabit fonksiyon grafiğine ilişkin bir kesit



Doğrusal fonksiyonların çözümüne yönelik Ö5, "f(x)=3x doğrusunu çizelim. Bu kolay değer vererek çözebiliriz. x'e, 1 veriyorum f(x), 3 oluyor Sonra x'e 2 veriyorum f(x), 6 oluyor, 0 veriyorum f(x), 0 oluyor. Ben bir şey fark ettim. Buradaki 3 katsayısı ne kadar büyük olursa o kadar y eksenine yaklaşıyor çizdiğimiz doğru. Yani daha dik gözüküyor" ifadesiyle, grafik çizimi sırasında fonksiyonlara değer vererek doğruyu çizdiğini belirtmiştir. Ancak bu sırada x değişkenine farklı değerler vermeyi deneyince, katsayı büyüdükçe grafiğin eğiminin arttığını fark etmiştir.

f(x)=x-1 fonksiyonuna geçtiklerinde Ö6, arkadaşına, "eksi (-) olunca sağa, artı (+) olunca sola mı kayıyordu?" diye sormuştur ve Ö5'ten "Hayır, mesela x+5 ya da x-5 yazdığımızda da, +5 olunca 5 birim yukarı, -5 olunca 5 birim aşağı oluyordu." Yanıtı gelmiştir. Bu konuşmaya göre Ö6 matematik problemlerine pratik çözümler üretmeye çalışmıştır ancak düşüncelerinin teorik bilgilere dayalı olduğu ve doğrusal fonksiyonlarla ilgili matematiksel bilgi eksikliğini ortaya çıkmaktadır. Sonrasında Ö6, diğer fonksiyonların çözümü için x değişkenine farklı değerler vermiş ve y sonucunu bulmuştur bu sayede koordinat sisteminde belirlediği noktaları işaretleyip ve noktalardan geçen doğrunun grafiğini çizmiştir. Ancak çizim sırasında "Ben bir şey fark ettim. Önce doğruyu çiziyorsun sonra değerleri koordinatlarda belirliyorsun." diyerek, arkadaşı tarafından hatalı bir çizim yöntemi kullanıldığı dikkatini çekmiştir. Bundan sonra Ö5 ve Ö6, f(x)=ax+b tarzında olan fonksiyonları örneğin f(x)= -4x+2 fonksiyonunu değer verme yöntemini kullanarak noktalar belirleyip ve belirlenen noktalardan geçen doğruyu çizip ve grafik çizimini bu şekilde tamamlamıştır. Ö5 ve Ö6'nın kağıt-kalem ortamındaki kullandığı eylemdeki teoremin, "Bir doğrusal fonksiyonun grafiği çizilecek ise uygun şekilde nokta belirlenir ve bu noktalar birleştirilerek doğru çizilir" olduğu görülmüştür. Bu teorem, 'değer verme' ve 'koordinat üzerinde nokta belirleme' eylemindeki kavramlara

dayanmaktadır. Ancak Ö5 için farklılaşan bir durum daha vardır, o da Ö5'in kağıt-kalem ortamındaki kullandığı eylemdeki teoremin, "Bir doğrusal fonksiyonun grafiği çizilecek ise, önce fonksiyonun daha önceden öğrenilen grafiği çizilir sonrasında grafik üzerinde nokta belirlenir." Olduğu görülmüştür. Bu teorem, 'önceden öğrenilmiş bilgiye dayanarak grafik çizimi' ve 'grafik üzerinden nokta gösterme' eylemindeki kavramlara dayandığı şeklinde yorumlanmıştır.

Öğrenciler aynı soruları Cabri-Geometri ortamını kullanarak çözmeye çalışmışlardır. Ö5 ve Ö6 ilk olarak, verilen sabit fonksiyonların grafiğini çizmeye başlamıştır. Bu süreçte aralarında geçen konuşma aşağıda verilmiştir.

Ö5: x=4 doğrusunu yapalım, x eşittir 4 noktasını göster önce. Şimdi 4 noktasından geçen ve y eksenine paraleli çiziyorum ama paralel doğruyu nasıl çizeceğiz. Buldum Bak burada paralel doğru aracı var oradan yapacağız.

Ö6: Evet mantıklı paralel doğru aracından yapıyoruz.

Ö5: Şimdi f(x)=-2 için de aynı şekilde y ekseninde -2 noktasını belirliyoruz sonra x eksenine paralel ve -2 noktasından geçen doğruyu paralel doğru aracı yardımıyla çiziyoruz sonrasında çizdiğimiz doğrunun denklemini koordinatlar ve denklem aracı yardımıyla yazıyoruz.

Ö6: Şimdi başlangıçta koyduğumuz noktayı hareket ettirelim noktayı hareket ettirdiğimizde doğrunun denklemi değişiyor değişmemesi gerekiyor o zaman bir yanlışımız var başka yol deneyelim.

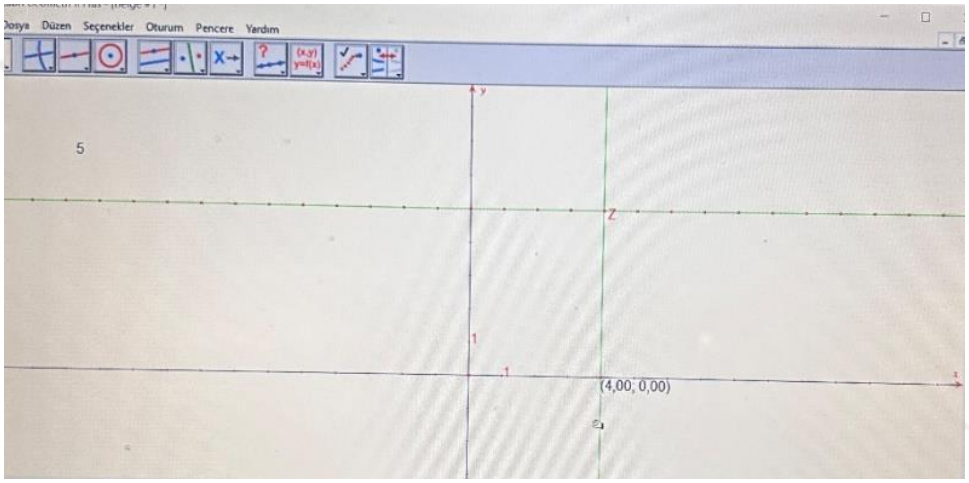
Ö5: noktanın hareket etmemesini nasıl sağlayalım o zaman.

Yukarıda verilen öğrencilerin konuşmalarından görüldüğü üzere Ö5, x=4 ve f(x)=-2 doğrularının grafiğini çizmek amacıyla sırasıyla x ve y eksenleri üzerinde 4 ve -2 noktalarını tam sayı olarak belirlemiştir. Bu noktalardan y ve x eksenine paralel doğrular çizerek, doğru çizimini tamamlamıştır. Ancak başlangıç noktalarını hareket ettirdiklerinde denklemin değiştiğinin farkına varmışlardır. Bu sırada araştırmacı tahtada Cabri-Geometri ortamında sabit fonksiyonların grafiklerinin çözümü üzerinde doğru adım ve stratejileri anlatmaya başlamıştır. Öğrenciler sayı tanımlama ve ölçüm aktarım araçlarının kullanılması gerektiğini öğrendikten sonra sabit fonksiyonların grafiğini çizmeyi tamamlamıştır. Ancak şekil 33'te görüldüğü üzere Ö5, "iz oluşturmak istediğinde benim izim bir doğru şeklinde değil nokta nokta çıkıyor." diyerek çizmiş olduğu grafiğin izinin yanlış görüldüğünü gözlemlemiştir. Söz konusu sıkıntıyı

çözmek için araştırmacıdan yardım istemişlerdir ve araştırmacı onlara "eğer tanım kümese reel sayı olsaydı iziniz tam sayılarda noktasal değil bir doğru şeklinde çıkmış olurdu. Örneğin x=4 doğrusunu çizdiğinizde x = 4 noktasına x ekseninde sabitledikten sonra y eksenindeki seçtiğiniz herhangi bir noktayı tam sayı olarak değil de herhangi bir reel sayı seçmeniz gerekiyor." diyerek rehberlik etmiştir. Bu şekilde bu sorun ortadan kalkmış ve grup sabit fonksiyonların grafiğini başarılı bir şekilde tamamlamıştır.

Şekil 33

Ö5'in doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde başlangıç noktası belirleme ve iz araçlarının kullanımına ilişkin ekran kaydından bir kesit.



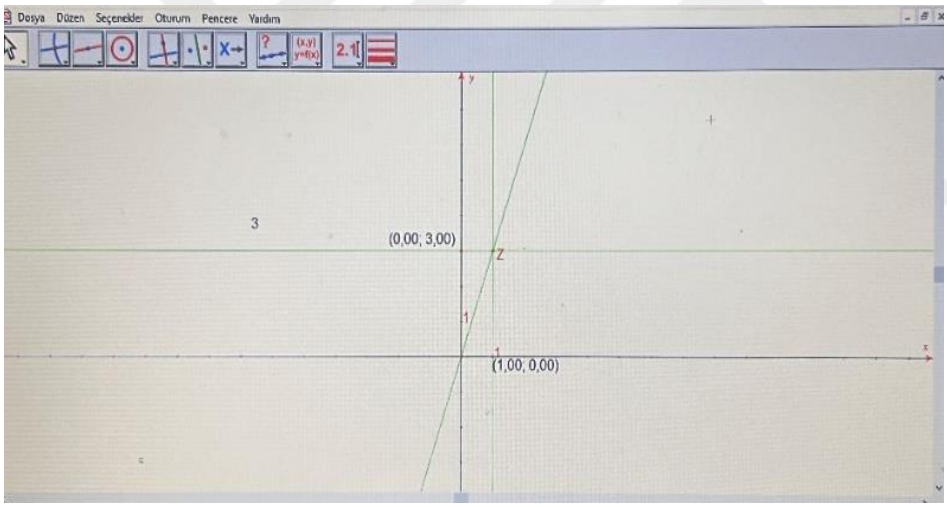
Ö5 ve Ö6, x=4 fonksiyonunun grafiğini çizmek için dayandığı "x=4 doğrusu x ekseni üzerinde 4 noktasından geçen ve y eksenine paralel olan doğrudur" işlevsel sabitlerinin Cabri-Geometri ortamında çalışma aşamasında yazılıma bağlı olarak "x=4 doğrusu x yani başlangıç noktasının belirli bir yönde ve oranda hareket etmesi sonucu elde edilen izidir." işlevsel sabitinin kullanıldığı görülmüştür. Yani öğrencilerin sabit fonksiyonlar şeması kağıt-kalem ortamındaki modelden araca dayalı dinamik bir modele dönüşmüştür ki bu süreçte dinamik ortam öğrencinin şemalarını geliştirdiğinden süreç enstrümantasyon süreci olarak değerlendirilmiştir.

Ö5 ve Ö6'nın doğrusal fonksiyonları Cabri-Geometri ortamında çözüp grafiğini çizmeye çalışırken yaşadığı süreç analiz edildiğinde, kağıt-kalem ortamından getirdikleri şemaları dinamik geometri ortamına uydurmaya çalıştıkları görülmektedir. Ö5'in "Şu an y=3x'i yapacağız. Burada eğim var. Nasıl olacak acaba?" ifadesi, doğrusal bir fonksiyonun grafiğini çizme sürecinde karşılaşılan belirsizliği ve bunu Cabri-Geometri'ye uyarlama çabasını göstermektedir. Ö6, bu soruya kağıt-kalem ortamında yaptığı çözümü önermiştir: "Ben kağıt

kalem üzerinde yaptığımız gibi yapmak istiyorum. x ekseni üzerinde 1 noktasını, y ekseni üzerinde 3 noktasını belirliyorum. Yani x'e 1 değerini verince f(x)=3 oluyor. Birden ve üçten geçen dik doğruları çiziyorum, kesiştiriyorum ve bir nokta belirliyorum. Ama o nokta, kesişim noktası hareket etmiyor. Nasıl olacak?" Bu ifade, öğrencilerin kağıt-kalem ortamında geliştirdikleri şemaları, dinamik geometri ortamına uyarlamakta zorlandıklarını ortaya koymaktadır. Şekil 34'te Ö6'nın Cabri-Geometri ekranına ait y=3x doğrusunun grafiği verilmiştir. Ö6, Z noktasının başlangıç noktasına bağlı olduğu için hareket etmemesini doğru gözlemlemiştir Ancak, şekil 22..2de göründüğü üzere, hesap makinesi ve geometrik yer araçları kullanmak yerine iki nokta arasında doğru oluşturmak için doğru aracını kullandığından, doğru geometrik yer olarak oluşmamıştır.

Şekil 34

Ö6'nın doğrusal fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde nokta belirleme ve dik doğru araçlarının kullanımına ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Araştırmacının rehberliğinde Ö6, doğruyu geometrik yer aracını kullanarak oluşturmayı öğrendikten sonra, ax+b formundaki fonksiyonların çözümü amacıyla aralarındaki konuşma aşağıda verilmiştir:

Ö6: Anladım şimdi x ekseni üzerinde bir nokta belirleyeceğiz ve noktanın koordinatını yazacağız. Hesap makinesinden önce sayı seçtim sonra çarpı sonra noktayı seçtim. Sonucu elde ettim. Çektim bir tarafa koydum sonucu şimdi o sonucu ölçüm aktarım aracıyla aktaracağım. Sende oldu mu?

Ö5: Hayır

Ö6: Neden olmadı? Anladım Anladım Çünkü sonuçta metin'in üstüne tıklayıp sonra metin'i y eksenine aktarmaya çalışıyordum Halbuki sayıya tıklayıp Bu sayı diyor bak görüyor musun bu sayıya tıklayıp sonra y eksenine tıklayacağım ve bu şekilde sonuç y eksenine aktarılacak, Yani, ölçüme aktarımı yaptım.

Ö5: Ben de yaptım, a'yı hareket ettirdikçe doğrunun eğimi de değişiyor veya şöyle diyebilirim a'yı hareket ettirdikçe y eksenine uzaklaşıp yaklaşıyor.

Ö6: Evet a'yı hareket ettirdikçe doğrunun eğimi değişir. Ama bir şey diyeyim bana şimdi deseler ax+b'yi yap yapamam sanki b'yi nasıl yapacaktık.

Ö5: Bence b kat sayısını da ekleyince sağa ve sola mı kayması lazım acaba doğrunun. Ama bunu nasıl yapacağız?

Ö6: Anladım sanki az önce hesap makinesinde ax yapmıştık şimdi yine hesap makinesinde ax+b yapacağız a'ya sayı tanımlamıştık şimdi ise bir sayı da b olarak tanımlayacağız. Hesap makinesinde de ax+b yapacağız. Şimdi sayı tanımlıyorum mesela 1 olsun.

Ö5: Benim Hesap makinesinde yaptığım sonuç neden yanlış çıkıyor sen nasıl yaptın?

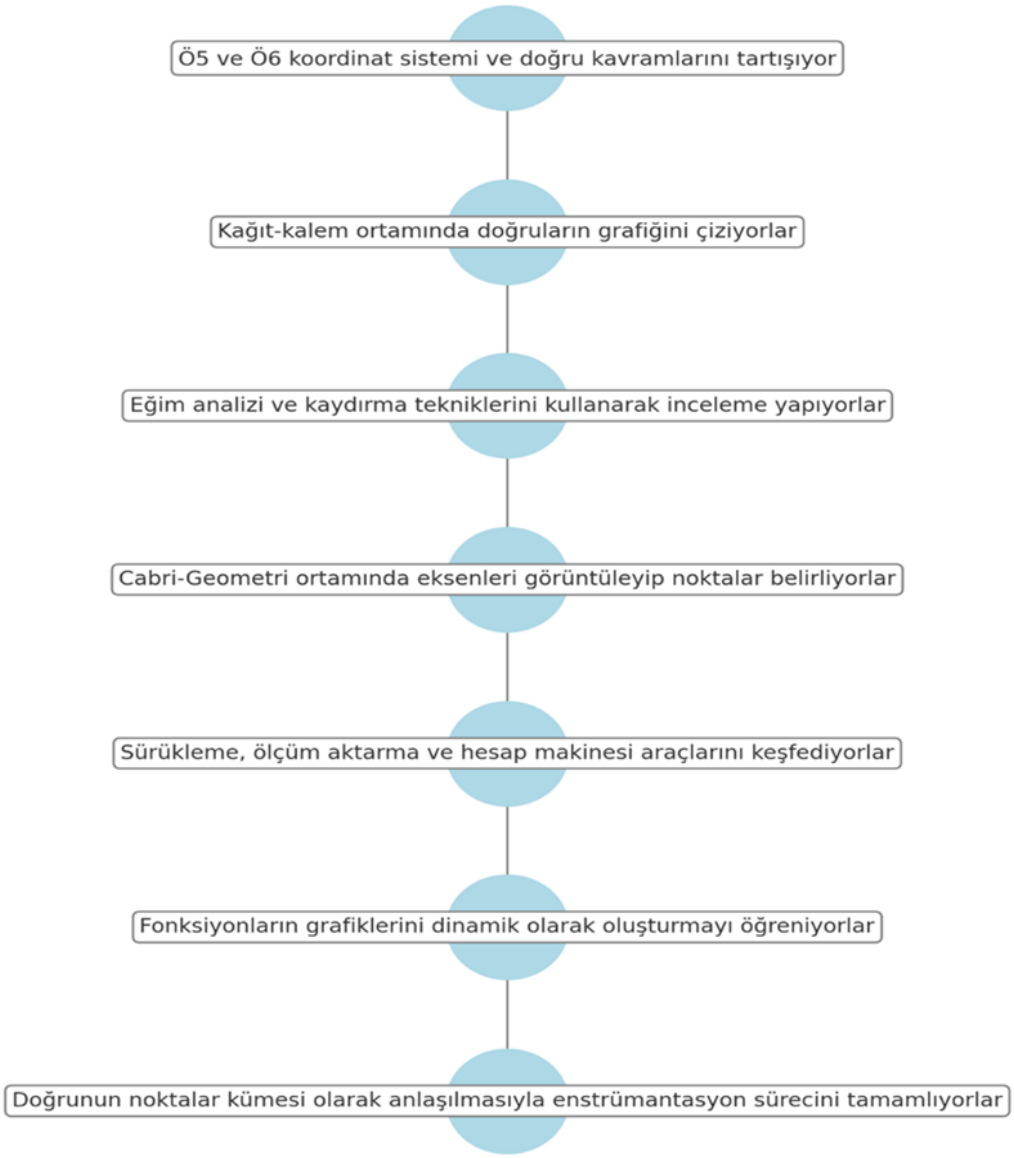
Ö6: Önce parantez içinde a çarpı x üzerinde belirlediğim koordinat Parantezi kapattım artı b yaptım.

Ö5: Evet ax+b doğrusunun eğimi ve b de doğruyu sağa ve sola kaydırıyor.

Aralarında geçen diyaloğa bakıldığında, Ö6, araştırmacının rehberliğinde, statik bir doğru çizmek yerine, başlangıç noktasının hareketiyle, x'e bağlı bir noktanın (Z noktası) oluşturduğu geometrik yerin istenilen doğruyu tanımladığını fark etmiştir. Bu süreçte, doğru artık iki nokta arasındaki bir çizgi olarak değil, hareket eden bir noktanın oluşturduğu noktalar kümesi olarak anlamlandırılmaktadır. Ö6, hesap makinesiyle koordinatları işleme, ölçüm aktarım aracıyla sonuçları y eksenine aktarma ve hesap makinesinde parantez kullanımı gibi teknikleri kullanarak ax+b formundaki fonksiyonları çözmekte olup grafiklerini oluşturmaktadır. Ancak, Ö5 ve Ö6 cebir alan bilgisi eksikliği nedeniyle b katsayısının doğruyu yatay eksende sağa ve sola kaydırdığını düşünmektedir; oysa b, doğrunun y eksenini kestiği noktayı tanımlamaktadır. Buna rağmen, öğrenciler Cabri-Geometri ortamını kullanarak doğrunun grafiğini oluşturmayı başarmış ve bu durum Ö5 ve Ö6'nın, enstrümantal oluşum süreçlerinin statik bir anlayıştan dinamik bir anlayışa dönüşümünün göstergesidir. Şekil 35'te Ö5 ve Ö6'nın enstrümantal oluşum sürecinde geçtikleri aşamalar görselleştirilmiştir.

Şeki 35

Ö3 ve Ö4'ün doğrusal denklemler çalışma yaprağına yönelik çözüm süreçlerinin şematik gösterimi



Şekil 35'te verilen bilgilere göre, ilk olarak, öğrenciler kağıt-kalem ortamında doğrusal fonksiyonların grafiklerini çizerek başlangıç düzeyde analizler yapmaktadır. Daha sonra, eğim analizi ve kaydırma tekniklerini kullanarak fonksiyonların özelliklerini daha derinlemesine anlamaya çalışmaktadır. Cabri-Geometri ortamına geçtiklerinde, eksenleri görüntüleyip noktalar belirleyerek yazılımın araçlarını keşfetmiş, sürükleme, ölçüm aktarma ve hesap makinesi gibi araçları kullanarak matematiksel kavrayışlarını geliştirmektedir. Son aşamada,

fonksiyonların grafiklerini dinamik olarak oluşturmayı öğrenmiş ve doğruyu, noktalar kümesi olarak anlamlandırarak enstrümantasyon sürecini tamamlamışlardır.

4.1.2. İkinci Dereceden Denklemlerin (Parabol) Çalışma Yaprağına yönelik Kullanılan Enstrümanlı Teknikler ve Enstrümantal Oluşum Süreci

İkinci dereceden denklemlerle ilgili çalışma yaprağı bilgisayar ve kağıt-kalem ortamında yapılan ve yedi farklı sorunun (f(x)=x2, f(x)=ax2+bx, f(x)=ax2+bx+c, f(x)=ax2+c) incelemesini içeren bir çalışma yaprağıdır. Bu yaprakta, öğrencilerden verilen çeşitli parabol denklemlerin çözümünü ve grafiklerinin çizimini kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarında yapmaları istenmiştir. Bu çalışma yaprağı, analitik düzlemde bir noktanın hareket edişiyle oluşturduğu yolun geometrik görüntüsü ve koordinatları, öğrencilere, analitik düzlemde parabol grafiğinin kavramı ve özellikleri ile ilgili yapılandırmalarını tekrar gözden geçirme ve bu kavramları görsel olarak göstermek amacıyla tasarlanmıştır. Bu bağlamda öğrencilerin her bir soru tipine yönelik birtakım teknikler kullandığı gözlenmiştir.

Öğrenciler bu çalışma yaprağında, verilen fonksiyonları çözmeye ve grafiklerini çizmeye çalışırken kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarında çoğunlukla benzer enstrümanlı teknikleri kullandıkları tespit edilmiştir. Kağıt-kalem ortamındaki benzer teknikler:

- Değer vererek nokta belirleme
- Fonksiyon değerlerini hesaplama
- Köklerin bulunması
- Tepe noktası belirleme
- Diskriminant hesaplama
- Çarpanlara ayırma
- Diskriminant analizi
- Katsayı etkisi analizi
- Şeklinde olup, Cabri-Geometri ortamında kullanılan benzer teknikler:
- Koordinat ve denklem belirleme
- Hesap makinesi ile fonksiyon tanımlama
- Ölçüm aktarımı
- Paralel doğru çizimi
- Dik doğru çizimi
- İz aracı kullanımı
- Kesişim noktası belirleme

- Geometrik yer belirleme
- Grafik üzerinde katsayı analizi

dir. İkinci dereceden denklemler çalışma yaprağında kullanılan bu benzer teknikler bir sonraki paragraflarda grup bazında ayrıntılı olarak sunulmuştur.

Her bir grubun ikinci dereceden fonksiyonlar çalışma yaprağı temelinde kağıt-kalem ortamı ve Cabri-Geometri ortamını enstrümana dönüştürme süreçlerine yönelik bulgulara 4.1.2.1 başlığında yer verilmiştir. Gruplara ait bulgular sunulurken kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamına ait süreçler ve ilgili grubun enstrümanlı eylem şemasının birbirinin devamı olduğundan dolayı aynı başlık altında verilmiştir. Enstrümanlı eylem şemasının temel bileşeni olan işlevsel sabitler, mümkün olan yerlerde bu sabitleri oluşturan eylemdeki teoremler ve eylemdeki kavramları aktarılmaya çalışılmıştır ve bu yapılırken öğrenci bazında farklılaşan durumlar varsa bu bölümde bahsedilmiştir.

4.1.2.1. birinci Grubun İkinci Dereceden Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması

Bu kısımda birinci grup öğrencilerinin parabolik fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı tekniklere yer verilmiştir.

Birinci Grubun İkinci Dereceden Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Kağıt-Kalem Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo 9'da öncelikle öğrencilerin kağıt-kalem ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 9

Birinci grubun ikinci dereceden denklemler çalıma yaprağına yönelik kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayı	**Ö1**	**Ö2**
Teknikler		
Fonksiyon değerlerini hesaplama	+	+
Köklerin bulunması	+	+
Tepe noktası hesaplama	+	+
Diskriminant hesaplama	+	-
a katsayısını yorumlama	+	+
Sabit terimin yorumlanması	+	+

Tablo 9'daki verilere göre, Ö1 ve Ö2, parabol fonksiyonlarını çözme ve grafiklerini çizme sürecinde çeşitli tekniklerden yararlanarak fonksiyonları çözmekte ve grafiklerini görselleştirmektedir. Fonksiyon değerlerini hesaplama tekniği, parabolün belirli noktalarını bularak grafiği oluşturmak için kullanılmıştır, bu süreçte x'e farklı değerler verilerek fonksiyonun karşılık gelen f(x) değerleri hesaplanmaktadır. Grafiğin x-eksenini kestiği noktaları bulmak için köklerin bulunması yöntemi tercih edilirken, parabolün tepe noktasını belirlemek amacıyla tepe noktası hesaplama tekniği uygulanmıştır. Diskriminant hesaplama tekniği, fonksiyonun köklerinin reel sayılar kümesine ait olup olmadığını belirlemek ve parabol grafiğinin geometrik özelliklerini analiz etmek amacıyla kullanılmaktadır. Ayrıca a katsayısının işaretine bağlı olarak parabolün kollarının yönünü ve açıklığını belirlemek amacıyla a katsayısını yorumlama yöntemi devreye sokulmuştur. Öğrenciler, grafik çiziminde nokta belirleme ve sabit terimin yorumlanması teknikleriyle fonksiyonun y-eksenini kestiği noktayı ve sabit terimin grafiği yukarı ya da aşağı kaydırma etkisini analiz ederek grafikleri oluşturmuştur ve bu teknikleri parabolün özelliklerini anlamlandırma amacıyla bir bütünlük içinde kullanmışlardır.

Birinci Grubun İkinci Dereceden Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Cabri-Geometri Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo 10'da öncelikle öğrencilerin Cabri-Geometri ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 10

Birinci grubun ikinci dereceden denklemler çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayı	**Ö1**	**Ö2**
Teknikler		
Koordinat ve denklem belirleme	+	+
Hesap Makinesi ile fonksiyon tanımlama	-	+
Ölçüm Aktarımı	-	+
Paralel Doğru Çizimi	+	+
Dik Doğru Çizimi	+	+
İz Aracı Kullanımı	+	+
Kesişim Noktası Belirleme	+	+
Fonksiyon Parametrelerini Değiştirme	+	+
Parametre Değişikliklerinin Grafiğe Etkisini İnceleme	+	+

Ö1 ve Ö2, ikinci dereceden fonksiyonları Cabri-Geometri ortamında çizerken çeşitli teknikler kullanmıştır. *Koordinat belirleme* tekniği, grafiklerin üzerindeki noktaların yerini

belirlemek ve parabolün doğru şekilde çizilmesini sağlamak için kullanılmıştır. P*aralel ve dik doğru araçları* ile grafik oluşturma denemeleri yapılmıştır. Ayrıca*, iz aracı* fonksiyonların nasıl hareket ettiğini görsel olarak takip etmek amacıyla kullanılmıştır. Ö1 ve Ö2, *hesap makinesi* yardımıyla sayısal tanımlamalar yapmış ve *y eksenine aktarım* gibi teknikleri benzer amaçlarla kullanmışlardır. Bununla birlikte *fonksiyon parametrelerinin değişimiyle sağlanan değişiklikleri teorik ve görsel olarak gözlemleme* tekniği, özellikle sabit terim ve katsayıların etkisini anlamak amacıyla kullanılmıştır.

Birinci gruptaki öğrenciler (Ö1, Ö2) ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağını inceledikten sonra araştırmacının açıklama yapmasını beklemişlerdir. Araştırmacı öncelikle bu çalışma yaprağının konuyla ilgili bir temel matematik alan bilgisi sorusu ve yedi ikinci dereceden fonksiyonların çözümü ve grafiklerinin çizimi ile ilgili hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında, sorudan oluştuğunu açıklamıştır. Fonksiyonlar ile ilgili soruların öncelikle kağıt-kalem ortamında çözülüp grafiğinin çizilmesi, sonrasında Cabri-Geometri ortamını inceleyerek grafiklerin çizilmesini istemiştir. Öğrenciler çalışma yapraklarındaki soruları sırasıyla 'Analitik düzlemde parabolün tanımı nedir ve hangi formülle ifade edilir?' sorusunu yanıtladıktan sonra $f(x)= ax^2$, $f(x)= ax^2+b$, $f(x)= ax^2+bx$, $f(x)= ax^2+bx+c$, formundaki denklemleri yani katsayıların sayısı artacak şekilde parabol fonksiyonu sorularının çözümüne başlamışlardır. Gruptaki öğrencilerin çalışma sürecinde aralarında geçen diyalog aşağıda verilmiştir.

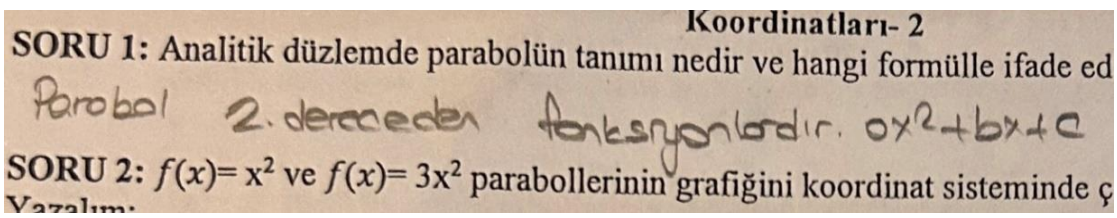
Ö1: Parabolün tanımı nedir ve hangi formülle ifade edilir diye sormuş. Parabol 2. dereceden fonksiyon vardır ax^2+bx+c ile gösterilir

Ö2: Ben de böyle yazdım bir düzlemde bir noktaya kadar doğrusal olmayacak şekilde azalan ve o noktadan sonuç artan ya da o noktaya kadar artan o noktadan sonra azalan grafiğe denir $ax^2+bx+c=0$ denklemi ile gösterilir.

Bu diyaloğun ardından grup doğru tanımıyla ilgili soruyu şekil 36 ve 37'de görüldüğü üzere yanıtlamıştır.

Şekil 36

Ö1'in ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında parabolün tanımına yönelik yanıtı


Koordinatları- 2

SORU 1: Analitik düzlemde parabolün tanımı nedir ve hangi formülle ifade ed

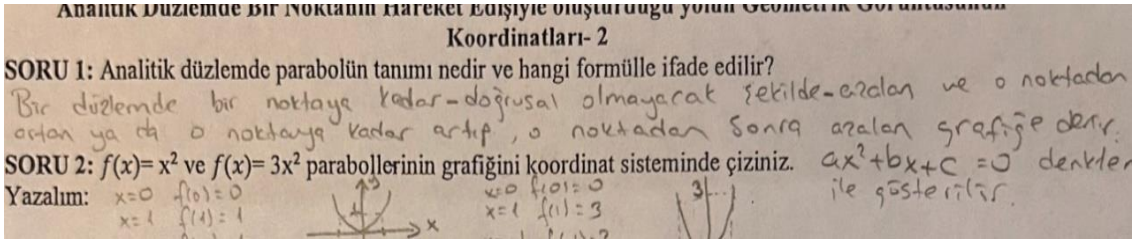
Parabol 2. dereceden fonksiyonlardır. ax^2+bx+c

SORU 2: $f(x)= x^2$ ve $f(x)= 3x^2$ parabollerinin grafiğini koordinat sisteminde ç

Yazalım:

Şekil 37

Ö2'nin ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında parabolün tanımına yönelik yanıtı


Koordinatları- 2

SORU 1: Analitik düzlemde parabolün tanımı nedir ve hangi formülle ifade edilir?

Bir düzlemde bir noktaya kadar-doğrusal olmayacak şekilde-azalan ve o noktadan artan ya da o noktaya kadar artıp, o noktadan sonra azalan grafiğe denir. $ax^2+bx+c=0$ denkle ile gösterilir.

SORU 2: $f(x)= x^2$ ve $f(x)= 3x^2$ parabollerinin grafiğini koordinat sisteminde çiziniz.

Yazalım: x=0 f(0)=0 x=1 f(1)=1 x=0 f(0)=0 x=1 f(1)=3

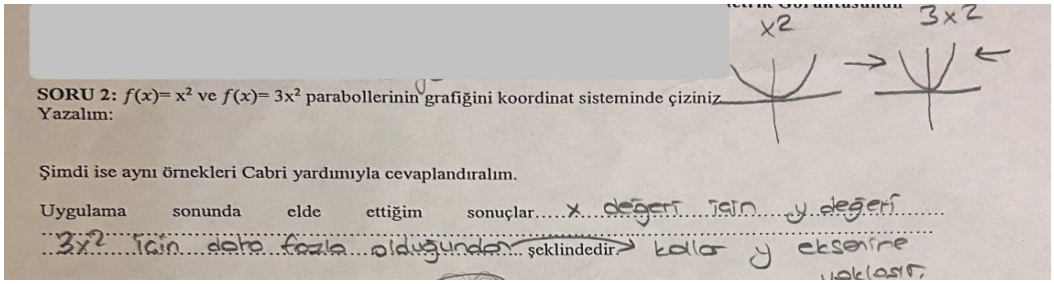
Ö1, 'Analitik düzlemde parabolün tanımı nedir ve hangi formülle ifade edilir? ' sorusunu "Parabol ikinci dereceden fonksiyondur ve ax^2+bx+c ile gösterilir." şeklinde yanıtlarken, Ö2, "Bir düzlemde bir noktaya kadar doğrusal olmayacak şekilde azalan ve o noktadan sonra artan, ya da o noktaya kadar artan o noktadan sonra azalan grafiğe denir. $ax^2+bx+c=0$ denklemi ile gösterilir." şeklinde yanıtlamıştır. Verilen yanıtlardan yola çıkarak grubun parabol tanımı zihinsel şemaları 'ikinci dereceden fonksiyonların temel tanımı' eylemdeki kavramı ile 'simetri ekseni', 'tepe noktası', 'grafiksel temsil' ve 'cebirsel ifade' eylemdeki kavramlarına dayandığı söylenebilir.

Ö1 ve Ö2, $f(x)=x^2$ ve $f(x)=3x^2$ fonksiyonlarını çizerken farklı yaklaşımlar sergilemiştir. Ö1, $f(x)=x^2$ fonksiyonunu değerler vermeden hızlı bir şekilde eski teorik bilgilerine göre çizmiştir. $f(x)=3x^2$ denklemine gelince parabolün grafiği üzerinde katsayının etkisini görselleştirerek açıklamıştır, "kolları y eksenine daha yakın çiziyorum" diyerek grafiksel özellikleri sezgisel bir şekilde anlamlandırmıştır.

Ö2 ise daha düzenli bir yol izleyerek, x'e sırasıyla 0, 1 ve −1 değerlerini verdiğini ve bu noktalardan hareketle parabolü çizdiğini ifade etmiştir. Bu yöntem, Ö2'nin cebirsel bir yaklaşımla noktaları belirlemesine dayalı bir strateji geliştirdiğini göstermektedir. Bu soru ile ilgili Ö1 ve Ö2'nin yanıtları şekil 38 ve 39'da verilmiştir.

Şekil 38

Ö1'in ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 2'ye yönelik yanıtı



SORU 2: $f(x)= x^2$ ve $f(x)= 3x^2$ parabollerinin grafiğini koordinat sisteminde çiziniz.

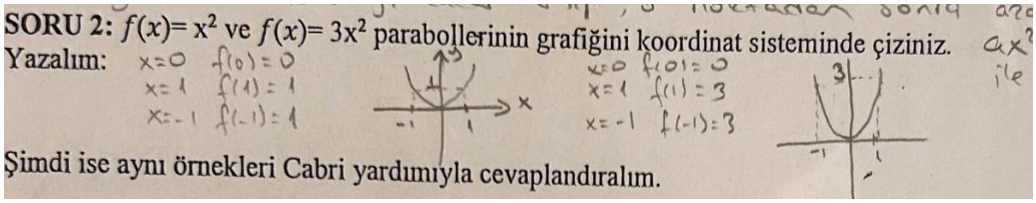
Yazalım:

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.

Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar.....x değeri için y değeri $3x^2$ için daha fazla olduğundan şeklindedir. kolları y eksenine

Şekil 39

Ö2'nin ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 2'ye yönelik yanıtı

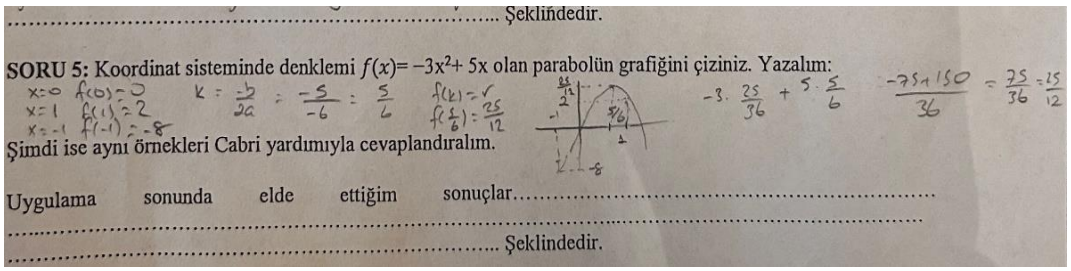


f(x)=2x^2+4 fonksiyonu için Ö1, sabit terimin grafiği yukarı taşıdığını ifade etmiş, "artı 4 var, y ekseninde artı 4 birim yukarı fırlatı verdim" diyerek matematiksel dili tam kullanmasa da doğru bir çıkarım yapmaktadır. Araştırmacının rehberliğinde denklemde x'e 0 değeri vererek sonucu kontrol eden Ö1, sezgisel bir yaklaşımı belli bir hesaplamayla desteklemiştir. Ö2 ise denklemdeki sabit terimin y eksenini kestiği noktayı belirttiğini açıklamış, pozitif ve negatif sabit terimlerin grafik üzerindeki etkilerini doğru bir şekilde ilişkilendirmiştir.

f(x)=−3x^2+5x fonksiyonunu çözümü ve grafiğinin çizimi için şekil 40'ta görüldüğü üzere, Ö2, yine x'e farklı değerler vererek grafiği oluşturmaya çalışmıştır ve "k=−b/2a dedim ve 5/6 değerini buldum" açıklamasıyla tepe noktasını doğru bir şekilde hesapladığı görünmektedir. Aynı fonksiyon için Ö1, kökleri bulduğunu ve parabolün kollarının negatif katsayı nedeniyle aşağıya doğru olduğunu ifade etmiştir. Ancak Ö2'nin aksine, tepe noktası hesaplamasına sistematik bir işlem yerine grafiksel gözlemlerine dayanarak çıkarımda bulunmuştur.

Şekil 40

Ö2'nin ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 5'e yönelik yanıtı

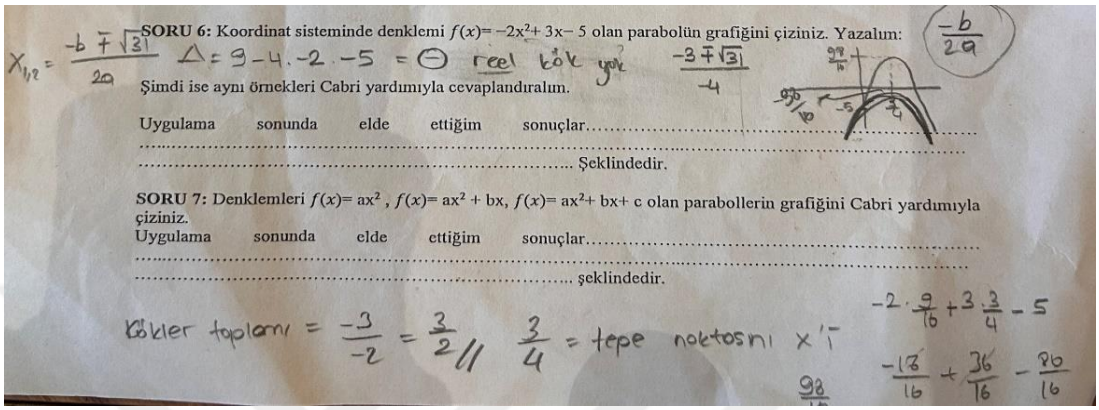


Araştırmacı, f(x)=−2x^2+3x−5 fonksiyonu için sabit terim üzerine bir soru sorduğunda, Ö1 sabit terimi görmezden gelerek kökleri bulmayı denediğini ifade etmiş, ancak bu yöntemin yanlış olduğunu fark etmiştir. "Sonradan eklersem olmayacak" diyerek sabit terimin fonksiyonun temel yapısına etkisini anlamıştır, ancak bunu başlangıçta doğru bir şekilde uygulayamamıştır. Ö2 ise bu durumda daha net bir cevap vererek, sabit terimin grafiğin y eksenini kestiği nokta olduğunu açıklamış ve fonksiyonun diğer katsayılarıyla birlikte a'nın

parabolün yönü üzerindeki etkisini doğru bir şekilde ifade etmiştir. Şekil 41'de görülmek üzere Ö1, "bazı problemlerde direkt kök çıkabiliyor, burada sayılar düzenli verilmemiş" diyerek negatif diskriminant durumunda reel sayılara ait bir kök olmadığını belirtmiştir.

Şekil 41

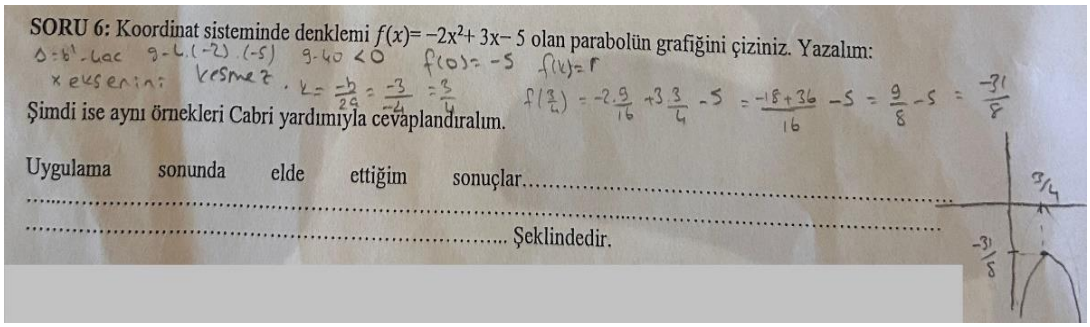
Ö1'in ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 6'ya yönelik yanıtı



Ö2 ise şekil 42'de görülmek üzere bu duruma değinmemiş, ancak belli bir yönteme bağlı noktaları belirleyip parabolü çizme yaklaşımını sürdürmüştür. Bu da, Ö2'nin cebirsel işlemleri belli bir yönteme bağlı kullandığını göstermektedir.

Şekil 42

Ö2'nin ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 6'ya yönelik yanıtı



Sonuç olarak, Ö1 ve Ö2 parabol grafikleri çizimi sırasında farklı stratejiler ortyaya koymuştur. Ö1 daha sezgisel ve grafik odaklı bir yaklaşımla ilerlerken, Ö2 cebirsel yöntemleri daha çok kullanmaktadır. Her iki öğrenci de enstrümantal oluşum süreç içinde kavramlar ve temsiller arasında bağ kurmayı başarmıştır, ancak Ö2'nin sistematik bir anlayış geliştirdiği, Ö1'in ise zaman zaman algısal yaklaşımlarla kavramsal eksiklerini tamamlamaya çalıştığı görülmektedir.

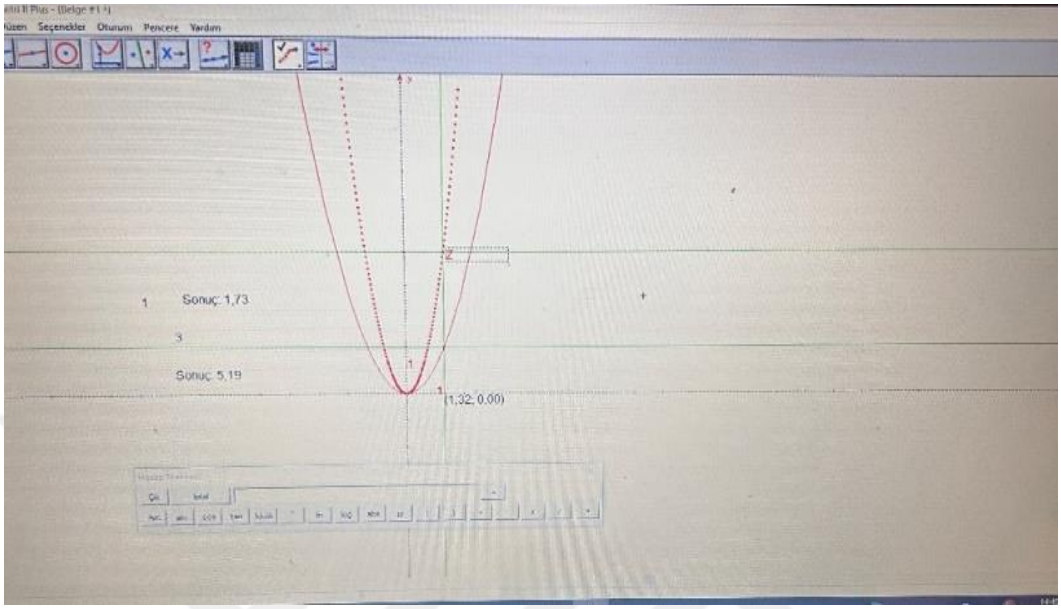
Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında gerçekleştirdikleri uygulamada, eylemdeki teoremin "Bir parabol fonksiyonu çizilecek ise, ya fonksiyona belirli x değerleri verilerek noktalar hesaplanır ya da kökler ve tepe noktası belirlenerek grafik oluşturulur" şeklinde olduğu yönünde yorumlanmıştır. Bu teoremin, 'fonksiyonun katsayılarının grafik üzerindeki etkileri' ve 'grafik çiziminde noktaların belirlenmesi' eylemdeki kavramlarına dayandığı söylenebilmektedir.

Cabri-Geometri ortamında ikinci dereceden fonksiyonların çözümü ve grafik çizimine geldiklerinde, Ö1, "Önce x noktası belirlemiştik ama onu nereden yapmıştık hatırlayalım. Hatırladım, x ekseni üzerinde reel sayı olarak bir nokta belirledim. Sayı aracı ile bir sayısını tanımladım, sonra hesap makinesine geldim. Önce bir sayısını tıklıyorum, sonra nokta çarpı yine nokta bu şekilde $f(x)=x^2$'yi hesap makinesine gireceğim." diyerek süreci başlatmıştır. Ancak, noktayı hesap makinesine doğrudan girmeye çalıştığında, "Ama olmuyor, x noktasına tıklayınca noktayı hesap makinesine girmiyor. Ama neden böyle oluyor hiç bilmiyorum. Hocaya soralım." diyerek yazılımın araçları arasındaki ilişkiyi anlamlandıramadığını ifade etmiştir. Araştırmacının, "Hesap makinesine hep sayı girmek zorundayız, noktaya tıklayamazsınız. Önce koordinat aracını kullanın." açıklamasının ardından Ö1, noktaların koordinatlarını belirleyerek işleme devam etmiştir.

Ö2, bu süreçte daha düzenli bir yaklaşım sergilemiştir. "O zaman şimdi hesap makinesinde önce sayı, sonra belirlediğimiz noktanın koordinatını giriyoruz. Elde ettiğimiz y sonucunu sürükleyerek ekranın bir köşesine getiriyoruz. Şimdi o sonucu y eksenine aktarmalıyız. Bu yüzden ölçüm aktarım aracını kullanarak bulduğumuz sonucu y eksenine aktaracağız." ifadeleriyle, işlemleri planlı bir şekilde sıralamıştır. Ö2, x ve y noktalarından geçen dik doğruları çizerek kesişim noktasını belirlemiştir ve "Kesiştirdiğimiz noktaya Z olarak tanımlıyoruz. Şimdi iz aracını kullanalım, önce Z noktasını sonra ilk noktayı tıklayacağız. Bu şekilde ikisi hareket ettirdiğimizde Z noktasının oluşturduğu izi göreceğiz." diyerek sürecin devamını açıklamıştır. Bu noktada, Ö1, $f(x)=3x^2$ fonksiyonunu çizerken gözlemlerini, "a katsayısı arttıkça f(x)'in değeri de artıyor. Bu şekilde de parabolün grafiğinin kolları y eksenine yaklaşıyor." şeklinde ifade etmiş, ancak grafik çizimi yerine sayısal ilişkileri göz önünde bulundurarak, "Aslında bunu çizmeye gerek yoktu ki x^2'de sonuç 1 iken $3x^2$ için de sonuç 3 oluyor. $f(x)=x^2$'nin grafiğini çizince $f(x)=3x^2$'nin grafiğini hayal edebiliyoruz." demiştir. Bu durum, Ö1'in sezgisel çıkarımlarla ilerlediğini ve yazılımın araçlarına olan ihtiyacını matematiksel ilişkilerle sınırlı tuttuğunu göstermektedir. Bu konuşmaların ardından Ö1 ve Ö2'nin ikici soruya ait Cabri-Geometri ortamında çizdiği grafikler şekil 43'te verilmiştir.

Şekil 43

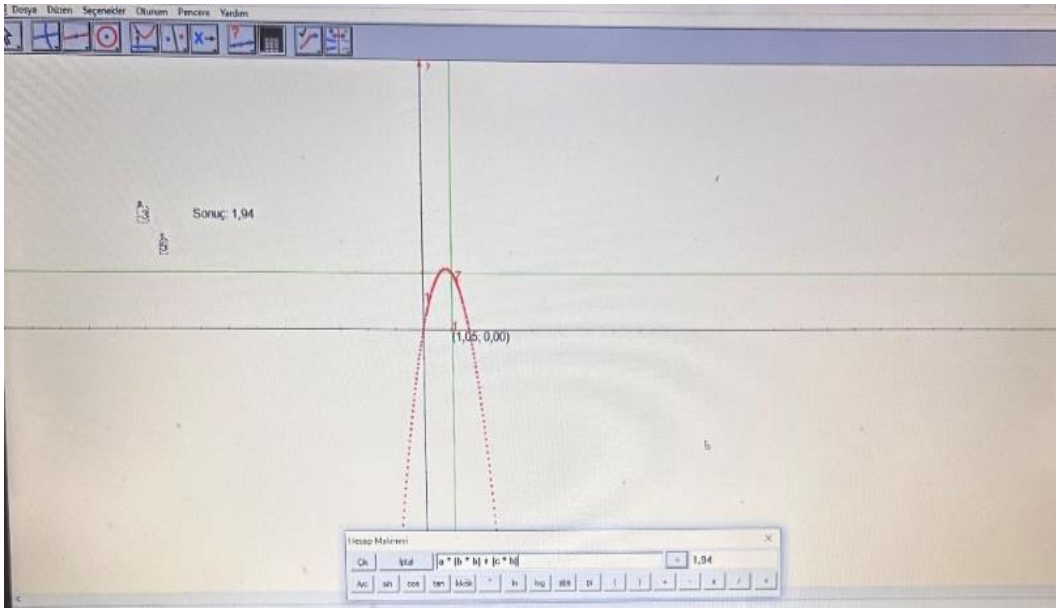
Ö2'nin ikinci dereceden fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik soru 2'ye ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Ö1 ve Ö2, parabol fonksiyonların genel grafik çizimini benimsedikten sonra $f(x)=2x^2+4$, $f(x)=4x^2-3$, $f(x)=-3x^2+5$ fonksiyonlarının grafiğini oluşturmuştur. Ö1 ve Ö2'ye ait bazı grafik sırasıyla şekil 44 ve 45'te verilmiştir.

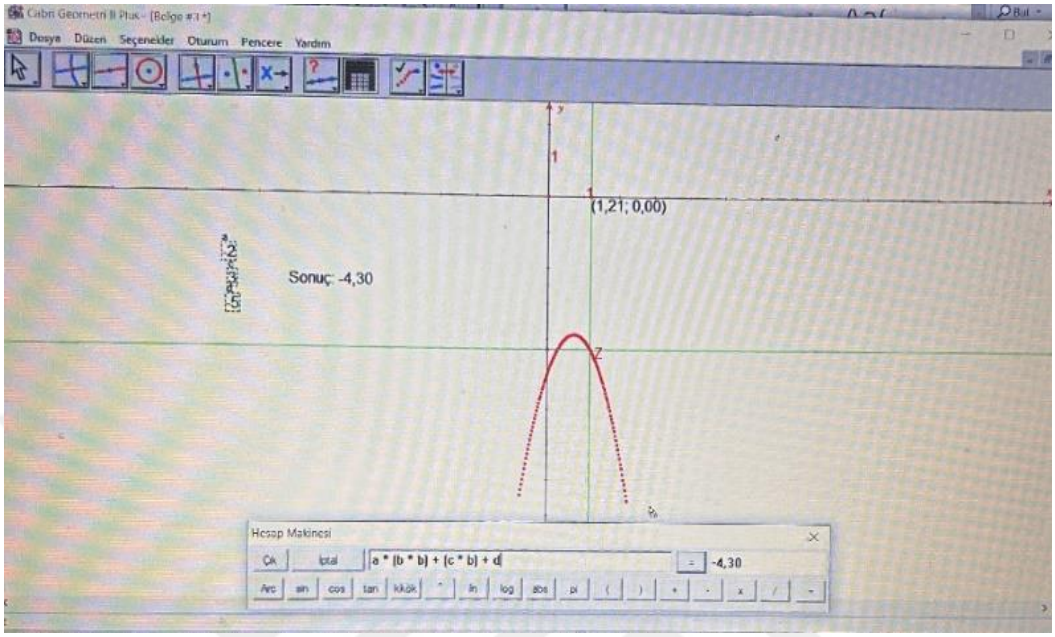
Şekil 44

Ö1'in ikinci dereceden fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Şekil 45

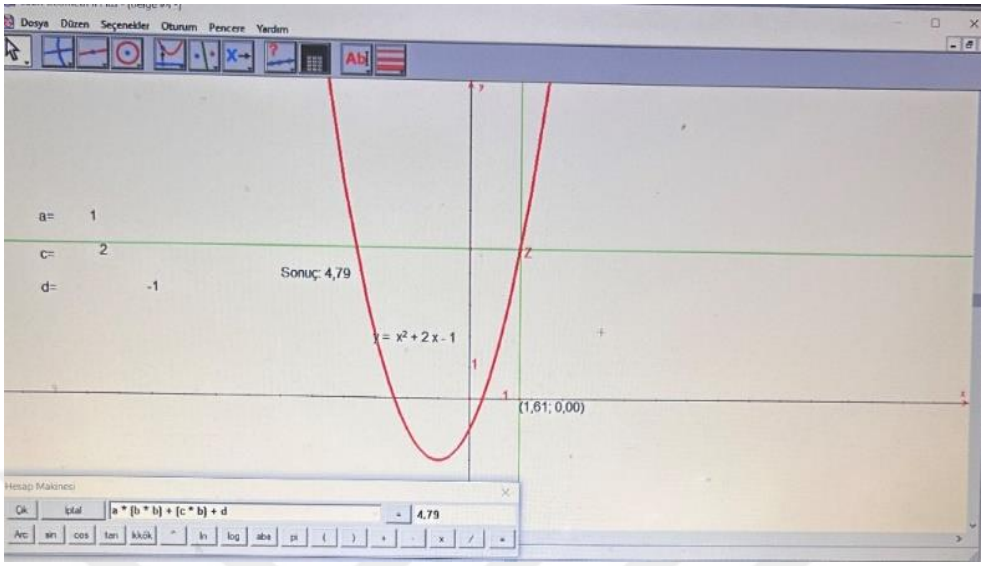
Ö1'in ikinci dereceden fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Öğrenciler, yukarıda verilen grafiklerin oluşturulmasında iz aracını kullanmıştır. Ancak, oluşturulan izin bir grafik olmadığını, sadece o an için Z noktasının başlangıç noktası (yani başlangıçta x ekseni üzerinde oluşturulan bir noktanın hareketiyle elde edilen bir iz) olduğunu fark etmemişlerdir. Bu nedenle, elde edilen izin denklemini yazamamışlardır. Araştırmacının rehberliğiyle, iz aracı yerine geometrik araç ve denklem-koordine araçları kullanılarak oluşturulan grafiklerin denklemleri yazılabilmiştir. Ö2, genel fonksiyonlar üzerinde çalışırken, "$f(x)=ax^2$, $f(x)=ax^2+bx$ ve $f(x)=ax^2+bx+c$ denklemlerini nasıl çözüp grafiğe çizeceğiz acaba? a, b, c olarak hesap makinesine giremediğimize göre yine a, b, c olarak kendimizden bir sayı belirleyelim ve parabolleri çizelim." diyerek çözüm yollarını tartışmıştır. Araştırmacının, "Evet, metin olarak girmeniz lazım." açıklaması üzerine metin aracını kullanarak genel fonksiyonları tanımlamış ve bu fonksiyonları, "Yukarıdaki çizdiğimiz fonksiyonların genel hali gibi düşünebiliriz." diyerek daha önceki bilgileriyle ilişkilendirmiştir. Şekil 46'da Ö2 tarafından oluşturulan parabol fonksiyonların genel formuna ait grafiği verilmiştir.

Şekil 46

Ö2'in ikinci dereceden fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik



parabol fonksiyonların genel formu grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.

Ö2 ayrıca, "Geometrik yer aracı ile Z noktasının başlangıç noktasına göre geometrik yerini belirledim ve parabol olarak kırmızı renkle gösterdim." ifadeleriyle, yazılım araçlarını etkili bir şekilde kullandığını göstermektedir.

Sonuç olarak, Ö1'ın süreç boyunca sezgisel ve algısal bir yaklaşımla ilerlerken Cabri-Geometri araçlarının ilişkilerini anlamada zorlandığı, Ö2'nin ise daha sistematik ve planlı bir yol izlediği görülmektedir. Ö2, Cabri-Geometri araçlarının işlevlerini anlamlandırarak çözüm sürecine entegre etmiştir, Ö1 ise sezgisel çıkarımlarıyla matematiksel kavramları ilişkilendirmiştir. Bu süreçler, öğretmen adaylarının Cabri-Geometri araçlarını anlamlandırma ve etkin bir şekilde kullanma bağlamındaki enstrümantasyon süreçlerini ortaya koymaktadır.

Ö1 ve Ö2'nin, parabol fonksiyonunun grafiğini çizmek için dayandıkları "katsayıların grafik üzerindeki etkilerini anlamlandırma" işlevsel sabitinin, Cabri-Geometri ortamında "dinamik araçların kullanımıyla simetri ekseni, tepe noktası ve grafiksel ilişki kurma" işlevsel sabitine dönüştüğü görülmüştür. Bu süreçte, Cabri-Geometri ortamının sağladığı görselleştirme ve etkileşim olanakları, öğrencilerin kavramlar arası ilişki kurma ve dinamik ortam araçları anlamlandırma şemalarını geliştirdiği göz önünde bulundurulduğunda, bu süreç bir enstrümantasyon süreci olarak değerlendirilebilir. Bu etkileşimli ortam, öğrencilerin grafiksel özellikleri ve matematiksel ilişkileri daha somut bir şekilde deneyimlemelerini sağlamıştır.

Şekil 47'de Ö1 ve Ö2'nin enstrümantal oluşum sürecinde geçtikleri aşamalar görselleştirilmiştir.

Şeki47

Ö1 ve Ö2'nin ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağına yönelik çözüm süreçlerinin şematik gösterimi



Şekil 47'deki bilgilere göre, Ö1 ve Ö2'nin enstrümantasyon sürecindeki aşamaları gösterilmektedir. Süreç, parabol kavramının sorgulanması ve temel özelliklerin tartışılmasıyla

başlayarak, kağıt-kalem ortamında cebirsel işlemler ve grafik çizimleriyle devam etmektedir. Ardından, çözümler Cabri-Geometri ortamına taşınarak katsayı değişimlerinin dinamik gözlemlenmesi sağlanmaktadır. Sürecin ilerleyen aşamalarında, analitik ve grafiksel doğrulamalar yapılarak fonksiyonların özellikleri test edilmiştir. Son aşamalarda, matematiksel bilgiler ile dinamik araçlar arasında ilişkilendirme sağlanmış ve parabol fonksiyonlarının grafiksel ve cebirsel temsilleri bütünleştirilerek enstrümantasyon süreci tamamlanmıştır.

4.1.2.2. İkinci Grubun İkinci Dereceden Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması

Bu kısımda ikinci grup öğrencilerinin parabolik fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı tekniklere yer verilmiştir.

İkinci Grubun İkinci Dereceden Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Kağıt-Kalem Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo 11'de öncelikle öğrencilerin kağıt-kalem ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 11

İkinci grubun ikinci dereceden denklemler çalıma yaprağına yönelik kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen adayı	**Ö3**	**Ö4**
Teknikler		
Nokta Belirleme	+	+
Tepe Noktası Belirleme	+	-
Diskriminant Hesaplama	+	-
Katsayı Etkisi Analizi	-	+
Parametre Değişikliklerinin Grafiğe Etkisini İnceleme	+	+

Tablo 11'deki verilere göre, Ö3 ve Ö4, ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında kağıt-kalem ortamında çeşitli enstrümanlı teknikler kullanmaktadır. Ö3, parabolün grafiksel özelliklerini analiz etmek amacıyla "*nokta belirleme*" tekniğini kullanarak x ve y değerlerini hesaplamakta ve grafik çizimini gerçekleştirmektedir. Parabolün simetrisini ve yönünü incelemek amacıyla "tepe noktası belirleme" için $-b/2a$ formülünü uygulamakta, grafiğin simetri eksenini, maksimum ya da minimum noktasını tespit etmektedir. "Diskriminant hesaplama" tekniğini kullanarak $\Delta<0$ durumunda reel kök bulunmadığını belirlemekte, bu da x eksenini kesme durumlarını analiz etmek amacıyla kullanılmaktadır. Ö4 ise, parabolün

kollarının genişliği, yönü ve y eksenini kesme noktalarının değişimini anlamak amacıyla "katsayı etkisi analizi" yaparak a, b ve c katsayılarının grafik üzerindeki etkilerini yorumlamaktadır. Ö3 ve Ö4, söz konusu teknikleri, ikinci dereceden parabol grafikleri ve özellikleri üzerinde analiz yapmak amacıyla kullanmıştır.

İkinci Grubun İkinci Dereceden Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Cabri-Geometri Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo 12'de öncelikle öğrencilerin Cabri-Geometri ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 12

İkinci grubun ikinci dereceden denklemler çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayı	**Ö3**	**Ö4**
Teknikler		
Koordinat Belirleme	+	+
Ölçüm Aktarım tekniği	+	+
Dik Doğru Çizimi	+	+
Kesişim Noktası Belirleme	+	+
Geometrik Yer belirleme	+	+
Fonksiyon Parametrelerini Değiştirme	+	+
Parametre Değişikliklerinin Grafiğe Etkisini İnceleme	+	+
Koordinat Belirleme	+	+

Ö3 ve Ö4, ikinci dereceden fonksiyonları Cabri-Geometri ortamında çizerken çeşitli teknikler kullanmıştır. Fonksiyonun grafiğini oluşturmak için öncelikle "*koordinat belirleme*" tekniğiyle x ekseni üzerinde bir nokta tanımlamış ve katsayıları "*sayı*" aracı ile tanımladıktan sonra işleme sokmak için "*hesap makinesi*" aracını kullanmıştır. Hesap makinesi aracında elde edilen sonuçları görselleştirmek amacıyla "*ölçüm aktarım*" tekniğiyle bu değerleri y eksenine aktarmışlardır. Grafiği tamamlamak için "*dik doğru çizimi*" ve "*kesişim noktası belirleme*" tekniklerini kullanarak eksenlere dik doğrular çizmiş ve kesişim noktalarını belirlemiştir. Ayrıca, oluşturulan kesişim noktasının analitik düzlemde başlangıç noktasının hareketine bağlı oluşturduğu geometrik yerini analiz etmek için "*geometrik yer aracı*" kullanmıştır. Fonksiyonun kolları, simetri ekseni ve y eksenini kesme noktalarını gözlemlemek amacıyla katsayı değişikliklerini uygulamak için "*fonksiyon parametrelerini değiştirme*" ve "*parametre değişikliklerinin grafiğe etkisini inceleme"* tekniklerini kullanmaktadır, bu sayede farklı katsayıların grafiğe etkilerini analiz ederek ikinci dereceden fonksiyonların özelliklerini anlamlandırmıştır. Söz konusu tekniklerin kullanımı öğrencilerin ikinci dereceden parabol

denklemleri ile ilgili matematiksel bilgilerini araç üzerinde görsel olarak temsil etme ve analiz etme becerilerine sahip olduklarını göstermektedir.

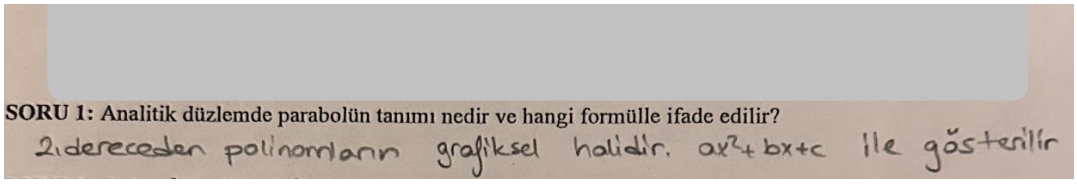
İkinci gruptaki öğrenciler (Ö3, Ö4) ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağını inceledikten sonra araştırmacının açıklama yapmasını beklemişlerdir. Araştırmacı öncelikle bu çalışma yaprağının konuyla ilgili bir temel matematik alan bilgisi sorusu ve yedi ikinci dereceden fonksiyonların çözümü ve grafiklerinin çizimi ile ilgili hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında, sorudan oluştuğunu açıklamıştır. Fonksiyonlar ile ilgili soruların öncelikle kağıt-kalem ortamında çözülüp grafiğinin çizilmesi, sonrasında Cabri-Geometri ortamını inceleyerek grafiklerin çizilmesini istemiştir. Öğrenciler çalışma yapraklarındaki soruları sırasıyla 'Analitik düzlemde parabolün tanımı nedir ve hangi formülle ifade edilir?' sorusunu yanıtladıktan sonra $f(x)= ax^2$, $f(x)= ax^2+b$, $f(x)= ax^2+bx$, $f(x)= ax^2+bx+c$, formundaki denklemleri yani katsayıların sayısı artacak şekilde parabol fonksiyonu sorularının çözümüne başlamışlardır. Gruptaki öğrencilerin çalışma sürecinde aralarında geçen diyalog aşağıda verilmiştir.

Ö4: Analitik düzlemde parabolün tanımı nedir ve hangi formülle ifade edilir diye sormuş. $f(x)=ax^2+bx+c$ şeklinde yazılan 2 dereceden grafiklerin denklemine parabol denir diye yazdım ben.

Ö3: Ben de 2. dereceden polinomların grafiksel halidir ax^2+bx+c ile gösterilir dedim. Bu diyaloğun ardından grup doğru tanımıyla ilgili soruyu şekil 48 ve 49'te görüldüğü üzere yanıtlamıştır.

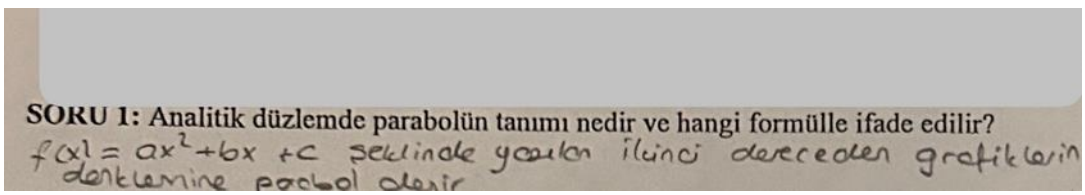
Şekil 48

Ö3'ün ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında parabolün tanımına yönelik yanıtı


SORU 1: Analitik düzlemde parabolün tanımı nedir ve hangi formülle ifade edilir?
2.dereceden polinomların grafiksel halidir. ax^2+bx+c ile gösterilir

Şekil 49

Ö4'ün ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında parabolün tanımına yönelik yanıtı

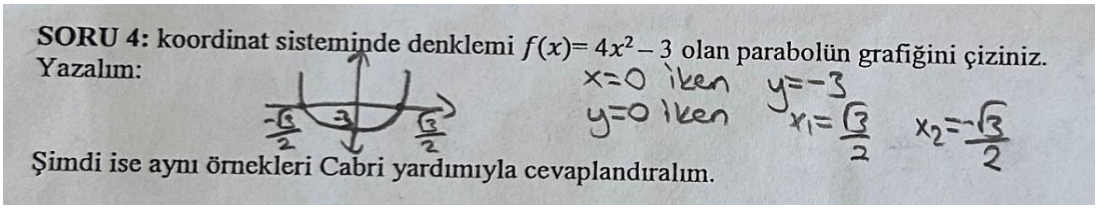

SORU 1: Analitik düzlemde parabolün tanımı nedir ve hangi formülle ifade edilir?
$f(x) = ax^2+bx+c$ şeklinde yazılan ikinci dereceden grafiklerin denklemine parabol denir

Ö3, ‘Analitik düzlemde parabolün tanımı nedir ve hangi formülle ifade edilir?’ sorusunu "ikinci dereceden polinomların grafiksel halidir. ax^2+bx+c ile gösterilir." şeklinde yanıtlarken, Ö4, "$f(x)= ax^2+bx+c$ şeklinde yazılan ikinci dereceden grafiklerin denklemine parabol denir." şeklinde yanıtlamıştır. Her iki tanımın da parabolün analitik düzlemdeki temsillerine odaklandığı görünmektedir. Dolayısıyla öğrencilerin tanımları parabolün genel tanımını tam olarak karşılamamakla birlikte, bu tanımlarda parabolün temel özelliklerine dair bir anlayış sergilendiği söylenebilir. Bu yanıtlardan, Ö3'ün parabolü daha çok bir grafiksel temsil olarak ele aldığı, Ö4'ün ise parabolü bir denklem üzerinden tanımladığı anlaşılmaktadır. Bu yüzden Ö3 ve Ö4’ün parabol tanımı zihinsel şemalarının, 'ikinci dereceden denklem tanımı' eylemdeki kavramı ile 'polinom', 'fonksiyon', 'grafik' ve 'cebirsel ifade' eylemdeki kavramlarına dayandığı ve bu tanımların, parabolün analitik düzlemdeki temsiline odaklandığı söylenebilir. Bu durum, öğrencilerin kavramsal anlayışlarının, parabolün belirli bir bağlamda (cebirsel ve grafiksel) şekillendiğini göstermektedir.

Ö3 ve Ö4, ikinci dereceden denklemlere ait parabol fonksiyonlarının grafiklerini çizmeye yönelik ilk önce kağıt-kalem ortamında çözüm yapmaya başlamıştır. Ö3 ve Ö4, kağıt-kalem ortamında ikinci dereceden denklemleri çözerken farklı yöntemler kullanmıştır. Bu süreçte, kağıt-kalem ortamını parabol fonksiyonların çözümü ve grafik oluşturma aşamalarında bir enstrüman olarak nasıl kullandıkları açıkça gözlemlenmektedir. Ö3, $f(x)=x^2$ fonksiyonunun grafiğini çizerken sistematik bir yaklaşım sergilemiştir. “x’e 1 verdim, y=1 oldu noktayı belirledim ve orijinden geçen dedim, o şekilde çizdim” ifadeleriyle fonksiyonun denklemine x değerlerini yerleştirerek y değerlerini hesaplamış, böylece belirlediği noktaları grafik üzerinde işaretlemiştir. Daha sonra, “$f(x)=3x^2$ yine x'e 1 verdim, y=3 oldu, o şekilde nokta belirleyip çizdim” şeklinde konuşarak aynı yöntemi diğer fonksiyon için de uygulamıştır. Üçüncü soruda, “$f(x)=2x^2+4$ denkleminin grafiğini çizin demiş, yine nokta belirleyip çizdim” ifadeleriyle x değişkenine değer vererek nokta hesaplama yöntemini tekrar kullanmıştır. Şekil 50’de görülmek üzere $f(x)=4x^2-3$ denkemine gelince, “c’yi -3 yapınca y eksenini kestiği noktanın değiştiğini gözlemledim” diyerek katsayıların grafik üzerindeki etkilerini analiz etmiştir.

Şekil 50

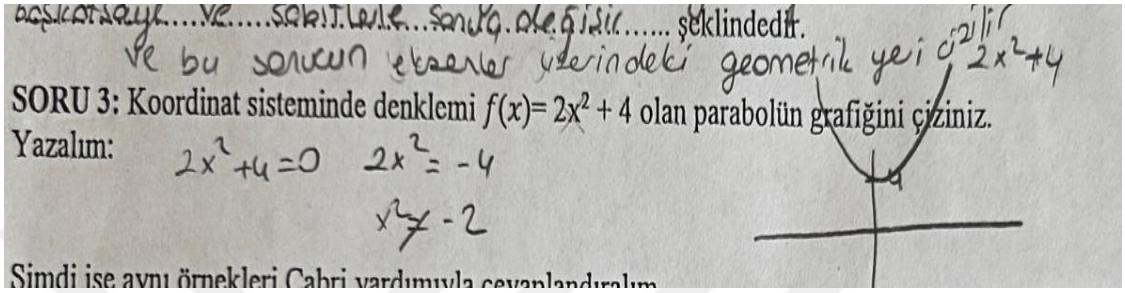
Ö3’ün ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 4’e yönelik yanıtı



Ö4 ise, çözüm sürecinde bazı noktalarda yanlışlıklar yapmasına rağmen, hatalarını fark ederek doğru sonuca ulaşmıştır. Örneğin, f(x)=2x²+4 denklemin çözümü için " 2x² = -4 Bundan da x kare eşittir -2 olmaz, x kare eşittir 2 olarak elde ettim" diyerek bir hata yaptığını fark etmiş ve çözümünü düzeltmiştir. Şekil 51'de Ö4'ün bu soruya ait yanıt verilmiştir.

Şekil 51

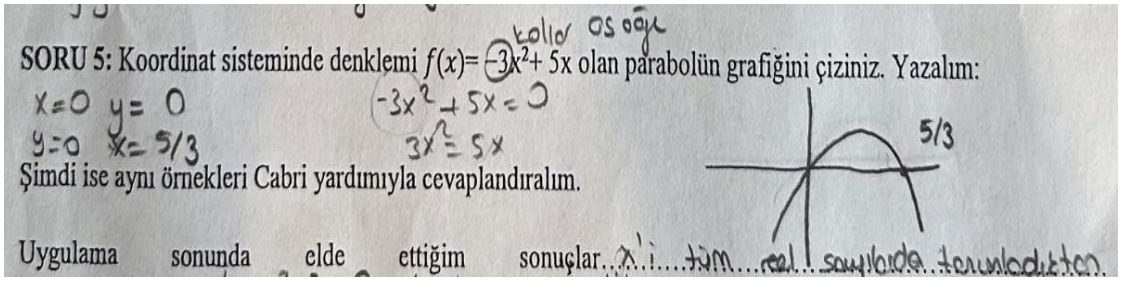
Ö4'ün ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 3'e yönelik yanıtı



"f(x)=4x²-3 parabolü için de x'e 0 verdim, y= -3 oldu; y'ye 0 verdim, x = ±5/3 oldu" ifadeleriyle grafik üzerindeki önemli noktaları belirlemiştir. Ayrıca, Şekil 52'de görüldüğü üzere 5.soruda, f(x)=-3x²+5x denkleminin çözümü ve grafiğinin çizimi amacıyla "Önce ben 5/3'ü yanlış yapmıştım, köklü bir şey bulmuştum, sonra yanlış yaptığımı fark ettim ve 5/3'ü elde ettim" diyerek, yanlış hesaplamalarını fark etmiş ve düzeltmiştir.

Şekil 52

Ö4'ün ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 5'e yönelik yanıtı

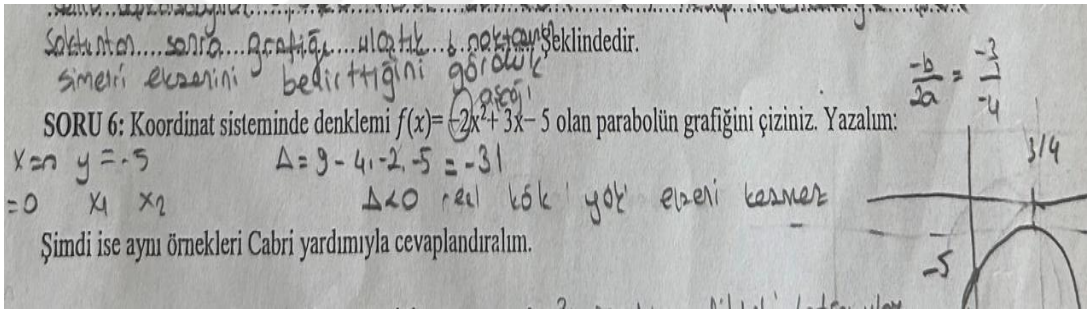


Bu süreçte, Ö3'in yöntemleri, nokta hesaplamaları ve grafik analizlerini bir araya getirmeye odaklanmıştır. Ö4 ise, çözüm sürecinde karşılaştığı hataları fark ederek düzeltmeler yapmıştır. Ö3 ve Ö4'ün kağıt-kalem ortamını enstrüman olarak kullandıkları bu süreçte, matematiksel olarak teorik bilgilerini, hesaplama yöntemlerini ve bu konu ile ilgili zihinsel şemalarını birleştirerek fonksiyonların çözümü ve grafiklerini oluşturma yönünde bir enstrümantal oluşum süreci gerçekleştirdikleri gözlemlenmiştir.

Soru 6 ile ilgili olarak Ö4, *f(x)=-2x²+3x-5* fonksiyonunun grafiğini çizmeye başlamıştır. "x'e 0 verdim, y'nin -5 olduğunu buldum. y'ye 0 verdim, x'leri buldum." ifadesiyle değişkenlere değer verme sürecini açıklamış, ardından fonksiyona ait diskriminantı hesaplamıştır. Başlangıçta "Diskriminantı -36 olarak buldum" söylese de, Ö3'ün uyarısıyla "-31 olarak düzelttim" diyerek hatasını fark ettiğini göstermiştir. "Delta sıfırdan küçük olduğu için fonksiyonun reel kökü yok, yani x eksenini kesmez" şeklinde çözümünü ifade etmiştir. Tepe noktasını "-b/2a formülüyle 3/4 olarak buldum" diyerek belirtmiş ve grafiği çizmiştir. Grafiği çizerken, katsayıların değişiminin grafik üzerindeki etkilerini analiz etmiş ve "a'yı -3'ten -2'ye artırınca kolların genişlediğini" ve "b'yi değiştirdikçe simetri ekseninin değiştiğini gözlemledim" ifadeleriyle bu gözlemlerini açıklamıştır. Ö4'ün söz konusu soruya ait yanıtı şekil 53'te verilmiştir.

Şekil 53

Ö4'ün ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 6'ya yönelik yanıtı



Ö3, ikinci dereceden fonksiyonları çözerken, genel denklem olan f(x)=ax²+bx+c formunu esas almıştır. İlk olarak, f(x)=-3x²+5x fonksiyonunun grafiğini çizdiğinde, "Değerler verip çözdüm" diyerek x'e belirli değerler vermiş ve karşılık gelen y değerlerini hesaplamıştır. Bu noktaları koordinat sistemi üzerinde işaretleyerek parabolün grafiğini oluşturmuştur. Ayrıca, sabit terim olan c katsayısını sıfır aldığında, "y eksenini (0,0) noktasında kestiğini gördüm" diyerek c'nin grafik üzerindeki etkisini açıklamıştır. *f(x)=-2x²+3x-5* fonksiyonunun çözümü ve grafik çizimi ile ilişkili olarak, "x=0 iken y eşittir -5, y=0 iken reel kök yok, yani Delta eşittir -31" diyerek x ve y değerlerini kullanarak kritik noktaları bulmuş, ayrıca diskriminantı hesaplayarak köklerin reel olmadığını vurgulamıştır. Tepe noktasını "-b/2a'dan 3/4 olarak buldum" diyerek hesaplamış ve hesapladığı bilgilere ve sonuçlara dayanarak grafiği oluşturmuştur. Ayrıca, grafiği gözlemlerken, "a katsayısını -3'ten -2'ye artırınca kolların genişlediğini ve b katsayısını değiştirdikçe simetri ekseninin değiştiğini gözlemledim" ifadeleriyle katsayıların grafik üzerindeki etkilerini açıklamıştır.

Sonuç olarak, Ö3 ve Ö4, parabol grafikleri çizimi sırasında cebirsel yöntemler kullanarak çözümlerini ortaya koymuştur. Ö3, daha analitik bir yaklaşımla ilerlemekte olsa da, Ö4 yanlışlarını fark edip düzeltme odaklı bir süreç izlemektedir. Her iki öğrenci de enstrümantal oluşum süreci içinde parabolün grafiksel ve cebirsel temsilini anlamlandırmayı başarmıştır. Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında gerçekleştirdikleri uygulamada, eylemdeki teoremin "analitik düzlemde bir parabolün denklemi çözülecek ve grafiksel temsili oluşturulacak ise, denklemdeki mevcut katsayıların grafik üzerinde etkilerini inceleyerek grafik oluşturulur" şeklinde olduğu düşünülmektedir. Bu teoremin, 'analitik çözümleme' ve 'grafik çizimi' veya 'katsayı analizinin geometrik etkileri' yöntemlerinin uygulanması (örneğin, nokta belirleme, diskriminant hesaplama, simetri ekseni bulma ve kolların genişliği veya daralmasını analiz etme) eylemdeki kavramlarına dayandığı söylenebilir.

Ö3 ve Ö4 Cabri-Geometri ortamını kullanarak parabol çözümü ve grafiklerini çizme süreçleri incelendiğinde, bireysel yaklaşımları ve birbirleriyle etkileşimleri, onların enstrümantal oluşumlarını açıkça ortaya koymaktadır. Ö3, sürecin başında yazılımın sınırlılıklarına dikkat çekmiş ve bu sınırlılıkların nedenini anlamaya çalışmıştır. Örneğin, parabolün geometrik yerini çizmeye çalışırken, "Neden geometrik yerini alamıyoruz acaba. Acaba 0,0'dan geçen bir nokta daha mı belirlesek?" diyerek, yazılımın beklentilerini sorgulamış ve bu durumu çözmeye çalışmıştır. Ö4 ise özellikle hesap makinesi aracını aktif bir şekilde kullanarak işlemleri somutlaştırmaya odaklanmıştır. Örneğin, $f(x)=x^2$ parabolünü çizim sürecinde, "Şimdi sayımı 1 olarak belirlemiştim. Bu sayı çarpı x ekseni üzerindeki sayının karesi. Zaten sonuç belli, 4 olacak" diyerek matematiksel işlemleri açıklamış ve elde edilen sonuçları eksenlere taşımayı önermiştir. Ancak yazılımın tam sayılar arasındaki reel sayıları tanımlayamaması gibi sınırlılıklar, onları alternatif yaklaşımlar geliştirmeye yönlendirmiştir. Bu durumu Ö3, "Niye çizmiyor? Çünkü aradaki reel sayıların ne olduğunu bilmiyor" sözleriyle açıklamış ve yazılımın nasıl çalıştığını anlamlandırmaya çalışmıştır. Bu süreçte, başlangıçta tam sayı kullanmalarının yanlış bir adım olduğunu fark etmişlerdir. Ö3, "İlk başta x'i sadece tam sayı olarak atamıştık, böyle deneyince x^2 grafiğini çizemedik çünkü yazılım iki tam sayı arasındaki reel sayıları grafikte tanımlayamadı" diyerek, sorunun kaynağını bu şekilde ifade etmiştir. Bu farkındalık, onların süreci yeniden ele almalarını sağlamış ve başlangıç x noktasını reel sayı olarak tanımlayarak ilerlemeye başlamışlardır. Ö3'ün bu soru ile ilgili ekranın kaydından bir kesit şekil 54'te verilmiştir.

Şekil 54

Ö3'ün parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde nokta belirleme aracının kullanımına ilişkin ekran kaydından bir kesit.



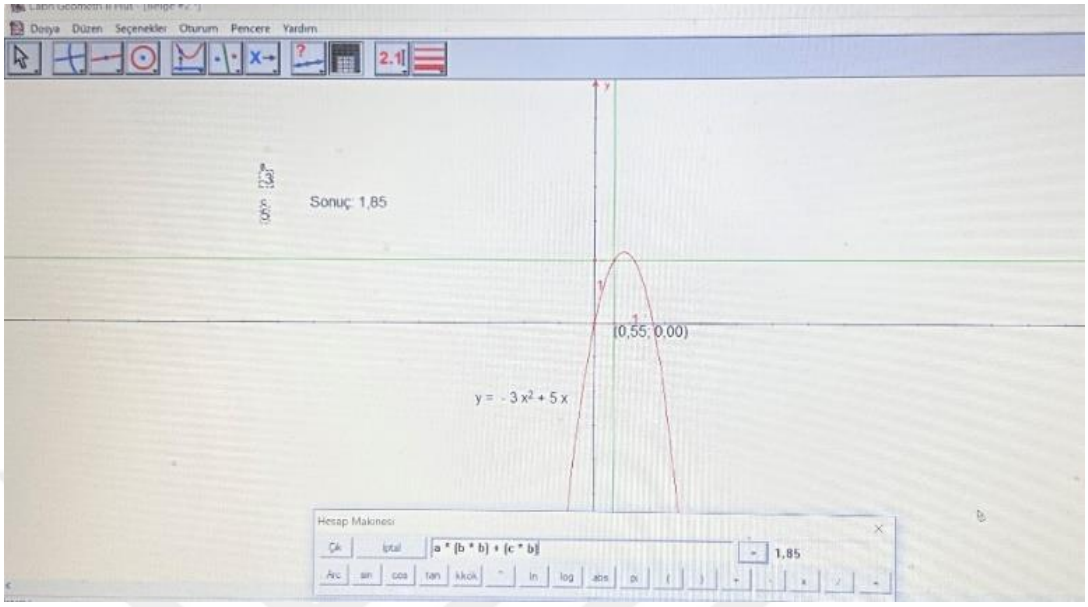
Öğretmen adayları, $f(x)=3x^2$ parabolunu çizerken, "Çarptığımız sayıya göre parabolün kolları genişleyip daralıyor" diyerek, katsayıların grafik üzerindeki etkisini fark etmiştir. Ö3 ise bu sürece katkıda bulunarak, "b katsayısını değiştirince grafiğin simetri ekseninin değiştiğini gördüm" yorumunda bulunmuş ve simetri ekseninin katsayılarla ilişkisini analiz etmiştir.

$f(x) = -3x^2+5x$ denklemine ilişkin Ö3, parabol denklemlerinin genel formu olan $f(x)=ax^2+bx+c$ üzerinde düşünerek şu çıkarımlarda bulunmuştur: "a katsayısının negatif olması, parabolün kollarının aşağıya doğru açıldığını gösteriyor. Ayrıca, c'yi sıfır olarak aldığımızda, grafik koordinat eksenlerini (0,0) noktasında kesiyor." Bu yorumuyla, katsayıların parabolün yönü ve kesim noktaları üzerindeki etkisini açık bir şekilde ifade etmiştir.

Ö3, sürecin sonunda genel bir strateji geliştirmiş ve "Genel olarak Cabri-Geometri'de grafikleri çizdikten sonra şöyle bir sonuca vardım: her bir parabol için ayrı ayrı denklem kurmak yerine tüm katsayıları tek bir denkleme yazmanın daha kolay ve doğru olduğunu anladım" ifadesiyle bu stratejiyi açıklamıştır. Bu yaklaşım, farklı parabolleri tek bir denklem üzerinden gözlemleme ve analiz etme sürecini kolaylaştırmıştır. Ö3'ün bu stratejisi, yalnızca işlem sürecini basitleştirmekle kalmamış, aynı zamanda katsayılar arasındaki ilişkilere dair genelleyebilme becerisini de göstermiştir. Bu beceri, matematiksel kavrayışını derinleştirmiş ve yapılandırdığı bu şema sayesinde, sonraki problem çözme süreçlerinde daha verimli bir yol izlemesini sağlamaktadır. Bu süreç ile ilgili Ö3'ün ekranından bir kesit şekil 55'te verilmiştir.

Şekil 55

Ö3'ün parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik ekran kaydından bir kesit.



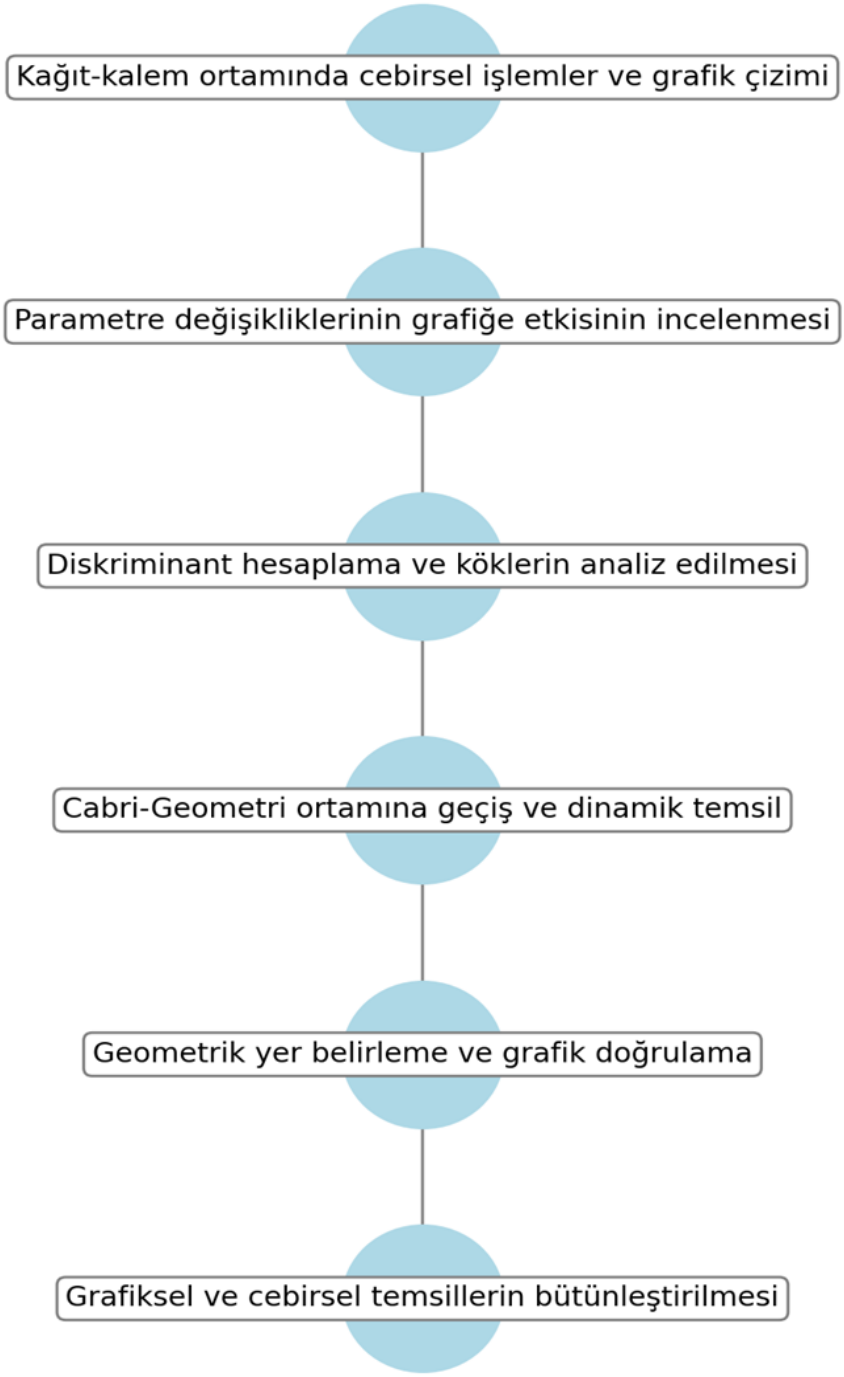
Ö3 ve Ö4'ün enstrümantal oluşum süreçleri, Cabri-Geometri yazılımını kullanırken karşılaştıkları problemlere çözümler geliştirme, yazılımın sınırlılıklarını fark etme ve matematiksel kavramları anlamlandırma çabalarıyla şekillenmiştir. Bu süreçte $f(x)=2x^2+4$ gibi denklemler üzerinde çalışmış, katsayıları değiştirdikçe grafikteki değişimleri gözlemlemişlerdir. Örneğin Ö4'ün "Şimdi yaptığımız grafik bu şekilde sabit dursun, bunun üstüne farklı sayılar ekleyelim" önerisi, grafiklerin dinamik yapısını anlamalarını sağlamış ve işlemleri daha planlı bir hale getirmiştir.

Ö3 ve Ö4'ün, parabol fonksiyonların grafiğini çizmek için dayandıkları "değer verme, kök belirleme ve analitik düzlemde nokta gösterme" işlevsel sabitinin, Cabri-Geometri ortamında "dinamik nokta belirleme, katsayıların grafiksel etkilerini analiz etme ve geometrik yer oluşturma" işlevsel sabitine dönüştüğü görülmüştür. Yani, öğretmen adayları Cabri-Geometri ortamını kullanarak parabollerin grafiksel temsillerini daha dinamik bir şekilde incelemiş, katsayı değişikliklerinin grafik üzerindeki etkilerini doğrudan gözlemlemiş ve fonksiyonların davranışlarını analiz etmiştir.

Şekil 56'da Ö3 ve Ö4'ün enstrümantal oluşum süreçlerindeki tamamlanan aşamalar gösterilmektedir.

Şeki 56

Ö2 ve Ö4'ün ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağına yönelik çözüm süreçlerinin şematik gösterimi



Şeki 56'daki bilgilere göre Ö3 ve Ö4, ikinci dereceden fonksiyonların çözümü ve grafiklerinin oluşturulması sürecinde hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri

yazılımı aracılığıyla farklı matematiksel teknikleri bir araya getirmekedir. İlk aşamada, kağıt-kalem ortamında temel analizleri gerçekleştirerek fonksiyonların yapısal özelliklerini belirlemiştir. Daha sonra, fonksiyonların grafiklerini oluşturmak için katsayı değişimlerini analiz etmiş, diskriminant hesaplamalarıyla kökleri incelemiştir. Sürecin ilerleyen aşamalarında, Cabri-Geometri ortamına geçerek grafiksel doğrulamaları gerçekleştirmekte olup, parametre değişikliklerinin fonksiyon grafikleri üzerindeki etkilerini gözlemleyerek dinamik temsil anlayışlarını geliştirmektedir. Son aşamada ise, grafiksel ve cebirsel temsiller arasında ilişki kurarak matematiksel anlamlandırma sürecini tamamlamaktadır. Bu süreç, enstrümantasyon sürecinin, yalnızca araç kullanımını değil, aynı zamanda öğrencilerin enstrümanlı eylem şemalarını dönüştüren bir öğrenme deneyimi sunduğunu göstermektedir.

4.1.2.3. Üçüncü Grubun İkinci Dereceden Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması

Bu kısımda üçüncü grup öğrencilerinin parabolik fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı tekniklere yer verilmektedir.

Üçüncü Grubun İkinci Dereceden Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Kağıt-Kalem Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo 13'te öncelikle öğrencilerin kağıt-kalem ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 13

Üçücü grubun ikinci dereceden denklemler çalıma yaprağına yönelik kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayı	**Ö5**	**Ö6**
Teknikler		
Değer Verme	+	-
Çarpanlara Ayırma	+	-
Türev Alma	+	+
Diskriminant Analizi	+	+
Kritik Noktalar Analizi	-	+

Tablo 13'teki verilere göre, Ö5 ve Ö6, ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında kağıt-kalem ortamında çeşitli enstrümanlı teknikler kullanmaktadır. Ö5, parabolün grafiğini çizmek ve fonksiyonun özelliklerini belirlemek amacıyla "*değer verme*" tekniğini kullanarak çeşitli x ve y değerlerini hesaplamakta ve grafiği oluşturmaktadır. Kökleri ve tepe noktasını

belirlemek amacıyla "*çarpanlara ayırma*" ve "*türev*" tekniklerini uygulamakta ve bu yöntemle fonksiyonun grafiğini analiz etmektedir. "*Diskriminant analizi*" tekniğini kullanarak grafiğin x eksenini kesip kesmediğini belirlemekte, bu da denklemin geometrik özelliklerini analiz etmek amacıyla kullanılmaktadır. Ö6 ise, grafiğin genel şeklini tahmin etmek ve tepe noktasını belirlemek amacıyla "*türev alma*" tekniğini kullanarak *kritik noktaları analiz* etmekte ve grafik üzerinde yorum yapmaktadır. Ö5 ve Ö6, söz konusu teknikleri, parabol grafikleri ve özelliklerini çözmek, analiz etmek ve görselleştirmek amacıyla kullanmaktadır.

Üçüncü Grubun İkinci Dereceden Denklemler Çalışma Yaprağına Yönelik Cabri-Geometri Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo 14'te öncelikle öğrencilerin Cabri-Geometri ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 14

Üçüncü grubun ikinci dereceden denklemler çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayı	**Ö5**	**Ö6**
Teknikler		
Hesap Makinesi kullanımı	+	+
Ölçüm Aktarımı	+	-
Dik Doğru Çizimi	+	+
Kesişim Noktası Belirleme	+	+
Geometrik Yer Belirleme	+	-
Grafik Üzerinde Katsayı Analizi	+	+

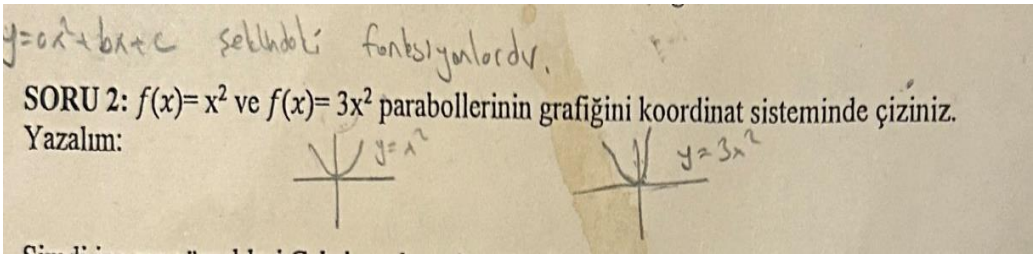
Ö5 ve Ö6, parabol fonksiyonlarını Cabri-Geometri ortamında çözüp grafiklerini oluştururken aşağıdaki tekniklerden yararlanmıştır: "*hesap makinesi aracı*" yardımıyla fonksiyonun katsayılarını hesaplamış ve işlemleri gerçekleştirmiştir, "*ölçüm aktarım aracı*" ile elde edilen sonuçları y eksenine aktarmış ve "*geometrik yer aracı*" ile grafiğin dinamik yapısını inşa etmişlerdir. Ayrıca, "*çizim teknikleri*" kapsamında "*dik doğru çizimi*" tekniğini kullanarak x ve y noktalarından geçen dik doğrular oluşturmuştur ve "*kesişim noktası belirleme*" tekniğiyle bu doğruların kesişim noktalarını tanımlamaktadır. Ö6 başlangıçta "ölçüm aktarım" adımını eksik uygulamış ve grafiği oluşturmak amacıyla süreçte gerekli düzeltmeleri yapmıştır. Bu durum, aynı tekniklerin farklı sıralama ile uygulanmasının sonuçlar üzerindeki etkilerini ortaya koymaktadır. Katsayıların grafiğin üzerindeki etkilerini analiz etmek amacıyla bu tekniklerden yararlanan öğrencilerin, parabol fonksiyonlarının özelliklerini görsel olarak anlamlandırma ve analiz etme becerilerinin geliştiği düşünülmektedir.

Ö5 ve Ö6, kağıt-kalem ortamında parabol denklemleri çözüp grafiklerini çizerken, aralarında geçen diyaloglarla hem analitik hem de görsel düşünme süreçlerini geliştirmişlerdir. Bu süreçte öğrencilerin birbirleriyle iletişim kurarak matematiksel kavramları anlamlandırma çabaları dikkat çekmektedir. İlk olarak, Ö5, parabolün tanımını sorgulamış ve "Analitik düzlemde parabolün tanımı nedir ve hangi formülle ifade edilir? Parabolün tanımı var mı? Eğri." diyerek düşüncelerini ifade etmiştir. Ö6 ise başlangıçta belirsizlik yaşamış ve "Üssü bir şeyli ifadeydi ama." diyerek bu ifadeyi hatırlamaya çalışmıştır. Ö5, parabolün temel yapısını açıklayarak "x^2." demiş, ancak Ö6 "Üssü çift olan." şeklinde bir yorum yapmıştır. Ö5 bu yoruma karşılık "Çift değil ya, sadece x^2 olan." diyerek kavramı netleştirmiştir. Ö6, "Yani x^3 sonrası x^2 gibi değil." diyerek durumu anlamaya çalışmıştır. Ö5, "Hayır, işte periyodik denklem. Sadece ax^2 gibi yazılanlar." diyerek doğru tanımı vurgulamış ve Ö6 bu tanımı kabul ederek "Aynen." demiştir. Ardından, Ö6, "Ben parabolün tanımını yapamam." ifadesiyle belirsizliğini belirtirken, Ö5 "Ben böyle yazacağım: $f(x)=ax^2$ şeklindeki fonksiyonlardır." diyerek çözümleme sürecine başlamıştır.

Sonraki adımda, Ö5, "Sonraki soruda da $f(x)=3x^2$ istemiş. x^2'nin katsayısı arttıkça y eksenine yaklaşıyor ve daha hızlı yükseliyor. Katsayısı eksi olunca da x eksenine göre simetriği oluyor." diyerek parabolün katsayılarının grafiğe etkisini açıklamıştır. Ö5 ve Ö6'nın bu soruyla ilgili yanıtları şekil 57 ve 58'te verilmektedir.

Şekil 57

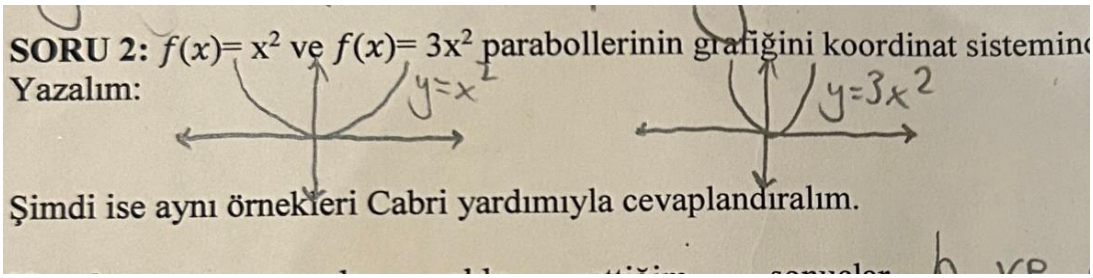
Ö5'in ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 2'ye yönelik yanıtı



Ö6 ise "$f(x)=2x^2+4$ fonksiyonun grafiğini istemiş. Şimdi 4 birim yana kayıyordu." yorumunda bulunmuştur. Ancak Ö5, "Hayır, sabit sayı +4 ve -4 olursa y ekseninde aşağı ve yukarı kaydırıyor." diyerek bu durumu düzeltmiştir. Ö6, "Evet, hatırladım. İyi oldu hatırlamam." diyerek bu açıklamayı onaylamıştır. Ö5, "Şimdi x'e 1 ver, y kaç oluyor?" sorusunu yönelterek bir değer verme yöntemiyle devam etmiştir. Ö6, "6." diyerek sonucu belirtmiş, ardından Ö5, "Tamam, bu kadar." diyerek süreci sonlandırmıştır. Ancak Ö6, "Neden değer verdin ki? Gerek var mıdır?" diyerek bu yöntemi sorgulamıştır. Ö5, "Değer vererek göstermek istedim." diyerek tercih ettiği yöntemi savunmuştur. Ö5 ve Ö6'nın bu soruyla ilgili yanıtları şekil 59 ve 60'ta verilmektedir.

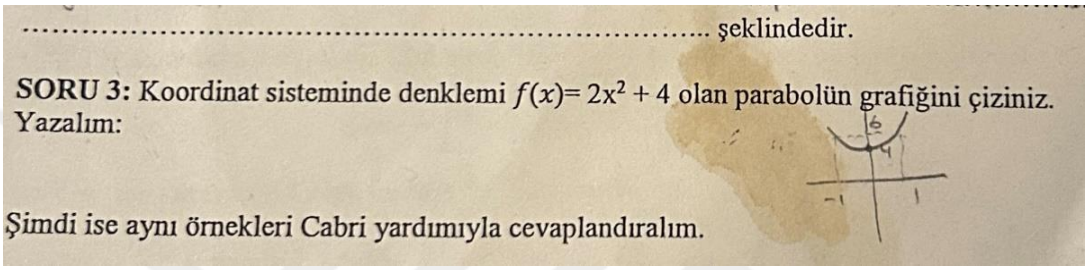
Şekil 58

Ö6'nın ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 2'ye yönelik yanıtı



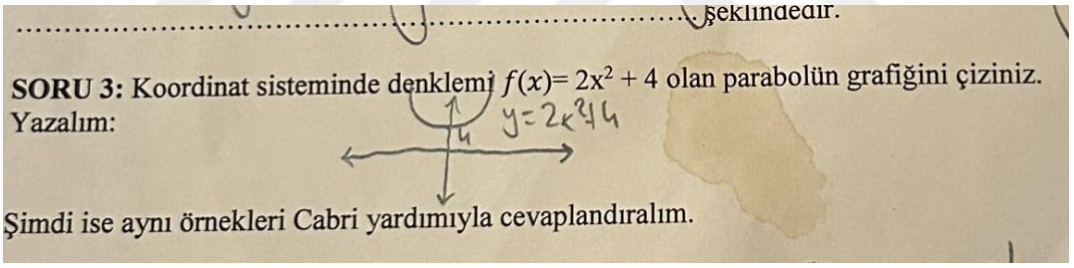
Şekil 59

Ö5'in ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 3'e yönelik yanıtı



Şekil 60

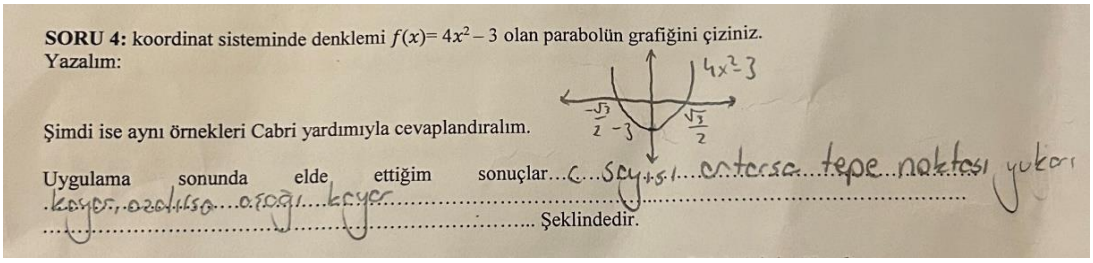
Ö6'nın ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 3'e yönelik yanıtı



Bir sonraki soruda, f(x)=4x²-3 fonksiyonunun çözümünde, Ö6, "Yani x'e sıfır verdiğimizde y, -3 oluyor, yani y eksenini -3'te kesiyor." ifadesiyle grafiğin y eksenindeki kesişim noktasını açıklamıştır. Ö5, "Aynen. Burada kökleri bulmamız lazım. √2⁄3." demiştir. Ancak şekil 61'de görüldüğü üzere Ö6, "Hayır, √3⁄2." diyerek düzeltme yapmış ve Ö5 de "Evet. Ben yanlış hesapladım." diyerek hatasını kabul etmiştir..

Şekil 61

Ö6'nın ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 4'e yönelik yanıtı

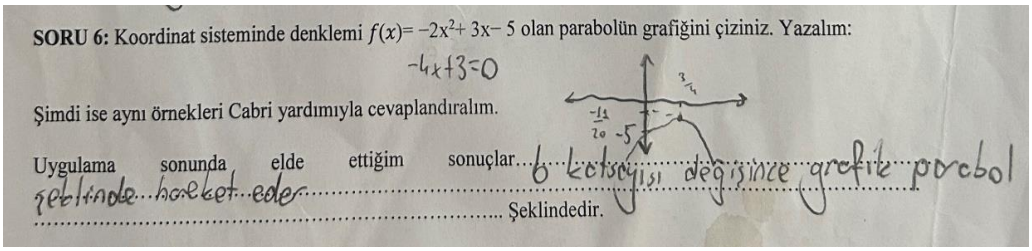


f(x) =-3x²+5x fonksiyonu için, Ö6 "f(x)=-3x²+5x için değer vermeden biraz zor olacak bu çözüm. Bir öncekinde -3 sabit değer, grafiğin y eksenini kestiği nokta olarak görebiliyordum ama oradaki 5x'e bakınca grafiğin şeklini tahmin edemiyorum." diyerek çözümdeki zorluğu dile getirmiştir. Ö5 ise "Aynı şekilde ben de tahmin edemiyorum. Kökleri bulmamız lazım. Sonra da eşitleyelim." demiştir. Ö6, "Ama bu bir parabol değil." diyerek bir tanım tartışması başlatmış, Ö5 ise "Neden?" diye sormuştur. Ö6, "Çünkü biz başta y=x² şeklinde olanlar paraboldür dedik ya. Burada ax²+bx şeklinde fonksiyon. Anladım, o zaman parabolün tanımını değiştirelim: y=ax²+bx+c şeklinde olan fonksiyona paraboldür diyelim." demiştir. Ö5, "Aynen." diyerek bu tanımı kabul etmiştir.

Son olarak, Ö5, "*f(x)=-2x²+3x-5* fonksiyonunda önce diskriminanta baktım, x eksenini kesiyor mu diye. Sonra sıfırdan küçük, bu yüzden x eksenini kesmiyor. Sonra y eksenini kestiği noktaya baktım: -5. Daha sonra bu fonksiyonun tepe noktasına baktım. Kolları da aşağıyadır. Sonra bu noktalarla grafiği çizdim." diyerek çözüm sürecini özetlemiştir. Ö6 ise "Aynen, ben de hepsini aynı şekilde yaptım." diyerek bu yaklaşımı desteklemiştir. Bu süreçte, Ö5 ve Ö6'nın kullandığı "değer verme", "kök bulma", "diskriminant hesaplama" gibi teknikler, onların fonksiyonların özelliklerini anlamlandırmalarına yardımcı olmuştur. Bu süreç, araçların doğru ve etkin bir şekilde kullanılarak kavramların anlamlandırıldığı bir enstrümantasyon süreci olarak değerlendirilebileceğini göstermektedir. Ö5 ve Ö6'nın bu soruyla ilgili yanıtları şekil 62 ve 63'te verilmektedir.

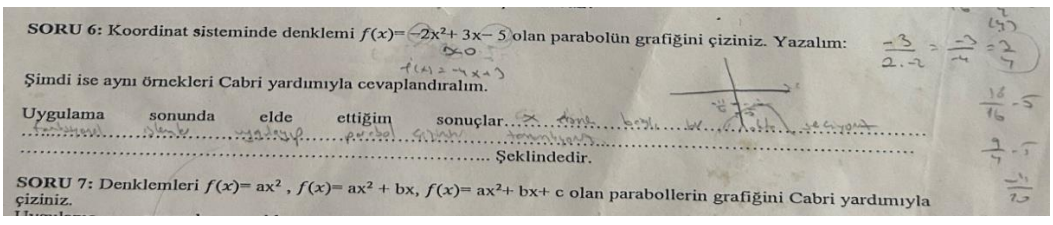
Şekil 62

Ö5'in ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 6'ya yönelik yanıtı



Şekil 63

Ö6'nın ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağında soru 6'ya yönelik yanıtı



Sonuç olarak, Ö5 ve Ö6, parabol grafikleri çizimi sırasında birbirini tamamlayan stratejiler geliştirmiştir. öğretmen adayları enstrümantal oluşum süreci içinde parabolün

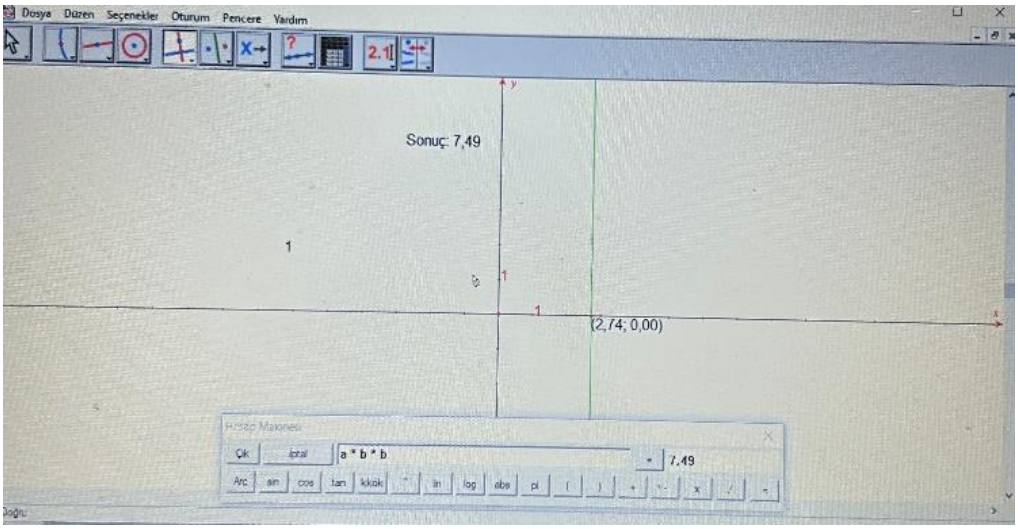
grafiksel ve cebirsel temsilini anlamlandırmayı başarmış, ancak Ö5'in daha düzenli bir yöntem izlediği, Ö6'nın ise esneklik ve hatalardan öğrenme süreci ile dikkat çektiği görülmektedir.

Öğrencilerin kağıt-kalem ortamında gerçekleştirdikleri bu uygulamada, eylemdeki teoremin "analitik düzlemde bir parabolün denklemi çözülecek ve grafiksel temsili oluşturulacak ise, denklemdeki katsayıların grafik üzerindeki etkileri analiz edilerek grafik oluşturulur" şeklinde olduğu ifade edilebilir. Bu teoremin, 'analitik çözümleme', 'grafik çizimi' ve 'katsayıların geometrik etkileri' yöntemlerinin uygulanması (örneğin, nokta belirleme, diskriminant hesaplama, simetri ekseni bulma ve parabolün kollarının genişlik veya yön analizleri) gibi eylemdeki kavramlara dayandığı söylenebilir.

Ö5 ve Ö6 aynı soruları birinci soru tanım sorusu olduğu için ikinci sorudan başlayarak Cabri-Geometri ortamında parabol fonksiyonların çözümü ve grafiklerinin çizimine başlamıştır. Ö5, $y=x^2$ fonksiyonu ile ilgili x ekseninde bir nokta belirleyerek koordinatını seçmiş ve hesap makinesi aracıyla işlemi gerçekleştirmiştir. Ancak, şekil 64'te görüldüğü üzere Ö6 başlangıçta ölçüm aktarım aracını kullanmadığı için sonucu y eksenine aktaramamıştır. Bu durum, Cabri-Geometri yazılımına dair araç bilgisi eksikliği olduğunu göstermektedir göstermektedir. Ö5'in müdahalesi ile hatasını fark etmiş ve düzelterek süreci tamamlamıştır. Geometrik yerin oluşturulması sürecinde Ö5, x eksenine dik doğrular çizerek kesişim noktasını belirlemiş ve geometrik yer aracını kullanarak grafiği oluşturmuştur (Şekil 65). Ö6, başlangıçta geometrik yer kavramını anlamakta zorlanmış ve "Geometrik yerin nasıl oluşturulduğunu anlamadım" diyerek eksikliğini belirtmiştir. Ö5'in yönlendirmesiyle doğru adımları takip ederek grafiği oluşturabilmiştir.

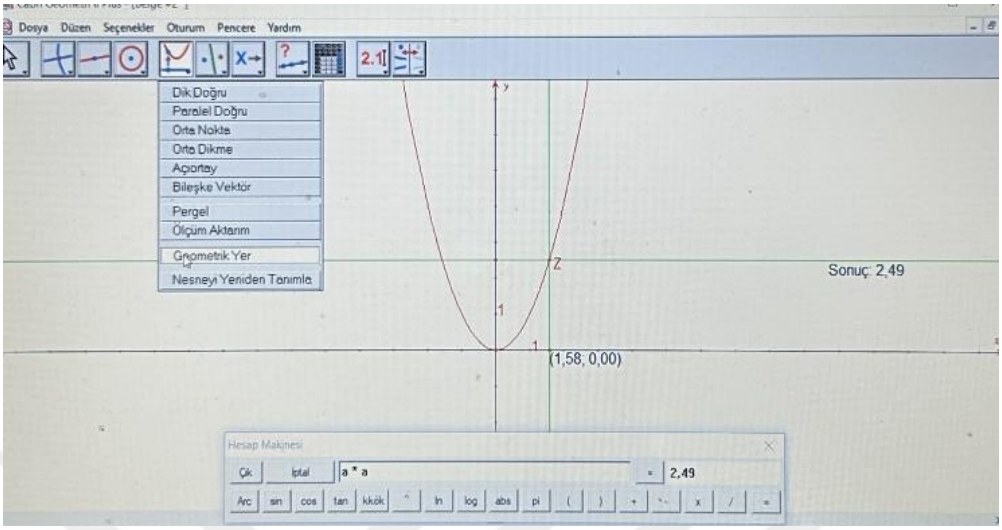
Şekil 64

Ö6'nın parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde ölçüm aktarım aracının kullanımına ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Şekil 65

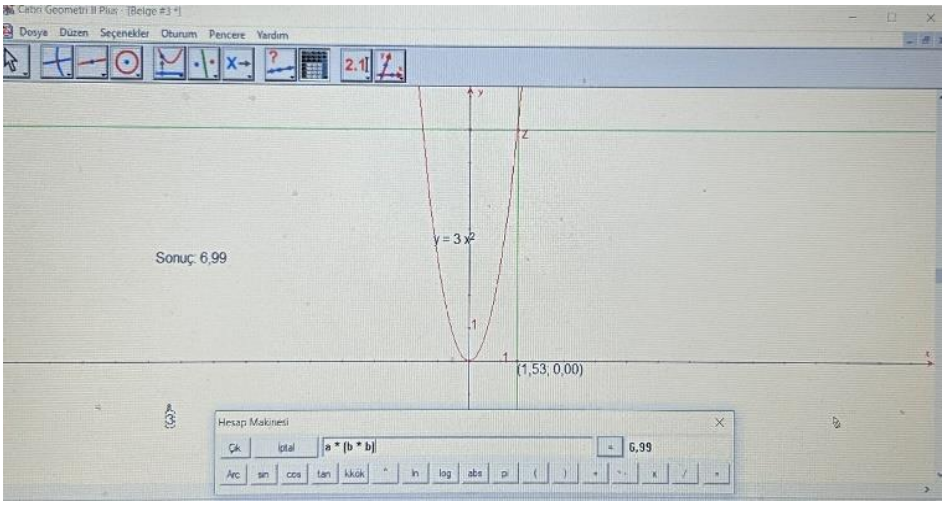
Ö5'in parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



y=3x² fonksiyonunun çiziminde, Ö6 doğru adımları takip ederek işlemleri gerçekleştirmiştir. Cabri-Geometri kullanımında işlemleri ardışık olarak doğru uygulamış ve "Nokta belirledim. Sayı 3 olarak belirledim. Hesap makinesine geldim. 3 çarpı bu sayı yani x çarpı yine x bu şekilde x^2 işledim hesap makinesinde. Sonucu ölçüm aktarım aracı ile y eksenine aktardım. Şimdi x ve y noktalarınından geçen dik doğruları çizdim. Geometrik yere tıklıyorum önce Z kesişim noktası sonra x noktasına tıklıyorum, çünkü x'e göre değişiyor ya grafiğin şekli. " diyerek fonksiyonun x değerine bağlı değişimini anlamlandırabilmiştir. Ö6 tarafından yapılan bu işlemler, öğrencinin yazılımın araç kullanımı matematik bilgisi ile bütünleştirebildiğini göstermektedir (Şekil 66).

Şekil 66

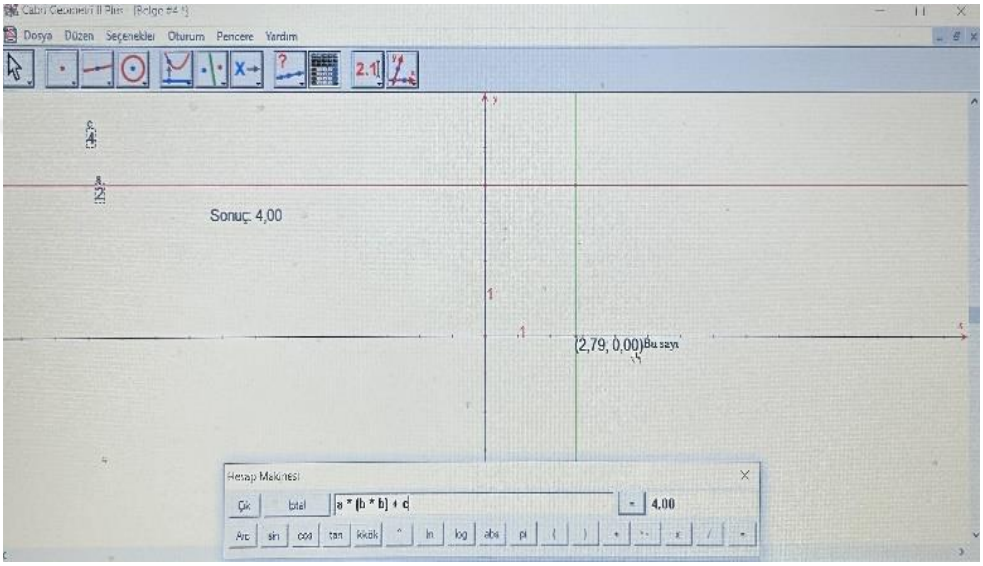
Ö6'nın parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Üçüncü soruda $y=2x^2+4$ fonksiyonunun çiziminde Ö6, şekil 67'de görüldüğü üzere başlangıçta hesap makinesi kullanımında bir hata yaparak koordinattaki sayıyı sıfıra tıkladığında yanlış sonuç aldığını fark etmiştir. "Şimdi koordinattaki sayıya tıklıyorum ve sonucu elde ettim" diyerek hatasını düzelttiğini belirtmiştir (Şekil 68). Bu, matematiksel işlemleri kavramasına rağmen Cabri-Geometri kullanımında hala tam olarak yeterli düzeyde olmadığını göstermektedir.

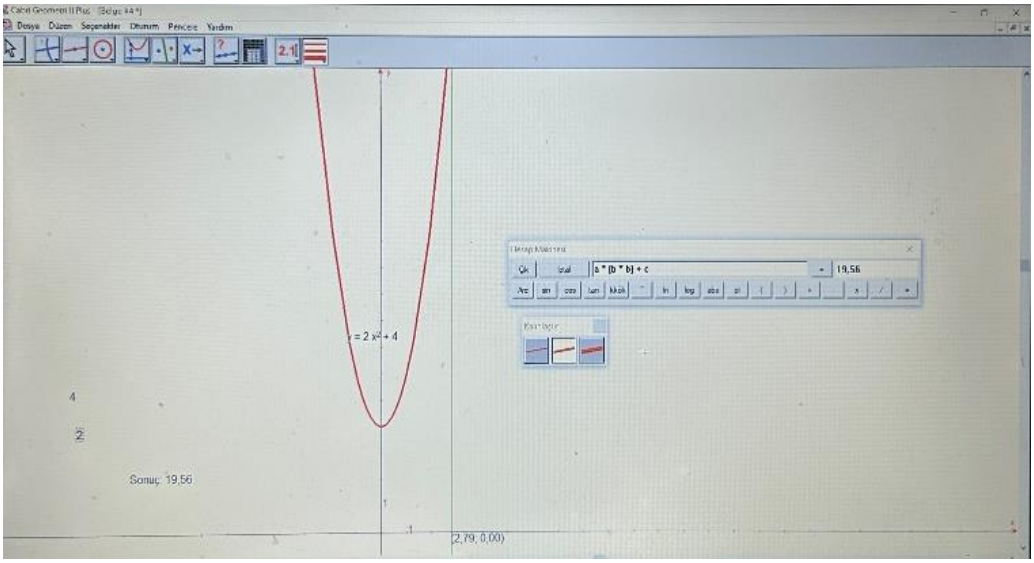
Şekil 67

Ö6'nın parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik denklemin çözümünde yanlış koordinat seçimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Şekil 68

Ö6'nın parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik denklemin çözümünde doğru koordinat seçimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Dördüncü soruda $y=4x^2-3$ fonksiyonunu oluştururken Ö6, -3 yerine 3 seçtiğini fark etmiş ve işlemi düzelterek Ö5 ile aynı sonuca ulaşmıştır. Burada, negatif sayılarla işlem yaparken başlangıçta bir hata yapmış ancak hesap makinesi aracının doğru kullanımını öğrendikten sonra hatasını hızlıca fark edip düzeltmiştir. Bu durum, enstrümantasyon sürecinin devam ettiğini ve dinamik ortamda çalışarak matematik bilgilerinde de değişim oluştuğunu göstermektedir.

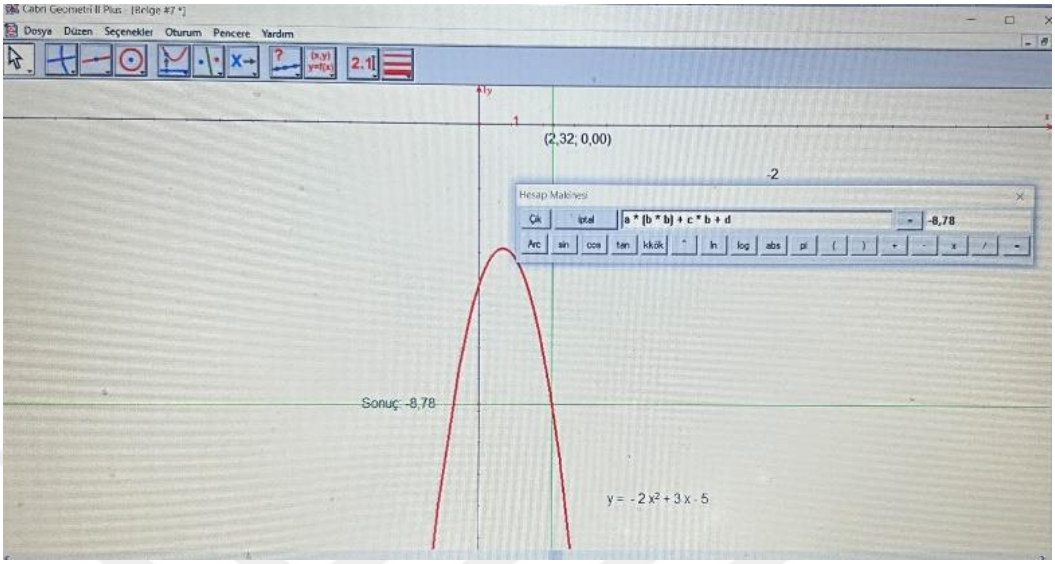
C katsayısının grafikteki etkisini tartışırken Ö5, "c katsayısı y eksenini kestiği noktayı belirliyor" diyerek fonksiyonun sabit teriminin geometrik etkisini net bir şekilde ifade etmiştir. Ö6 da bunu gözlemlemiş ve "c katsayısı eksi olunca grafik aşağıya kayıyor" diyerek değişimi anlamlandırmıştır. Burada, her iki katılımcının da matematik bilgisinin yeterli olduğu görülmektedir. Ancak, bu çıkarımlar Cabri-Geometri'nin görselleştirme araçları sayesinde yapıldığı için yazılımın kullanımının enstrümantasyon sürecine katkı sağladığı söylenebilir. Ö5 ve Ö6, $f(x)=x^2$ fonksiyonunu Cabri-Geometri'de çizdikten sonra b ve c katsayılarının etkilerini yorumlamışlardır. "b ve c sayısı 0 olunca tepe noktası orijinde oluyor, x'in katsayısı artınca kollar y eksenine yaklaşıyor" şeklindeki ifadeler, matematik bilgisinin doğru şekilde kullanıldığını göstermektedir. Bu durum, dinamik ortamın görselleştirme desteğiyle matematik bilgisini doğrulamaktadırlar.

$f(x)=-3x^2+5x$ fonksiyonunda Ö6, "c = 0 olduğu için grafik her halükarda orijinden geçer" diyerek sabit terimin olmamasının grafiğe etkisini doğru bir şekilde belirtmiştir. Ancak, b katsayısının etkisini açıklarken, "b katsayısı değişince grafik alt üst yönünde parabol şeklinde hareket eder" demiştir. Bu ifade, b katsayısının aslında parabolün tepe noktasının yatay konumunu değiştirdiğini tam olarak yansıtmamaktadır. Bu nedenle, b katsayısının etkisini tam olarak anlamlandıramadığı söylenebilir. Ö5 ise "b katsayısı tepe noktasının x eksenine göre simetriğini belirler" diyerek daha açıklayıcı bir ifade kullanmıştır.

Altıncı soru da $y=-2x^2+3x-5$ parabolü için Ö5 ve Ö6, Cabri-Geometri ortamında doğru adımlar atarak başarılı bir şekilde denklemi çözmüş ve geometrik yerini belirlemiştir. Ö5'in bu soruya ilişkin grafik çizimi şekil 69'da gösterilmektedir.

Şekil 69

Ö5'in ikinci dereceden fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik soru 6'ya ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Genel olarak, Ö5 matematik bilgisini ve Cabri-Geometri teknik bilgisini kullanırken, Ö6 bazı aşamalarda hatalar yapmış ve enstrümantasyon süreci içinde bazı öğrenmeler gerçekleştirmiştir. Ö5'in enstrümantasyon sürecinde Cabri-Geometri'nin araçlarını matematik bilgisiyle bütünleştirdiği görülmektedir. Özetle, Ö5 ve Ö6, Cabri-Geometri ortamını kullanarak parabol fonksiyonlarının grafiklerini oluşturma sürecinde matematik bilgisini ve Cabri-Geometri araçlarını farklı düzeylerde kullanmıştır. Ö6, yazılımın bazı araçlarını başlangıçta eksik kullanmış olsa da süreç içinde hatalarını düzelterek doğru sonuçlara ulaşmıştır. Ö5 ise süreci daha düzenli yürütmüş, matematiksel kavramları Cabri-Geometri ile bütünleştirerek enstrümantasyon sürecine devam etmiştir.

Ö5 ve Ö6'ün, parabol fonksiyonların çözmek ve grafiğini çizmek için dayandıkları "cebirsel denklem üzerinden analitik işlem yapma" işlevsel sabitinin, Cabri-Geometri ortamında "grafik üzerindeki noktaları hareket ettirerek görsel ilişki kurma" işlevsel sabitine dönüştüğü görülmüştür. Yani, öğrenciler kağıt-kalem ortamında denklemleri çözümleyerek ve tablo oluşturarak grafik çizerken, Cabri-Geometri ortamında noktaların dinamik değişimini inceleyerek ve bu değişimlerden hareketle fonksiyonun özelliklerini anlamlandırarak grafik üretmişlerdir. Bu süreçte, statik ve işlemsel bir yaklaşımdan görsel ve dinamik bir yaklaşıma geçmeleri ve Cabri-Geometri ortamının bir enstrüman olarak rol üstlenmesi, bu değişimin bir göstergesidir. Şekil 70' Ö5 ve Ö6'nın enstrümantal oluşum sürecinde geçtikleri aşamalar enstrümantason sürecinin bir özeti olarak gösterilmektedir.

Şekil 70

Ö5 ve Ö6'nın ikinci dereceden denklemler çalışma yaprağına yönelik çözüm süreçlerinin şematik gösterimi



Şekil 70'te Ö5 ve Ö6'nın ikinci dereceden fonksiyonlarla ilgili enstrümantasyon sürecini aşamalar halinde göstermektedir. Enstrümantal oluşum süreci, parabol

fonksiyonlarının temel kavramlarını sorgulamaları ve tanımlamalarıyla başlamakta olup, kağıt-kalem ortamında analitik işlemler yaparak fonksiyon grafiklerini oluşturdukları bir aşamaya geçmektedir. Bu süreçte, fonksiyonların katsayılarını ve grafik üzerindeki etkilerini anlamlandırmak için cebirsel doğrulamalar, kökleri belirleme, diskriminant hesaplama ve simetri ekseni incelemeleri gibi teknikler kullanmıştır. Süreç ilerledikçe, Cabri-Geometri ortamına geçilmiş ve dinamik araçların kullanımıyla grafiklerin görselleştirilmesi sağlanmıştır. Başlangıçta Ö6, dinamik yazılım araçlarını kullanmada bazı hatalar yapsa da, süreç içinde Ö5'in yönlendirmeleriyle bu hatalarını fark edip düzelterek enstrümantasyon sürecini ilerletmektedir. Katsayı değişimlerinin grafik üzerindeki etkileri incelenmiş, parabolün y ekseni kesişimi, tepe noktası ve yönü gibi özellikler dinamik olarak gözlemlenmiştir. Son aşamada, cebirsel ve grafiksel temsiller arasında bağlantı kurularak kavramsal anlamlandırma süreci tamamlanmıştır. Bu süreç, Ö5'in sistematik bir analiz yöntemi izlediğini, Ö6'nın ise hatalar üzerinden öğrenme sürecini şekillendirdiğini göstermektedir.

4.1.3. Üçüncü Dereceden Polinomlar Çalışma Yaprağında Kullanılan Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması

Bu başlık altında öncelikle her bir grubun çalışma yaprakları temelinde kağıt-kalem ortamı ve Cabri-Geometri dinamik geometri ortamını enstrüman olarak kullanılan sürece yönelik bulgulara yer verilmiştir. Gruplara ait bulgular sunulurken kağıt-kalem ve bilgisayar ortamına ait süreçler birbirinin devamı olduğundan dolayı aynı başlık altında verilmiştir. Ardından ilgili grubun enstrümanlı eylem şemasının temel bileşeni olan işlevsel sabitler-mümkün olan yerlerde bu sabitleri oluşturan eylemdeki teoremler ve eylemdeki kavramlar aktarılmaya çalışılmış ve bu yapılırken öğrenci bazında farklılaşan durumlar varsa bu kısımda bahsedilmiştir

Polinomlar ile ilgili çalışma yaprağı bilgisayar ve kağıt-kalem ortamında yapılan ve 8 farklı sorunun ($f(x)=ax^3$, $f(x)=ax^3+b$, $f(x)=ax^3+bx$, $f(x)=ax^3+bx^2$ $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ incelenmesini içeren bir çalışma yaprağıdır. Bu yaprakta, öğrencilerden verilen çeşitli parabol denklemlerin çözümünü ve grafiklerinin çizimini kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarında yapmaları istenmiştir. Bu çalışma yaprağı, analitik düzlemde bir noktanın hareket edişiyle oluşturduğu yolun geometrik görüntüsünün (parabol) koordinatları, öğrencilere parabol grafiklerinin kavramlarıyla ilgili yapılandırmalarını tekrar ele almak ve bu kavramları görsel olarak göstermek için tasarlanmıştır. Bu bağlamda öğrencilerin her bir soru tipine yönelik birtakım teknikler kullandığı gözlenmiştir.

Öğretmen adayları bu çalışma yaprağında, verilen fonksiyonları çözmeye ve grafiklerini çizmeye çalışırken kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarında çoğunlukla benzer enstrümanlı teknikleri kullandıkları tespit edilmiştir. Kağıt-kalem ortamındaki benzer teknikler:

- Nokta belirleme
- Grafik kaydırma
- Çarpanlara ayırma
- Türev alma
- Kök belirleme
- Yerel minimum ve yerel maksimum kavramı
- Katsayı değişikliği

Şeklinde olup, Cabri-Geometri ortamında kullanılan benzer teknikler:

- Nokta belirleme
- Dik doğru çizimi
- Koordinat ve kesişim noktası belirleme
- Ölçüm aktarım ve geometrik yer belirleme
- Grafik değişiklikleri ve katsayı analizi

dir. Üçüncü dereceden denklemler çalışma yaprağında kullanılan bu benzer teknikler bir sonraki paragraflarda grup bazında ayrıntılı olarak sunulmuştur.

4.1.3.1. birinci Grubun Üçüncü Dereceden Polinomlar Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması

Bu kısımda birinci grup öğrencilerinin Üçüncü Dereceden Polinomlar çalışma yaprağına yönelik hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı tekniklere yer verilmiştir.

Birinci Grubun Üçüncü Dereceden Polinomlar Çalışma Yaprağına Yönelik Kağıt-Kalem Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo 15'te öncelikle öğrencilerin kağıt-kalem ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 15

Birinci grubun Üçüncü Dereceden Polinomlar çalıma yaprağına yönelik Kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen adayı	Ö1	Ö2
Teknikler		
Nokta Belirleme	+	+
Çarpanlara Ayırma	+	+
Kaydırma Yapma	+	-
Orijin Simetrisi Kontrolü	-	+
Tablo Oluşturma	-	+
Kuraldan Faydalanma	+	+

Tablo 15'eki verilere göre, Ö1 ve Ö2, x değerlerine karşılık gelen y-değerlerini hesaplayarak grafikte kullanılacak noktaları belirlemiş, polinomların köklerini bulmak amacıyla ifadeleri çarpanlarına ayırmış ve polinom çözümü için −b/a, d/a gibi kök formüllerini hatırlayıp kullanmıştır. Bu süreçte, *nokta belirleme, çarpanlara ayırma ve cebirsel kurallardan yararlanma* tekniklerini etkin bir şekilde uygulamıştır. Bunun yanı sıra, grafiklerin davranışlarını analiz etmek amacıyla *işaret tablosu oluşturma* tekniğini kullanmıştır. Ayrıca, mevcut bir polinom grafiğini eksenler üzerinde belirli bir yöne kaydırarak yeni grafiği elde etme ve polinomun derecesi ile katsayılarına dayanarak simetri özelliklerini inceleme sürecinde *kaydırma ve orijin simetrisi kontrolü* tekniklerinden faydalanmıştır. Bu teknikler, öğrencilerin kağıt-kalem ortamında sahip oldukları matematiksel bilgileri görsel olarak temsil etme ve analiz etme becerilerine sahip olduğunu ortaya koymaktadır.

Birinci Grubun Üçüncü Dereceden Polinomlar Çalışma Yaprağına Yönelik Cabri-Geometri Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Birinci grubun kullandıkları teknikler Tablo 16'de verilmiştir.

Tablo 16

Birinci grubun Üçüncü Dereceden Polinomlar çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayı	Ö1	Ö2
Teknikler		
Nokta Belirleme ve Değer Atama	+	+
Grafik Çizimi ve Değer Analizi	+	+
Koordinat ve Kesişim Noktası Belirleme	+	+
Parametrelerin ve Katsayıların Gözlemlenmesi	+	+
Hesaplama Hataları ve Teknik Düzeltmeler	+	-
Grafik Değişiklikleri ve Katsayı Analizi	+	+
Geometrik Yer Belirleme ve Çözüm Geliştirme	+	+

Ö1 ve Ö2, Cabri-Geometri yazılımında üçüncü dereceden polinom denklemlerinin grafiklerini çizerken bazı teknikler uygulamış olup ve bu süreçte matematiksel bilgilerini araç üzerinde kullanmıştır. İlk olarak, katsayıların grafik üzerindeki etkilerini anlamak amacıyla *katsayı değişimi* tekniğini uygulamış, belirli katsayıları değiştirerek grafiğin kollarının genişliğini, y ekseni ile kesişim noktalarını ve genel yapısını incelemişlerdir. Daha sonra, fonksiyon grafiğini eksenler üzerinde belirli yönlere kaydırarak yeni grafikler elde etmek ve bu değişikliklerin belirlenen matematiksel ifadeye etkisini analiz etmek amacıyla *grafik değişiklikleri ve katsayı analizi* tekniğini kullanmıştır. Bu teknik, sabit terimlerin grafik üzerindeki yer değiştirme etkilerini ve katsayıların grafiğin simetri özelliklerini nasıl etkilediğini anlamalarına olanak sağlamıştır. Ek olarak, polinomun köklerini belirlemek, bu kökler üzerinden işaret tablosu oluşturmak ve köklerle ilişkili geometrik yerleri incelemek amacıyla *geometrik yer belirleme ve çözüm geliştirme* tekniklerini uygulamışlardır. Bu süreçte, köklerin işaret tablosu üzerinden görsel temsilini yapmış ve grafiklerin doğru şekilde çizilmesi için gerekli analizleri gerçekleştirmişlerdir. Ayrıca, polinomun derecesine ve katsayılarına bağlı olarak grafiğin simetrik özelliklerini ve eksenlerle kesişim noktalarını detaylı bir şekilde gözlemlemişlerdir.

Öğrencilerin bu teknikleri uygularken yazılımın sağladığı araçlardan etkin bir şekilde yararlanması, matematiksel bilgilerini Cabri-Geometri ortamında görselleştirme, analiz etme ve fonksiyon çözme becerilerini geliştirdiklerini ortaya koymaktadır.

Birinci gruptaki öğrenciler (Ö1, Ö2) üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağını inceledikten ve araştırmacının açıklamalarını dinledikten sonra çalışma yaprağındaki soruları yanıtlamaya başlamıştır. Araştırmacı öncelikle bu çalışma yaprağının konuyla ilgili bir temel matematik alan bilgisi sorusu ve yedi üçüncü dereceden fonksiyonların çözümü ve grafiklerinin çizimi ile ilgili hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında, sorudan oluştuğunu açıklamıştır. Fonksiyonlar ile ilgili soruların öncelikle kağıt-kalem ortamında çözülüp grafiğinin çizilmesi, sonrasında Cabri-Geometri ortamını inceleyerek grafiklerin çizilmesini istemiştir. Öğrenciler çalışma yapraklarındaki soruları sırasıyla 'Analitik düzlemde polinom tanımı nedir?' sorusunu yanıtladıktan sonra ($f(x)=ax^3$, $f(x)=ax^3+b$, $f(x)=ax^3+bx$, $f(x)=ax^3+bx^2$, $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$) formundaki denklemleri yani katsayıların sayısı artacak şekilde polinom fonksiyonu sorularının çözümüne başlamışlardır. Bu kısımda enstrümantal oluşum süreci aktarılırken gruptaki öğrencilerin çalışma sürecinde aralarında geçen diyalog, çalışma kağıtları ve ekranlarından kesitler aşağıda verilmiştir.

Öğrenciler, sorulara polinom tanımını yanıtlayarak başlamıştır. Ö1 ve Ö2'nin konuşmaları, polinom tanımına ilişkin bilgi düzeylerini ve kavramı nasıl anlamlandırdıklarını

ortaya koymaktadır. Ancak, Ö1 ve Ö2'nin tartışma sırasında bazı eksik ya da hatalı ifadeler kullandıkları gözlemlenmektedir.

Ö1: Analitik düzlemde polinomun tanımı nedir? Sorusunu cevaplayalım. Değişkenlerin kuvvetleri tam sayı olacak, yani kuvvetleri tam sayı olan fonksiyonlardır. Bence polinom fonksiyonun alt kümesidir.

Ö2: Değişkenlerin dereceleri tam sayı olacak.

Ö1: Emin misin o tam sayı mıydı?

Ö2: Emin değilim ama öyle yazdım.

Ö1: O zaman şöyle yazıyorum: Değişkenlerin kuvvetleri tam sayı olan fonksiyonlardır. Ayrıca polinomu fonksiyonun alt kümesi olarak yazabilirim diye düşünüyorum ben.

Ö1, analitik düzlemde polinomun tanımını sorgulamıştır ve "değişkenlerin kuvvetleri tam sayı olan fonksiyonlar" ifadesiyle genel bir çerçeve sunmaya çalışmıştır. Bununla birlikte, tanımın doğruluğundan emin olmadığını dile getirerek bu kavramı yapılandırma çabası içinde olduğu anlaşılmaktadır. Polinomu fonksiyonun bir alt kümesi olarak değerlendirme önerisi ise kavramı genelleme eğilimini göstermektedir. Ö2 ise polinomun tanımına ilişkin, değişkenlerin derecelerinin tam sayı olmasına vurgu yapmıştır. Ancak bu ifade bir tanım olmaktan çok polinomun bir özelliğini yansıtmaktadır. Ö2'nin, Ö1'in ifadesini destekleyerek tanımı genişletme çabasında bulunmaması, polinom ile ilişkili kavramalarını düşük seviyede olduğu söylenebilir.

Öğrencilerin konuşmalarından anlaşıldığı üzere, polinomun temel unsurlarını eksik bir şekilde anlamlandırdıkları görülmektedir. Bununla birlikte, Ö1'in sorgulama ve yeniden düzenleme çabası, zihinsel şemalarının polinomun bazı özelliklerini içerdiği, ancak tam bir kavramsal bütünlükten uzak olduğu anlaşılmaktadır.

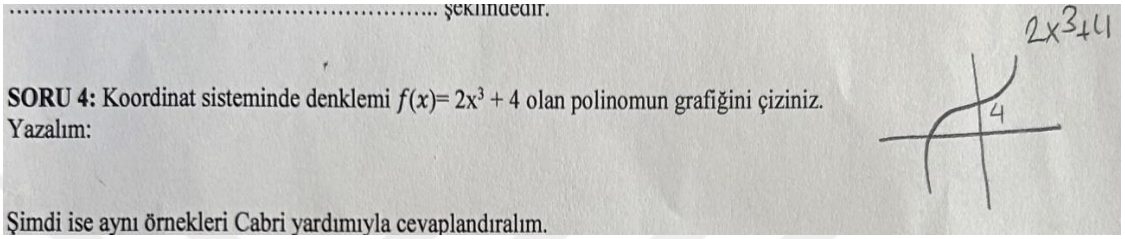
Ö1 ve Ö2, kağıt-kalem ortamını kullanarak 3. dereceden polinomların çözümü ve grafiklerin çizimi sürecinde farklı yaklaşımlar sergilemiştir. Ö1, polinomların temel davranışını zihinsel şemalarına dayanarak tahmin ederken, Ö2 daha çok sistematik bir çözüm yolu benimsemiştir. Ö1, "$f(x)=x^3$ grafiğini ezbere biliyorum zaten çizdim" diyerek temel fonksiyon grafiğini zihinsel olarak net bir şekilde kavradığını belirtmiştir. Buna karşın Ö2, "Grafiklerin şeklini biliyorum ama yine de x değişkenine değer vererek nokta belirledim ve grafiği oluşturdum" diyerek daha yapılandırılmış ve somut bir yöntem kullanmıştır.

Ö1, polinomun katsayılarının grafik üzerindeki etkilerini anlamak için kaydırma yapma yöntemine başvurmuştur. "$f(x)=2x^3+4$ denkleminin grafiğini tamamlamak için x^3 grafiğini sadece 4 birim y-ekseninde yukarıya kaydırdım" diyerek bu yöntemi uyguladığını ifade etmiştir. Ö2 ise bu tür denklemlerde daha fazla hesaplama yapmayı tercih etmiş, "$f(x)=2x^3+4x$

polinomuna gelince "bu denklemin tek fonksiyon olduğuna göre orijine göre simetriktir yazdım ve x değişkenine değerler vererek bazı noktaları belirledim" demiştir. Ö2'nin çözüm sürecinde nokta belirleme yaklaşımı, denklemin grafiğini adım adım oluşturmayı sağlasa da, bu yöntemin ilerideki denklemlerin çözümü için yanlış ya da eksik sonuçlar üretebileceğini ortaya koymaktadır. Ö1 ve Ö2'nin söz konusu denkleme ilişkin yanıtları sırasıyla şekil 71 ve 72 'da verilmiştir.

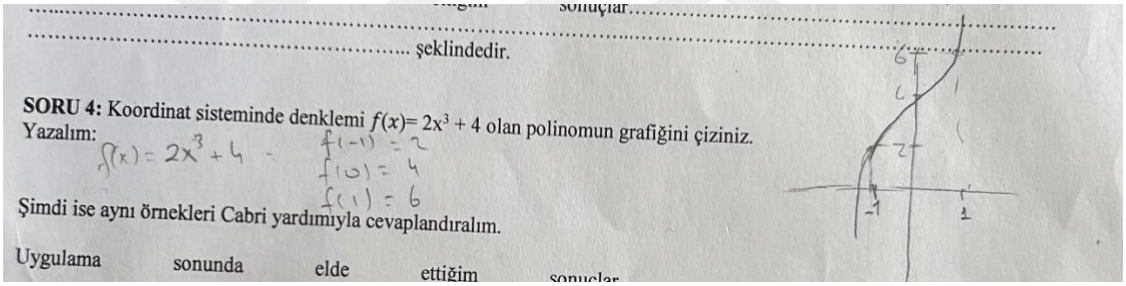
Şekil 71

Ö1'in üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağında soru 4'e yönelik yanıtı



Şekil 72

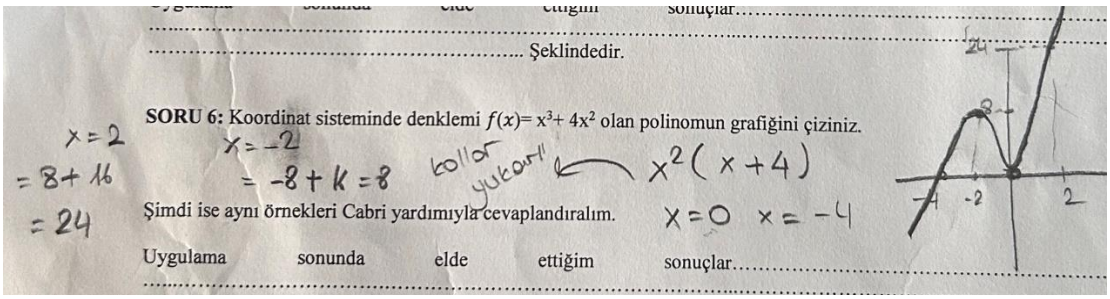
Ö2'nin üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağında soru 4'e yönelik yanıtı



Şekil 73 ve 74'te görüldüğü üzere köklerin bulunması konusunda her iki öğrenci de çarpanlara ayırma yöntemini kullanmıştır. Ö1, "f(x)=$2x^3$+4x denkleminde x'in parantezini aldım, kökleri elde ettim ve y değerlerini 24 ve −24 olarak buldum" diyerek hem kökleri belirlemiş hem de bu noktaları grafik üzerinde kullanmıştır. Ö2, "f(x)=$2x^3$+$4x^2$ fonksiyonu için x^2'nin parantezini alıyorum yani çarpanlara ayırıyorum. Öyle yapınca x=0 ve x=−4 köklerini elde ediyoruz ve işaret tablosunu çizerek grafiği çiziyorum" diyerek süreci ele almıştır.

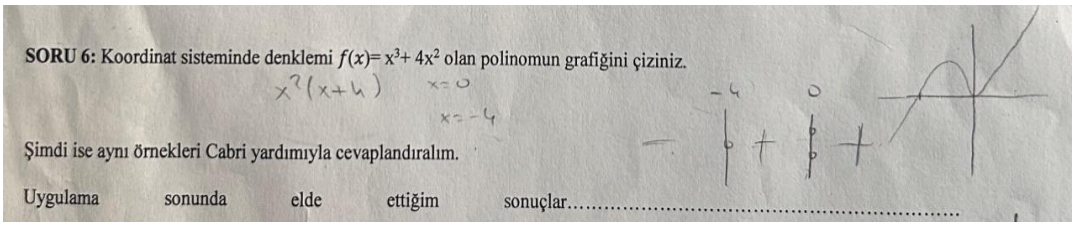
Şekil 73

Ö1'nin üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağında soru 6'ya yönelik yanıtı



Şekil 74

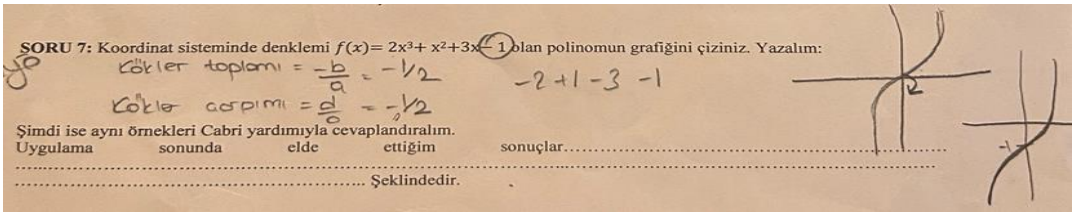
Ö2'nin üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağında soru 6'ya yönelik yanıtı



Daha fazla sayıda terime sahip olan üçüncü dereceden polinomlar için iki öğrencinin yaklaşımlarındaki farklar daha belirgin hale geldiği görülmektedir. Ö1, "Bazı polinomlar $f(x)=2x^3+x^2+3x-1$ gibi çok uzun. O yüzden çarpanlara ayırmakta zorluk çektiğimiz için bazı formüller eskiden biraz aklımda kalmış" diyerek daha önce öğrendiği bilgileri hatırlamakta zorlandığını ifade etmiştir. Polinomun köklerini bulma sürecinde ise, "Bir tane kökünü bulsam çözmeye çalışacağım ama bulamadım" diyerek yaşadığı zorlukları dile getirmiştir. Ö2 ise bu durumda devreye girerek, "Sabit değerin −1 olduğuna göre y-eksenini −1 noktasında kesiyor. Polinomun genel şeklini bildiğim için bu noktalardan geçen ve polinom şeklini sağlayan bir grafik çizdim" ifadesinde bulunmuştur. Şekil 75 ve 76'da görüldüğü üzere, bu süreçte Ö1, formülleri hatırlama ve polinom bölmesi gibi yöntemlere başvurmuş, ancak zaman zaman bu yöntemleri uygulamada zorluklar yaşamıştır. "Polinom bölmesinden dedim ki bir şeyler yapabilirim. Bir tane kökünü bulsam bir şeyler yapabilirim mesela −1 ya da 1 gibi" ifadeleri, onun denklemin köklerini bulmak için çeşitli yöntemler denediğini göstermektedir.

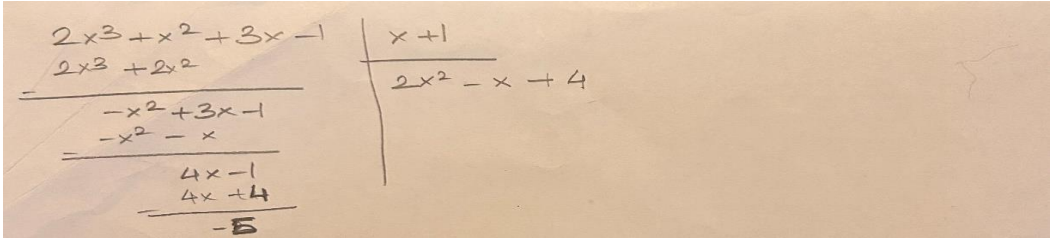
Şekil 75

Ö1'nin üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağında soru 7'ye yönelik ilk çözüm denemesi



Şekil 76

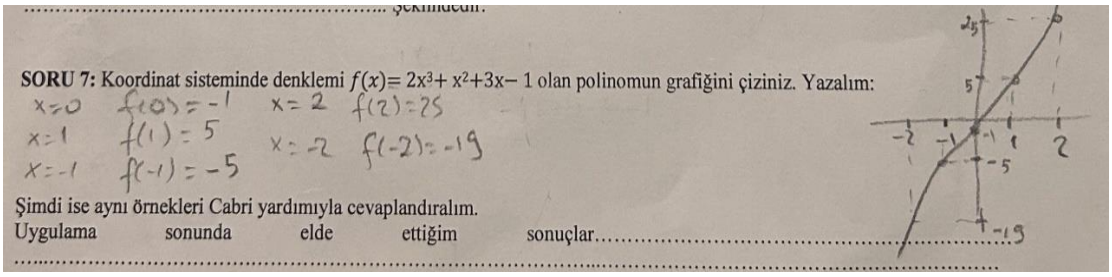
Ö1'nin üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağında soru 7'ye yönelik ikinci çözüm denemesi



Ö2 ise grafiklerin genel şeklini bildiğine göre ve x değişkenine farklı değerler vererek, eksik de olsa sahip olduğu bilgileri bir araya getirip analitik bir yaklaşım sergilemiştir. Ö2'nin Soru 7'ye yönelik yanıtı, Şekil 77'de sunulmaktadır.

Şekil 77

Ö2'nin üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağında soru 7'ye yönelik yanıtı



Sonuç olarak, Ö1 ve Ö2, kağıt-kalem ortamında 3. dereceden polinom denklemlerinin çözümü ve grafiklerinin çizimi sırasında farklı stratejiler izlemektedir. Ö1, zihinsel şemalarına dayalı olarak grafikleri ve fonksiyonları eski teorik bilgilerine ve ayrıca farklı çözüm stratejilerine göre yapmaya çalışmıştır. Ö2 ise, denklemleri adım adım çözmekte ve nokta belirleme yöntemi ile grafik oluşturmaktadır. Her iki öğrenci de enstrümantal oluşum sürecini deneyimlemiş ve polinomların cebirsel ve grafiksel temsillerini anlamlandırmaya çalışmıştır. Ö1, daha çok zihinsel şemalarına dayanarak çözüm arayışına yönelirken, Ö2 çözüm sürecinde hesaplamalı bir yaklaşımı tercih etmektedir. Bu farklılıklar, her iki öğrencinin enstrümantal oluşum sürecinin farklı bileşenlerini yansıtmaktadır. Öğrencilerin bu süreçte kullandıkları yöntemler, matematiksel düşünme tarzlarını ve polinomları çözme konusundaki bireysel farklılıklarını ortaya koymaktadır.

Ö1'in kağıt-kalem ortamında gerçekleştirdiği uygulamada, eylemdeki teoremin 'analitik düzlemde bir polinomun denklemi çözülecek ve grafiksel temsili oluşturulacak ise, köklerin bulunması ve grafik üzerinde doğru yerlerinin gösterilmesi gerektiği şeklinde olduğu anlaşılmaktadır. Bu teoremin, 'çarpanlara ayırma', 'kökler toplamı ve çarpım analizi' veya 'grafik çizme' yöntemlerinin uygulanması (örneğin, köklerin çarpanlara ayrılarak bulunması, kökler toplamının ve çarpımının katsayılara göre hesaplanması ve grafik üzerinde görsel analiz yapılması gibi yöntemler) eylemdeki kavramlarına dayandığı söylenebilmektedir. Ö2'nin kağıt-kalem ortamında gerçekleştirdiği uygulamada, eylemdeki teoremin 'analitik düzlemde bir polinomun denklemi çözülecek ve grafiksel temsili oluşturulacak ise, x değişkenine değer vererek nokta belirleme ve denklemin köklerini bulmak amacıyla çarpanlara ayırma yönteminin kullanılması gerektiği şeklinde olduğu düşünülmektedir. Bu teoremin, 'x değişkenine değer vererek nokta bulma', 'çarpanlara ayırma' veya 'işaret tablosu oluşturma' yöntemlerinin

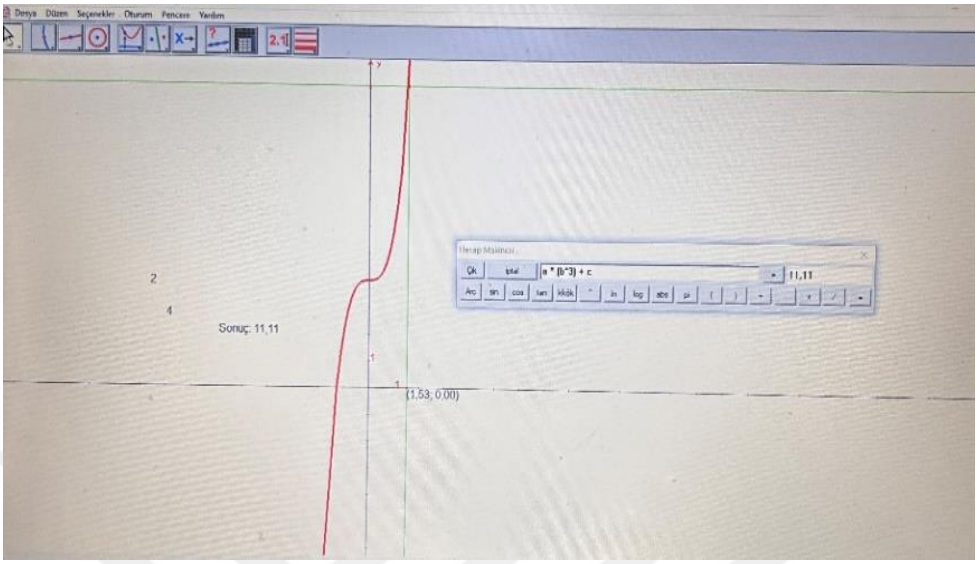
uygulanması (örneğin, kökleri bulmak için çarpanlara ayırma, işaret tablosu ile köklerin işaretlerinin belirlenmesi ve grafik üzerinde nokta belirleyerek çizim yapma gibi teknikler) eylemdeki kavramlarına dayandığı söylenebilmektedir.

Cabri-Geometri ortamında Ö1 ve Ö2, Cabri-Geometri ortamını kullanarak 3. dereceden polinomların denklemlerini çözmeye ve grafiklerini çizmeye çalışırken bu dinamik geometri ortamını bir enstrüman olarak kullanmaktadır. Bu süreçte, polinom fonksiyonların çözümünün ve grafiklerinin dinamik geometri ortamı aracılığıyla temsiline yönelik bir öğrenme deneyimi gerçekleştirilmiştir. Öğrenciler, polinomlarla ilgili kavramsal bilgilerini, Cabri-Geometri'nin sunduğu araçlarla birleştirerek farklı yaklaşımlar sergilemiştir. Ö1 ve Ö2, Cabri ortamında 3.dereceden polinomların çözümüne yönelik çalışmalarına başlarken belirli problemlerle karşılaştırılmıştır. Ö1, başlangıçta $f(x)=x^3$ grafiğini çizme sürecinde nokta belirleme yaklaşımını kullanarak grafiği oluşturmayı denemiştir: "x ekseninde reel sayı olarak bir nokta belirledim. Sayı olarak da 1 belirledim, hesap makinesinde işliyorum." Ancak bu süreçte bazı hatalar ortaya çıkmıştır. Ö2, Ö1'in hata kaynağını şu sözlerle ifade etmiştir: "Çünkü sayıya değil de metine tıklıyorsun." Bu durum, her iki öğrencinin Cabri ortamındaki araç kullanım şemalarının oluşum sürecinde eksiklerini fark etmelerini sağlamaktadır. Bir sonraki soruya geçince, Ö1, "Şimdi $f(x) = 2x^3$ için sayı olarak 2 atamak istiyorum," diyerek polinom grafiğini oluşturma sürecine devam etmiştir. Ö2 ise daha pratik bir çözüm önerisinde bulunarak, "Bence ayrı ayrı sayı atamak yerine az önce atadığın 1 sayısı vardı, onu 2 olarak değiştirsen," diyerek sayısal değişkenleri düzenli bir şekilde kullanmayı önermekle beraber dinamik ortamın sunduğu avantajları ortaya koymaktadır. Bu süreçte Ö2'nin yönlendirmeleri, Ö1'in Cabri-Geometri ortamındaki enstrümantal oluşumunu desteklemiştir.

Daha sonra, Ö1, $f(x)=2x^3+4$ polinomu üzerinde çalışırken yine x değişkenine değer vererek nokta belirleme ve bunu grafik üzerine aktarma yöntemini uygulamıştır. "Şimdi $f(x)=2x^3+4$'ü yapalım. 2 sayısı var zaten, bir de 4 atayalım. Hesap makinesine geliyorum. 2 çarpı x üstü 3 artı 4 eşittir 11 çıktı. Şimdi ölçüm aktarım yapacağız. Evet, aktardık," diyerek dinamik ortamda izlediği adımları açıklamıştır. Ö2 ise grafiksel temsili oluşturma sürecini, "Şimdi dik doğruları da çizelim ve doğruları kesiştirelim. Geometrik yerini elde ettik. Doğru bir şekilde çizdik," ifadesiyle tamamlamıştır. Söz konusu polinomun grafiğine ilişkin Ö1 ve Ö2 tarafından oluşturulan grafikler, sırasıyla Şekil 78 ve Şekil 79'da yer almaktadır.

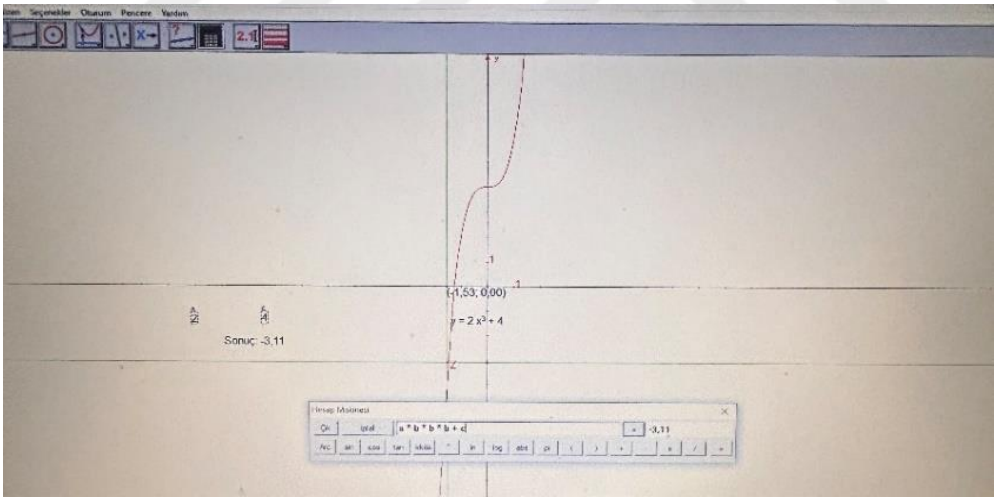
Şekil 78

Ö1'in üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Şekil 79

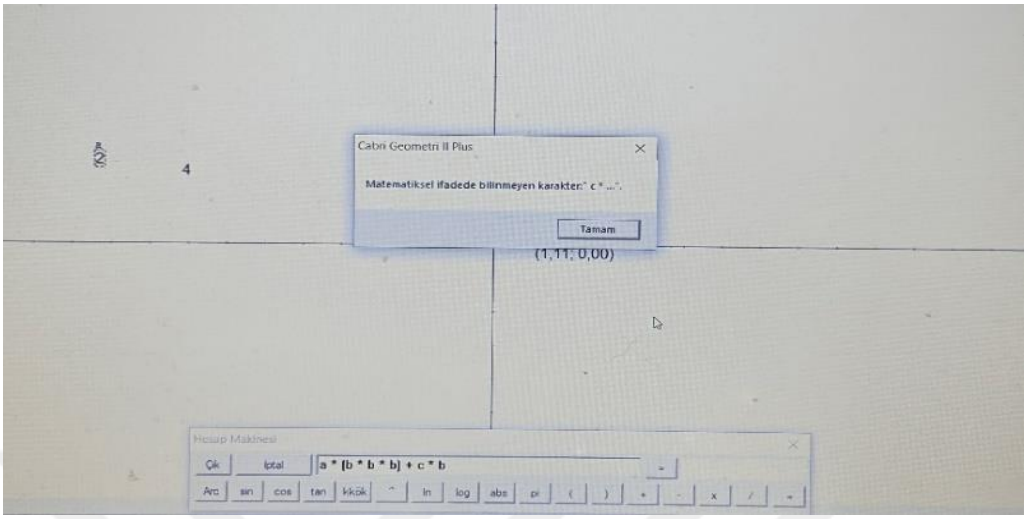
Ö2'nin üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Öğrenciler, grafiklerde meydana gelen sürekli değişimleri gözlem yaparak analiz etmiştir. Şekil 80'de görüldüğü üzere, Ö1, $f(x)=2x^3+4x$ polinomu çözmeye çalışırken hesap makinesi aracını kullanarak, "2 sayısı çarpı x^3 artı 4 çarpı x, sonuç vermedi ya. Bilinmeyen c sayısı diyor. Herhalde yine sayıya değil de bir metine tıklamışsın." diyerek fonksiyonu çözüm sürecinde hesap makinesi aracının yanlış veya hatalı olarak kullanımını, sonrasında "Ölçüm aktarım aracı, sonra dik doğrular aracını aç, dik doğruları çiz. Kesişme noktasını belirledik. Geometrik yer diyelim ve grafiği belirleyelim," diyerek Cabri'nin araçları yardımıyla grafiği oluşturma ve analiz etme sürecini göstermiştir.

Şekil 80

Ö1'in üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik grafik çiziminde araç kullanımıyla ilgili teknik hatalar yapıldığına ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Ö2, aynı polinom üzerinde analitik bir yaklaşımla gözlem yapmıştır: "Değişkenlerin katsayıları arttıkça grafiğin kolları y eksenine yaklaşır. Bu a, b, ve c için geçerlidir. Bu gözlemler doğrultusunda oluşturulan grafik şekil 81'de verilmiştir. d katsayısı için durum farklı, o y eksenindeki hareketi gösteriyor." Ayrıca, Ö2, $f(x)=2x^3+4$ polinomunu çözerken, "Dördüncü soruda sabit sayı 4, y ekseni üzerinde hareketi sağlıyor," diyerek gözlemlerini ifade etmiştir.

Şekil 81

Ö2'nin üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağında katsayıların grafiğe etkisine yönelik ekran kaydından bir kesit.



Ö1, Cabri-Geometri ortamında $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ polinomunu çözmek ve grafiğini çizmek üzere çalışmaya başlamıştır, süreci adım adım yürütürken bazı teknik zorluklarla

karşılaşmakta olup bazı kavramsal bilgiler edinmektedir. İlk olarak, Ö1 a,b,c,d katsayıları için başlangıç değerlerini 1 olarak, atamış ve bu sürecin işleyişiyle ilgili "Bence bu Cabri-Geometri programı geliştirmeli. Çünkü a,b,c katsayı isimlerini metin olarak atadık, sonra sayıları bunların yanına getirdiğimizde bunu a=1 anlaması garip bence. Baştan metinde o zaman a=1 yazsaydık." Yorumunda bulunmuştur. Bu ifadeyle, Ö1'ın Cabri-Geometri ortamında değişkenlerin sayılarla ilişkilendirilmesi ve bu ilişkilerin nasıl işlediğini kavrama çabasını ifade etmektedir. Ayrıca, Ö1'in Cabri-Geometri ortamının kısıtlamalarını göz ardı ederek, programı kendi beklentilerine göre yeniden yapılandırmaya yönelik bir tutum sergilediğini göstermektedir. Bu durum, yaşanan sürecin enstrümantalizasyon süreci olarak değerlendirilebileceğini ortaya koymaktadır.

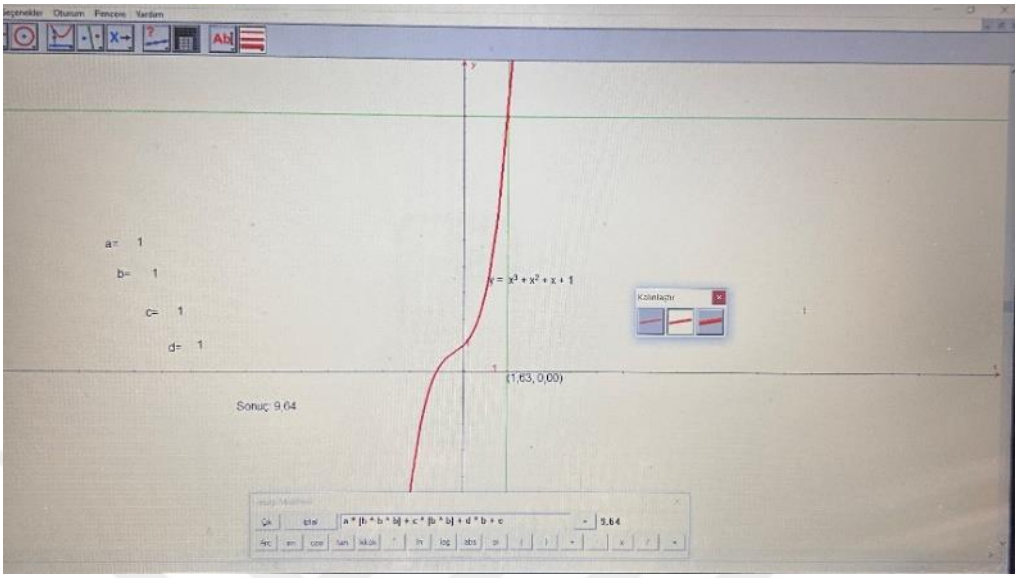
Süreç ilerledikçe Ö1, nokta seçimi ve hesaplama adımları arasında bağlantılar kurarak grafiği oluşturma aşamasına geçmiş ve süreci şu şekilde ifade etmiştir: "Şimdi biz a,b,c metinlerini atadık, sayılarımızı 1, 1, 1, 1 olarak belirledik. Şimdi nokta seçelim. Denklem ve koordinat aracından koordinatını yazdık. Hesap makinesine geçelim. $a \cdot x^3+b \cdot x^2+c \cdot x+d$ eşittir. Hmm... x noktasını küçültelim. Şimdi sonucu y eksenine aktaralım. Şimdi y noktalardan dik doğrular çizelim. Çizdik. Kesişim noktasını oluşturduk. Şimdi geometrik yerini oluşturalım." Bu adımları uygularken, Ö1, Cabri-Geometri ortamındaki araçların kullanımına ilişkin bir kavrayış problemi yaşadığını ifade etmiştir:

"Ben bu arada bir şeyi yanlış anlamışım. Hesap makinesinde yazarken biz ax^3+bx^2+cx+d yazacağız ya, ben bunu hesap makinesine yazarken a'ları yazacağız zannediyordum. Hal bu ki onlar metin 1'leri girmemiz lazım. Sonra buradan sayıları değiştirdiğimizde grafiğimiz ve denklemimiz değişiyor." Bu süreçte Ö1, değişkenlerin ve hesap makinesi aracının birbirleriyle ilişkisini anlamlandırmaya çalışmaktadır. Katsayıları değiştirerek grafikteki değişimleri gözlemlemesi, araçların işlevlerini deneyerek öğrenme ve anlamlandırma sürecine işaret etmektedir.

Ö1'in bu süreçteki deneyimleri değerlendirildiğinde, hem enstrümantalizasyon hem de enstrümantasyon sürecine yönelik elemanlara raslanmaktadır. Enstrümantasyon sürecinde, Ö1'in Cabri-Geometri araçlarını kullanımına dair teknik beceriler geliştirdiği görülmektedir. Ancak enstrümantalizasyon süreci de bu bağlamda devreye girmektedir; Ö1, araçların işlevselliğini sorgulamakta ve bunları anlamlandırarak kavramsal bir bağ kurmaya çalışmaktadır. Sonuç olarak, Ö1'in bu çalışma süreci, enstrümantalizasyonun sürecinin enstrümantasyon süreci ile bütünleştiği bir enstrümantal oluşum süreci olarak değerlendirilebilir. Ö1'in bu süreçte üçüncü dereceden polinomun Cabri-Geometri'de genel denklemi ait oluşturduğu grafik şekil 82'de verilmektedir.

Şekil 82

Ö1'in üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik polinomun genel formunun garfiğine ilişkin ekran kaydından bir kesit



Ö1 ve Ö2'nin Cabri ortamında gerçekleştirdiği üçüncü dereceden polinom çözüm süreci, enstrümantal oluşum açısından önemli ipuçları sunmaktadır. Ö1, başlangıçta temel araçları keşfetme ve doğru kullanma yönünde ilerlerken, Ö2'nin yönlendirmeleri bu süreci desteklemiş ve geliştirmiştir. Süreç boyunca matematiksel kavramlar, grafik analizleri ve Cabri-Geometri araçlarının entegrasyonu, öğrencilerin plinom fonksiyonların çözümü ve grafik çizme yaklaşımlarını daha somut ve görsel temelli bir hale getirmektedir. Ö1 ve Ö2'nin, kağıt-kalem ortamında polinom fonksiyonlarının grafiğini çizmek için dayandıkları "kökleri cebirsel olarak hesaplama ve analitik düzlem üzerinde yerlerini belirleme" işlevsel sabitinin, Cabri-Geometri ortamında "dinamik nokta belirleme, katsayıların grafiksel etkilerini analiz etme ve geometrik yer oluşturma" işlevsel sabitine dönüştüğü görülmektedir. Şekil 83'te Ö1 ve Ö2'nin enstrümantal oluşum sürecinde geçtikleri aşamalar enstrümantason sürecinin bir özeti olarak gösterilmektedir.

Şeki 83

Ö1 ve Ö2'nin üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik çözüm süreçlerinin şematik gösterimi



Şekil 83'teki bilgiler, üçüncü dereceden polinomların çözüm ve grafik çizim sürecinde enstrümantasyon sürecini yansıtmaktadır. Süreç, polinom kavramının temel bileşenlerinin incelenmesiyle başlamaktadır. Bu aşamada, polinomun derecesi, katsayıları ve genel yapısı ele alınarak fonksiyonun temel özellikleri analiz edilmektedir. Sonraki aşamada, kağıt-kalem ortamında matematiksel işlemler gerçekleştirilmekte ve bu süreçte çarpanlara ayırma, kök belirleme ve grafik çizimi için kritik noktaların bulunması gibi teknikler uygulanmaktadır. Öğrenciler, bu aşamada polinom fonksiyonlarının temel matematiksel özelliklerini anlamlandırmaya çalışmaktadır. Daha sonra, Cabri-Geometri ortamına geçilerek, fonksiyonların grafiksel temsilleri oluşturulmakta ve katsayı değişimlerinin grafik üzerindeki etkileri dinamik olarak gözlemlenmektedir. Bu aşamada, öğrenciler polinom grafiklerinin geometrik yerini belirleyerek fonksiyonların davranışlarını analiz etmektedir. Ardından, fonksiyonların analitik ve grafiksel doğrulamaları gerçekleştirilmekte, farklı temsiller arasındaki ilişkiler incelenmekte ve grafiksel gözlemler cebirsel işlemlerle desteklenmektedir. Bu süreç, öğrencilerin fonksiyonların farklı temsilleri arasındaki bağlantıları kurmasını sağlamaktadır.

Son aşamada, cebirsel ve grafiksel temsillerin bütünleştirilmesi sağlanarak, öğrencilerin polinom fonksiyonlarını kavramsal olarak anlamlandırması hedeflenmektedir. Bu süreç, yalnızca matematiksel araçların kullanımını değil, aynı zamanda öğrencilerin matematiksel düşünme biçimlerini geliştirmelerini de içermektedir. Bu bağlamda, grafik, üçüncü dereceden polinomların çözüm sürecinde öğrencilerin matematiksel kavrayışlarını nasıl geliştirdiklerini ve Cabri-Geometri'nin araçlarının öğrenme sürecindeki rolünü göstermektedir.

4.1.3.2. İkinci Grubun Üçüncü Dereceden Polinomlar Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Bu kısımda İkinci grup öğrencilerinin üçüncü derecedemn polinomlar çalışma yaprağına yönelik hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı tekniklere yer verilmiştir.

İkinci Grubun Üçüncü Dereceden Polinomlar Çalışma Yaprağına Yönelik Kağıt-Kalem Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo 17'de öncelikle öğrencilerin kağıt-kalem ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 17

İkinci grubun üçüncü dereceden polinomlar çalıma yaprağına yönelik Kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretme Adayı	Ö3	Ö4
Teknikler		
Nokta Belirleme	+	+
Grafik Kaydırma	+	+
Çarpanlara ayırma	+	+
Türev Alma	+	-
Kök Belirleme	+	+
Yer Minimum ve Yerel Maksimum Kavramı	+	-
Katsayı değişikliği	+	+

Tablo 17'deki verilere göre, Ö3 ve Ö4, x değerlerine karşılık gelen y-değerlerini zihinsel olarak grafikte kullanılacak noktaları belirlemiş, polinomların köklerini bulmak amacıyla ifadeleri çarpanlarına ayırmıştır. Bu süreçte, *nokta belirleme*, *çarpanlara ayırma* ve cebirsel kurallardan *kök belirleme ve türev alma* tekniklerini etkin bir şekilde uygulamıştır. Bunun yanı sıra, grafiklerin davranışlarını analiz etmek amacıyla *katsayı değişikliği* tekniğini kullanmıştır. Ayrıca, mevcut bir polinom grafiğini eksenler üzerinde belirli bir yöne kaydırarak, *grafik kaydırma* tekniğinden faydalanmış olup x^2'nin katsayısını değiştirdiğinde tepe noktası kavramı yerine *yerel maksimum ve minimum kavramlarını* doğru bir şekilde kullanmıştır.. Bu teknikler, öğrencilerin kağıt-kalem ortamında sahip oldukları matematiksel bilgileri görsel olarak temsil etme ve analiz etme becerilerine sahip olduğunu ortaya koymaktadır.

İkinci Grubun Üçüncü Dereceden Polinomlar Çalışma Yaprağına Yönelik Cabri-Geometri Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

İkinci grubun kullandıkları teknikler Tablo 18'de verilmiştir.

Tablo 18

İkinci grubun üçüncü dereceden polinomlar çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayı	Ö1	Ö2
Teknikler		
Nokta belirleme	+	+
Dik doğru çizimi	+	+
Koordinat ve Kesişim Noktası Belirleme	+	+
Ölçüm Aktarım ve Geometrik Yer Belirleme	+	+
Grafik Değişiklikleri ve Katsayı Analizi	+	+

Ö3 ve Ö4, Cabri-Geometri ortamında üçüncü dereceden polinomların çözümünü yapıp grafiklerini çizerken bazı teknikler uygulamıştır. Ö3 ve Ö4, polinom grafiklerini oluştururken *nokta belirleme, dik doğru çizimi, ölçüm aktarım ve geometrik yer belirleme, koordinat ve*

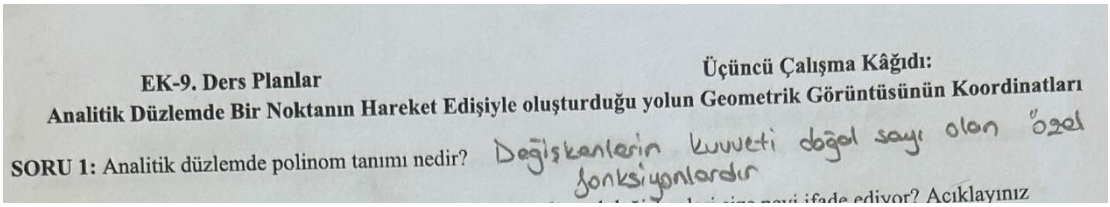
kesişim noktası belirleme tekniklerini kullanarak grafiklerin oluşum sürecini yönetmiş ve fonksiyonun belirli katsayılarla nasıl değiştiğini analiz etmek amacıyla *katsayı analizi* yapmaktadır. grafiklerin x ve y eksenini kestiği noktaları belirleyerek grafiklerin konumlarını değerlendirmiş, polinom grafiklerinin farklı durumlarını gözlemlemek için *grafik değişiklikleri* tekniğini kullanmıştır. Ayrıca, konvekslik ve konkavlık özelliklerini anlamak amacıyla analizlerini detaylandırmış ve bu süreçte farklı teknikleri bir arada kullanarak görselleştirme sürecini desteklemiştir. Bu bilgilerden yola çıkarak, ikinci grubun Cabri-Geometri ortamında gerçekleştirdiği çalışma, polinomların grafiksel temsillerini daha derinlemesine anlamlandırmasına katkı sağladığı düşünülmektedir.

İkinci gruptaki öğretmen adayları (Ö3, Ö4) üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağını inceledikten ve araştırmacının açıklamalarını dinledikten sonra çalışma yaprağındaki soruları yanıtlamaya başlamıştır. Araştırmacı öncelikle bu çalışma yaprağının konuyla ilgili 1 temel matematik alan bilgisi sorusu ve 7 üçüncü dereceden fonksiyonların çözümü ve grafiklerinin çizimi ile ilgili hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında, sorudan oluştuğunu açıklamıştır. Polinomlar ile ilgili soruların öncelikle kağıt-kalem ortamında çözülüp grafiğinin çizilmesi, sonrasında Cabri-Geometri ortamını inceleyerek grafiklerin çizilmesini istemiştir. Öğrenciler çalışma yapraklarındaki soruları sırasıyla 'Analitik düzlemde polinom tanımı nedir?' sorusunu yanıtladıktan sonra ($f(x)=ax^3$, $f(x)=ax^3+b$, $f(x)=ax^3+bx$, $f(x)=ax^3+bx^2$, $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$) formundaki denklemleri yani katsayıların sayısı artacak şekilde polinom fonksiyonu sorularının çözümüne başlamışlardır. Ancak diğer çalışma yapraklarından farklı olarak, her iki öğrenci de kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarını ardışık olarak değil, birbirini destekleyecek şekilde eş zamanlı kullanmıştır. Grafik çizim ve analiz süreçlerinde, kağıt-kalem ortamında yaptıkları işlemleri Cabri-Geometri ortamında doğrulamış veya genişletmiş, bazı durumlarda ise Cabri-Geometri'de elde ettikleri görselleştirmeleri kağıt-kalem ortamında yorumlayarak çözümlerini geliştirmişlerdir. Bu dinamik kullanım, kavramları daha derinlemesine anlamlandırmalarına ve farklı temsiller arasında geçiş yaparak grafiklerin özelliklerini daha kapsamlı bir şekilde incelemelerine olanak sağladığı düşünülmektedir.

Sürecin başında polinomun tanımı üzerine konuşmuşlar ve Ö3, "Değişkenlerin kuvveti doğal sayı olan özel fonksiyonlardır." ifadesini kullanarak genel bir tanım yapmıştır. Ö4 ise bu tanımı geliştirerek, "a çarpı b üzeri n ($a.b^n$) şeklinde ifade edilen terimlerin toplamıdır. n pozitif tam sayı, polinomun katsayılarını ifade eder." diyerek polinomların yapısına vurgu yapmıştır. Bu diyaloğun ardından grup doğru tanımıyla ilgili soruyu şekil 84 ve 85'te görüldüğü üzere yanıtlamıştır.

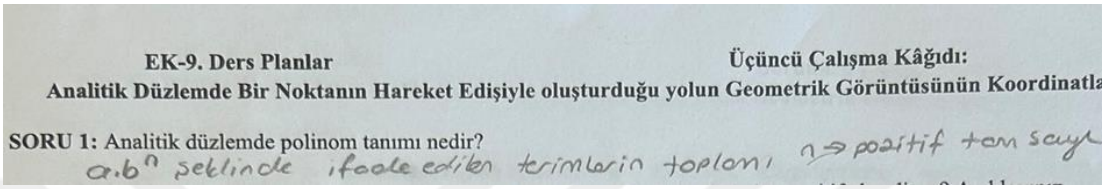
Şekil 84

Ö3'ünüçüncü.derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik polinom tanımına ilişkin yanıtı



Şekil 85

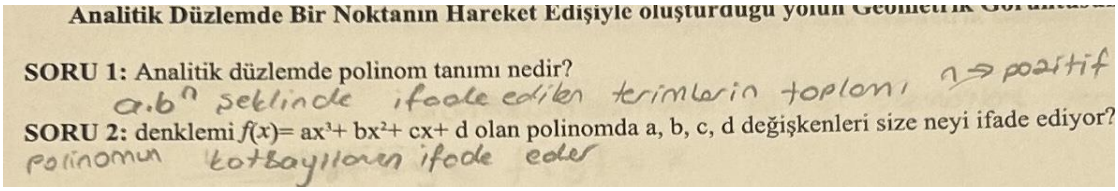
Ö4'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik polinom tanımına ilişkin yanıtı



İkinci soruda $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ şeklinde olan polinomun katsayılarıyla ilişkili özellikler istenmiştir. Ö3, "a baş katsayıdır, b sabittir" diyerek sadece a ve b katsayılarına değinerek denklemdeki katsayıları kısmi olarak tanımlamış ve grafiğin şekli üzerindeki etkilerini eksik bırakmıştır (Şekil 86). Ö4 ise sadece "polinomun katsayılarını ifade eder" diyerek katsayıların fonksiyonun grafiği üzerindeki etkisini detaylandırmadan açıklama yapmıştır (Şekil 87). Bu tanımlamalar, öğrencilerin zihinsel şemalarında polinom kavramının cebirsel ifadelerle ilişkili olarak yapılandığını göstermektedir. Ancak bu zihinsel şemaların, katsayılar ve terimlerle ilgili detayları içermediği, dolayısıyla derinlemesine bir kavrayış sunmadığı görülmektedir.

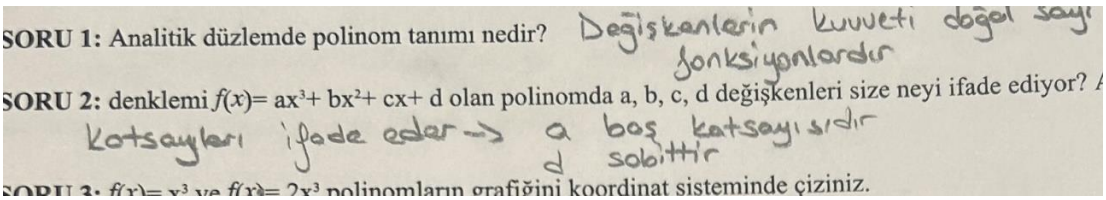
Şekil 86

Ö3'ün üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik polinom katsayılarına ilişkin yanıtı



Şekil 87

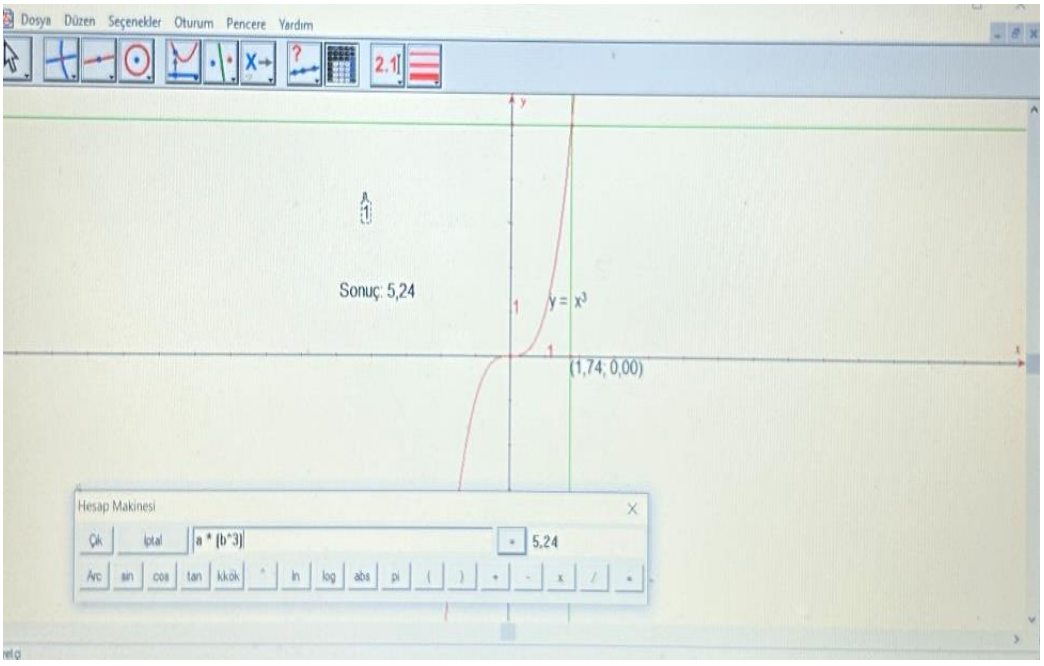
Ö4'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik polinom katsayılarına ilişkin yanıtı



Ö3, üçüncü soruda kağıt-kalem ortamında $f(x)=x^3$ polinomunu çizme sürecinde önceden bildiği cebirsel bilgilerini kullanarak, değer verme tekniğini kullanmıştır ve "Orijinden geçen, 1 verince 1 sonucunu veren bir polinom çiziyorum. $f(x)=2x^3$ için de aynı şekilde yine sıfır verince 0 ve 1 verince 2 oluyor. Yine $f(x)=x^3$'e benzer bir polinom çiziyorum." ifadesiyle cebirsel bir temsil oluşturmuştur. Ö4 ise bu sürecin ardından, "Şimdi Cabri-Geometri'de de çizelim." diyerek dinamik ortamı kullanma yönünde bir yönlendirme yapmıştır. Cabri-Geometri ortamında, Ö3 önce koordinatları belirlemiş, "Önce koordinatları göster aracıyla koordinatları açıyorum hemen. Reel sayı olarak x ekseninde bir reel sayı tanımlıyorum." diyerek süreci başlatmıştır. Daha sonra, "Sayı aracından belirliyorum 1 olarak. Şimdi hesap makinesinde yazacağım." diyerek Cabri-Geometri'nin hesap makinesi aracını kullanmıştır. Sürecin devamında, "Hesap makinesinde belirlediği 1 sayısı çarpı x ekseninde belirlediğim bu sayının küpü. Evet, sonucu elde ettik, sürüklüyorum sayfaya." diyerek sonucu oluşturmuştur. Bu noktada Ö4, sürecin devamını yönlendirmiş ve "Ölçüm aktarım aracını kullanacağız." demiştir. Ö3 ise ölçüm aktarım aracını kullanarak, "Ölçüm aktarım diyorum, sonucu y eksenine aktarıyorum, dik doğruları çiziyorum. Kesişim noktamı belirledim. Şimdi geometrik yer diyeceğiz. Önce Z yani kesişim noktası, sonra x noktasına tıklıyorum, grafik oluştu." diyerek adım adım süreci takip etmiş ve grafiği oluşturmuştur. Ö3 ve Ö4'ün oluşturdukları grafikler sırasıyla şekil 88 ve 89'da verilmiştir.

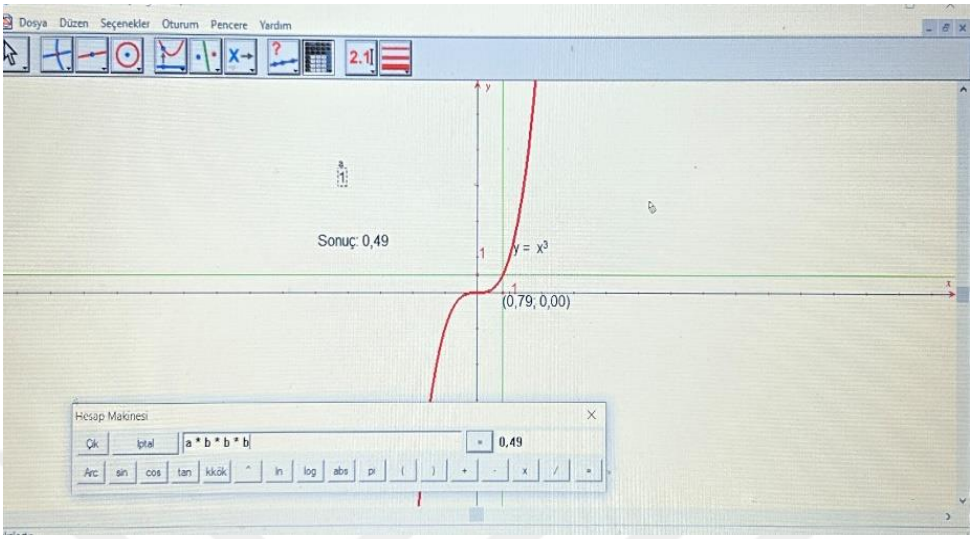
Şekil 88

Ö3'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Şekil 89

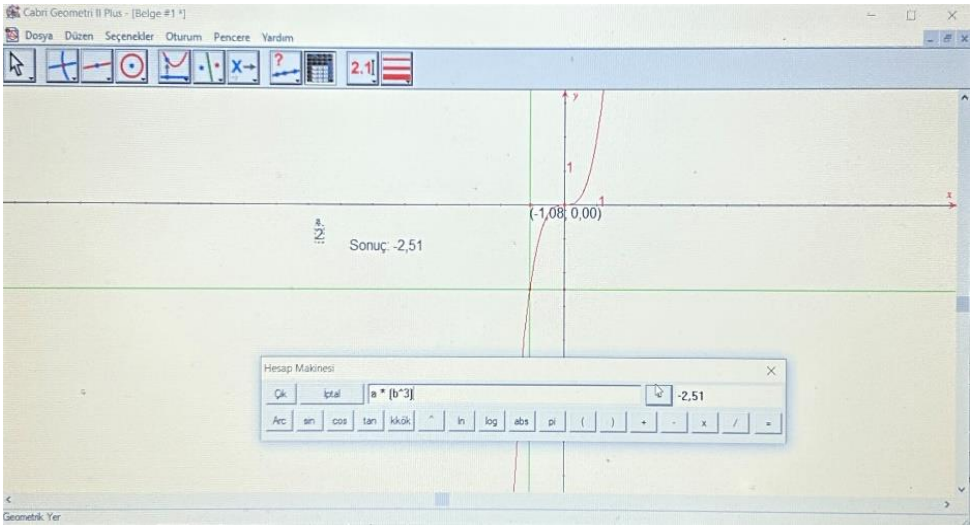
Ö4'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Ö3 ve Ö4, katsayı değişiminin grafik üzerindeki etkisini gözlemleme sürecine geçtiklerinde, Ö4, "Şimdi $f(x)=2x^3$ polinomunu çözelim. Belirlediğimiz 1 sayısını 2 yap, sonra yine aynı işleme devam edelim. Ne oldu şimdi, polinom daraldı mı?" diye sormuştur. Ö3 ise grafiğin y eksenine yaklaştığını fark ederek, "Evet, grafik y eksenine yaklaştı." yanıtını vermiştir. Bu gözlem üzerine Ö4, "O zaman yazıyoruz ki burada x^3 polinomunun grafiğinde katsayıyı 1 aldık, daha sonra katsayıyı arttırdıkça y eksenine yaklaştığını gözlemledik." diyerek bulgularını ifade etmiştir. Ö3 ve Ö4'ün oluşturdukları grafikler sırasıyla şekil 90 ve 91'de verilmiştir.

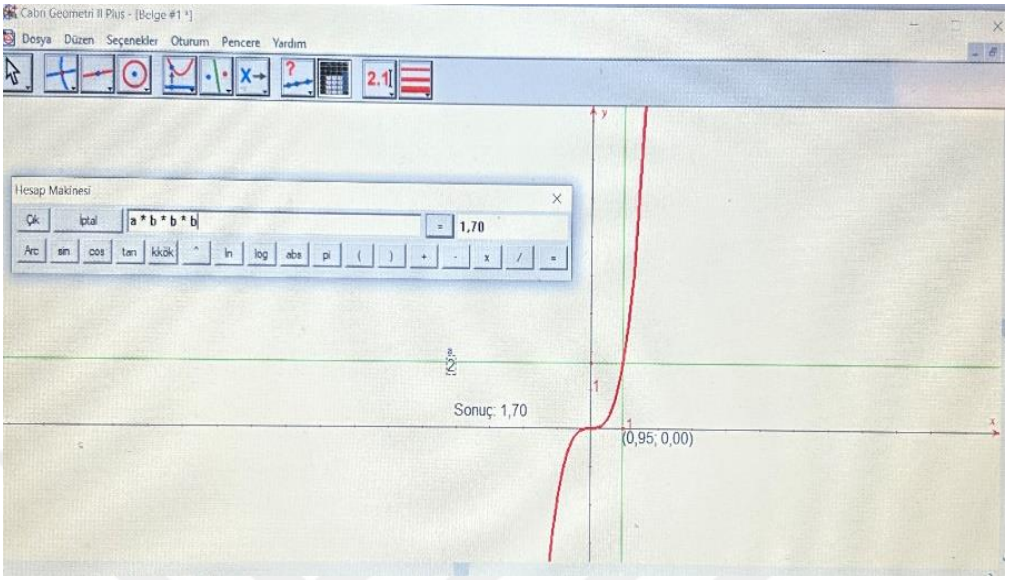
Şekil 90

Ö3'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Şekil 91

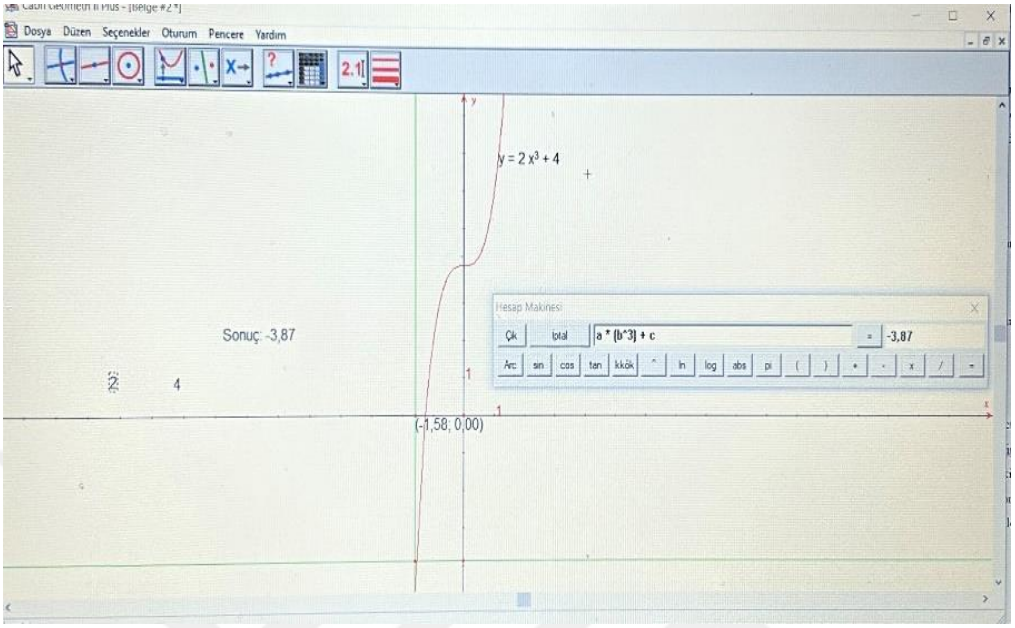
Ö4'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Bir sonraki aşamada, Ö4, "Soru 3'te f(x)=$2x^3$+4 polinomunu çözmemiz lazım. Yine aynı yukarıdaki polinomlar gibi sadece bu polinom y eksenini 4 noktasında kesiyor." Diyerek kağıt-kalem ortamında çözüm sürecinde önemli bir uygulama yapmadan, eski teorik bilgilerine dayanarak uygulamaya başlamış ve grafiğin dikey yönde ötelemesini anlamlandırmaya çalışmıştır. Ö3 ise, kağıt-kalem ortamında çözüme gerek duymadan "Evet ben de o şekilde çizdim. Cabri-Geometri'de çizdiğimizde iki tane sayı atayacağım." diyerek süreci devam ettirmiştir. Ö4, "Evet, 2 ve 4 olarak. Şimdi hesap makinesinde $2x^3$+4 işlemini yapacağız. Sonucu sürükle sayfaya. Eksene aktar, ölçüm aktarım aracıyla. Dik doğruları çiz, kesişim noktayı belirledim." şeklinde detaylı yönergeler vererek süreci enstrümantal oluşum süreci yönünde yönlendirmiştir. Ö3 ve Ö4'ün bu polinom ile ilgili yanıtları şekil 92 ve 93'te verilmiştir.

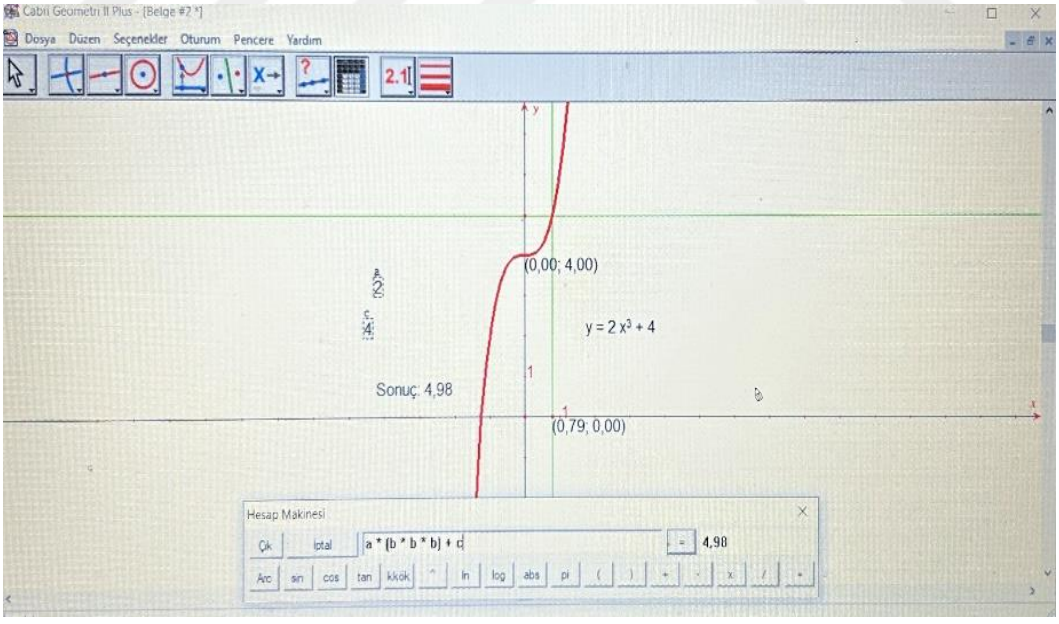
Şekil 92

Ö3'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik soru 4'e ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Şekil 93

Ö4'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik soru 4'e ilişkin ekran kaydından bir kesit.

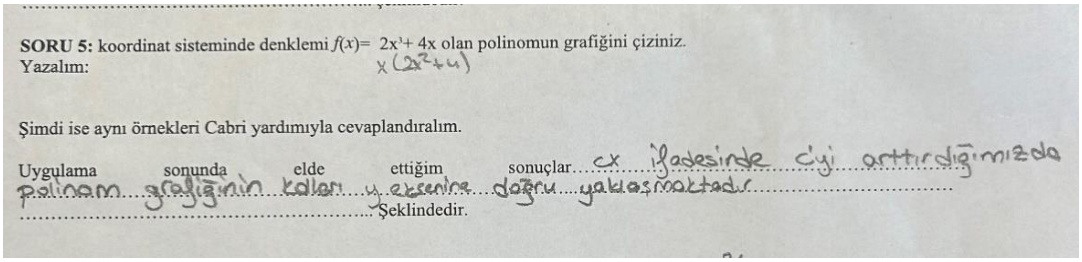


Öğrenciler, katsayıların değişim etkisini daha derinlemesine anlamak için dördüncü soruya geçtiklerinde, Ö3, "Şimdi beşinci soruda $y=2x^3+4x$ polinomunu yapalım. x'in parantezini alalım. Evet, bu da orijinden geçiyor." diyerek çözüm sürecini başlatmıştır (Şekil 94). Ö4 ise "Köklerini bulmamız lazım çözmek için. Parantezini alınca $x(2x^2+4)=0$ oluyor,

buradan da sadece x=0 değeri çıkıyor." diyerek cebirsel bir analiz yapmıştır. Ö4'ün bu soru ile ilgili kağıt-kalem ortamındaki yanıtı şekil 95'te verilmektedir.

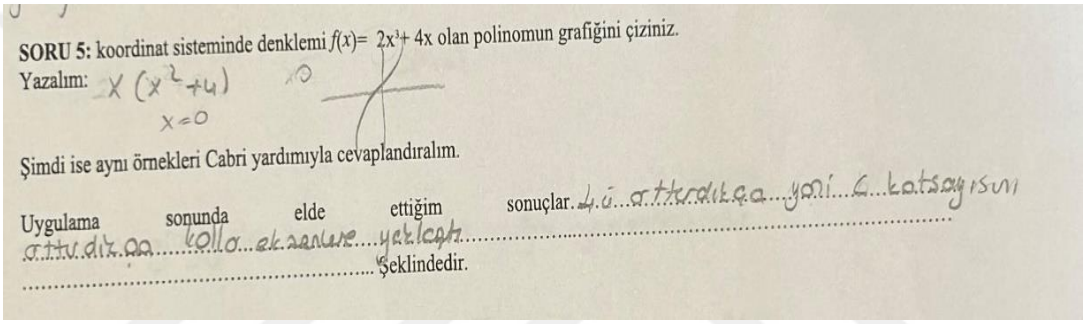
Şekil 94

Ö3'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik soru 5'e ilişkin yanıtı.



Şekil 95

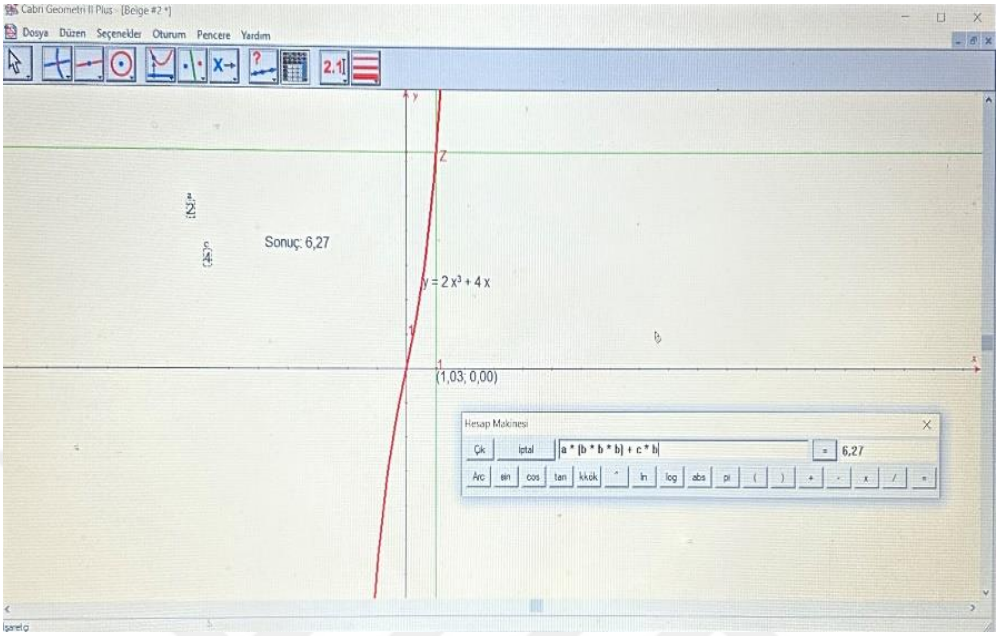
Ö4'ün üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik soru 5'e ilişkin yanıtı.



Cabri-Geometri ortamında süreci devam ettiren Ö3, "2 ve 4 sayılarını belirledim. x noktası aynı kalsın yine. Şimdi sayı çarpı x'in küpü artı sayı çarpı x. Sonucu taşıyorum. Aktardım y eksenine. Dik doğruları çizdim ve kesişim noktasını aldım ve geometrik yer diyorum ve grafiği oluşturuyorum." diyerek adım adım süreci takip etmiştir. Ö4, sürecin sonucunu sorgulayarak, "Şimdi bunun önceki sorudan farkı ne?" diye sormuş ve grafik üzerinde belirgin bir değişiklik olmadığını düşünerek, "Grafik aşağıya iniyor, bir değişiklik olmuyor ki." ifadesini kullanmış, ancak Ö3, "Hayır, değişiyor. Kıvrımı değişiyor." diyerek gözlemini belirtmiştir. Öğrenciler, polinomun yerel maksimum ve minimum noktalarını belirleme sürecinde Ö4, "Katsayıları arttırınca azaltınca ne oluyor? $2x^2$ 'nin katsayısı değişince tepe noktası değişiyor." diyerek süreci sorgulamış, Ö3 ise "Polinomda tepe noktası diyemezsin ki, yerel maksimum ve yerel minimum olabilir." diyerek kavramsal bir düzeltme yapmıştır. Ö4'ün kağıt-kalem ortamına ait çizimi şekil 96'da verilmiştir.

Şekil 96

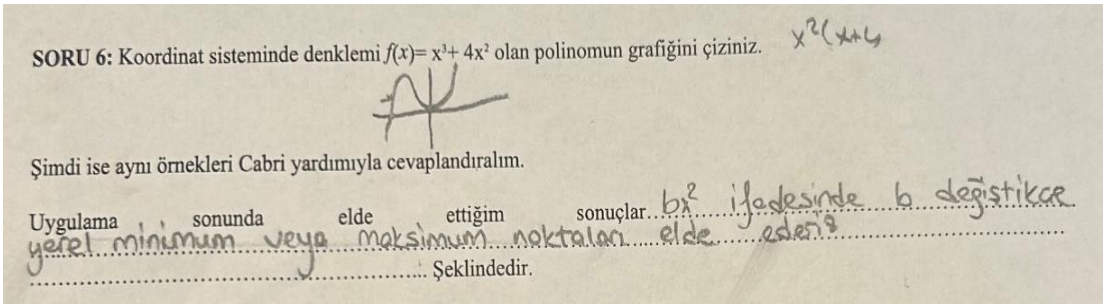
Ö4'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik soru 5'e ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Ö3 ve Ö4, $f(x)=x^3+4x^2$ fonksiyonunu analiz ederken kağıt-kalem ortamında çarpanlara ayırma yöntemini kullanarak kökleri bulmaya çalışmışlardır. Ö3, "x^2'nin parantezini alıyorum. x=0 ve x=-4 olarak kökleri buluyoruz." ifadesiyle cebirsel dönüşümü gerçekleştirmektedir. Ancak, Ö4 bu işlemin nasıl gerçekleştiğini tam olarak kavrayamadığını ifade etmektedir: "Nasıl oluyor bu ya?" Ö3'ün bu soruyla ilgili çözümü şekil 97'de görüldüğü üzere, açıklarken kavramsal bir yönlendirme yaparak türev bilgisini devreye sokmuştur ve : "Türevini alırsan bunun 2 tane 0 kök gelecek." diyerek grafik çizimini daha iyi anlamak için türev kavramını kullanmıştır.

Şekil 97

Ö3'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik soru 6'ya ilişkin yanıtı.

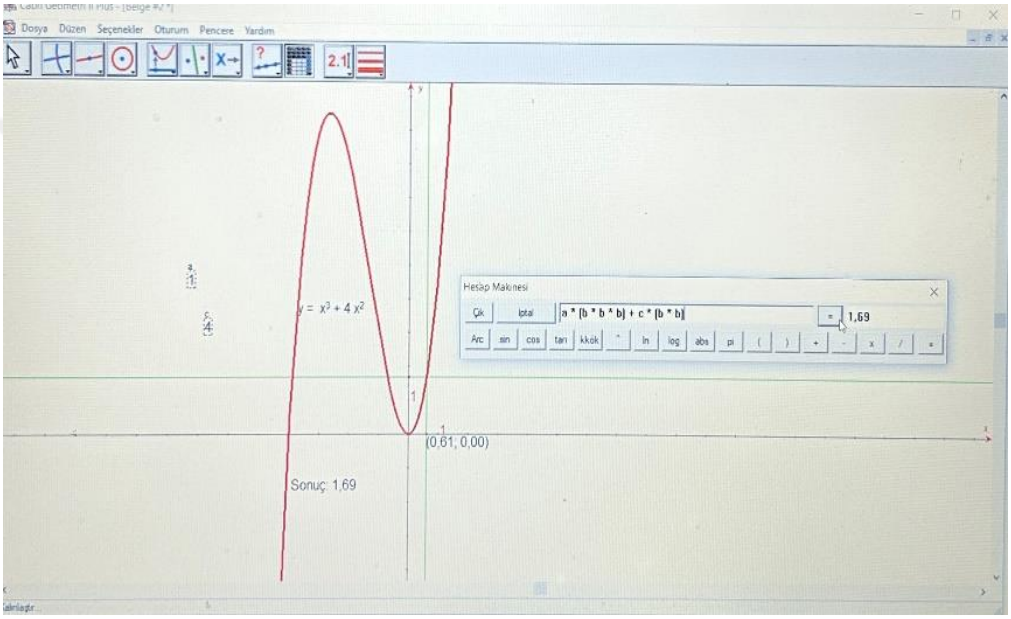


Ö4, grafik çizimini kağıt-kalem ortamında gerçekleştiremediğini belirtirken, Cabri-Geometri'yi kullanarak süreci daha iyi kavradığını ifade etmektedir: "Kağıt-kalem ortamında ben bunun grafiğini çizemedim. Cabri'de çizdiğimde anladım." Bu noktada, kağıt-kalem

ortamında matematiksel bilgisinin yetersiz kaldığı görülmekte olup, Cabri-Geometri bir enstrüman olarak kullanılmış ve öğrencinin fonksiyonun davranışını görselleştirmesine yardımcı olduğu görülmektedir. Aynı şekilde, Ö4 çift katlı kök kavramını, Cabri-Geometri ortamında grafik üzerinden gözlemleyerek anlamaktadır: "Yani 0'da çift katlı kök oluyor." diyerek bunu ifade etmiştir. Ö4'ün bu soruyla ilgili Cabri-Geometri ortamındaki çizimleri şekil 98'de verilmiştir.

Şekil 98

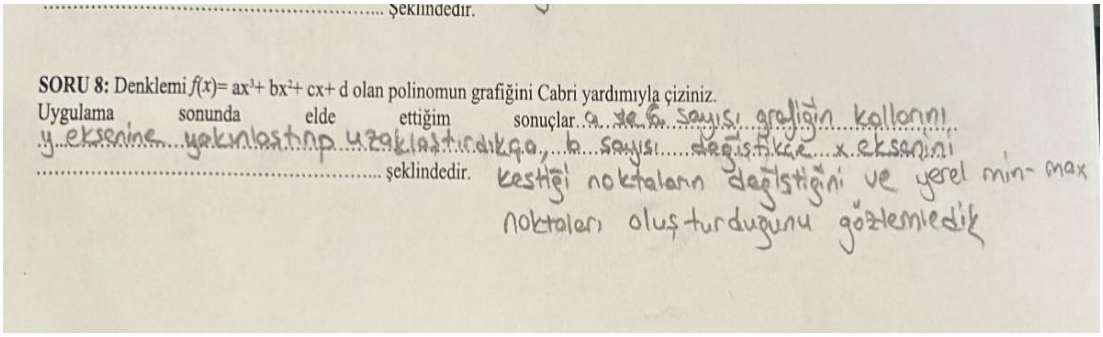
Ö4'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik soru 6'ya ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Ö3 ve Ö4, ayrıca katsayı değişimlerinin üçüncü dereceden polinom fonksiyonların ($f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$) grafiği üzerindeki etkilerini incelemektedir. Ö4, "x'in katsayısını değiştirdikçe yani c katsayısını değiştirdikçe grafik eksenlere yaklaşıyor." ifadesiyle parametre değişimlerinin grafik üzerindeki etkisini gözlemlemektedir. Ayrıca, "x^2'nin katsayısı değişince tepe noktası değişiyor." diyerek gözlemini dile getirse de Ö3, "Polinomda tepe noktası diyemezsin ki, yerel maksimum ve yerel minimum olabilir." ifadesiyle matematiksel ifadeyi düzeltmektedir. Benzer şekilde Ö3, "Sabit sayıyı değiştirince de kesme noktası değişiyor." diyerek fonksiyonun y eksenini kestiği noktadaki değişimi fark etmektedir. Aynı şekilde, Ö3, b katsayısının etkisini açıklarken, "b katsayısı değiştikçe yerel minimum veya maksimum noktaları elde ederiz." ifadesiyle fonksiyonun yapısal özelliklerine dikkat çekmektedir. Bu ifadeler, öğrencilerin Cabri-Geometri'yi kullanarak fonksiyonun çeşitli parametrelerine dair bir kavrayış geliştirdiğini göstermektedir. Bu bulgularla ilgili Ö3 ve Ö4'ün çalışma kağıtlarından bazı kesitler sırasıyla şekil 99 ve 100 de verilmektedir.

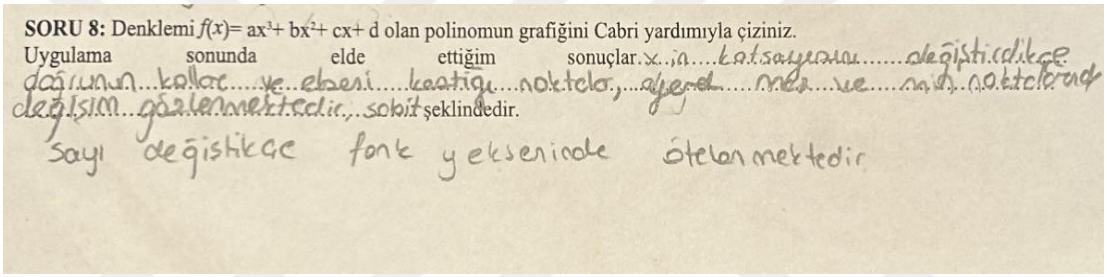
Şekil 99

Ö3'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik parametre özelliklerine ilişkin bir kesit



Şekil 100

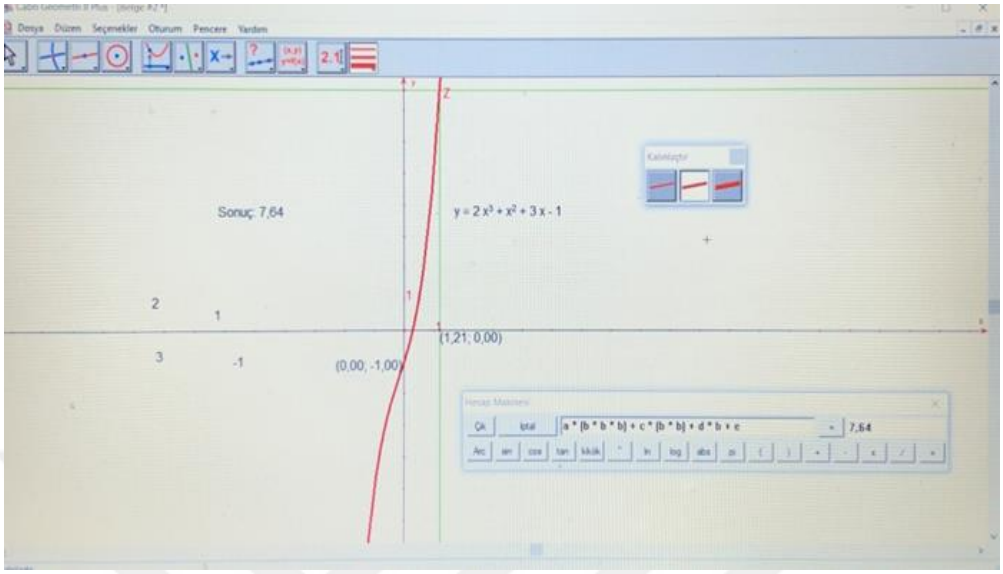
Ö4'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik parametre özelliklerine ilişkin bir kesit



Ö4 ve Ö3, $f(x)=2x^3+x^2+3x-1$ fonksiyonunun grafik çizimi sürecinde Cabri-Geometri'yi etkili bir araç olarak kullanmaktadır. Ö3, kağıt-kalem ortamında çözümün zorluğuna dikkat çekerek, "Ben bu polinomu çizemem. Ama Cabri'de çizebilirim." ifadesini kullanmaktadır. Bu noktada, Cabri-Geometri dinamik geometri ortamı, Ö3'ün polinom fonksiyonunun davranışını keşfetmesi için bir enstrüman haline geldiği açıkça görülmektedir. Ö4'ün, "Cabri'de çizince gördüğüm grafiğin 0 ile 1 arasında x eksenini kestiği." ifadesi, öğrencinin analitik çözümler yerine görselleştirme yoluyla fonksiyonun köklerini belirlediğini göstermektedir. Bu soru ile ilgili Ö3'ün Cabri-Geometri ortamında yaptığı grafik şekil 101'de verilmiştir.

Şekil 101

Ö3'ün üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik yedinci soruya ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Özetle, Ö3 ve Ö4'ün enstrümantal oluşum süreci, kağıt-kalem ortamında yapılan analitik işlemlerin Cabri-Geometri ortamı ile desteklenmesi ve grafiklerin doğrudan gözlemlenmesiyle şekillendiği görülmüştür.

Ö3 ve Ö4'ün kağıt-kalem ortamında gerçekleştirdiği uygulamada, eylemdeki teoremin 'analitik düzlemde üçüncü dereceden bir polinomun denklemi çözülecek ve grafiksel temsili çizilecek ise, x değişkenine değer vererek nokta belirleme ve denklemin köklerini bulmak amacıyla çarpanlara ayırma ve türev hesaplama yöntemlerinin kullanılması gerektiği şeklinde olduğu görülmüştür. Bu teoremin, 'x değişkenine değer vererek nokta bulma', 'çarpanlara ayırma' veya 'türev hesaplama' yöntemlerinin uygulanması (örneğin, kökleri bulmak için çarpanlara ayırma, grafik üzerinde nokta belirleyerek çizim yapma ve grafik üzerinde görsel analiz yapılması gibi teknikler) eylemdeki kavramlarına dayandığı söylenebilmektedir.

Bu çalışma yaprağında öğretmen adayları, kağıt-kalem ortamında polinomlara yönelik matematiksel bilgilerini, çalışma yaprağında verilen sorular doğrultusunda eksik bir biçimde kullandıkları gözlemlenmiştir. Ancak Cabri-Geometri ortamına gelince, önceki çalışma yapraklarından elde ettikleri deneyimler ve değişen zihinsel ve enstrümanlı eylem şemaları sayesinde Cabri-Geometri ortamını bir enstrümana dönüştürebildikleri görülmektedir.

Çalışma yaprağının başında sorulan "Analitik düzlemde polinom tanımı nedir?" sorusuna verilen yanıtlar, öğrencilerin başlangıçta polinom kavramını sadece cebirsel terimler bağlamında düşündüklerini göstermektedir. Ancak süreç ilerledikçe, Cabri-Geometri ortamında fonksiyon grafiklerini görselleştirmeleri sayesinde polinomların dinamik özelliklerini ve

katsayı değişimlerinin grafik üzerindeki etkilerini daha iyi anlamlandırmaya başladıkları gözlemlenmiştir.

Ö3 ve Ö4'ün Cabri-Geometri ortamında gerçekleştirdiği üçüncü dereceden polinom çözüm süreci, enstrümantal oluşum açısından önemli ipuçları sunmaktadır. Süreç boyunca matematiksel kavramlar, grafik analizleri ve Cabri-Geometri araçlarının entegrasyonu, öğrencilerin plinom fonksiyonların çözümü ve grafik çizme yaklaşımlarını somut ve görsel temelli bir hale getirmektedir. İkinci grubun, kağıt-kalem ortamında üçüncü dereceden polinomların grafiğini çizmek için dayandıkları "değer verme, kökleri belirleme ve analitik düzlem üzerinde yerlerini gösterme" işlevsel sabitinin, Cabri-Geometri ortamında "dinamik nokta belirleme, katsayıların grafiksel etkilerini analiz etme ve geometrik yer oluşturma" işlevsel sabitine dönüştüğü görülmektedir. Şekil 102'de Ö3 ve Ö4'ün, enstrümantal oluşum sürecinde geçtikleri aşamalar enstrümantal oluşum sürecinin bir özeti olarak gösterilmektedir.

Şekil 102'deki veriler, Ö3 ve Ö4'ün üçüncü dereceden polinomları anlamlandırma sürecinde yaşadığı süreci özetlemektedir. İkinci grup sürecin başında polinom kavramını tanımlayarak ve katsayıların fonksiyon üzerindeki etkisini tartışarak temel matematiksel bilgilerini harekete geçirmiştir. Öğrenciler kağıt-kalem ortamında, polinom denklemlerini çözmekte, kök belirleme, çarpanlara ayırma ve katsayı değişikliklerini analiz etmektedir. Ancak, fonksiyonun grafiksel özelliklerini anlamlandırmada yerel maksimum ve minimum noktaları gibi kavramları tam olarak görselleştiremedikleri gözlemlenmektedir. Cabri-Geometri ortamına geçildiğinde, öğrenciler dinamik grafikler oluşturarak fonksiyonun yapısını analiz etmeye ve katsayı değişikliklerinin etkisini doğrudan gözlemlemeye başlamaktadır. Bu süreçte, geometrik yer belirleme, ölçüm aktarımı ve koordinat noktalarının dinamik kullanımı gibi tekniklerden yararlanmış, fonksiyonların grafiksel dönüşümlerini incelemiştir. Özellikle, çift katlı kök kavramı ve polinomun eğrilik özellikleri, görsel temsiller aracılığıyla daha iyi kavranmaktadır. Ö3 ve Ö4, kağıt-kalem ortamındaki cebirsel işlemleri Cabri-Geometri ortamında grafiklerle destekleyerek, polinomların dinamik yapısını keşfetmiş ve farklı temsiller arasında bağlantılar kurmuştur. Son aşamada, katsayı değişikliklerinin grafiksel yansımalarını analiz ederek, üçüncü dereceden polinom fonksiyonlarını hem cebirsel hem de görsel düzeyde bütünleştirmiştir. Bu grafik, Ö3 ve Ö4'ün enstrümantasyon süreci boyunca hangi aşamalardan geçtiğini, araçları nasıl kullandığını ve cebirsel bilgilerini dinamik ortamla nasıl ilişkilendirdiğini gösteren bir akış şeması niteliği taşımaktadır.

Şekil 102

Ö3 ve Ö4'ün üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik çözüm süreçlerinin şematik gösterimi



4.1.3.3. Üçüncü Grubun Üçüncü Dereceden Polinomlar Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması

Bu kısımda üçüncü grup öğretmen adaylarının üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı tekniklere yer verilmiştir.

Üçüncü Grubun Üçüncü Dereceden Polinomlar Çalışma Yaprağına Yönelik Kağıt-Kalem Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo19'da öncelikle öğrencilerin kağıt-kalem ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 19

Üçüncü grubun üçüncü dereceden polinomlar çalıma yaprağına yönelik Kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayı	**Ö5**	**Ö6**
Teknikler		
Nokta Belirleme	+	+
Grafik Kaydırma	+	+
Çarpanlara Ayırma	+	-
Türev Alma	+	+
Kök Belirleme	+	+
Yerel Minimum ve Yerel Maksimum Kavramı	-	-
Katsayı Değişikliği	+	+

Tablo19'daki verilere göre, Ö5 ve Ö6, polinom fonksiyonlarının analizinde *nokta belirleme, çarpanlara ayırma, türev alma ve kök belirleme* tekniklerini kullanmıştır. *Grafik kaydırma ve katsayı değişikliği* teknikleriyle, polinomların grafiksel özelliklerini yorumlamaya çalışmışlar, ancak yerel minimum ve yerel maksimum kavramlarına dair net bir farkındalık sergileyememiştir. Ö5, polinom denklemlerinin köklerini bulmak için *çarpanlara ayırma yöntemini* uygularken, Ö6 bu yöntemi kullanmamış ve daha çok grafiksel sezgilere dayanmıştır.

Üçüncü Grubun Üçüncü Dereceden Polinomlar Çalışma Yaprağına Yönelik Cabri-Geometri Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Üçüncü grubun kullandıkları teknikler Tablo 20'de verilmiştir.

Tablo 20

Üçüncü grubun üçüncü dereceden polinom denklemler çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen adayı	Ö5	Ö6
Teknikler		
Nokta Belirleme	+	+
Dik Doğru Çizimi	+	+
Koordinat ve Kesişim Noktası Belirleme	+	+
Ölçüm Aktarım ve Geometrik Yer Belirleme	+	+
Grafik Değişiklikleri ve Katsayı Analizi	+	+

Ö5 ve Ö6, Cabri-Geometri ortamında polinom fonksiyonların grafiklerini oluştururken nokta belirleme, dik doğru çizimi, ölçüm aktarım ve geometrik yer belirleme tekniklerini kullanarak *polinomun özelliklerini analiz* etmeye çalışmıştır. Koordinat belirleme ve kesişim noktalarının bulunması sürecinde Cabri-Geometri ortamının sağladığı dınımık görsel desteğin etkili kullanıldığı görülmüştür.

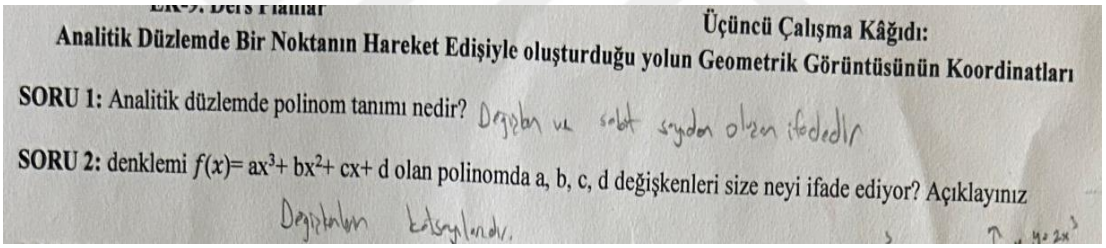
Üçüncü gruptaki öğretmen adayları (Ö5, Ö6) üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağını inceledikten ve araştırmacının açıklamalarını dinledikten sonra çalışma yaprağındaki soruları yanıtlamaya başlamıştır. Araştırmacı öncelikle bu çalışma yaprağının konuyla ilgili 1 temel matematik alan bilgisi sorusu ve 7 üçüncü dereceden fonksiyonların çözümü ve grafiklerinin çizimi ile ilgili hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında, sorudan oluştuğunu açıklamıştır. Fonksiyonlar ile ilgili soruların öncelikle kağıt-kalem ortamında çözülüp grafiğinin çizilmesi, sonrasında Cabri-Geometri ortamını inceleyerek grafiklerin çizilmesini istemiştir. Öğretmen adayları çalışma yapraklarındaki soruları sırasıyla 'Analitik düzlemde polinom tanımı nedir?' sorusunu yanıtladıktan sonra ($f(x)=ax^3$, $f(x)=ax^3+b$, $f(x)=ax^3+bx$, $f(x)=ax^3+bx^2$, $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$) formundaki denklemleri yani katsayıların sayısı artacak şekilde polinom fonksiyonu sorularının çözümüne başlamışlardır. Bu kısımda enstrümantal oluşum süreci aktarılırken gruptaki öğrencilerin çalışma sürecinde aralarında geçen diyalog, çalışma kağıtları ve ekranlarından kesitler aşağıda verilmiştir.

Ö5 ve Ö6, sürecin başında polinomun tanımı üzerine konuşmuşlar ve Ö5, "Belirli sayıda bağımsız değişken ve sabit sayıdan oluşan ifade." diyerek polinomun temel yapısını tanımlamıştır. Ancak Ö6, polinomların derecesine ilişkin bazı belirsizlikler yaşamıştır. Ö6, "Parabolün tanımı nedir? x küp işte." diyerek üçüncü dereceden bir polinomu parabol ile ilişkilendirmiştir. Ö5 ise, "Sadece üçlü olan mı? 3 üzeri 3, üzeri 4 olmaz mı?" diyerek polinomların derece sınırlamasına yönelik bir sorgulama yapmıştır. Ö6, "Dörtlüde de olur."

diyerek polinomların farklı derecelerde olabileceğini belirtmiş, ancak bu durumun grafik üzerindeki etkisini tam olarak ilişkilendirememiştir. Bu noktada Ö5, polinomların genel yapısını anlamaya çalışarak, "O zaman üçlü yazamayız. Parabol de bir polinom mu?" sorusunu yöneltmiştir. Ö6 ise bu soruya net bir yanıt verememiş ve "Bilmiyorum." şeklinde bir cevap vermiştir. Araştırmacının notunda belirtildiği gibi, Ö5'in polinom tanımına ilişkin yaptığı açıklamanın internetten yardım alınarak oluşturulduğu anlaşılmaktadır. Bu süreç sonunda Ö5'in polinomların temel yapısını tanımlama konusunda daha bilinçli olduğu, ancak Ö6'nın polinomların derecesi ve grafiksel özellikleri arasındaki ilişkiyi tam olarak kuramadığı görülmektedir. Özellikle Ö6'nın üçüncü dereceden bir polinomu parabol ile ilişkilendirmesi, polinomların grafiksel temsiline yönelik zihinsel şemasında bazı eksiklikler olduğunu göstermektedir. Buna karşın, Ö5'in tanımı internetten yardım alarak yaptığı belirtilse de, polinomların temel cebirsel yapısını kavradığı söylenebilir. Bu diyaloğun ardından grup polinom tanımıyla ilgili soruyu Şekil 103 ve Şekil 104'te görüldüğü üzere yanıtlamıştır.

Şekil 103

Ö5'in üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik polinom tanımına ilişkin yanıtı


EK-9. Ders Planlar

Üçüncü Çalışma Kâğıdı:

Analitik Düzlemde Bir Noktanın Hareket Edişiyle oluşturduğu yolun Geometrik Görüntüsünün Koordinatları

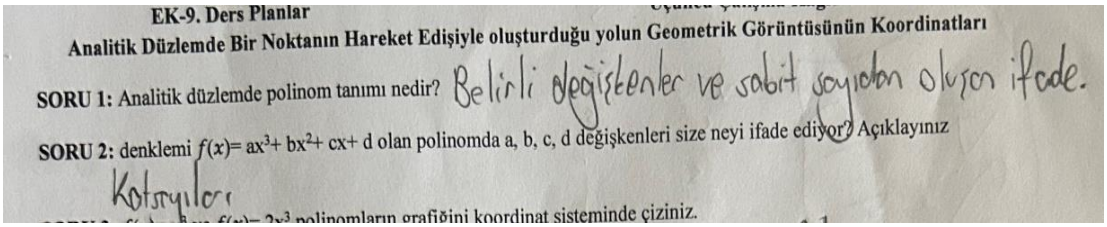
SORU 1: Analitik düzlemde polinom tanımı nedir? Değişken ve sabit sayıdan oluşan ifadedir

SORU 2: denklemi $f(x)= ax^3+ bx^2+ cx+ d$ olan polinomda a, b, c, d değişkenleri size neyi ifade ediyor? Açıklayınız

Değişkenler katsayılardır.

Şekil 104

Ö6'nın üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik polinom tanımına ilişkin yanıtı


EK-9. Ders Planlar

Analitik Düzlemde Bir Noktanın Hareket Edişiyle oluşturduğu yolun Geometrik Görüntüsünün Koordinatları

SORU 1: Analitik düzlemde polinom tanımı nedir? Belirli değişkenler ve sabit sayıdan oluşan ifade.

SORU 2: denklemi $f(x)= ax^3+ bx^2+ cx+ d$ olan polinomda a, b, c, d değişkenleri size neyi ifade ediyor? Açıklayınız

Katsayılar

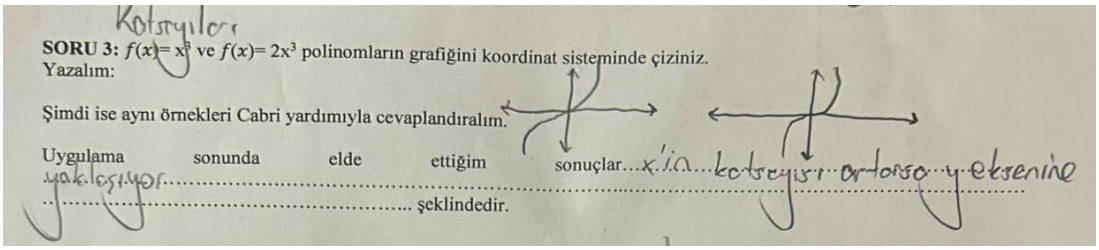
polinomların grafiğini koordinat sisteminde çiziniz.

Üçüncü soruya geldiklerinde, $f(x)=x^3$ ve $f(x)=2x^3$ fonksiyonlarının grafiklerini kağıt-kalem ortamında çizmeye çalışmışlardır. Ö6, "$y=x^3$ polinomun grafiğini çiziniz demiştir. Aklımda kaldığı kadar çözüyorum. Bu şekilde bir şeydi. $y = 2x^3$ nasıl olacaktı onu da hatırlayamadım." diyerek sürece başlamıştır ve şekil 105'te görüldüğü üzere söz konusu grafiklerin çizimini yapmıştır. Ö5 ise, fonksiyonun grafiği üzerine bir gözlemde bulunarak, "$y=2x^3$'te polinomun kolları y eksenine yaklaşıyor paraboldeki gibi." şeklinde bir açıklama yapmıştır. Ö6, bu gözlemi destekleyerek, "O zaman uygulamanın sonunda elde ettiğim sonuçlar nelerdir sorusuna x^3'ün katsayısı arttıkça grafik y eksenine yaklaşıyor." diyerek katsayı

değişimlerinin grafik üzerindeki etkisini fark etmiştir. Bu noktada Ö5 de aynı gözlemde bulunarak, "Evet ben de x^3'ün katsayısı arttıkça y eksenine daha çok yaklaşıyor yazdım." diyerek, katsayı değişimlerinin grafiğin şeklini nasıl etkilediğini anlamaya başlamıştır.

Şekil 105

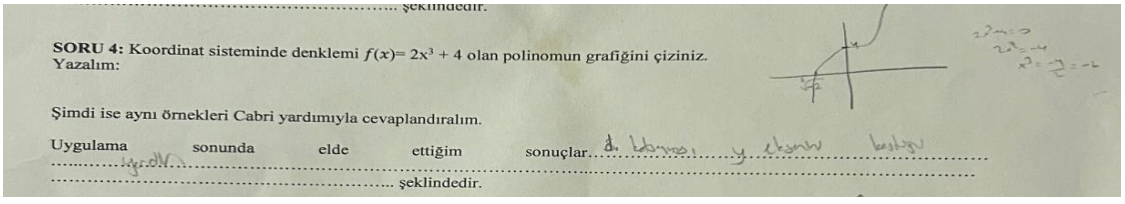
Ö6'nın üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik üçüncü soruya ilişkin yanıtı



Ö5 ve Ö6, dördüncü soruda, $f(x)=2x^3+4$ fonksiyonunun grafiğini kağıt-kalem ortamında çizmeye çalışmışlardır. Ö5, "Şimdi burada +4 olunca 4 birim sola mı kayıyordu?" diye sormuştur. Ö6 ise bu soruyu düzelterek, "Yok, üstte kayıyor y ekseninde." yanıtını vermiştir. Ö5, "Evet hatırladım, üstte kayıyor. x eksenini kaçta kesiyor o zaman? A evet hatırladım, sıfıra eşitliyoruz. $2x^3=-4$, $x^3=-2$, $x=\sqrt{-2}$'nin üçüncü kökü." diyerek sürecin cebirsel aşamasını açıklamıştır. Ö6 ise, "O kadar kökünü bulmaya gerek var mıydı? Direkt çizdim ben, aynı x^3 grafiği gibi sadece y eksenini 4 noktasında kesiyor." diyerek, görselleştirme yoluyla doğrudan çözüme ulaşmaya çalışmıştır. Ö5 ve Ö6, bu aşamada katsayı değişikliklerinin grafik üzerindeki etkisini anlamaya çalışmış ve bu süreçte farklı stratejiler kullanmıştır. Ö5 daha cebirsel bir yaklaşım sergilerken, Ö6 doğrudan grafik çizimine odaklanmıştır. Bu durum, öğrencilerin polinomların grafiksel temsilleri ile cebirsel çözümleri arasındaki ilişkiyi anlamaya çalıştıklarını göstermektedir. Ö5, "Evet ben de biliyorum, yine de x eksenini kestiği noktayı da belirlemek istedim. Anladım, paraboldeki gibi burada aldığım sonuç, sabit sayı y eksenini kestiği noktadır." diyerek, grafik ve katsayı arasındaki ilişkiyi açıklamıştır. Ö5'in bu soru ile ilgili yanıtı şekil 106'da verilmiştir.

Şekil 106

Ö5'in üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik dördüncü soruya ilişkin yanıtı

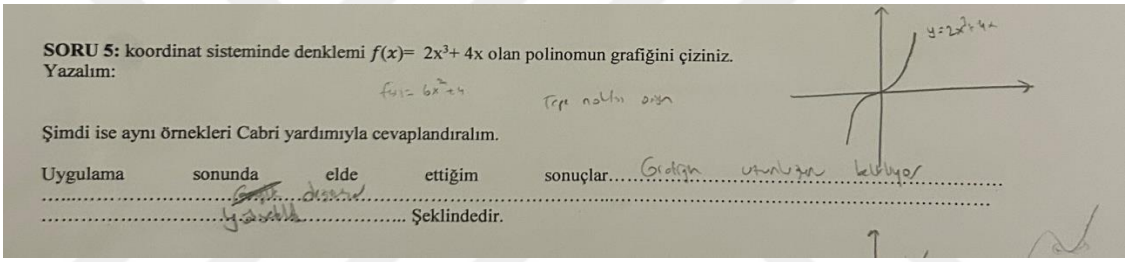


Beşinci soruda $f(x)=2x^3+4x$ fonksiyonunu çözmeye çalışmışlardır. Ö5, "Parabolde x'in katsayısı ne işe yarıyordu?" diyerek polinom fonksiyonlarında katsayıların etkisini sorgulamıştır. Ö6, "Parabolün denkleminde x'in katsayısıyla tepe noktasını buluyorduk.

Grafiğin şeklini değiştiriyor.” diyerek cevap vermiştir. Ö5 ise türev almayı önermiştir: “Bence $f(x)=2x^3+4x$ grafiği $f(x)=2x^3$ grafiğine benziyor. Ben türevini aldım, $f'(x)=6x^2+4$.” Ö6, “Bence $f(x)=2x^3+4x$ polinomdaki çözümü için denklemin türevini alacağız, elde ettiğimiz değeri de fonksiyonun içine koyacağız.” diyerek süreci desteklemiştir. Bu aşamada öğrenciler, polinomun türevini alarak eğimi hesaplamaya çalışmış ve grafiksel özelliklerini analiz etmeye başlamıştır. Ö6, “Grafik üzerinde bakalım. Bu polinoma 0 verince y 0 oluyor. 1 verince yine artı. Ondan sonra 2, 3, 4... Bu şekilde eksi değerler verince f(x) hep büyüyor yani hep artı oluyor. Hiç eksi bir yer yok, sıfırdan yükselerek.” diyerek gözlemde bulunmuştur. Ö5 ise, “O zaman x’e bir verince ne oluyor? Yine artı oluyor. -2 verirsem kaç olur? Yine artı oluyor. Yani pozitif bir değer oluyor. -3 verirsen ne olur acaba? Pozitif bir sayı oluyor yine.” diyerek süreci analiz etmiştir. Ö5 ve Ö6’nin bu soruya yanıtları şekil 107 ve 108’de verilmiştir.

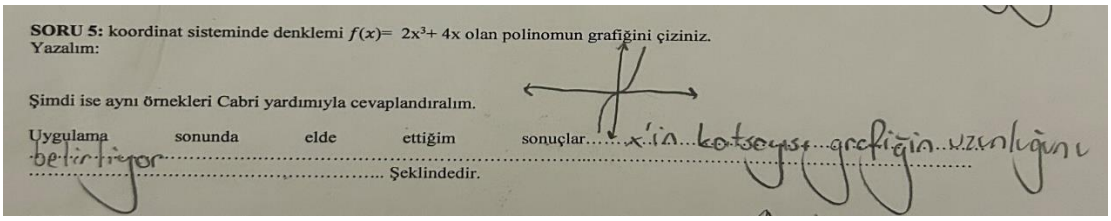
Şekil 107

Ö5’in üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik beşinci soruya ilişkin yanıtı



Şekil 108

Ö6’nın üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik beşinci soruya ilişkin yanıtı



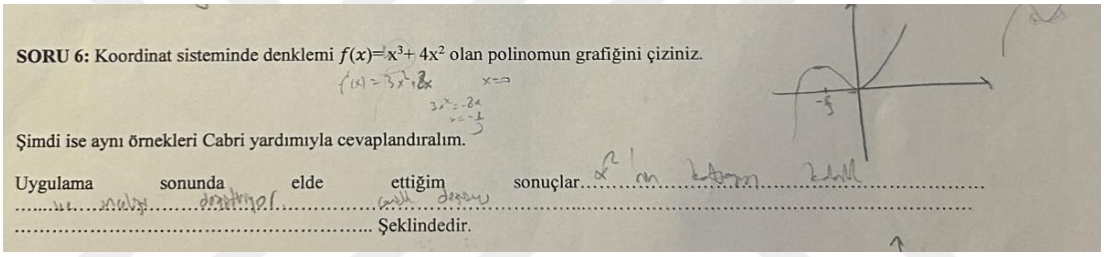
Ö5 ve Ö6, üçüncü dereceden polinom fonksiyonlarının çözüm sürecinde türev alma işlemiyle grafik analizine yönelmiştir. Ö6, “$f(x)=2x^3+4x^2$ denklemini nasıl çözeceğiz? Bence yine türevini alalım.” diyerek türev almanın çözüm için etkili bir yöntem olacağını belirtmiştir. Ö5 ise türevi alarak, “Evet, ben aldım türevi eşittir $3x^2+8x$, buradan $x=-8/3$ oluyor, peki bu değer ne işe yarayacak?” diyerek sürecin analitik çözüm aşamasını yürütmüştür. Ö6, bu noktada grafik üzerinde değer verme yöntemiyle çözümü analiz etmeye çalışmış ve “Bu polinoma 0 verince y 0 oluyor, 1 verince yine artı, ondan sonra 2, 3, 4... bu şekilde eksi değerler verince f(x) hep büyüyor yani hep artı oluyor. Hiç eksi bir yer yok, sıfırdan yükselerek.” Diyerek grafiksel davranışı yorumlamaya çalışmıştır. Ö5 ise bu gözlemi pekiştirerek, “O zaman x’e bir verince ne oluyor? Yine artı oluyor, eksi -2 verirsem kaç olur, yine artı oluyor. Yani pozitif bir

değer oluyor, -3 verirsen ne olur acaba? Pozitif bir sayı oluyor yine.” diyerek katsayıların grafiğin yönü üzerindeki etkisini analiz etmiştir.

Bu aşamada Ö6, grafik üzerinde bir dönüm noktası olabileceğini fark ederek, “Ama ben bir şey anladım, türevini bulduk ya sonra türevi sıfırla eşitledik x=-8/3 noktasını elde ettik. Sanırım grafik -8/3 noktasından itibaren aşağıya doğru iniyor yani -8/3 yerel maksimumu grafiğin.” diyerek grafiksel analizini derinleştirmiştir. Bu süreçte Ö6, grafik üzerinde yerel maksimum ve minimum kavramlarını anlamaya başlamış, ancak terimlerin matematiksel karşılığını tam olarak ilişkilendiremediği gözlemlenmiştir. Ö5 ise bu yorumu destekleyerek, “Bence de x²'nin katsayısı grafiğin kalınlığını ve inceliğini değiştiriyor.” diyerek katsayı değişimlerinin grafik üzerindeki etkisine dikkat çekmiştir. Ö5’nin bu soruya yanıtı şekil 109’da verilmiştir.

Şekil 109

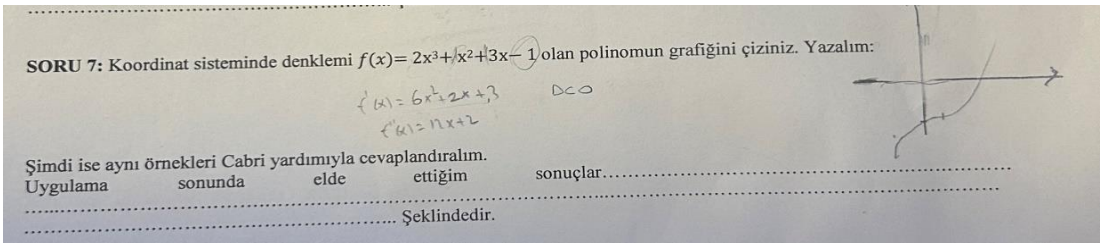
Ö6’nın üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik altıncı soruya ilişkin yanıtı



Daha sonra Ö5 ve Ö6, f(x)=2x³+x²+3x-1 fonksiyonunun çözümüne yönelmiştir. Ö5, “Bu fonksiyonu çarpanlara ayırabilir miyiz?” diye sormuş ancak çarpanlara ayıramadıklarını fark etmişlerdir. Ö6, “Bence türevini alırsak nasıl olur?” diyerek tekrar türev alma yöntemine yönelmiştir. Ö5, “Denklemi 0’a eşitlersek nasıl olur? Ama yine olmuyor. Evet, nasıl bulacağız x değerini bulamıyorum.” diyerek sürecin zorlaştığını belirtmiştir. Ö6 ise “x'in parantezini alsak nasıl olur?” diye sormuş, ancak bu işlemi de yapamadığını fark etmiştir. Bu noktada öğretmen adayları değer verme tekniğini denemiştir. Ö5, “Değer versek, 1 verirsem y kaç olur?” diye sormuştur. Ö6 ise, “Polinom grafiğinin genel şeklini biliyoruz. Ayrıca sabit sayı burada -1 yani y eksenini -1’de kesiyor. Ben bu şekilde bir polinom çizebilirim ama çözümünü yapamadım.” diyerek grafik üzerinde gözlemde bulunmuştur. Ö5 ise, “Aynen ben de sadece kök yok diye çözebildim. Grafiğini de çözümünü de yapamıyorum. İkinci türevini de almak istiyorum, belki bir işe yarar.” diyerek ikinci türev alma yöntemine başvurmuştur. Bu aşamada Ö5, “Birinci türev 6x²+2x+3, ikinci türev 12x+2 oluyor yani x=-1/6.” diyerek analitik çözümü tamamlamıştır. Ö6 ise, “Yani -1/6’dan sonraki aralıkta bir şey mi var? Ne oluyor orada? Bulamadık.” diyerek çözümdeki belirsizliği ifade etmiştir. Ö5’nin bu soru ile ilgili verdiği yanıt ve çözümü şekil 110’da verilmiştir.

Şekil 110

Ö6'nın üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik altıncı soruya ilişkin yanıtı


SORU 7: Koordinat sisteminde denklemi $f(x)= 2x^3+x^2+3x-1$ olan polinomun grafiğini çiziniz. Yazalım:

$f'(x)=6x^2+2x+3$ $D<0$

$f''(x)=12x+2$

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.
Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar.....
..... Şeklindedir.

Bu aşamada araştırmacı, polinom ve parabol arasındaki farkları sormuştur. Ö5 ve Ö6, "Birinin üssü 2, parabolün üssü 3'tür." diyerek temel bir farkı belirtmişlerdir. Araştırmacının grafikteki farklılıklarla ilgili sorusuna ise "Bilmiyoruz." şeklinde bir yanıt vermişlerdir. Araştırmacının tepe noktası ile ilgili sorusuna Ö5, "Hocam polinomda tepe noktası yok." diyerek net bir yanıt vermeye çalışmıştır. Ancak Ö6, "Tepe noktası acaba yön değiştiren yer mi? Yani yukarıdan geliyor, bir noktada değişiyor, aşağıya iniyor, mesela sonra yine yöne değişip yukarıya çıkıyor. Onlara ne diyorduk?" diyerek yerel maksimum ve minimum kavramlarına ulaşmaya çalışmıştır.

Bu süreçte Ö5 ve Ö6'nın enstrümantal oluşum sürecinde, polinomların analitik çözümü ile grafiksel temsilleri arasındaki ilişkiyi anlamaya çalıştıkları gözlemlenmektedir. İlk aşamada öğrenciler türev alarak analitik çözümler üretmeye çalışmışlar ancak bu çözümleri grafik üzerinde yorumlamakta zorlanmışlardır. Ö6'nın, "Sanırım grafik -8/3 noktasından itibaren aşağıya doğru iniyor yani -8/3 yerel maksimumu grafiğin." ifadesi, grafiksel yapı ile türev arasındaki ilişkiyi anlamaya başladığını göstermektedir. Ö5 ise, "x²'nin katsayısı kalın ve inceliği değiştiriyor." diyerek katsayıların grafik üzerindeki etkisini analiz etmeye çalışmıştır.

Bu aşamada Ö5 ve Ö6'nın analitik çözüm üretme ve grafiksel gözlem yapma süreçleri arasında bir köprü kurmaya başladıkları söylenebilir. Grafik üzerinde doğrudan gözlem yaparak katsayıların etkisini analiz etme ve yerel maksimum ve minimum gibi kavramları grafiksel temsil üzerinden anlamlandırmaya çalışmaları, enstrümantal oluşum sürecinde ilerleme kaydettiklerini göstermektedir. Özellikle türev alma ve değer verme süreçlerinin grafiksel temsillerle ilişkilendirilmesi, enstrümantal oluşum sürecinde öğrencilerin analitik ve görsel çözüm yöntemlerini birleştirmeye başladıklarını ortaya koymaktadır.

Ö5 ve Ö6'nin kağıt-kalem ortamında gerçekleştirdiği uygulamada, eylemdeki teoremin 'analitik düzlemde üçüncü dereceden bir polinomun denklemi çözülecek ve grafiği çizilecek ise, türev alma, değer verme ve kök bulma yöntemlerinin kullanılması gerektiği söylenebilir. Bu teoremin, türev alma, değer verme ve kök bulma yöntemlerinin uygulanması (örneğin,

kökleri belirlemek için türev alma, grafikte noktaları işaretleyerek çizim yapma ve fonksiyonun davranışını analiz etme gibi teknikler) eylemdeki kavramlara dayandığı söylenebilmektedir.

Ö5 ve Ö6, soruları kağıt-kalem ortamında çözdükten sonra dinamik ortama geçmiştir. Cabri-Geometri ortamında üçüncü dereceden polinomların grafiklerini çizerken çeşitli teknikler uygulayarak süreci yürütmüşlerdir. Sürecin başında Ö6, "Şimdi Cabri'ye geçelim. Eksenleri gösterdim, nokta belirledim x ekseni üzerinde, koordinatını yazdım, hesap makinesi diyorum şimdi." diyerek süreci başlatmıştır. Ö5 ise bu noktada sürece müdahale ederek, "Hesap makinesi olmaz, önce sayıları belirlemelisin, denklemdeki katsayılar sabit sayılar." diyerek sürecin doğru bir şekilde ilerlemesi için katsayıların tanımlanması gerektiğini belirtmiştir. Ö6, bu yönlendirmeye uyarak "Tamam sayıları belirleyelim. Ben hep onu unutuyorum ya." diyerek süreci devam ettirmiştir. Bu diyalog, Ö5'in süreci yönlendirdiğini ve Cabri-Geometri ortamındaki işlemlerle ilgili bilgi sahibi olduğunu göstermektedir.

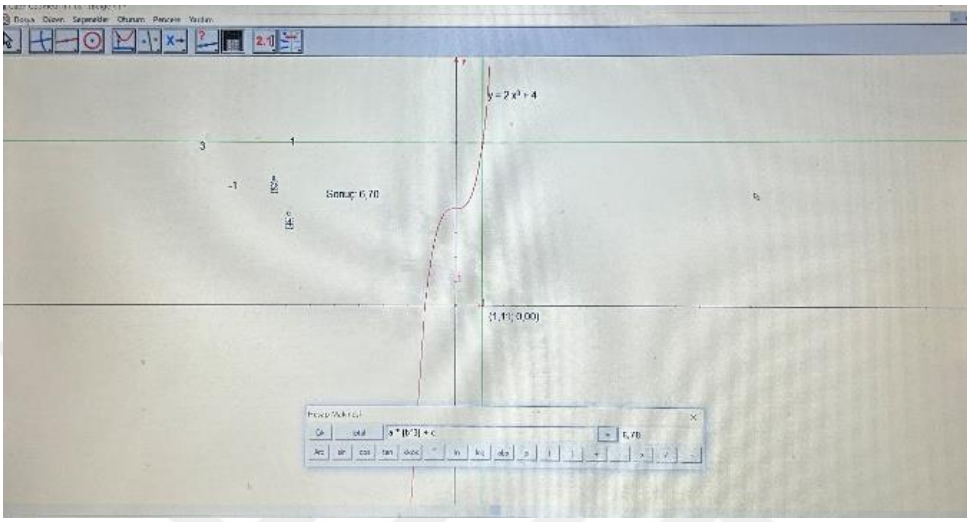
Ö6, sürecin devamında hesap makinesi kullanarak polinomun değerlerini belirlemeye çalışırken Ö5, çarpım işlemi konusunda bir hatayı fark etmiş ve "Çarpıya basmadan çarpı nerede, çarpıya bas." diyerek Ö6'yı uyarmıştır. Ö6, "Buldum. y değerini ölçüm aktarım mı yapıyorduk?" diyerek sürecin bir sonraki adımını sorgulamıştır. Ö5 ise "Evet." diyerek bu adımı onaylamış ve yönlendirmeye devam etmiştir. Ö6'nın bu sorusu, enstrümantasyon sürecinde Cabri-Geometri ortamındaki araçların işlevlerini tam olarak anlamlandırmada bazı eksiklikler yaşadığını göstermektedir. Bu sırada Ö6, sürecin devamını Ö5'e sormuş ve "Sonra ne yapıyorduk?" diyerek destek istemiştir. Ö5, bu noktada süreci açıklamaya devam ederek, "Dik doğruları çiziyordum ve kesişim noktasını belirliyorduk. Sonra da geometrik yer aracını kullanıyorduk. Önce kesişim noktasını, sonra ilk noktasına, başlangıç noktasına tıklıyordun ve geometrik yer dolaşıyordu." diyerek adım adım süreci açıklamıştır. Bu durum, Ö5'in Cabri-Geometri ortamındaki araçların işleyişine daha hakim olduğunu ve süreci yönlendirdiğini göstermektedir.

Ö6, bu yönergelere uyarak "Tamamdır, oluşturdum. Şimdi katsayıları değiştirip grafiğin değişimine bakalım." diyerek sürecin bir sonraki aşamasına geçmiştir. Bu aşamada Ö5, sürecin daha sistematik ilerlemesi için "Benim bir fikrim var. O zaman en son soruyu yapalım, yani $f(x)=2x^3+ x^2+3x-1$. Katsayıları sayı aracı ile atayalım. Ondan sonra o sayıları değiştirerek mesela bir denklemde x'in kat sayısı sıfırsa veya her neyse değiştirerek o grafiği elde edelim." diyerek farklı katsayılar için grafik analizine geçmeyi önermiştir. Bu öneri, Ö5'in süreci daha kapsamlı analiz etmeye yönelik strateji geliştirdiğini ve Cabri-Geometri ortamını daha etkili kullandığını göstermektedir. Ö6 ise bu öneriyi onaylayarak "Olur." diyerek süreci devam

ettirmiştir. Ö5 ve Ö6'nın Cabri-Geometri ortamında yaptığı grafik şekil 111 ve 112' de verilmiştir.

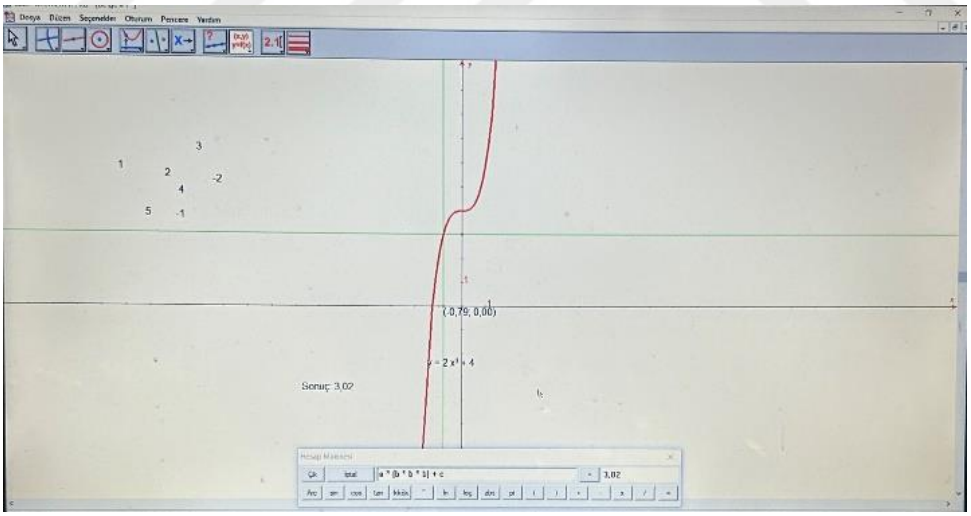
Şekil 111

Ö5'in üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik dördüncü soruya ilişkin ekran kaydından bir kesit



Şekil 112

Ö6'nın üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik dördüncü soruya ilişkin ekran kaydından bir kesit.

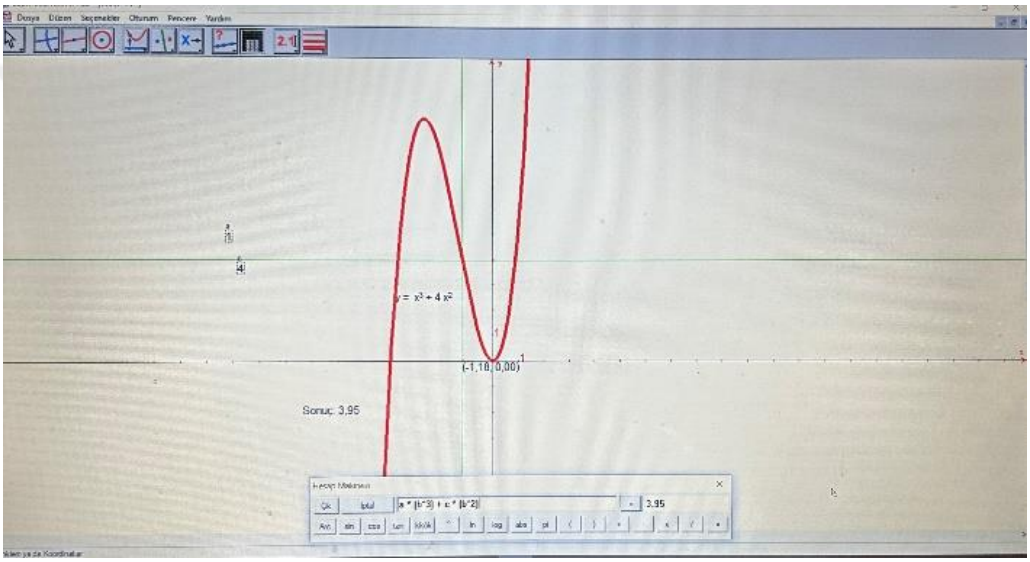


Ö5, sürecin ilerleyen aşamasında Cabri-Geometri ortamında polinom grafiğini çizerken iki farklı tepe noktası belirlemiştir. Bu noktada Ö5, "Cabri'de grafikleri çizince polinomun iki tane tepe noktası olduğunu gördüm. Aslında tepe noktası paraboldeydi, buradakilerde iki tane tepe noktası var. Buradakilere ne deniliyor, ismini unuttum ama tepe noktası değildi." diyerek gözlemlerini dile getirmiştir. Ö6 ise bu noktada Cabri-Geometri ortamındaki gözlemlerini analiz ederek, "Uygulamanın sonunda Cabri'de grafikleri çizdikten sonra sayılarında değişiklikler yaparak şöyle bir sonuca vardık. Bu uygulamanın sonunda elde ettiğimiz sonuçlar

olarak, üçüncü dereceden polinomda x²'nin katsayısı grafiğin kalınlık veya inceliğini değiştiriyor." diyerek sürecin sonucunda ulaştıkları bulguları ifade etmiştir. Bu açıklama, Ö6'nın katsayı değişimlerinin grafik üzerindeki etkisini Cabri-Geometri ortamında doğrudan gözlemleyerek anlamlandırdığını göstermektedir. Ö5 de bu bulguyu destekleyerek "Bence de x²'nin katsayısı kalın ve inceliği değiştiriyor." diyerek Ö6'nın gözlemini onaylamıştır. Ö5 ve Ö6'nın Cabri-Geometri ortamında $f(x)=x^3+4x^2$ fonksiyonu ile ilgili oluşturduğu grafikler şekil 113 ve 114' te verilmiştir.

Şekil 113

Ö5'inn üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik altıncı soruya ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Şekil 114

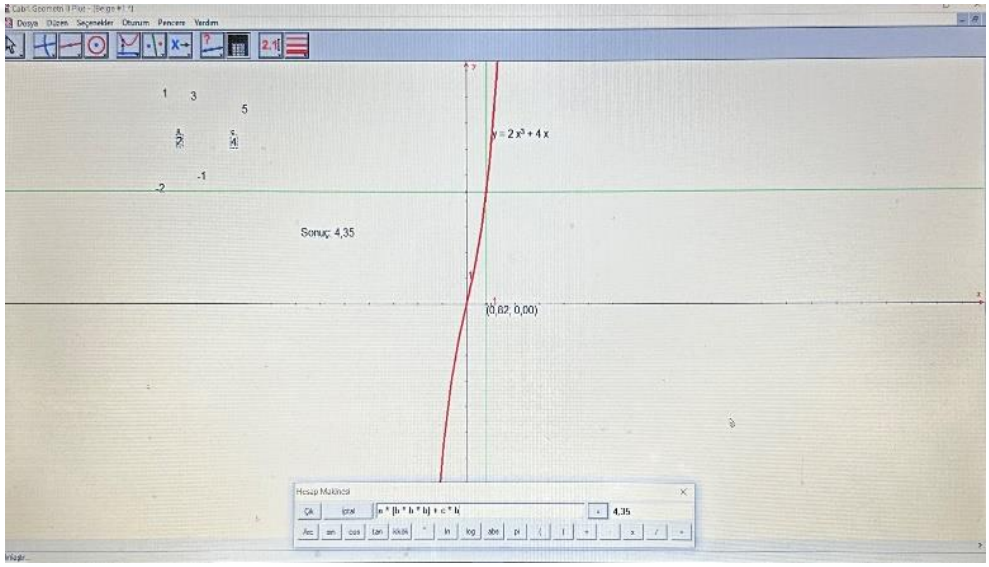
Ö6'nın üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik altıncı soruya ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Ö6, beşinci sorunun çözüm ve grafik oluşturma sürecinde katsayıların grafik üzerindeki etkisini daha detaylı analiz ederek, "Bence $f(x)=2x^3+4x$ polinomundaki x'in katsayısı, yani 4, grafiğin uzunluğunu belirliyor. Sonuçta tepe noktasının değişmesinde rolü var, o yüzden uzunluğu belirliyor olabilir." diyerek kapsamlı bir açıklama yapmıştır. Bu açıklama, Ö6'nın Cabri-Geometri ortamındaki dinamik değişiklikleri analiz etme ve yorumlama sürecinde ilerleme kaydettiğini göstermektedir. Ö6'nın Cabri-Geometri ortamında bu fonksiyon ile ilgili oluşturduğu grafik şekil 115' te verilmiştir.

Şekil 115

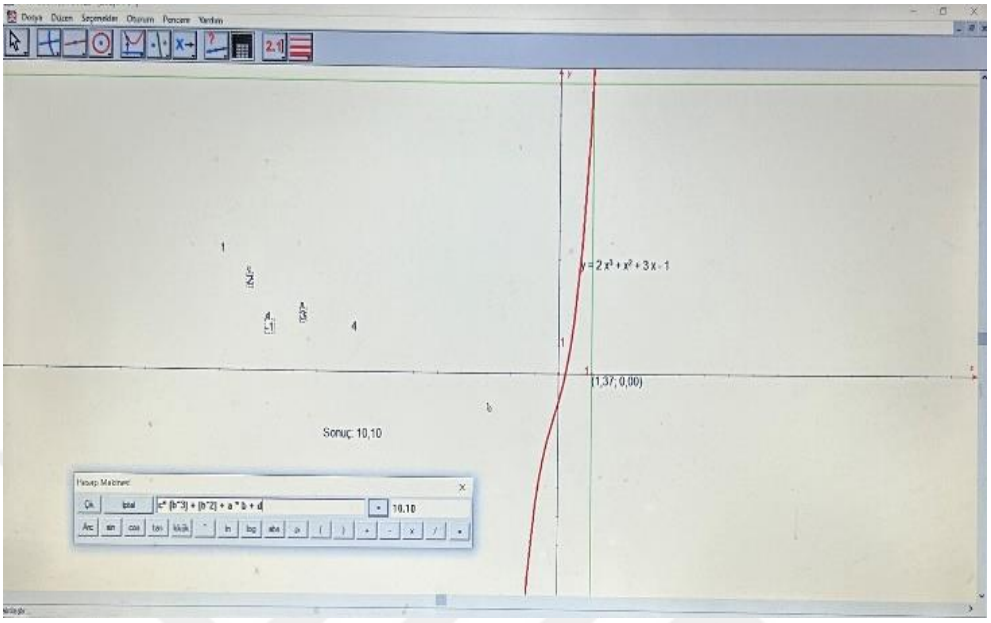
Ö6'nın üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik beşinci soruya ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Bu süreçte Ö5 ve Ö6'nın Cabri-Geometri ortamını kullanarak polinomların grafiksel temsillerini analiz ettiği ve katsayıların grafik üzerindeki etkilerini gözlemleyerek anlamlandırdığı görülmektedir. Ö5, süreci yönlendirirken, Ö6'nın katsayı değişimlerinin grafik üzerindeki etkilerini analiz ederek süreci kavramaya çalıştığı gözlemlenmiştir. Bu durum, Ö5 ve Ö6'nın Cabri-Geometri ortamında enstrümantasyon sürecini deneyimlediğini ve grafik analizleri üzerinden polinomların özelliklerini anlamlandırmaya çalıştıklarını göstermektedir. Ö5'in Cabri-Geometri ortamında $f(x)=2x^3+x^2+3x-1$ fonksiyonu ile ilgili oluşturduğu grafikler şekil 116'da verilmiştir.

Şekil 116

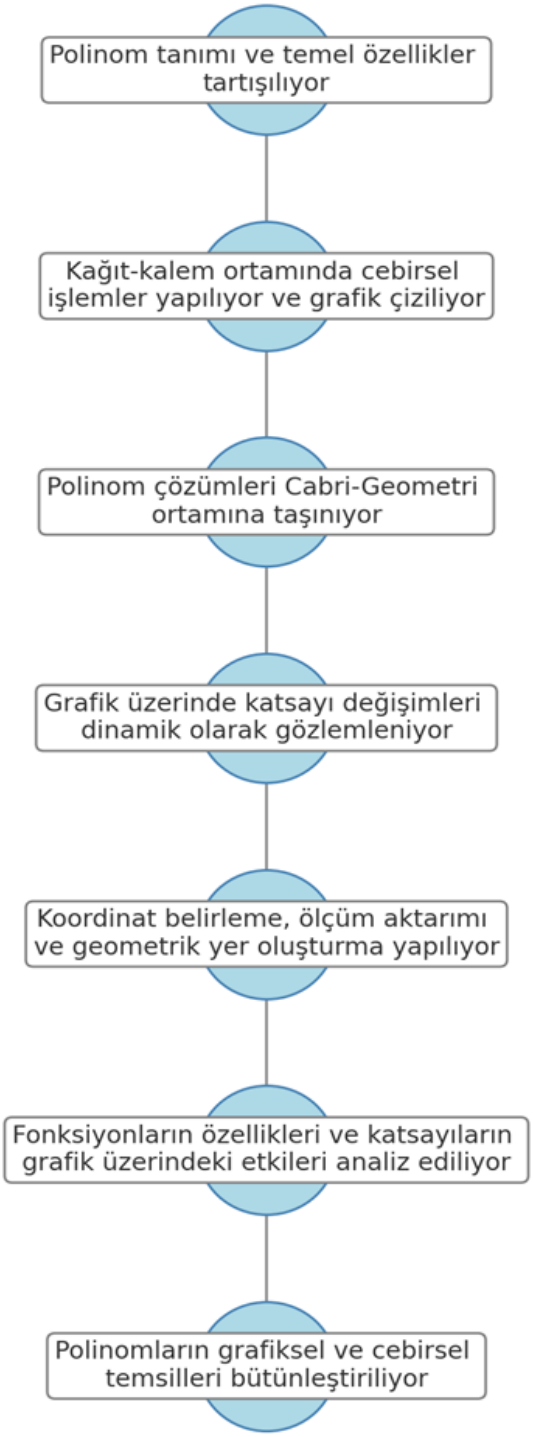
Ö5'in üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik yedinci soruya ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Bu çalışma yaprağında öğretmen adayları, polinomların temel tanımı ve grafiksel özellikleri arasındaki ilişkiyi başlangıçta tam olarak kurmakta zorlanmıştır. Özellikle kağıt-kalem ortamında polinomların grafiklerini çizerken katsayı değişimlerinin etkisini analiz etmekte bazı eksiklikler göstermiştir. Ancak dinamik ortama geçtiklerinde, Cabri-Geometri'nin araçlarının sağladığı görsel destek sayesinde polinomların grafiksel davranışlarını daha iyi anlamışlardır. Süreç boyunca koordinat belirleme, katsayı değişikliklerini analiz etme ve grafiklerin kesişim noktalarını bulma gibi teknikleri uygulayarak fonksiyonların özelliklerini incelemiştir. Cabri-Geometri ortamında gerçekleştirdikleri analizler, öğrencilerin polinomların yapısını ve grafiksel temsillerini daha kapsamlı şekilde anlamalarına katkı sağladığı görünmektedir. Cabri-Geometri ortamı, öğrencilerin polinomların grafiksel özelliklerini analiz etmelerini ve bu ortamı bir enstrümana dönüştürmelerini sağlamaktadır. Kağıt-kalem ortamında kök bulma ve değer verme gibi temel cebirsel işlemleri kullanırken, Cabri-Geometri ortamında koordinat belirleme, ölçüm aktarımı ve geometrik yer oluşturma gibi dinamik teknikleri kullanmışlardır. Bu süreçte, kağıt-kalem ortamındaki 'değer verme, kökleri belirleme ve analitik düzlem üzerinde yerlerini gösterme' işlevsel sabitler, Cabri-Geometri ortamında 'dinamik nokta belirleme, katsayıların grafiksel etkilerini analiz etme ve geometrik yer oluşturma' işlevsel sabitine dönüşmektedir. Şekil 117'de Ö3 ve Ö4'ün, enstrümantal oluşum sürecinde geçtikleri aşamalar enstrümantal oluşum sürecinin bir özeti olarak gösterilmektedir.

Şekil 117

Ö5 ve Ö6'nn üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik çözüm süreçlerinin şematik gösterimi



Şekil 117'de gösterildiği gibi Ö5 ve Ö6'nın üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik gerçekleştirdikleri enstrümantal oluşum sürecini özetlemektedir. Sürecin başında öğrenciler, kağıt-kalem ortamında polinom çözümüne başlamış, ardından Cabri-Geometri ortamını kullanarak verilen polinomlara yönelik grafikler oluşturmuştur. Katsayı değişimlerinin grafik üzerindeki etkisini analiz edip bu gözlemleri cebirsel bilgilerle ilişkilendirmiştir. Bu grafik, öğrencilerin kağıt-kalem ortamındaki temel şemalarını Cabri-Geometri ortamındaki dinamik görselleştirme sürecine nasıl dönüştürdüklerini ve enstrümantal oluşum sürecinde hangi aşamalardan geçtiklerini göstermektedir.

4.1.4. Ters fonksiyonlar Çalışma Yaprağına yönelik Kullanılan Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması

Bu başlık altında öncelikle her bir grubun ters fonksiyonlar çalışma yaprağı temelinde kağıt-kalem ortamı ve Cabri-Geometri ortamını enstrümana dönüştürme süreçlerine yönelik bulgulara yer verilmiştir. Gruplara ait bulgular sunulurken kağıt-kalem ve bilgisayar ortamına ait süreçler ve ilgili grubun enstrümanlı eylem şemasının birbirinin devamı olduğundan dolayı aynı başlık altında verilmiştir. Enstrümanlı eylem şemasının temel bileşeni olan işlevsel sabitler, mümkün olan yerlerde bu sabitleri oluşturan eylemdeki teoremler ve eylemdeki kavramları aktarılmaya çalışılmıştır ve bu yapılırken öğrenci bazında farklılaşan durumlar varsa bu kısımda bahsedilmiştir.

Ters fonksiyonlarla ilgili çalışma yaprağı bilgisayar ve kağıt-kalem ortamında yapılan ve beş farklı sorunun incelemesini içeren bir çalışma yaprağıdır. Bu yaprakta, öğretmen adaylarının doğrusal ve parabolik fonksiyonlara ait ters fonksiyonları anlamalarını hedeflemektedir. Hem kalem-kağıt ortamında hem de Cabri-Geometri ortamını kullanarak, öğrencilere bu fonksiyonların ters fonksiyonlarını incelemeleri, bu fonksiyonların sözel ifadelerini ve grafik temsillerini eşleştirmeleri istenmekte ve fonksiyonların ters fonksiyonlarını grafikleri ile ilişkilendirmeleri beklenmektedir. Ayrıca, analitik düzlemde bir noktanın hareket edişiyle oluşturduğu yolun geometrik görüntüsü ve koordinatları, öğrencilere, analitik düzlemde ters fonksiyon kavramı ve grafiğinin kavramı ve özellikleri ile ilgili yapılandırmalarını tekrar gözden geçirme ve bu kavramları görsel olarak göstermek amacıyla tasarlanmıştır. Bu bağlamda öğrencilerin her bir soru tipine yönelik birtakım teknikler kullandığı gözlenmiştir.

Öğretmen adayları bu çalışma yaprağında, verilen fonksiyonları çözmeye ve grafiklerini çizmeye çalışırken kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarında çoğunlukla benzer enstrümanlı teknikleri kullandıkları tespit edilmiştir. Kağıt-kalem ortamındaki benzer teknikler:

- Cebirsel işlemler
- Değişken değiştirme
- Birebirlik ve örtenlik analizi
- Grafiksel analiz
- Simetri alma
- Tam kare tamamlama
- Denklem dönüşümü
- Cebirsel doğrulama
- Analitik inceleme,

Şeklinde olup, Cabri-Geometri ortamında kullanılan benzer teknikler:

- Nokta belirleme
- Sayı belirleme
- Koordinat belirleme
- Hesap makinesi aracı kullanımı
- Doğru ve ışın oluşturma
- Ölçüm aktarım
- Geometrik yer oluşturma
- Doğruya göre simetri oluşturma

dır. Ters fonksiyonlar çalışma yaprağında kullanılan bu benzer teknikler bir sonraki paragraflarda grup bazında ayrıntılı olarak sunulmuştur.

4.1.4.1. birinci Grubun Ters fonksiyonlar Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması

Bu kısımda birinci grup öğrencilerinin ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı tekniklere yer verilmiştir.

Birinci Grubun Ters Fonksiyonlar Çalışma Yaprağına Yönelik Kağıt-Kalem Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo 21'de öncelikle öğrencilerin kağıt-kalem ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 21

Birinci grubun Ters fonksiyonlar çalıma yaprağına yönelik kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayı	Ö1	Ö2
Teknikler		
Cebirsel İşlemler	+	+
Değişken Değiştirme	+	+
Birebirlik ve Örtenlik Analizi	+	-
Grafiksel Analiz	-	+
Simetri Alma	+	-
Tam kare Tamamlama	+	+
Denklem dönüşümü	+	+

Tablo 21'deki verilere göre, Ö1 ve Ö2, kağıt-kalem ortamında ters fonksiyonları bulurken çeşitli enstrümantal teknikler kullanmaktadır. Öncelikle, *cebirsel işlemler* yoluyla x'i yalnız bırakmaya çalışarak fonksiyonun tersini elde etmeye odaklanmaktadırlar. Ö1, doğrusal fonksiyonun tersini alırken *değişken değiştirme* tekniğini kullanarak y=2x+3 fonksiyonunda x'i yalnız bırakmış ve ters fonksiyonun $f^{-1}(x)=2x-3$ olduğunu bulmuştur. Bu işlemi yaparken *birebirlik ve örtenlik kavramlarını kontrol* amacıyla fonksiyonun özelliklerini değerlendirmiştir. Ö2, ters fonksiyonun tanımlana bilirliğini kontrol etmek için *grafiksel analiz* tekniğini kullanarak fonksiyonun doğrusal olup olmadığını incelemiş ve ardından ters fonksiyonun grafiğini çizerken, y=x doğrusuna göre *simetri* almanın önemini vurgulamıştır. Parabol fonksiyonun tersini bulmada ise, Ö1, x'i yalnız bırakmakta zorlanmış, ancak *tam kare tamamlama* yöntemini kullanarak çözüm üretmiştir. Ö2, *denklem dönüşümü* tekniğiyle, denklemi farklı bir biçime sokarak ve grafik üzerindeki kritik noktaları belirleyerek fonksiyonun tersini görselleştirmeye çalışmıştır.

Birinci Grubun Ters Fonksiyonlar Çalışma Yaprağına Yönelik Cabri-Geometri Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo 22'de öncelikle öğrencilerin Cabri-Geometri ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 22

Birinci grubun Ters fonksiyonlar çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayı	Ö1	Ö2
Teknikler		
Nokta Belirleme	+	+
Sayı Belirleme	+	+
Koordinat Belirleme	+	+
Hesap Makinesi Aracı Kullanımı	+	+
Doğru ve ışın oluşturma	+	+
Ölçüm Aktarım	+	+
Geometrik Yer Oluşturma	+	+
Doğruya Göre Simetri Oluşturma	+	+

Ö1 ve Ö2, doğrusal ve parabol fonksiyonlarına ait ters fonksiyonlarını Cabri-Geometri ortamında çözme ve grafiğini oluşturma sürecinde çeşitli teknikler kullanmıştır. Doğrusal ve parabol fonksiyonların grafiğini oluşturmak için öncelikle *nokta belirleme, sayı ve koordinat belirleme, doğru ve ışın* araçlarından yararlanmış, ardından fonksiyonun cebirsel çözümünü desteklemek amacıyla *hesap makinesi ve ölçüm aktarım araçlarını* kullanmıştır. Daha sonra, grafiğin geometrik yerini belirlemek için *geometrik yer oluşturma* aracını uygulamışlardır. Daha sonra, fonksiyonun belirli noktalarının simetrisini alarak için y=x doğrusunu çizerek, *doğruya göre simetri* tekniğini kullanmıştır. Simetri alınan noktaları temel alarak fonksiyonun tersini oluşturmak amacıyla *geometrik yer oluşturma* aracını yeniden faydalanmaktadır.

Birinci gruptaki öğrenciler (Ö1, Ö2) ters fonksiyonlar çalışma yaprağını inceledikten ve araştırmacının açıklamalarını dinledikten sonra çalışma yaprağındaki soruları yanıtlamaya başlamıştır. Araştırmacı öncelikle bu çalışma yaprağının konuyla ilgili 3 temel matematik alan bilgisi sorusu, iki doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonlar ile ilgili ters fonksiyonların çözümü ve grafiklerinin çizimi ile ilgili hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında, sorudan oluştuğunu açıklamıştır. Fonksiyonlar ile ilgili soruların öncelikle kağıt-kalem ortamında çözülüp grafiğinin çizilmesi, sonrasında Cabri-Geometri ortamını inceleyerek grafiklerin çizilmesini istemiştir. Öğrenciler çalışma yapraklarındaki soruları sırasıyla 'Ters fonksiyon nedir?', 'Bir fonksiyonun ters fonksiyonu tanımlanabilmesi için hangi şartlar gereklidir?' ve 'Fonksiyonun tersi nasıl alınır?' sorularını yanıtladıktan sonra verilen fonksiyonların çözümüne başlamışlardır. Ancak, Ö1 ve Ö2 bir sorunun önce kağıt-kalem ortamında sonrasında aynı sorunun çözümü ve grafiğinin çizimini Cabri-Geometri oramında tamamladıktan sonra diğer soruya geçmeyi tercih etmişlerdir.

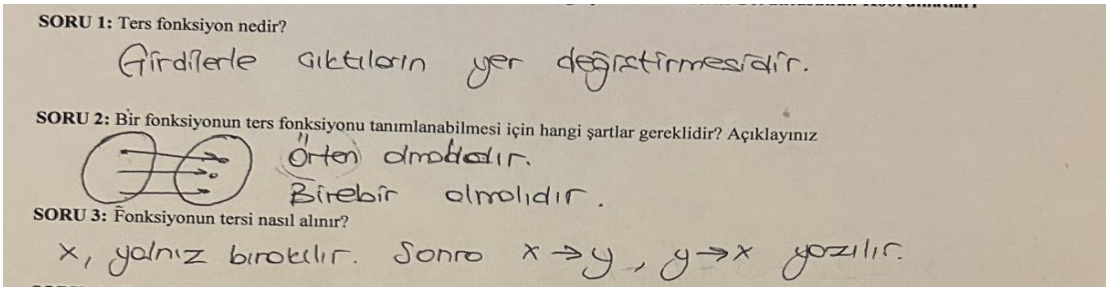
Bu kısımda enstrümantal oluşum süreci aktarılırken gruptaki öğrencilerin çalışma sürecinde aralarında geçen diyalog, çalışma kağıtları ve ekranlarından kesitler verilmektedir.

Ö1 ve Ö2, ters fonksiyon kavramına dair yanıtlarında, fonksiyonun tersinin tanımlanabilmesi için gerekli koşulları anlamaya çalışmaktadır. Ö1, fonksiyonun tersinin tanımlanabilmesi için "örten" ve "birebir" olması gerektiğini belirtmiş ve "çünkü fonksiyonu ters çevirdiğimizde çıktı kümesi girdi kümesi olacak" diyerek açıklamıştır. Ayrıca, "eğer boşta eleman kalırsa bazıları eşleşmemiş olur bu yüzden fonksiyon tanımlı olmaz" diyerek örten kavramına vurgu yapmıştır. Birebir olma durumunu ise "bir eleman birden fazla elemana giderse fonksiyon tanımlı olmaz" şeklinde açıklayarak bu fonksiyonlarla ilgili zihinsel şemasında birebir ve örten fonksiyon kavramlarını birbirine bağlı şekilde ele almaktadır. Ö2, benzer şekilde birebir ve örten olma gerekliliğini vurgulamış, birebirlik "bir elemanın birden fazla elemanla eşleşmemesi için" ve örtenlik "girdilerde boş bir eleman kalmaması için gereklidir" şeklinde ifade etmiştir. Ayrıca ters fonksiyonun bulunması için "x'i yalnız bırakıyoruz denklemde, sabit katsayısı 1 olacak şekilde ve yanında hiçbir sabit sayı olmadan" diyerek cebirsel bir süreç tanımlamıştır. Bu açıklamalar, Ö1 ve Ö2'nin ters fonksiyonun varlığına ilişkin gerekli koşulları kavrama sürecinde benzer bir yaklaşım sergilediklerini ortaya koymaktadır. Yanıtlarından yola çıkarak, öğrencilerin zihinsel şemalarının birebir ve örten fonksiyon kavramlarıyla şekillenmeye başladığı görülmektedir. Özellikle, ters fonksiyonun tanımlanabilmesi için gerekli koşulları fark etmeleri, kavramlar arasındaki bağlantıları kurduklarını göstermektedir. Öğrenciler, ters fonksiyonun cebirsel ve grafiksel temsilleri üzerine düşünerek bu bilgileri birbirleriyle ilişkilendirmektedir.

Ö1 ve Ö2'nin alan bilgisi temel sorular ile ilgili yanıtları sırasıyla şekil 118 ve 119'da verilmiştir.

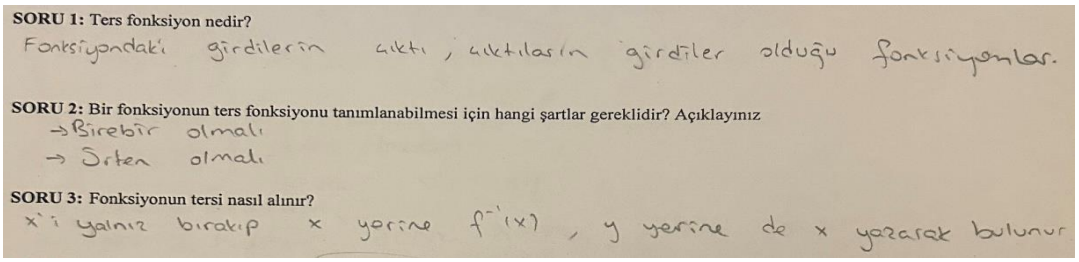
Şekil 118

Ö1'in ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik temel alan sorularına ilişkin yanıtları.



Şekil 119

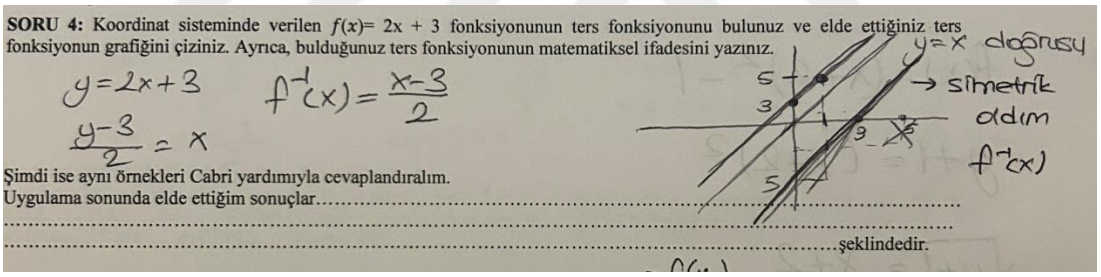
Ö2'nin ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik temel alan sorularına ilişkin yanıtları.



Ö1 ve Ö2, ters fonksiyonlarla ilgili tanımlama sorularından sonra, doğrusal fonksiyonun kağıt-kalem ortamında tersini bulma sürecine geçmiştir. Ö1, "x yalnız bırakılır sonra x yerine y, y yerine x yazılır" diyerek ters fonksiyonun bulunma sürecini özetlemektedir. Ö1, f(x)=2x+3 fonksiyonunun tersini elde etmek amacıyla şu işlemleri gerçekleştirmiştir: "y=2x+3, buradan y-3=2x, x=(y-3)/2, yani f□¹(x)=(y-3)/2". Sonrasında şekil 120'de görüldüğü üzere grafiği çizmek için "x yerine 1 verelim y 5 olsun, 0 vereyim y 3 olur" diyerek doğrusal fonksiyonun tersinin grafiğini oluşturmuştur.

Şekil 120

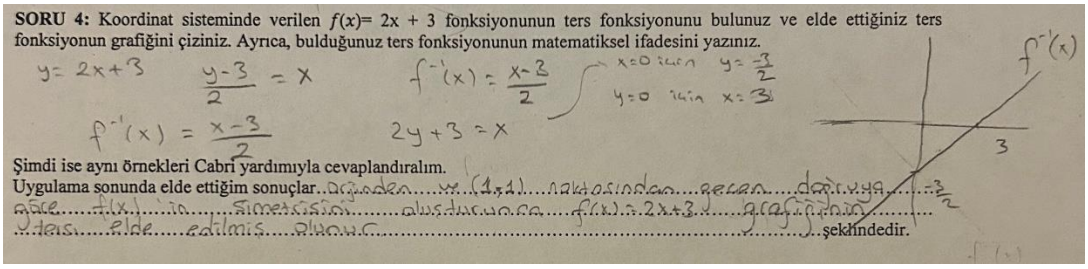
Ö1'in ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik doğrusal fonksiyona ilişkin yanıtı.



Bu süreçte, "y=x doğrusunu çiziyoruz ve doğrusal grafiğin y=x doğrusuna göre simetriğini alıyoruz" ifadesini kullanarak, fonksiyonun tersinin y=x doğrusuna göre simetri alınarak elde edilmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Ö2'de benzer adımları denkemi çözüp ve grafiğini çizmiştir. Ö2'nin bu soruyla ilgili yanıtı şekil 121'de verilmiştir.

Şekil 121

Ö2'nin ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik doğrusal fonksiyona ilişkin yanıtı.



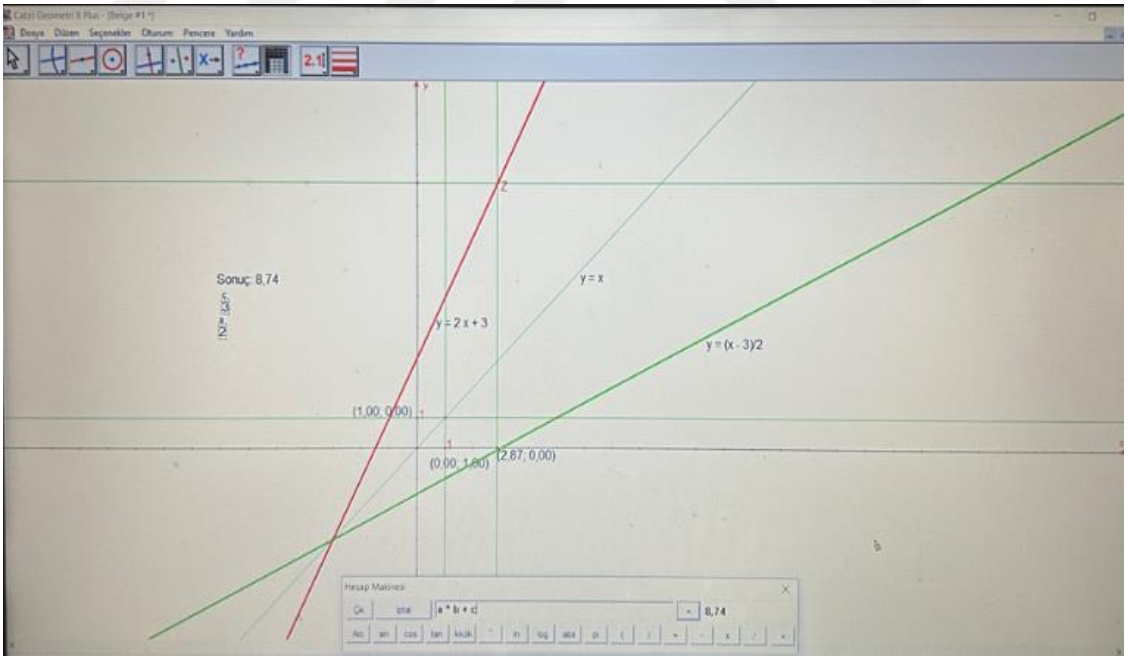
Cabri-Geometri ortamında, Ö1 ve Ö2 fonksiyonun grafiğini oluşturmak için adım adım ilerlemişlerdir. Ö1, "önce fonksiyonunun grafiğini çizmek yani 2x + 3'ün grafiğini çizeceğiz

ardından y = x doğrusunu çizeceğiz sonra bu doğruya göre simetriğini alacağız" diyerek bir plan oluşturmuştur. Bu süreçte, "Nesne üzerinde noktayı seçtik. Sayıları atadık 2 ve 3 olarak, hesap makinemizi açıyoruz ve y sonucunu elde ediyoruz" şeklinde bir işlem sırası takip edilmiştir.

Ö2, "kesişim noktasını bulmak için dik doğruları çiziyoruz, bu şekilde kesişim noktayı belirliyoruz" diyerek işlemleri açıklamıştır. Ancak süreçte bazı teknik sorunlar yaşanmıştır. Ö1, "geometrik yeri oluşturamadık, bir daha deneyelim belki bir yerde hata yapmışız" diyerek süreci tekrar etmiştir. Son olarak, "y = x doğrusunun orijinden ve (1,1) noktasından geçtiğini biliyoruz, bundan yola çıkarak x ve y eksenleri üzerinde 1 noktasından geçen dik doğruları çizelim" diyerek farklı bir yöntemle doğruyu oluşturmuştur. Ancak, Ö1 ve Ö2 sürecin son aşamasında yanlış bir yol izlediklerini fark etmiştir. Simetri noktalarından bir doğru çizmek yerine, geometrik bir yer belirlemeleri gerektiğini gözden kaçırmışlardır. Ö2'nin bu fonksiyonun çizimi ile ilgili hatalı ve doğru olan çizimlerinin ekran kaydından kesitler şekil 122 ve 123'te verilmiştir.

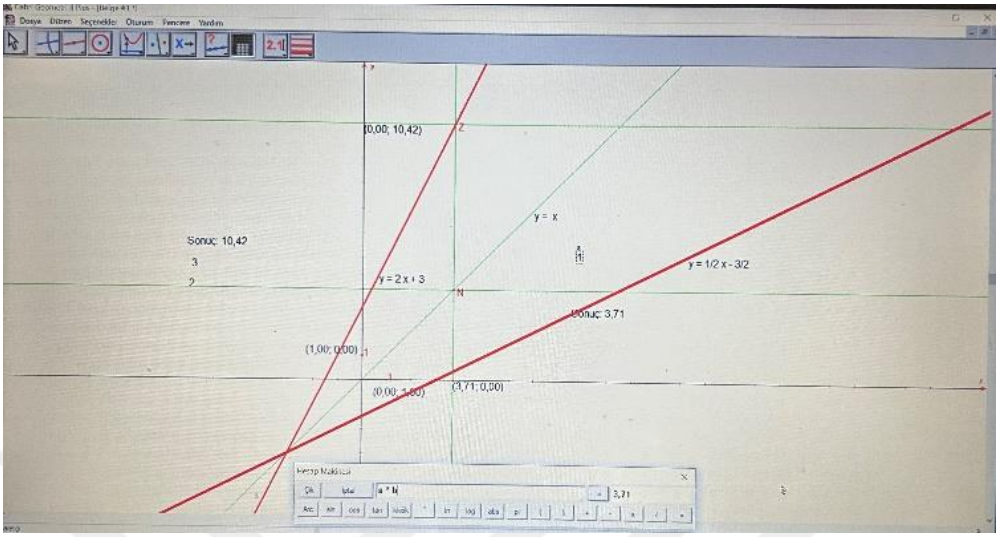
Şekil 122

Ö2'nin ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik hatalı grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Şekil 123

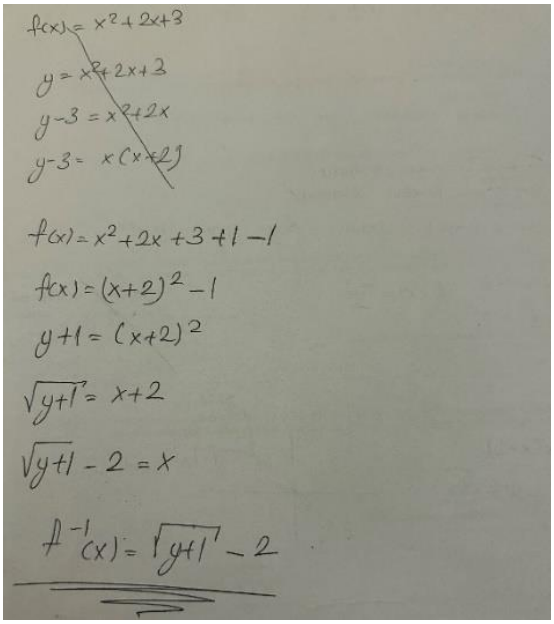
Ö2'nin ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Ö1 ve Ö2, $f(x)=x^2+2x+3$ parabolüne ait ters fonksiyonun çözümü ve grafiğinin oluşturulmasına ilişkin kağıt-kalem ortamında cebirsel işlemler yaparak denklemi yeniden düzenlemeye çalışmıştır. Ö1, şekil 124'te görüldüğü üzere "parabol fonksiyonunun tersini bulmak için x'i yalnız bırakmakta sorun yaşamıştım ama sonra aklıma geldi, denklemin devamını +1 ve -1 değerlerini ekledim. Bu şekilde denklemi $(x + 2)^2-1$ şeklinde yazdım" diyerek tam kare yöntemiyle ters fonksiyonu elde etmeye çalışmıştır.

Şekil 124

Ö1'in ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik parabolün tersini alma çözümüne ilişkin yanıtı.

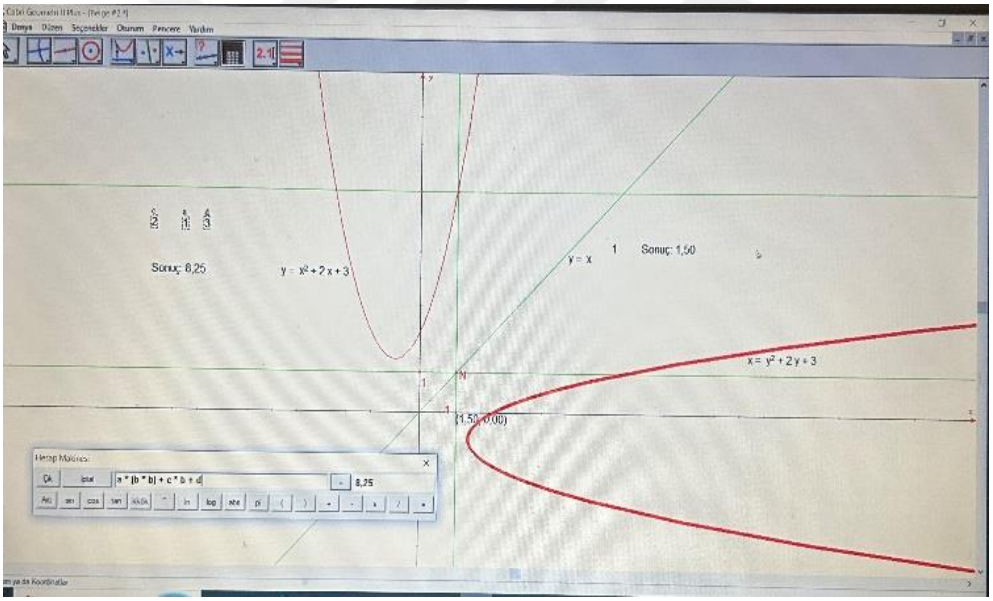


Cabri-Geometri ortamında, Ö2 "f(x)=x²+2x+3 denklemini her zamanki adımları ilerleyerek yaptık ve grafiğini oluşturduk" diyerek işlemlerini sürdürmüştür. Ancak burada doğrusal fonksiyon gibi simetri noktalarını belirleyip bir doğru çizme yöntemi çalışmamış ve "burada olmayacak, oluşturduğumuz grafik parabol" diyerek sürecin doğrusal fonksiyon için uygulanan adımlardan farklı olması gerektiğini fark etmiştir.

Ö1, "parabolün üzerinde herhangi bir nokta seçmemeliyiz bence. x yani başlangıç noktasının hareketiyle hareket eden bir nokta olmalıdır" diyerek geometrik yer oluşturma gerekliliğini anlamaya başlamıştır. Ö2, "nokta olarak Z noktasını seçiyorum ve doğruya göre simetriğini alıyorum. Şimdi de geometrik yer aracı yardımıyla ters fonksiyonu oluşturdum" diyerek hatalarını düzelterek süreci doğru şekilde tamamlamışlardır. Ö1'in bu probleme ait çizimi şekil 125'te verilmiştir.

Şekil 125

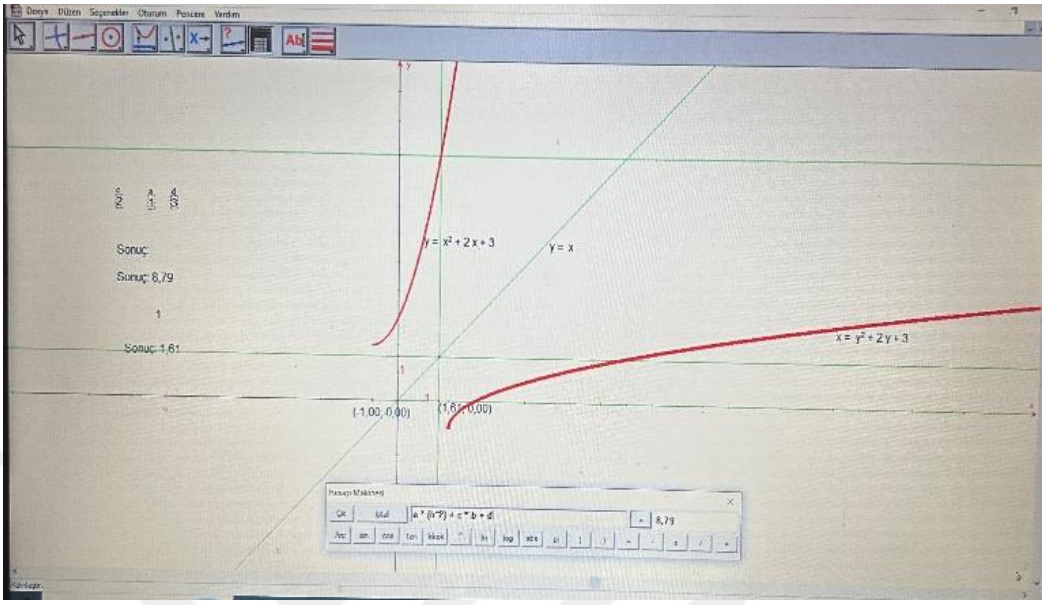
Ö1'in ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik hatalı parabol grafiği çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Ancak burada da bir sorun yaşanmıştır. Ö2, şekil 126'da görüldüğü üzere "bu denklemin tanım kümesi -1'den sonsuza kadar dır ama bizim oluşturduğumuz grafik te eksi değerlerde var. Nasıl bir değişiklik yapmalıyız?" diyerek fark ettiği hatayı dile getirmiştir. Araştırmacının rehberliğiyle, başlangıç noktası -1'den sonsuza uzanan bir ışın üzerinde belirlenerek, parabol ve ters parabol için doğru tanım ve değer kümesi oluşturulmuştur. "Işını oluşturmak için ışın aracını kullandık" diyerek süreci tamamlamıştır.

Şekil 126

Ö2'nin ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik parabol tersi grafiği çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Bu süreçte, Ö1 ve Ö2'nin enstrümantal oluşum süreçleri incelenmiştir. Başlangıçta ters fonksiyon kavramını anlamaya çalışırken, birebir ve örten fonksiyon koşullarını tanımlayarak eski teorik bilgilerini yapılandırmaya çalışmıştır. Daha sonra, kağıt-kalem ortamında ters fonksiyonlar ile ilişkili cebirsel işlemler yaparak bu bilgilerini uygulamıştır.

Cabri-Geometri ortamında ise, araçlarını kullanarak grafik çizme ve simetri alma süreçlerini gerçekleştirmiştir. Ancak, doğrusal fonksiyon ile parabol fonksiyonu arasında yöntem farklılıklarını ilk etapta fark edememişler ve yanlış bir yaklaşım izlemişlerdir. Bu süreçte, Ö1'in Cabri-Geometri'ye yönelik eleştirisi, onun yazılımı bir enstrüman olarak nasıl gördüğünü ve kullanırken karşılaştığı sınırlamaları fark ettiğini göstermektedir. Ö1, y=x doğrusunun geometrik yer olarak tanımlanmasının ve simetri alınmasının Cabri-Geometri'de hata vermesini eleştirmekte ve yazılımın geliştirilmesi gerektiğini öne sürmektedir. Bu eleştiri, onun yalnızca mevcut araçları kullanmakla kalmayıp, yazılımın sınırlarını sorgulayarak nasıl daha işlevsel hale getirilebileceğini düşündüğünü göstermektedir. Bu bağlamda, Ö1'in süreci, enstrümantalizasyon çerçevesinde değerlendirilmiştir.

Araştırmacının açıklamaları ise Ö1'in bu eleştirisine bir çerçeve sunmaktadır. Yazılımın ortaokul seviyesindeki öğrenciler için tasarlandığını, dolayısıyla öğretmen adaylarının beklentilerine tam olarak yanıt veremeyebileceğini ifade etmektedir. Ancak, yazılıma eklenebilecek yeni araçlar ve komutlarla bu eksikliğin giderilebileceğini belirtmektedir. Bu açıklamalar, Ö1'in yazılımın sınırlarını sorgulayan yaklaşımına bir yanıt niteliği taşımakta ve onun bakış açısını genişletebilecek bir öneri sunmaktadır. Bu bağlamda, Ö1'in Cabri-

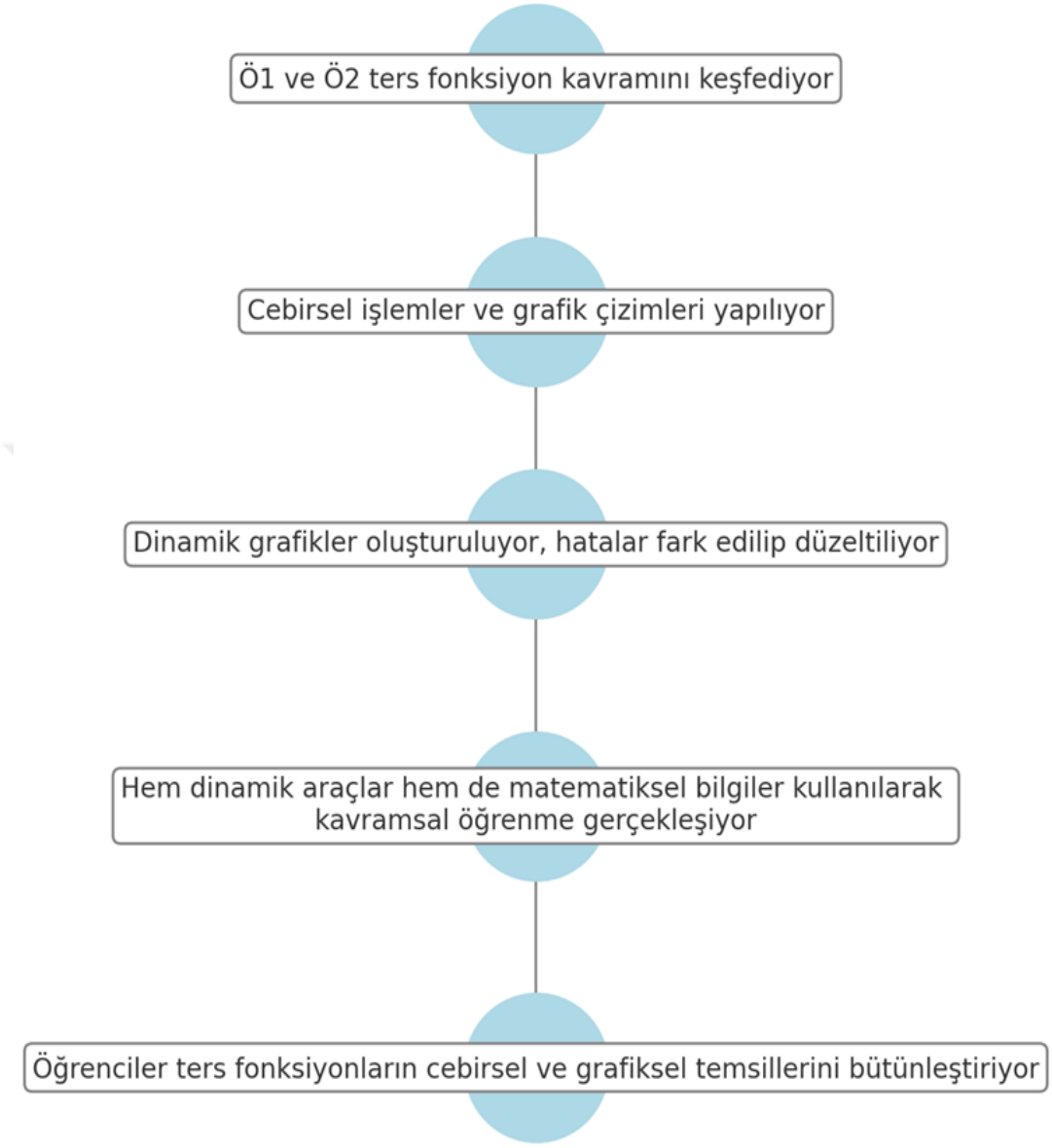
Geometri'yi sorgulaması ve eksiklerini dile getirmesi, onun enstrümantalizasyon sürecinin bir parçası olarak değerlendirilebilir.

Ö1 ve Ö2'nin kağıt-kalem ortamında gerçekleştirdiği uygulamada, eylemdeki teoremin "Analitik düzlemde doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların ters fonksiyonları elde edilip grafiksel temsili çizilecek ise, fonksiyonun birebir ve örten olması gerektiği, girdiler ve çıktıların yer değiştirmesi gerektiği, dolayısıyla x ve y'nin koordinat dönüşümleri gerektiği" şeklinde olduğu görülmüştür. Bu teoremin, cebirsel işlemler ve işlemsel dönüşümler (örneğin, denklem düzenleme, koordinat dönüşümü gibi teknikler) eylemdeki kavramlarına dayandığı söylenebilmektedir.

Ancak Cabri-Geometri ortamına geçtiklerinde, geometrik dönüşümler ve dinamik yapı sayesinde bu ortamı bir enstrüman olarak kullanmaya başladıkları ve matematiksel kavramları farklı bir bağlamda yeniden yapılandırdıkları gözlemlenmektedir. Ö1 ve Ö2'nin Cabri-Geometri ortamında gerçekleştirdiği ters fonksiyonların çözüm süreci, grafik analizleri ve Cabri-Geometri araçlarının entegrasyonu, öğretmen adaylarının ters fonksiyonların çözümüne ve grafik çizme yaklaşımlarına daha somut ve görsel temelli bir perspektif kazanmalarına katkı sağlamaktadır. Birinci grubun, kağıt-kalem ortamında ters fonksiyonların grafiğini çizmek için fonksiyonun birebir ve örten olup olmadığını tartışma, x'i yalnız bırakma ve grafik oluşturma aşamalarında kavramsal zorluk yaşama şeklinde belirginleşen işlevsel sabitinin, Cabri-Geometri ortamında "doğruya göre simetri alma, ardından geometrik yer belirleme ve dinamik grafik oluşturma" sürecine dönüştüğü gözlemlenmiştir. Şekil 127'de Ö1 ve Ö2'ye ait enstrümantasyon sürecinin özeti gösterilmektedir.

Şekil 127

Ö1 ve Ö2'nin ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik enstrümantasyon süreci



Şekil 127, Ö1 ve Ö2'nin ters fonksiyonları anlamlandırma sürecinde yaşadığı enstrümantasyon sürecini özetlemektedir. Süreç, öğrencilerin ters fonksiyon kavramını anlamaya başlamasıyla başlamakta ve kağıt-kalem ortamında cebirsel işlemler ile grafik çizimleri yaparak ilerlemektedir. Daha sonra, Cabri-Geometri ortamına geçilerek dinamik grafikler oluşturulmakta, hatalar fark edilip düzeltilmekte ve grafik oluşturma süreçleri tamamlanmaktadır. Bu süreç boyunca, öğrenciler hem dinamik araçları hem de matematiksel bilgileri kullanarak ters fonksiyonları çözümleme ve grafiklerini oluşturma sürecini devam etmiştir. Sonuç olarak, öğrenciler ters fonksiyonların cebirsel ve grafiksel temsillerini

bütünleştirerek kavramsal anlamlandırmayı geliştirmiştir. Grafik, öğrencilerin enstrümantasyon süreci boyunca nasıl ilerlediğini, hangi aşamalardan geçtiğini ve araçları nasıl kullandığını gösteren bir akış şeması niteliğindedir.

4.1.4.2. İkinci Grubun Ters fonksiyonlar Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması

Bu kısımda ikinci grup öğrencilerinin ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı tekniklere yer verilmiştir.

İkinci Grubun Ters Fonksiyonlar Çalışma Yaprağına Yönelik Kağıt-Kalem Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo 23'te öncelikle öğrencilerin kağıt-kalem ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 23

İkinci grubun Ters fonksiyonlar çalıma yaprağına yönelik kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayı	**Ö3**	**Ö4**
Teknikler		
Değişken Değiştirme	+	+
Cebirsel Doğrulama	+	+
Analitik İnceleme	+	+

Tablo 23'teki verilere göre, Ö3 ve Ö4, doğrusal ve parabol fonksiyonlarına ait ters fonksiyonlarını kağıt-kalem ortamında çözme ve grafiğini oluşturma sürecinde çeşitli teknikler kullanmıştır. Verilen fonksiyonların ters fonksiyonunu cebirsel olarak çözüp grafiğini belirlemek için *değişken değiştirme* tekniğini kullanarak verilen fonksiyonların tersini elde etmiştir. Ayrıca, fonksiyonların birebir olup olmadığını doğrulamak amacıyla *cebirsel doğrulama* tekniğinden yararlanmanın yanı sıra, ters fonksiyonun doğrusal olup olmadığını anlamak için *analitik inceleme* tekniğini kullanarak fonksiyonun özelliklerini teorik çerçevede tartışmaktadır.

İkinci Grubun Ters Fonksiyonlar Çalışma Yaprağına Yönelik Cabri-Geometri Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo 24'te öncelikle öğrencilerin Cabri-Geometri ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 24

İkinci grubun Ters fonksiyonlar çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayı	Ö1	Ö2
Teknikler		
Nokta Belirleme	+	+
Sayı Belirleme	+	+
Koordinat Belirleme	+	+
Hesap Makinesi Aracı Kullanımı	+	+
Doğru ve Işın belirleme		
Ölçüm Aktarım	+	+
Geometrik Yer Oluşturma	+	+
Doğruya Göre Simetri Oluşturma	+	+

Ö3 ve Ö4, doğrusal ve parabol fonksiyonlara ait ters fonksiyonların grafiksel temsillerini Cabri-Geometri ortamında oluşturmak amacıyla çeşitli enstrümanlı teknikler kullanmaktadır. Verilen fonksiyonların grafiğini oluşturmak için öncelikle *nokta, sayı ve koordinat belirleme* araçlarından yararlanmış, ardından fonksiyonun cebirsel çözümünü desteklemek amacıyla *hesap makinesi ve ölçüm aktarım araçlarını* kullanmıştır. Daha sonra, grafiğin geometrik yerini belirlemek için *geometrik yer oluşturma* tekniğini uygulamışlardır. Daha sonra, fonksiyonun belirli noktalarının simetrisini alarak nasıl tersine dönüştüğünü gözlemleyebilmek için y = x doğrusunu oluşturmuş ve *doğruya göre simetri* tekniğini kullanmıştır. Son aşamada, simetri alınan noktaları temel alarak fonksiyonun tersini oluşturmak amacıyla *geometrik yer oluşturma* tekniğinden yeniden faydalanmaktadır.

İkinci gruptaki öğrenciler (Ö3, Ö4) ters fonksiyonlar çalışma yaprağını inceledikten ve araştırmacının açıklamalarını dinledikten sonra çalışma yaprağındaki soruları yanıtlamaya başlamıştır. Araştırmacı öncelikle bu çalışma yaprağında ters fonksiyonlar ile ilgili üç alan bilgisi sorusu ve doğrusal ve parabol fonksiyonların tersinin çözümü ve grafiklerinin çizimine yönelik hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında, iki sorudan oluştuğunu açıklamıştır. Ters fonksiyonlar ile ilgili soruların öncelikle kağıt-kalem ortamında çözülüp grafiğinin çizilmesi, sonrasında Cabri-Geometri ortamını inceleyerek grafiklerin çizilmesini istemiştir. Öğrenciler çalışma yapraklarındaki soruları sırasıyla ‘Ters fonksiyon nedir?’, ‘Bir fonksiyonun ters fonksiyonu tanımlanabilmesi için hangi şartlar gereklidir?’ ve ‘Fonksiyonun tersi nasıl alınır?’ sorularını yanıtladıktan sonra doğrusal ve parabol formundaki denklemleri tersini alma sorularının çözümüne başlamışlardır.

İlk aşamada, Ö3 ters fonksiyonun nedir sorusun yanıtı için "Ters fonksiyonun birebir ve örten olması gerekiyor" diyerek birebir ve örten olma koşullarını vurgulamıştır ve bu kavramı

açıklamaya çalışmıştır. Ancak, Ö4 bu açıklamanın bir tanım olmadığını fark etmiş ve "O tanımlama değil, bu sadece hangi şartlarda ters fonksiyon olabileceğini söylüyor. Ters fonksiyon şöyle olacak: A'dan B'ye bir fonksiyon tanımlı olsun, bu fonksiyonun tersi de aynı ilişkide oluyorsa, bu fonksiyon ters fonksiyondur" diyerek, eski teorik bilgilerindeki eksikliklere rağmen Ö3'ün ifadesini düzeltmektedir.

Ardından, "Bir fonksiyonun ters fonksiyonunun tanımlanabilmesi için hangi şartlar gereklidir?" sorusuna ilişkin aralarında geçen diyalog aşağıda verilmektedir:

Ö4: Bir fonksiyonun ters olması için birebir ve örten olması gerekiyordu, değil mi?

Ö3: Evet, tabii ki.

Ö4: Fonksiyonun tersine baktığımızda boşta eleman kalmaması gerekiyor. Bu yüzden örten fonksiyon olmalı. Normal fonksiyonda x verip y'yi buluyoruz ya, ters fonksiyonda y verip x'i bulacağız.

Ö3: Evet, ters fonksiyon, bir fonksiyonun sonuçlarını girdisine götüren fonksiyondur.

Bu konuşmalar, Ö3 ve Ö4'ün ters fonksiyonun gerekliliklerini tartışırken, işlem yönü değişimini anlamaya başladıklarını göstermektedir. Sonrasında, fonksiyonun tersinin nasıl alınacağına dair aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

Ö3: Fonksiyonun tersi nasıl alınır?

Ö4: x'i yalnız bırakarak.

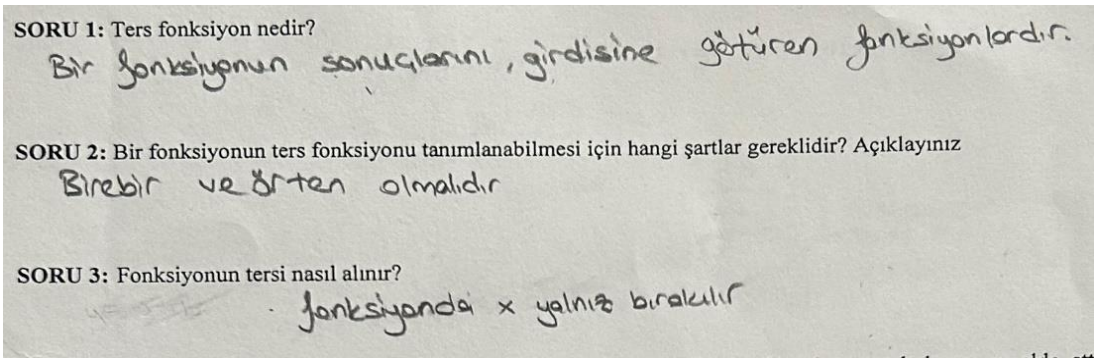
Ö3: Evet, fonksiyonda x yalnız bırakılır.

Ö4: O zaman ben ters fonksiyonun tanımına şu şekilde yazıyorum: Bir fonksiyonun tanım kümesindeki eşleştiği elemanları tersine çevirir. Yani, eğer f(x)=y ise f'in tersi y=x olur.

Bu süreç, öğretmen adaylarının ters fonksiyon kavramını önce sözel olarak anlamlandırmaya, ardından cebirsel düzenlemelerle desteklemeye çalıştıklarını göstermektedir. Başlangıçta, Ö3 ters fonksiyonun gereklilikleri ile tanımı karıştırmış, ancak Ö4'ün yönlendirmesiyle aralarındaki farkı kavramaya başlamıştır. Ayrıca, cebirsel işlemin yönü değişimini anlamaları, kavramı hem sözel hem de cebirsel olarak ele aldıklarının göstergesidir. Başlangıçta tanım ve koşulları ayırt etmekte zorlanmalarına rağmen, Ö3 ve Ö4 karşılıklı etkileşim ve tartışma yoluyla ters fonksiyon kavramının cebirsel işlem ve sözel temsillerini oluşturmuştur. Bu süreç, zaman içinde değişim ve dönüşüm göstererek, başlangıçtaki kavramsal belirsizlikten işlem ve sözel temsillerin bütünleştiği dinamik bir yapıya ilerlediği görünmektedir. Ö3 ve Ö4'ün ters fonksiyonlar temel tanım sorularına ilişkin yanıtları sırasıyla şekil 128 ve 129'da verilmiştir.

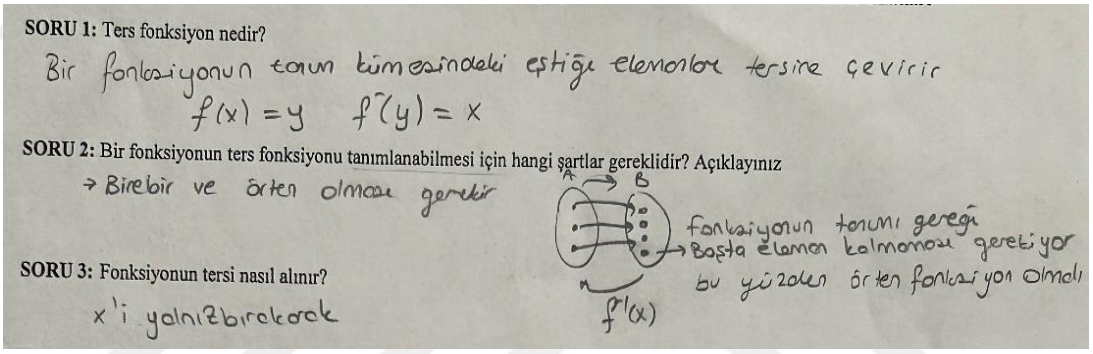
Şekil 128

Ö3'ün ters fonksiyonlar çalışma yaprağında temel tanım sorularına ilişkin yanıtı



Şekil 129

Ö4'ün ters fonksiyonlar çalışma yaprağında temel tanım sorularına ilişkin yanıtı

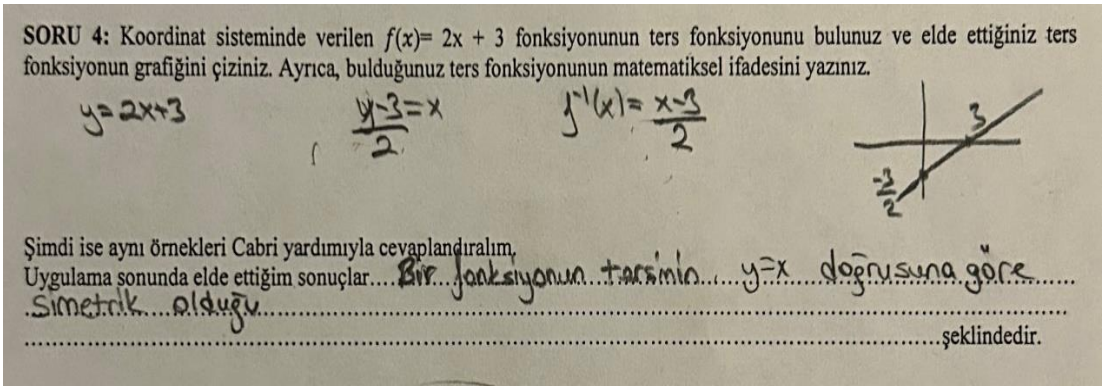


Dördüncü soruda bir doğrusal denklem verilmiştir ve fonksiyonun tersi istenmiştir. Bu doğrultuda Ö3 ve Ö4, önce kağıt-kalem ortamında ve ardından Cabri-Geometri ortamında, f(x)=2x+3 fonksiyonunun tersini bulma sürecini anlamaya yönelik çalışmaya başlamıştır. İlk olarak, Ö4, ters fonksiyonun nasıl hesaplanacağına dair şu açıklamayı yapmıştır: "Fonksiyonun tersini bulmak için, x'i yalnız bırakmamız gerekmektedir. y=2x+3 denkleminde düzenleme yaparak, $x=(y-3)/2$ elde ederiz. Bu durumda, ters fonksiyonun matematiksel ifadesi $f^{-1}(x)=(x-3)/2$ şeklinde olur." Ö3, ters fonksiyonun doğrusal olup olmadığını kontrol etmek amacıyla fonksiyonun grafiğini çizmiş, ardından Ö4, ters fonksiyonun birebir ve örten olma koşullarını tartışarak, fonksiyonun tersinin olup olmadığını sorgulamıştır. Ö3, doğrusal bir fonksiyonun her zaman birebir olduğunu vurgulayarak, "Doğrusal fonksiyon olduğu için birebir olduğunu zaten biliyoruz. O zaman ters fonksiyonu kesinlikle vardır." demiştir. Ö4 ise, ters fonksiyonun doğruluğunu teyit etmek amacıyla, fonksiyonun doğrusal olmasının tek başına yeterli olmayacağını ve ters fonksiyonun nasıl doğrulanabileceğini tartışmıştır. Cabri-Geometri ortamında, Ö4 önce verilen fonksiyonu çizmiş, ardından Ö3 şu soruyu dile getirmiştir: "Fonksiyon 3'te 0 veriyor ya, acaba tersi de 0'da 3 verecek mi?" Ö4, ters fonksiyonun doğruluğunun kontrol edilmesi gerektiğini ifade ederek, "Eğer ters fonksiyon doğruysa, bu

noktaların yer değiştirdiğini görmeliyiz." demiştir. Ö3 ve Ö4'ün bu soruya ilişkin yanıtları şekil 130 ve 131'de verilmiştir.

Şekil 130

Ö3'ün ters fonksiyonlar çalışma yaprağında doğrusal fonksiyonun tersine yönelik yanıtı


SORU 4: Koordinat sisteminde verilen $f(x)= 2x + 3$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz ve elde ettiğiniz ters fonksiyonun grafiğini çiziniz. Ayrıca, bulduğunuz ters fonksiyonunun matematiksel ifadesini yazınız.

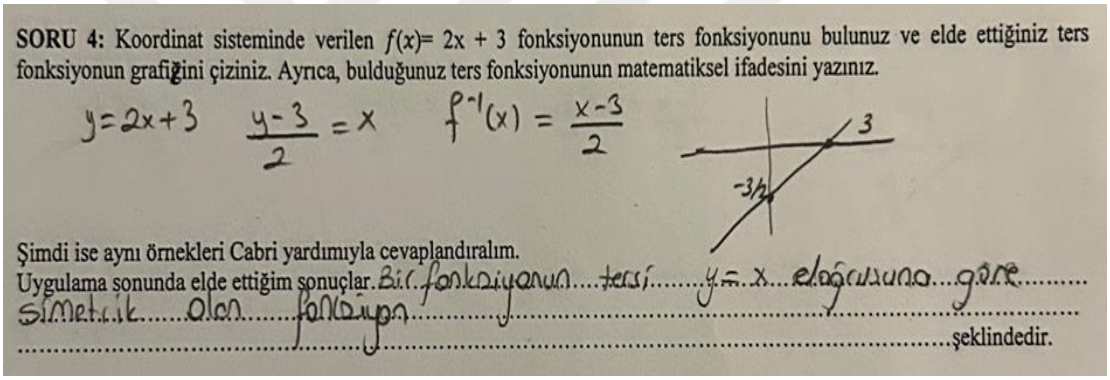
$y=2x+3$ $\frac{y-3}{2}=x$ $f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2}$

3, $-\frac{3}{2}$

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.
Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar....Bir fonksiyonun tersinin y=x doğrusuna göre simetrik olduğu.....şeklindedir.

Şekil 131

Ö3'ün ters fonksiyonlar çalışma yaprağında doğrusal fonksiyonun tersine yönelik yanıtı


SORU 4: Koordinat sisteminde verilen $f(x)= 2x + 3$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz ve elde ettiğiniz ters fonksiyonun grafiğini çiziniz. Ayrıca, bulduğunuz ters fonksiyonunun matematiksel ifadesini yazınız.

$y=2x+3$ $\frac{y-3}{2}=x$ $f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2}$

3, $-3/2$

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.
Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar. Bir fonksiyonun tersi y=x doğrusuna göre simetrik olan fonksiyon.....şeklindedir.

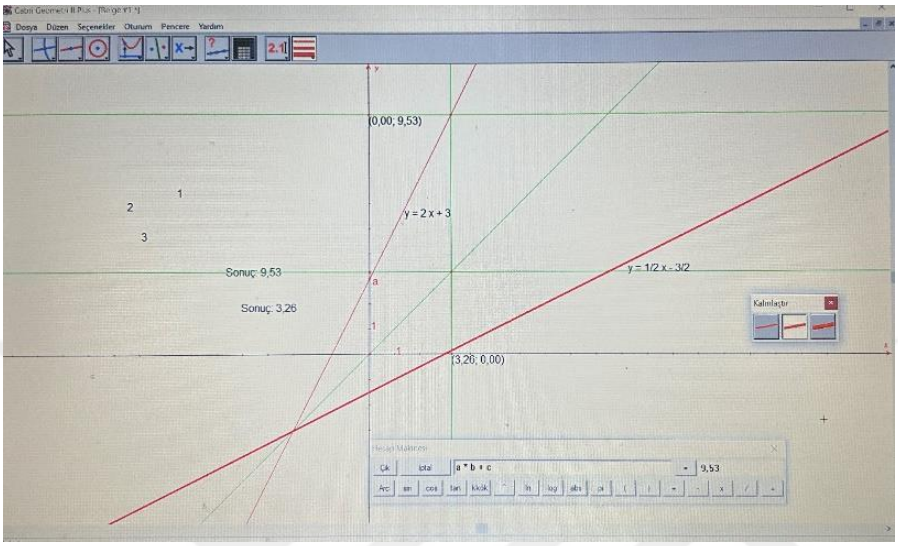
Ö3 ve Ö4, Cabri-Geometri ortamında, ters fonksiyonun doğrudan çizilmesi yerine, verilen fonksiyondan yola çıkma gerektiği konusunda araştırmacıya danışmışlardır. Araştırmacı, ters fonksiyonun doğrudan çizilmemesi gerektiğini, bunun yerine verilen fonksiyondan türetileceğini açıklamıştır. Bu açıklamanın ardından, Ö3, "Öyleyse önce y=x doğrusunu çizelim ve verilen fonksiyonun grafiğindeki noktaların bu doğruya göre simetrisini alalım." demiştir. Ö4 ise, simetri alınacak doğruyu belirterek, "Ama noktaya göre simetri almak yerine doğruya göre simetri almamız lazım, değil mi?" şeklinde bir düzeltme yapmıştır.

Birkaç noktanın simetrisi alındıktan sonra, Ö3 ve Ö4, geometrik yer aracını kullanarak oluşturdukları simetrik noktalar ile ters fonksiyonun geometrik yerini oluşturmaya çalışmıştır ancak y=x doğrusunu bir doğru olarak değil de bir geometrik yer olarak oluştuklarına göre noktanın doğruya göre simetri aracını kullanamamışlardır. Bundan dolayı y=x geometrik yeri silerek y=x doğrusunu çizip ve doğruya göre simetri aracı yardımıyla belirlenen noktaların doğruya göre simetrisini oluşturarak simetri noktaları belirleyip ve geometrik yer aracını

kullanarak fonksiyonun tersini oluşturmayı başarmışlardır. Ö3 ve Ö4'ün bu soruya ilişkin ekran kayıtlarından kesitler şekil 132 ve 133'te verilmiştir.

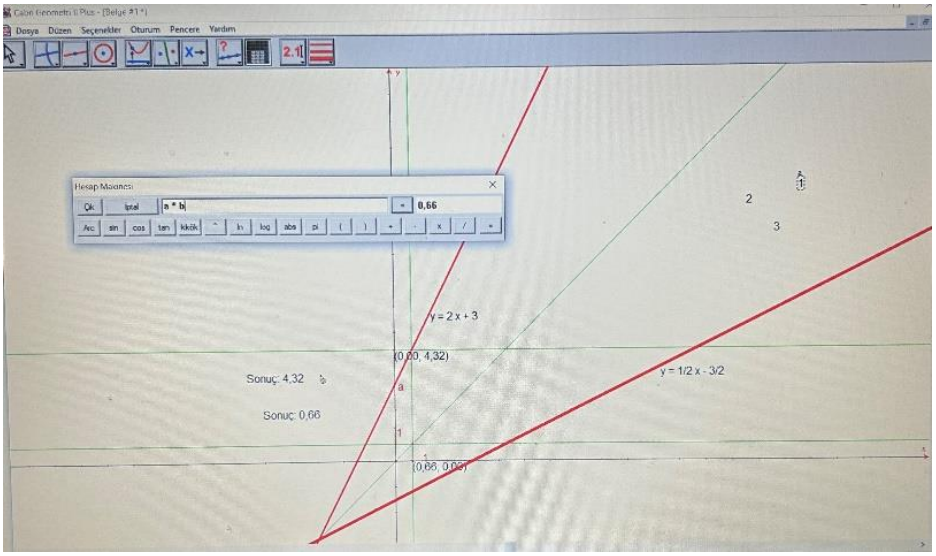
Şekil 132

Ö3'ün ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik doğrusal fonksiyonun tersine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Şekil 133

Ö3'ün ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik doğrusal fonksiyonun tersine ilişkin ekran kaydından bir kesit.

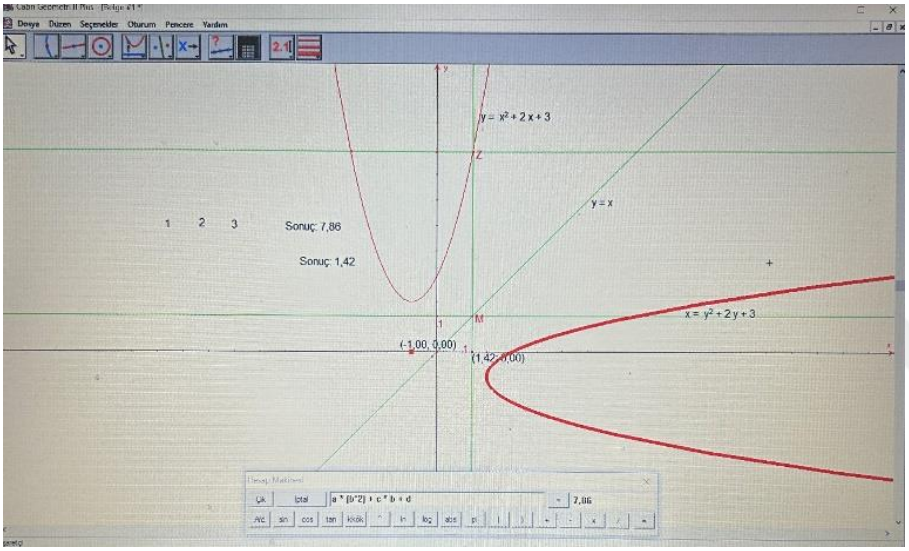


Bir sonraki adımda $f(x)=x^2+2x+3$ parabolüne ait ters fonksiyonun çözümü ve grafiğinin oluşturulmasına ilişkin işlemler gerçekleştirilmiştir. Problemin çözümünü kağıt-kalem ortamında yapabilmelerine rağmen fonksiyona ilişkin grafiği oluşturamamışlardır. Cabri-Geometri ortamına gelince, Ö3 ve Ö4, bu soruya bir önceki problemde yaptıkları adımları aynen tekrar ederek çözüm ve grafiği elde etmeye çalışmıştır. Ancak, Ö3, yine bir hata olduğunu

fark etmiştir ve "Oluştu ama birebir değil gibi duruyor." diyerek başlangıç noktasını doğru bir şekilde oluşturmadığını anlamıştır. Ö4 ise, tanım kümesini göz ardı ettiklerini belirterek, "Çünkü tanım kümesini dikkate almadık. Soruda fonksiyonun tanım kümesi f:[−1,∞)→[0,∞) olarak verilmişti." açıklamasını yapmıştır. Ö3, tanım kümesini belirlerken x ekseni yerine ışın kullanmayı önermiştir: "Eğer tanım kümesi [−1,∞) ise, başlangıç noktasını doğrudan -1'e koyalım ve sonsuza giden bir ışın oluşturalım." Ö4, bu düzeltmenin ardından ters fonksiyonun birebir ve örten olduğunu belirterek, "Evet, ters fonksiyonumuz birebir ve örten oldu." demiştir. Ö3 ve Ö4'ün bu soruyla ilişkin yanıtları şekil 134 ve 135'te verilmiştir.

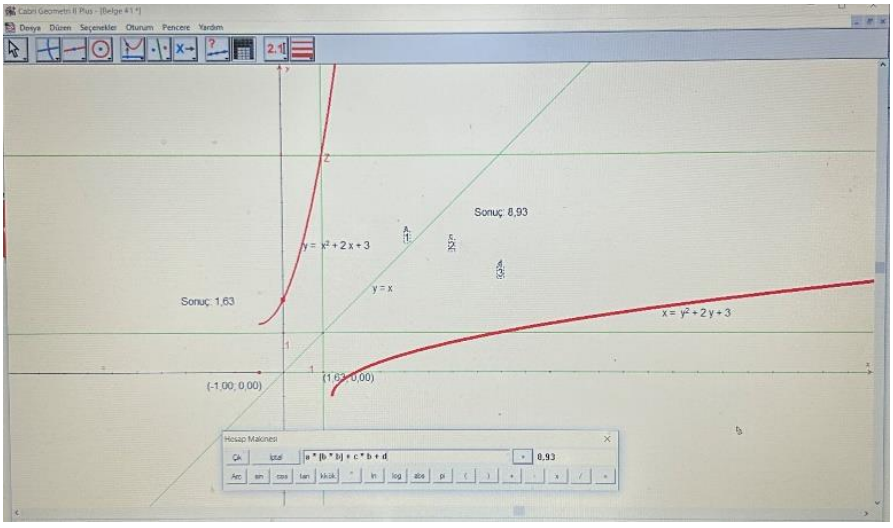
Şekil 134

Ö3'ün ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik parabol fonksiyonun tersine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Şekil 135

Ö4'ün ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik parabol fonksiyonun tersine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Sonunda, Ö3 ve Ö4, cebirsel ve grafiksel çözüm yöntemlerini birleştirerek ters fonksiyonu kavramını anlamlandırmaya çalışmış ve doğru çözümü bulmuşlardır. Ö3 ve Ö4'ün ters fonksiyonlar çalışmasına ait enstrümantal oluşum süreci analiz edildiğinde, öğretmen adaylarının matematiksel kavramları anlamlandırma ve Cabri-Geometri Dinamik-Geometri ortamını kullanma süreçleri gözlemlenebilmektedir.

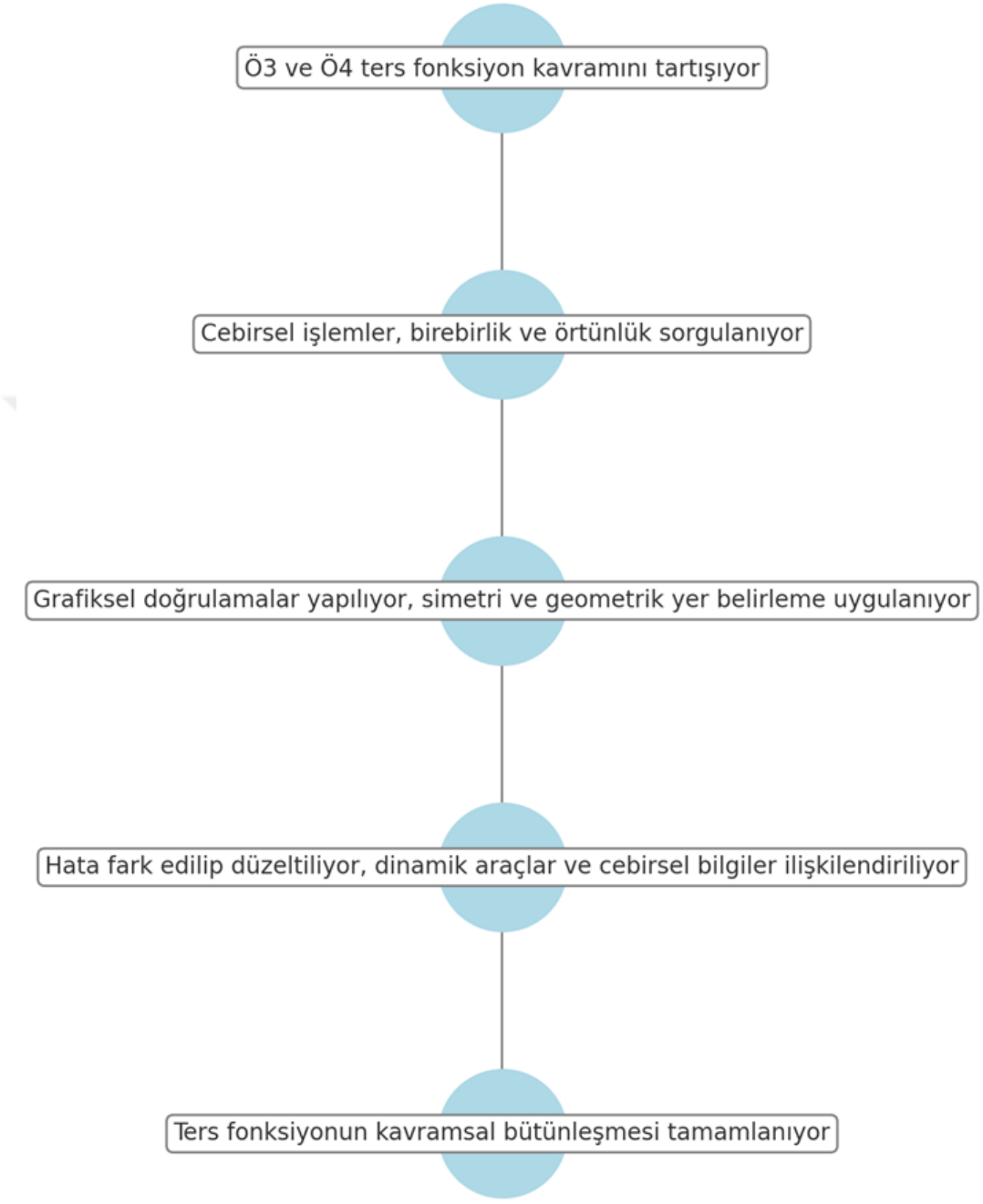
Ö3 ve Ö4'ün kağıt-kalem ortamında gerçekleştirdiği uygulamada, "Analitik düzlemde doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların ters fonksiyonları elde edilip grafiksel temsili çizilecek ise, fonksiyonun birebir ve örten olması gerektiği" eylemdeki teoreminin temel bir gereklilik olduğu görülmüştür. Bu teoremin, "cebirsel işlemler" ve "işlemsel dönüşümler" yöntemlerinin uygulanmasıyla (örneğin, denklem düzenleme, koordinat dönüşümü gibi teknikler) eylemdeki kavramlara dayandığı söylenebilmektedir.

Bu çalışma yaprağında öğretmen adaylarının, kağıt-kalem ortamında ters fonksiyonlara yönelik matematiksel bilgilerini, çalışma yaprağında verilen sorular doğrultusunda önceden bildikleri bilgileri eksik bir biçimde kullandıkları gözlemlenmiştir. Ancak, Cabri-Geometri ortamına geçtiklerinde, geometrik dönüşümler ve dinamik yapı sayesinde bu ortamı bir enstrümana dönüştürebildikleri görülmektedir. Ö3 ve Ö4'ün Cabri-Geometri ortamında gerçekleştirdiği ters fonksiyonların çözüm süreci, grafik analizleri ve Cabri-Geometri araçlarının entegrasyonu, öğrencilerin ters fonksiyonların çözümüne ve grafik çizme yaklaşımlarına daha somut ve görsel temelli bir perspektif kazandırmaktadır.

İkinci grubun, kağıt-kalem ortamında ters fonksiyonların grafiğini çizmek için dayandıkları "fonksiyonun birebir ve örten olup olmadığını bulma, fonksiyonda x'i yalnız bırakarak grafik çizme" işlevsel sabitinin, Cabri-Geometri ortamında "doğruya göre simetri alma, ardından, geometrik yer belirleme ve dinamik grafik oluşturma" işlevsel sabitine dönüştüğü görülmektedir. Şekil 136'da Ö3 ve Ö4'ün sürecinde hangi aşamalardan geçtiği ve araçları nasıl kullandığı gösterilmektedir.

Şekil 136

Ö3 ve Ö4'ün ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik enstrümantasyon süreci



Şekil 136, Ö3 ve Ö4'ün ters fonksiyonları keşfetme sürecindeki enstrümantasyon sürecini özetlemektedir. Ö1 ve Ö2'den farklı olarak, öğrenciler sürecin ilk aşamasında birebirlik ve örtenlik koşullarını sorgulayıp analitik tartışmalar yürütmüştür.Kağıt-kalem ortamında cebirsel işlemler ve matematiksel doğrulamalar yapılmış, analitik inceleme ve değişken değiştirme teknikleri kullanılarak fonksiyonların tersinin alınabilirliği test edilmiştir. Cabri-

Geometri ortamında ise, grafiksel doğrulamalar yapılmış, y=x doğrusuna göre simetri alınarak geometrik yer oluşturulmuştur. Ancak, öğrenciler ilk denemelerinde tanım kümesini göz ardı ettiklerini fark edip grafiklerini revize etmiştir. Bu süreç boyunca, Ö3 ve Ö4 dinamik araçlar ve cebirsel bilgileri ve işlemleri ilişkilendirerek ters fonksiyon kavramını hem cebirsel hem de grafiksel düzeyde anlamlandırmıştır. Son aşamada, yaptıkları hataları düzelterek ters fonksiyonun grafiksel ve cebirsel temsillerini bütünleştirmişlerdir.

4.1.4.3. Üçüncü Grubun Ters fonksiyonlar Çalışma Yaprağına Yönelik Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler, Enstrümantal Oluşum Süreci ve Enstrümanlı Eylem Şeması

Bu kısımda üçüncü grup öğrencilerinin ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı tekniklere yer verilmiştir.

Üçüncü Grubun Ters Fonksiyonlar Çalışma Yaprağına Yönelik Kağıt-Kalem Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo 25'ta öncelikle öğrencilerin kağıt-kalem ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 25

Üçüncü grubun Ters fonksiyonlar çalıma yaprağına yönelik kağıt-kalem ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayı	Ö5	Ö6
Teknikler		
Değer Vererek Nokta Belirleme	+	+
Değişken Değiştirme	+	+
Cebirsel İşlemler	+	+
Tam kareye Tamamlama	+	+

Tablo25'teki verilere göre, Ö5 ve Ö6, doğrusal ve parabol fonksiyonlarına ait ters fonksiyonlarını kağıt-kalem ortamında çözme ve grafiğini oluşturma sürecinde çeşitli teknikler kullanmıştır. Öncelikle, *cebirsel işlemler* yoluyla x'i yalnız bırakarak fonksiyonun tersini elde etmeye odaklanmış ve *değişken değiştirme* tekniğini kullanarak y=2x+3 denkleminden $f^{-1}(x)=2x-3$ sonucuna ulaşmıştır. Ayrıca, grafiklerini oluşturmak amacıyla *değer vererek nokta belirleme* tekniğinden yararlanmanın yanı sıra, parabol fonksiyonunun tersini bulmak için *tam kareye tamamlama* tekniğini kullanarak fonksiyonun tersini cebirsel olarak ifade etmektedir.

Üçüncü Grubun Ters Fonksiyonlar Çalışma Yaprağına Yönelik Cabri-Geometri Ortamında Kullandıkları Enstrümanlı Teknikler

Tablo 26'da öncelikle öğrencilerin Cabri-Geometri ortamında kullandıkları tekniklerin varlığı-yokluğu (+) ve (-) ile ifade edilmiştir.

Tablo 26

Üçüncü grubun Ters fonksiyonlar çalıma yaprağına yönelik Cabri-Geometri ortamında kullandıkları enstrümanlı teknikler

Öğretmen Adayı	Ö1	Ö2
Teknikler		
Nokta Belirleme	+	+
Sayı Belirleme	+	+
Koordinat Belirleme	+	+
Hesap Makinesi Aracı Kullanımı	+	+
Doğru belirleme		
Ölçüm Aktarım	+	+
Geometrik Yer Oluşturma	+	+
Doğruya Göre Simetri Oluşturma	+	+

Ö5 ve Ö6, doğrusal ve parabol fonksiyonlara ait ters fonksiyonların Cabri-geometri ortamında çözme ve grafiğini oluşturma sürecinde çeşitli teknikler kullanmıştır. Verilen fonksiyonların grafiğini oluşturmak için öncelikle *nokta, sayı ve koordinat belirleme araçlarından* yararlanmış, ardından fonksiyonun cebirsel çözümünü desteklemek amacıyla *hesap makinesi ve ölçüm aktarım araçlarını* kullanmıştır. Daha sonra, grafiğin geometrik yerini belirlemek için *geometrik yer oluşturma* tekniğini uygulamışlardır. Ardından fonksiyonun belirli noktalarının simetrisini alarak nasıl tersine dönüştüğünü gözlemleyebilmek için $y = x$ *doğrusunu* oluşturmuş ve *doğruya göre simetri* tekniğini kullanmıştır. Son aşamada, simetri alınan noktaları temel alarak fonksiyonun tersini oluşturmak amacıyla geometrik yer oluşturma tekniğinden yeniden faydalanmaktadır.

Üçüncü gruptaki öğrenciler (Ö5, Ö6) ters fonksiyonlar çalışma yaprağını inceledikten ve araştırmacının açıklamalarını dinledikten sonra çalışma yaprağındaki soruları yanıtlamaya başlamıştır. Araştırmacı öncelikle bu çalışma yaprağında ters fonksiyonlar ile ilgili üç alan bilgisi sorusu ve doğrusal ve parabol fonksiyonların tersinin çözümü ve grafiklerinin çizimine yönelik hem kağıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında, iki sorudan oluştuğunu açıklamıştır. Ters fonksiyonlar ile ilgili soruların öncelikle kağıt-kalem ortamında çözülüp grafiğinin çizilmesi, sonrasında Cabri-Geometri ortamını inceleyerek grafiklerin çizilmesini istemiştir. Öğrenciler çalışma yapraklarındaki soruları sırasıyla ‘Ters fonksiyon nedir?’, ‘Bir fonksiyonun ters fonksiyonu tanımlanabilmesi için hangi şartlar gereklidir?’ ve ‘Fonksiyonun tersi nasıl alınır?’ sorularını yanıtladıktan sonra doğrusal ve parabol formundaki denklemleri tersini alma sorularının çözümüne başlamışlardır.

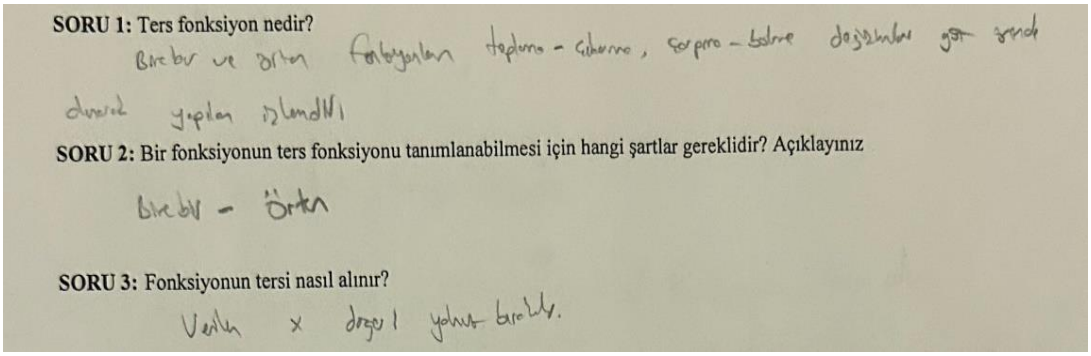
Öncelikle Ö5 ve Ö6 ters fonksiyon ile ilgili tanım ve şartlar gibi soruları yanıtlamayla başlamıştır. Ö5, ters fonksiyon kavramını "Ters fonksiyon deyince işaret değişiyor, çarpma bölme oluyor, toplama çıkarma oluyor, aklıma bunlar geliyor." şeklinde ifade ederken, Ö6, "Unuttum ben onu." diyerek kavrama dair herhangi bir hatırlama yapamadığını belirtmiştir. Bu konuşmalara bakıldığında, Ö5'in ters fonksiyon kavramını yalnızca işlemler üzerinden anlamlandırmaya çalıştığı, Ö6'nın ise başlangıçta ters fonksiyon kavramına dair bir bilgisinin olmadığı görülmektedir.

Ö5, ters fonksiyonun nasıl alınması gerektiğiyle ilgili olarak "Fonksiyonun tersi nasıl alınır? Fonksiyonda x yalnız bırakılır." ifadesini kullanmıştır. Bu soru ile ilgili aralarında geçen konuşmaların sonunda Ö6, ters fonksiyonun tanımlanabilmesi için gerekli koşulları kavrayarak "O zaman bir fonksiyonun ters fonksiyonu tanımlanabilmesi için gereken şartlar birebir ve örten olmasıdır." sonucuna ulaşmıştır. Bu durum, Ö5'in ters fonksiyon kavramını cebirsel işlemlerle anlamlandırmaya çalıştığını, Ö6'nın ise birebir ve örten fonksiyonları olma şartını kullanarak kavramsal düzeyde bir çıkarım yaptığını göstermektedir.

Bu yanıtlardan, Ö5'in ters fonksiyonu işlem dönüşümleri bağlamında ele aldığı, Ö6'nın ise ters fonksiyonun matematiksel koşulları üzerinde durduğu anlaşılmaktadır. Bu yüzden, Ö5 ve Ö6'nın ters fonksiyon tanımı zihinsel şemalarının 'ters fonksiyonun cebirsel dönüşümü' eylemdeki kavramı ile 'birebir fonksiyon', 'örten fonksiyon', 'fonksiyonel dönüşüm' eylemdeki kavramlarına dayandığı ve bu tanımların, ters fonksiyonun matematiksel ve cebirsel temsiline odaklandığı söylenebilir. Bu durum, öğrencilerin kavramsal anlayışlarının ters fonksiyonun belirli bir bağlamda (işlemsel veya matematiksel özellikler) şekillendiğini göstermektedir. Ö5 ve Ö6'nin tanım sorularına yanıtları sırasıyla şekil 137 ve şekil 138'de verilmektedir.

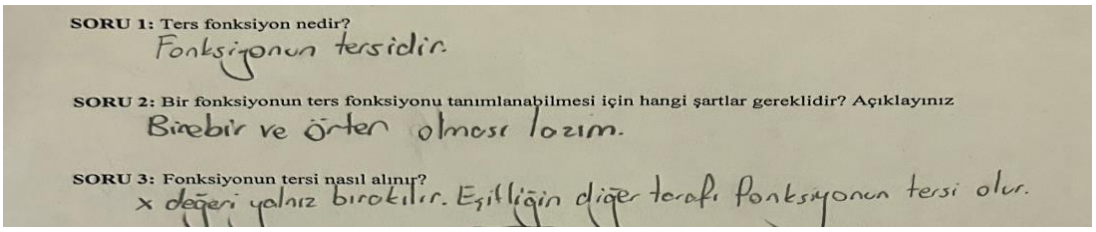
Şekil 137

Ö5'in ters fonksiyonlar çalışma yaprağında temel tanım sorularına ilişkin yanıtı



Şekil 138

Ö6'nın ters fonksiyonlar çalışma yaprağında temel tanım sorularına ilişkin yanıtı

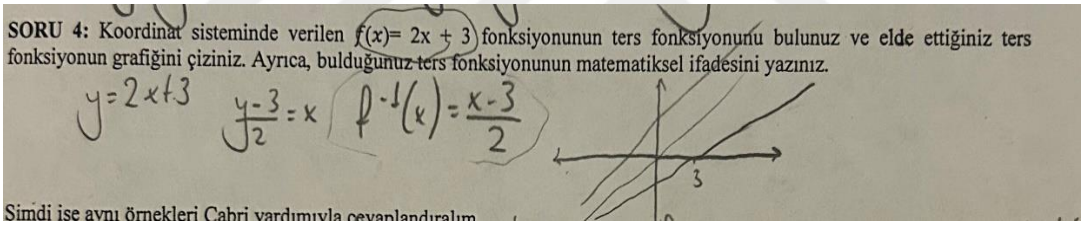


Dördüncü soruda f(x)=2x+3 denklemi verilmiş ve fonksiyonun tersi istenmiştir. Bu doğrultuda Ö5 ve Ö6, önce kağıt-kalem ortamında ve ardından Cabri-Geometri ortamında, f(x)=2x+3 fonksiyonunun tersini bulma sürecine odaklanmıştır. İlk olarak, Ö6 ters fonksiyonun nasıl hesaplanacağına dair aşağıda verilen açıklamayı yapmıştır:

Ö6: Fonksiyonun tersi nasıl alınır? x değeri yalnız bırakılır. Eşitliğin diğer tarafı fonksiyonun tersi olur. İlk başta y=2x+3 yazdım, x=(y-3)/2. Şimdi x ve y'lerin yerlerini değiştiriyorum. $f^{-1}(x)=(x-3)/2$. Ö6'nın bu soru ile ilgili çizimi şekil 139'da verilmiştir.

Şekil 139

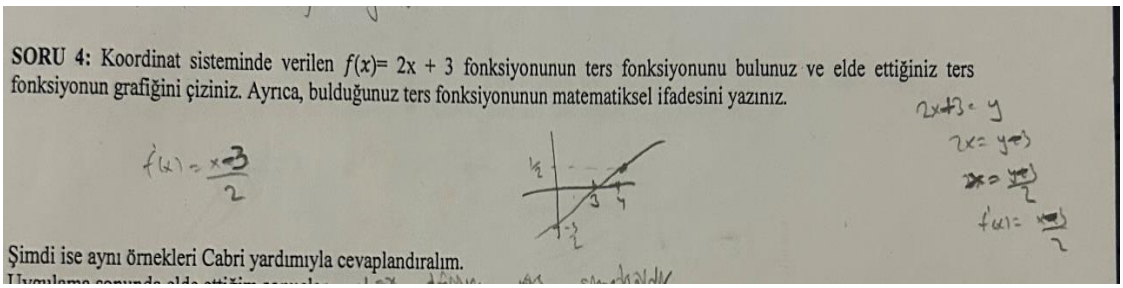
Ö6'nın ters fonksiyonlar çalışma yaprağında doğrusal fonksiyonun tersine yönelik yanıtı



Ö5, ters fonksiyonun grafiğini çizmeye çalışarak "Grafiğini nasıl çizdin?" diye sormuş, Ö6 ise "3'te 0 oluyor." ifadesiyle belirli noktaları belirlediğini söylemiştir. Ö5 de bu sürece katkıda bulunarak "4 olduğunda 1/2 oluyor, 0 verince -3/2 oluyor, noktaları belirleyerek grafiği çizdik." demiştir. Ö5'in bu soru ile ilgili çizimi şekil 140'ta verilmiştir.

Şekil 140

Ö5'in ters fonksiyonlar çalışma yaprağında doğrusal fonksiyonun tersine yönelik yanıtı



Ö5 ve Ö6, doğrusal fonksiyonun tersini bulup grafiğini çizdikten sonra, beşinci soruda f(x)=x2+2x+3, f:[−1,∞)→[0,∞) prabolünün tersini bulmaya yönelmiştir. Ö5, önceki yöntemi doğrudan uygulamaya çalışarak "Burada da yine x'i yalnız bırakmamız lazım. Ben yaptım."

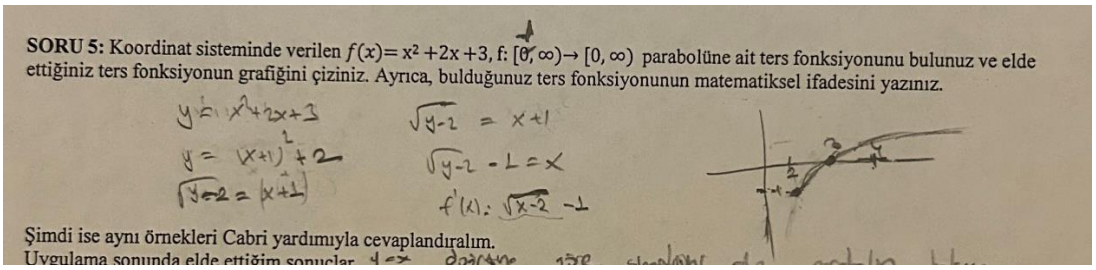
ifadesini kullanmıştır ancak Ö6, çözümün eksik olduğunu fark ederek "Nasıl yani? Bu olmaz, eşitliğin iki tarafında da x var, yalnız bırakamamışsın." şeklinde tepki göstermiştir. Ö5, "Ben x'i yalnız bıraktım bir tarafta, diğer taraftaki x^2" diyerek yöntemi savunsa da, Ö6, bu durumun geçerli olmadığını belirterek "İkisi de aynı x ve x^2 aynı değişkenlerdir." demiştir. Ö5, çözümü başka bir şekilde denemeye çalışarak "x'in parantezini alsak nasıl olur?" ifadesini kullanmış, ancak Ö6, çözüm için tam kareye tamamlama yöntemine yönelerek "Buldum yolunu." demiştir. Ö5 de "Ben de buldum, tam kareye tamamladım." diyerek yöntemi uygulamıştır.

Bu süreçte, kağıt-kalem ortamı Ö5 ve Ö6'nın ters fonksiyonları cebirsel olarak anlamlandırmaya ve grafiksel temsillerini oluşturmaya çalıştıkları bir enstrüman işlevi görmüştür. Ancak öğrenciler, doğrusal fonksiyonlarda kullandıkları yöntemi doğrudan parabol fonksiyonuna uygulayamadıklarında enstrümantasyon problemi yaşamıştır. Bu problem, Ö6'nın tam kareye tamamlama yöntemini keşfetmesiyle aşılmış ve öğrencilerin enstrümantal oluşum süreci ilerlemiştir.

Ö5 ve Ö6, doğrusal fonksiyonun tersinin grafiğini kağıt-kalem ortamında oluşturmuş, ancak parabol fonksiyonunun tersinin grafiğini çizerken belirli zorluklarla karşılaşmışlardır. Ö5, "x 0 olduğunda tanımsız oluyor. 2 verince -1 oluyor, tanımsız oluyor. 2'den öncesi yok. Nokta verip çizdik grafiği." diyerek belirli noktaları hesaplamış ve grafik çizmeye çalışmıştır. Ö5 ve Ö6'nın parabol denkleminin tersini hesaplama ve grafiğini oluşturmasıyla ilgili yanıtları sırasıyla şekil 141 ve 142'de verilmiştir.

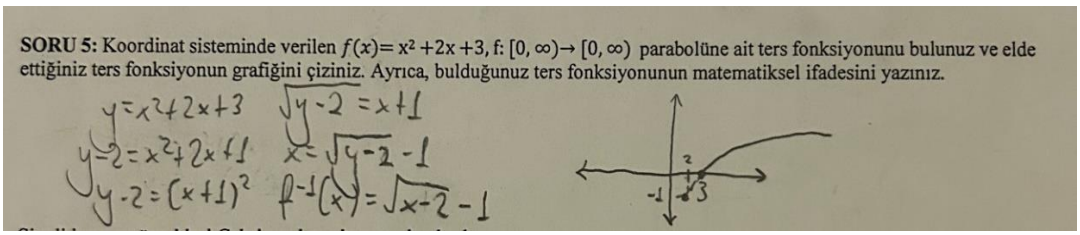
Şekil 141

Ö5'in ters fonksiyonlar çalışma yaprağında doğrusal fonksiyonun tersine yönelik yanıtı



Şekil 142

Ö6'nın ters fonksiyonlar çalışma yaprağında doğrusal fonksiyonun tersine yönelik yanıtı

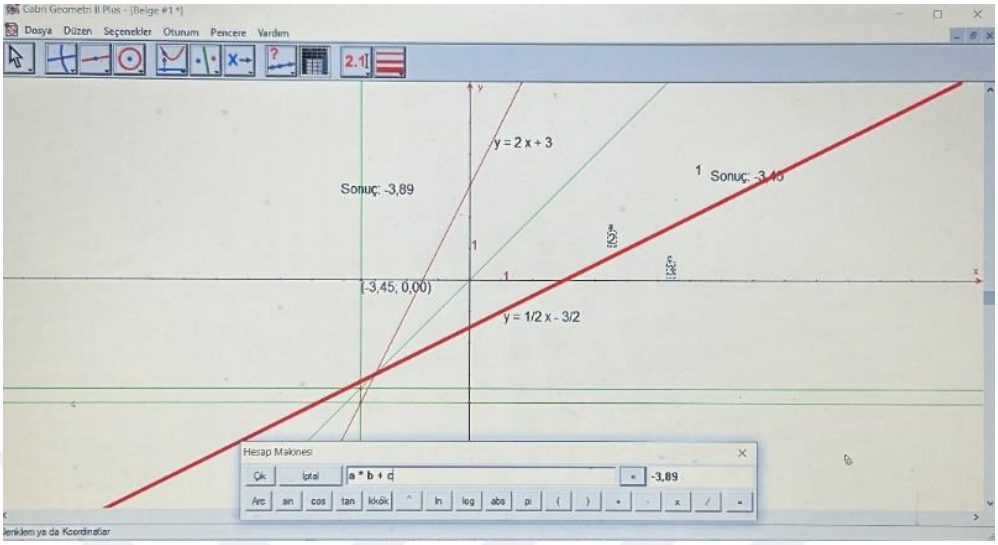


Cabri-Geometri ortamına geçtiklerinde, Ö6 grafik çizme sürecine yönelik alternatif bir yaklaşım geliştirerek "Ben verilen grafiği çizip ondan yola çıkarak tersini çizemem. Ama zaten ters fonksiyonun denklemini bulduk ya, ona göre sayı atayıp tersi çizmiş olurum." ifadesini kullanmıştır. Ö5 ise bu yöntemi sorgulayarak "O zaman ne anlamı var ki tersini bulmamızın? Direkt normal bir fonksiyon çizmiş oluyoruz öyle." diyerek yöntemin ters fonksiyon oluşturma sürecine katkısını sorgulamıştır. Ö5 ve Ö6, Cabri-Geometri ortamında ters fonksiyonun grafiksel temsili için araçları kullanmaya başlamışlardır. Ö5, grafik çizme sürecini daha işlevsel hale getirmek için "Hesap makinesinde (Arc) var acaba onu kullanabilir miyiz?" diye sormuş ancak Ö6, bunun uygun olmadığını belirterek "Onunla tanjant yapıyorduk ya, o kullanılmaz bu işlem için." yanıtını vermiştir. Ö6, grafik çizim sürecini denetlemek için "Ben 1/2 ve -3/2 sayılarını belirleyeceğim, yani ters fonksiyon denklemindeki katsayıları." demiş ve sayı belirleme aracıyla çalışmaya başlamıştır. Ancak süreçte bir problem fark ederek "Sayı belirleme aracıyla sadece tam sayıları atayabiliyorum, yani bildiğimiz adımları da devam ettirince de çizemedim. Bunun bir yolu olmalı ama ne?" diyerek çözüm arayışına yönelmiştir. Ö6, bir süre sonra "Ben buldum." diyerek bulduğu yöntemi açıklamıştır.

Ö6, "Öncelikle f(x)=2x+3 denkleminde 2 ve 3 katsayıları var. Şimdi Cabri'de önce sayı aracıyla 2 ve 3 sayılarını belirliyorum, sonra x ekseninde bir nokta belirliyorum, sonra o noktanın koordinatını belirliyorum koordinat aracıyla. Şimdi hesap makinesine geliyorum. Asıl olay burada, 2x+3 denklemi yerine işlemleri $f^{-1}(x)=(x-3)/2$ yani ters fonksiyon üzerinde işliyorum." diyerek yöntemini açıklamıştır. Ö6, "Bulduğum yer sonucunu y eksenine aktarıyorum, o noktadan geçen dik doğruyu çiziyorum ve x noktasından geçen dik doğruyu da çiziyorum. Bu doğruların kesişim noktasını belirliyorum ve geometrik yer aracıyla kesişim noktasının x noktasına göre geometrik yerine bakıyorum. Bu şekilde çizmiş oldum. Yani 1/2 ve -3/2 sayılarını vermeden yine ters fonksiyonu çizmiş oldum." diyerek Cabri-Geometri ortamında ters fonksiyonun grafik çizim sürecini tamamlamıştır. Ö5 ve Ö6'nın f(x)=2x+3 denkleminin Cabri-Geometri ortamında tersini hesaplama ve grafiğini oluşturmasıyla ilgili ekran kayıtları sırasıyla şekil 143 ve 144'te verilmiştir.

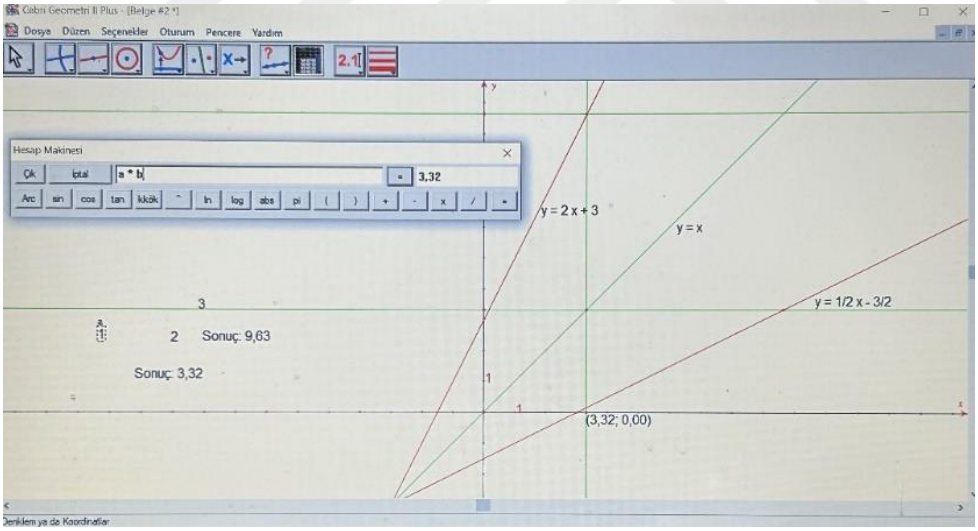
Şekil 143

Ö5'in ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik doğrusal fonksiyonun tersine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Şekil 144

Ö6'nın ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik doğrusal fonksiyonun tersine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Ö5 ve Ö6, ters fonksiyonun grafikle ilişkisini incelerken simetri kavramını da sorgulamışlardır. Ö5, "Sanırım ters fonksiyonu elde etmek için x'ler ve y'ler yer değiştiriyordu." diyerek grafik üzerinde ne yapılması gerektiğini düşünmüş, ancak simetri konusunda kesin bir fikre ulaşamamıştır. Ö6, "Ne yapacağız şimdi yani?" diyerek çözüm üretmeye çalışırken, Ö5 "Acaba grafiğin bir şeye göre simetrisini mi alacağız? Ama neyin simetriğini neye göre alacağız bilmiyorum." diyerek çözüm için yeni bir strateji arayışına girmiştir. Ö6, simetri araçlarını inceledikten sonra "Ya ben grafiği hareket ettirdikçe görüyorum, y=x doğrusuna göre birbirlerine simetrikler bu iki grafik." diyerek çözümü kavramıştır. Son

olarak, Ö6, "Ben y=x doğrusunu çizdim. Doğruya göre simetri aracını kullanarak simetrisini alamadım grafiğin. Anladım, grafiğin simetrisini doğruya göre alamıyoruz. Grafik üzerinde bir nokta belirleyip ya da önceden belirlenmiş bir noktanın y=x doğrusuna göre simetrisini alıyoruz. Evet, simetrik bir nokta oluşturdum." diyerek doğru çözüm sürecini tamamlamıştır. Ö5 ve Ö6'nın süreci incelendiğinde, ters fonksiyonları cebirsel ve grafiksel olarak analiz ederken kağıt-kalem ortamında cebirsel işlemler ve denklemler üzerinden ilerledikleri, Cabri-Geometri ortamında ise dinamik dönüşümleri ve simetri araçlarını kullanarak enstrümantal oluşum sürecini tamamladıkları görülmektedir.

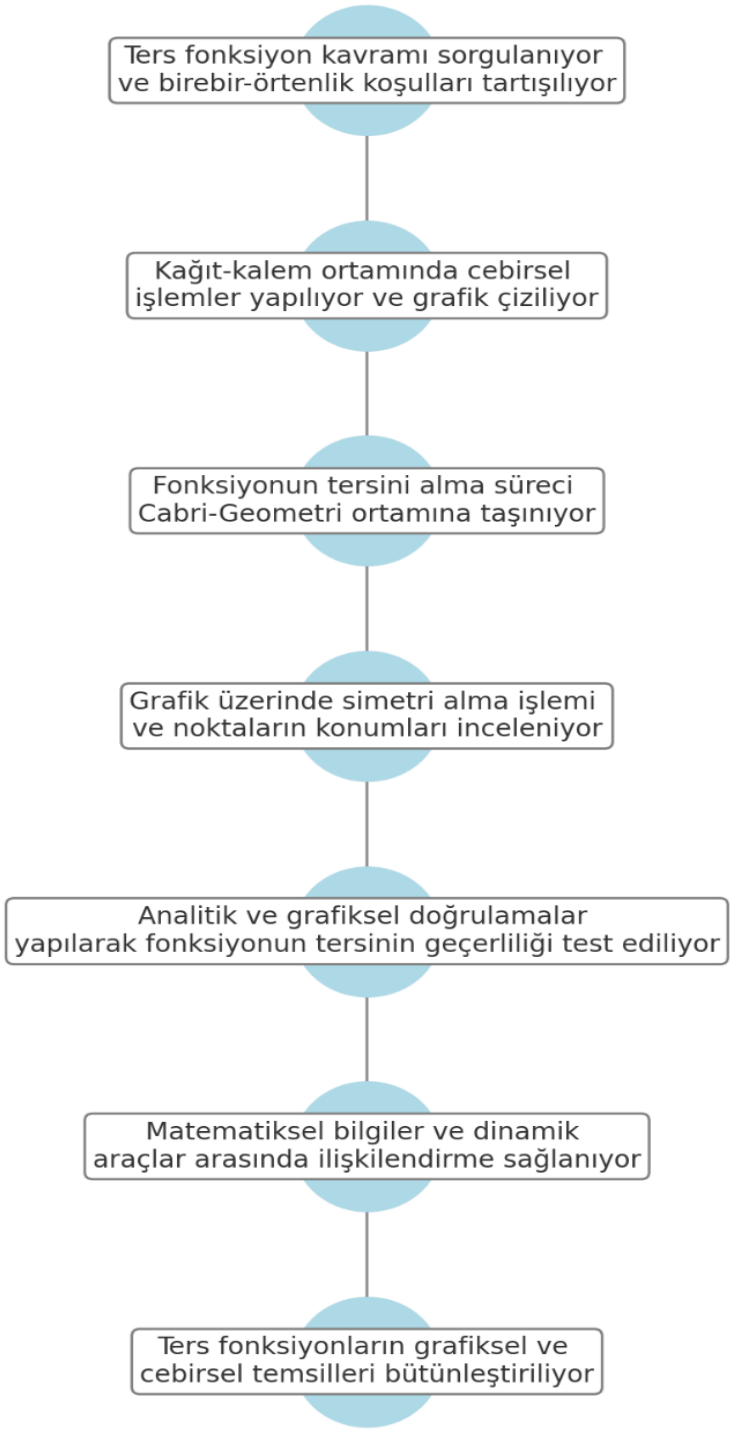
Ö5 ve Ö6'nın kağıt-kalem ortamında gerçekleştirdiği uygulamada, "Analitik düzlemde doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların ters fonksiyonları elde edilip grafiksel temsili çizilecek ise, fonksiyonun birebir ve örten olması gerektiği" eylemdeki teoreminin temel bir gereklilik olduğu görülmüştür. Bu teoremin, "cebirsel işlemler" ve "işlemsel dönüşümler" yöntemlerinin uygulanmasıyla (örneğin, denklem düzenleme, x'i yalnız bırakma gibi teknikler) eylemdeki kavramlara dayandığı söylenebilmektedir.

Ö5 ve Ö6, Cabri-Geometri ortamına geçtiklerinde, grafik oluşturma sürecini farklı bir açıdan ele alarak ters fonksiyonun doğrudan çizilemeyeceğini fark etmişlerdir. Ö6, ters fonksiyonun doğrulamasını yapabilmek için belirli noktaları kullanarak işlemi gerçekleştirmek istemiş ve bu noktaların doğruluğunu test etmek için hesap makinesi ve koordinat belirleme araçlarını kullanmıştır. Ö5 ve Ö6'nın bu süreçte Cabri-Geometri ortamını bir enstrümana dönüştürdükleri ve doğruya göre simetri aracını kullanarak ters fonksiyonun grafiksel temsiline ulaşmaya çalıştıkları gözlemlenmektedir. Üçüncü grubun, kağıt-kalem ortamında ters fonksiyonların grafiğini çizmek için dayandıkları "x'i yalnız bırakma, doğrusal fonksiyonun tersinin birebir ve örten olup olmadığını bulma ve parabol fonksiyonunun tersini alırken cebirsel işlem yapma" işlevsel sabitinin, Cabri-Geometri ortamında "doğruya göre simetri alma, geometrik yer belirleme ve grafik üzerinde dinamik değişiklik yaparak ters fonksiyonun görselleştirilmesi" işlevsel sabitine dönüştüğü görülmektedir.

Bu süreçte, öğrencilerin Cabri-Geometri ortamındaki dinamik araçları kullanarak ters fonksiyon kavramını daha görsel ve etkileşimli bir şekilde keşfettikleri, özellikle simetri alma sürecinde önce noktaların simetrisini denedikleri ancak fonksiyonun tamamının simetriyle nasıl elde edileceğini çözmeye çalıştıkları gözlemlenmiştir. Ö5 ve Ö6, birebir ve örtenlik kavramlarını başlangıçta eksik kullansalar da, Cabri-Geometri ortamında grafiksel doğrulamaları yaparak ters fonksiyonların grafiksel ve cebirsel temsillerini bütünleştirme sürecine girdiği anlaşılmıştır. Şekil 145'te Ö5 ve Ö6'nın sürecinde geçtiği aşamalar gösterilmektedir.

Şekil 145

Ö5 ve Ö6'nın ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik enstrümantasyon süreci



Şekil 145'e göre enstrümantal oluşum süreci, ters fonksiyon kavramının birebir ve örtenlik koşulları bağlamında sorgulanmasıyla başlamıştır, ardından kağıt-kalem ortamında

cebirsel işlemler ve grafik çizme aşamasına geçilmiştir. Ö5 ve Ö6, fonksiyonun tersini alma sürecini Cabri-Geometri ortamına taşıdıklarında, grafik üzerindeki noktaların doğruya göre simetri aracıyla dönüştürülme sürecini incelemiştir. Simetri alma ve geometrik yer belirleme aşamalarında, analitik ve grafiksel doğrulamalar yapılarak ters fonksiyonun geçerliliği test edilmiştir. Son olarak, öğrenciler matematiksel bilgiler ile dinamik araçlar arasındaki ilişkiyi kurarak ters fonksiyonun grafiksel ve cebirsel temsillerini bütünleştirmiştir. Bu süreç, öğrencilerin Cabri-Geometri ortamını bir enstrümana dönüştürmelerine ve ters fonksiyon kavramını hem işlem hem de görselleştirme yoluyla anlamlandırmalarına olanak sağlamaktadır.

4.2. Öğretmen Adaylarının Kağıt-Kalem ve Cabri-Geometri Ortamında Fonksiyonların Farklı Temsillerinin Anlamlandırılma Sürecine Yönelik Enstrümanlı Eylem Şemalarında Ortaya Çıkan Kategoriler ve Temalar

Enstrüman olarak kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarının kullanıldığı bu çalışmada öğretmen adaylarının enstrümanlı eylem şemalarında bazı ortak yönler ortaya çıkmıştır. Bu başlık altında ders planlarında kullanılan çalışma yapraklarına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bileşenleri hem kağıt-kalem, hem de Cabri-Geometri dinamik geometri ortamlarında ortaya çıkan enstrümanlı eylem şemalarının bileşenleri sunulmuştur.

Bu çalışmada enstrümanlı eylem şemaları, enstrümanlı teknikler, işlevsel sabitler, eylemdeki teoremler ve kavramlar temelinde belirlenmiş olup öğretmen adaylarının kullandığı enstrümanlı teknikler ilgili başlık altında sunulduğu için bu kısımda sadece işlevsel sabitlerin bir sentezi yapılmıştır. Bu doğrultuda, öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında gerçekleştirdikleri tüm çalışma yapraklarında, fonksiyonların çözümüne ve grafiklerinin oluşturulmasına ilişkin ortaya çıkan işlevsel sabitlerin benzerlik gösterdiği belirlenmiştir. Benzer şekilde, Cabri-Geometri ortamında da tüm çalışma yapraklarında, fonksiyonların çözümü ve grafik oluşturma süreçlerine dayalı olarak şekillenen işlevsel sabitlerin ortaklaştığı görülmüştür. Ancak, kağıt-kalem ortamında belirlenen eylemdeki teoremler, kavramlar ve işlevsel sabitlerin, Cabri-Geometri ortamında ortaya çıkan karşılıklarından anlamlı farklılıklar gösterdiği tespit edilmiştir.

Kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarında oluşturulan enstrümanlı eylem şemalarının bileşenleri karşılaştırıldığında, öğretmen adaylarının bu iki farklı ortamda geliştirdikleri işlevsel sabitler, eylemdeki kavramlar ve teoremler açısından anlamlı farklılıklar gösterdiği görülmektedir. Bu farklılıkların temelinde, kullanılan ortamların doğası, sağladığı araçlar ve temsil biçimlerinin çeşitliliği yer almaktadır.

Kağıt-kalem ortamında öğretmen adaylarının eylemleri büyük ölçüde cebirsel kurallara, tanımlara ve işlem dizilerine dayalıdır. Örneğin ters fonksiyonların bulunması sürecinde birebirlik ve örtenlik koşullarının tartışılması, değişkenlerin yer değiştirilmesi ve x'in yalnız bırakılması gibi sabitler belirginleşmektedir. Bu ortamda geliştirilen işlevsel sabitler, daha çok işlemsel düzeyde ortaya çıkan kalıplaşmış uygulamaları ifade etmektedir. Örneğin, ters fonksiyonu elde etmek için değişken değiştirme ve cebirsel çözüm yapma süreci, adayların zihinsel şemalarında tekrar eden bir sabit hâline gelmiştir. Ancak bu süreçte, özellikle parabol fonksiyonun tersini bulurken yaşanan cebirsel işlem hataları ve tanım kümesinin ihmal edilmesi gibi durumlar, grafik oluşturma sürecinde kavramsal zorlukların ortaya çıkmasına neden olmuştur. Bu durum, kağıt-kalem ortamında ortaya çıkan işlevsel sabitlerin daha çok işlem odaklı olduğunu ve grafiksel temsillerle desteklenmediğinde kavramsal bütünlüğün sağlanmasında güçlük yaşandığını ortaya koymaktadır.

Buna karşın, Cabri-Geometri ortamında öğretmen adaylarının geliştirdiği işlevsel sabitler, dinamik araçların sunduğu etkileşimli ve görsel temsil olanakları doğrultusunda farklı bir yapıya sahiptir. Bu ortamda adaylar, fonksiyonun tersini oluşturmak için y = x doğrusuna göre simetri alma, belirli noktaların koordinatlarını belirleme, geometrik yer oluşturma ve grafik üzerinde dinamik değişiklikler yapma gibi teknikler kullanmaktadır. Sürecin doğrudan gözlemlenebilir ve anlık olarak geri bildirim alınabilir olması, adayların kavramları yalnızca işlem düzeyinde değil, aynı zamanda yapısal olarak anlamlandırmasına olanak sağlamaktadır. Bu bağlamda, Cabri-Geometri ortamında ortaya çıkan işlevsel sabitler, yalnızca bir tekniğin tekrarı değil; aynı zamanda öğretmen adaylarının grafiksel temsilleri analiz ederek, simetri ilişkisini kavrayarak ve geometrik yer kavramını kullanarak oluşturdukları kalıcı düşünme şemalarını yansıtmaktadır.

Sonuç olarak, kağıt-kalem ortamında geliştirilen enstrümanlı eylem şemaları daha çok cebirsel işlemlere ve tanım bilgisine dayalı bir yapı sergilerken; Cabri-Geometri ortamında oluşan şemalar, dinamik araçların sağladığı etkileşimli özellikler sayesinde görsel ve işlevsel bir anlamlandırmaya dayanmaktadır.

Birinci çalışma yaprağı, Doğrusal Fonksiyonlar

Kağıt-kalem ortamında öğretmen adaylarının doğrusal fonksiyonların farklı temsillerini anlamlandırma sürecinde ortaya çıkan temel kategoriler;

- Koordinat sistemi kullanımı,
- Doğru çizimi,
- Doğru eğimi analizi

- Sabit fonksiyon doğru çizimi

şeklinde özetlenebilir. Birinci grupta Ö1 ve Ö2, koordinat sistemini kullanarak doğru ve sabit fonksiyon grafiği oluşturmuşlrdır. Ö1, koordinat sisteminde noktaları belirleyerek sabit fonksiyonların grafiğini oluşturmuş ve doğrunun eğimini analiz etmiştir. Ö2 ise sabit fonksiyonun grafiği ile koordinat sistemi arasındaki ilişkiyi daha ayrıntılı anlamlandırmıştır. İkinci grupta Ö3 ve Ö4, sabit fonksiyon grafiğini çizme sırasında doğru çizimi ve koordinat sistemi arasındaki ilişki kurabilmştir. Ö4 sabit fonksiyonların grafiklerini çizerken değer verme ve koordinat sistemi üzerindeki hareketi gözlemlemiştir. Üçüncü grupta Ö5 ve Ö6, doğru eğimi ve sabit fonksiyon grafiği üzerine yoğunlaşarak, doğru eğimini analiz etmiştir ve sabit fonksiyonların grafiğini çizebilmiştir. Ö6, paralellik ve eğim kavramlarını doğru üzerinde uygulamış ve bu şekilde fonksiyonların grafiklerini elde etmiştir.

Cabri-Geometri ortamında öğretmen adaylarının doğrusal fonksiyonların farklı temsillerini anlamlandırma sürecinde ortaya çıkan temel kategoriler;

- Noktanın izini oluşturma,
- Dinamik ortamda doğru grafiği oluşturma,
- Sabit fonksiyon grafiği oluşturma,
- Eğim analizi
- Doğrunun hareketini gözlemleme

şeklinde özetlenebilir. Birinci grupta Ö1 ve Ö2, Cabri-Geometri ortamında sabit fonksiyonların grafiğini oluşturma sürecinde dinamik ortamda oluşturulan noktanın (Z) izini belirlemiştir. Ö1, oluşturulan noktalar yardımıyla doğru çizimini dinamik hale getirirken, Ö2 doğru grafiğinin hareketini analiz etmiş ve bu hareketin fonksiyonun sabit terimi ile ilişkisini anlamlandırmıştır. İkinci grupta Ö3 ve Ö4, iz belirleme ve dinamik doğru grafiğinin oluşturma sürecini tamamlamıştır. Ö3, kesişim noktası ile iz belirleyerek sabit fonksiyon grafiğini oluşturmuş, Ö4, grafik üzerinde eğim ve paralellik kavramlarını gözlemleyerek doğrusal fonksiyonların grafiklerini elde etmiştir. Üçüncü grupta Ö5 ve Ö6, dinamik ortamda eğim ve paralellik ilişkisini analiz etmiştir. Ö5, iz belirleme ve doğru hareketi üzerinden eğim analizini yapmış, Ö6, dinamik ortamda dik doğruların kesişimindin oluşan kesişim noktaları ile doğru oluşturma ve oluşturmuş olduğu doğrunun eğimini analiz etmiştir. Tablo 27'de katılımcıların söz konusu ortamlarda doğrusal denklemler çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bileşenleri verilmiştir. Şekil 146 ve 147'da ise katılımcıların kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamında doğrusal denklemler çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bir sentezi sunulmuştur.

Tablo 27

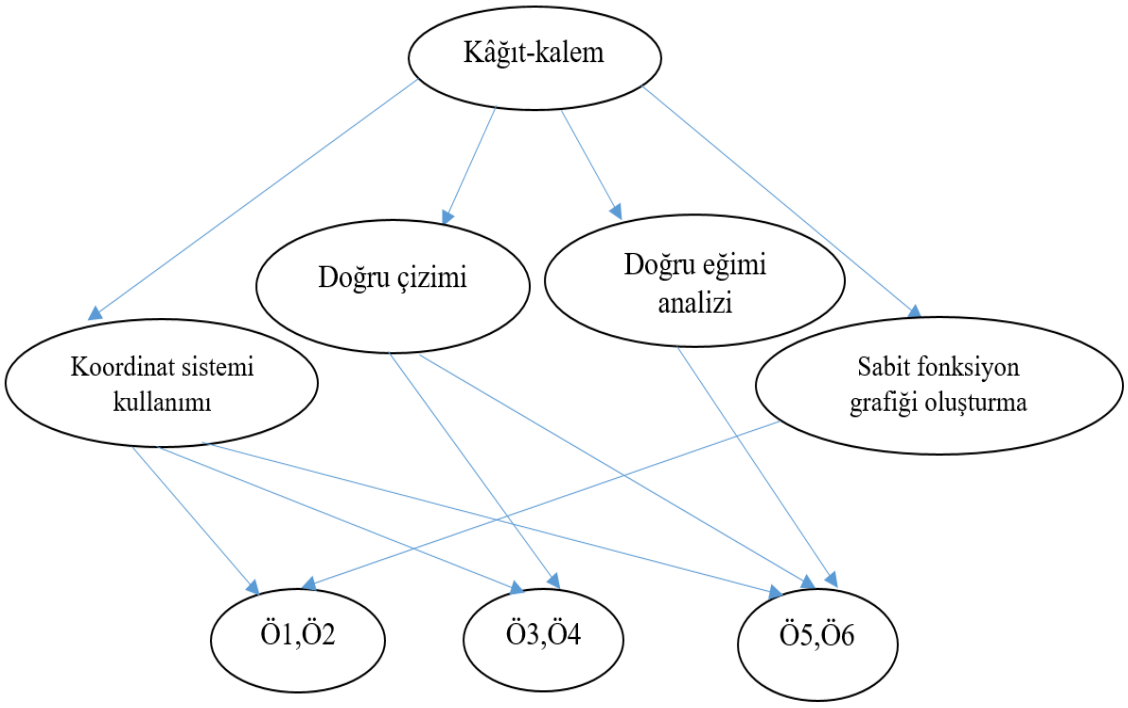
Öğretmen adaylarının doğrusal denklemler çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bileşenleri

Ortam	Öğretmen Adayı	İşlevsel Sabitler	Eylemdeki Teoremler	Eylemdeki Kavramlar	Kategori
Kağıt-Kalem	Ö1, Ö2	Fonksiyon grafiği çizmek için koordinat sisteminde belirli bir nokta seçilir ve bu noktadan x veya y eksenine paralel doğru çizilir.	Eğer bir fonksiyonun grafiği çizilecekse, koordinat sisteminde belirli bir nokta seçilmeli ve bu noktadan x veya y eksenine paralel doğru çizilmelidir.	Koordinat sistemi, paralel doğru, değer verme.	Koordinat sistemi kullanımı, sabit fonksiyon doğru çizimi
	Ö3, Ö4	Fonksiyon grafiği çizmek için x ve y değişkenlerine değer verilerek iki nokta belirlenir ve bu noktalar birleştirerek doğru oluşturur.	Eğer bir fonksiyonun grafiği çizilecekse, x ve y değişkenlerine değer verilerek iki nokta belirlenir ve bu noktalar birleştirilerek doğru oluşturulur.	Koordinat sistemi, Değer verme, Geometric yer belirleme nokta belirleme, nokta birleştirme	Koordinat sistemi kullanımı, Doğru çizimi
	Ö5, Ö6	Fonksiyon grafiği çizmek için uygun şekilde nokta belirlenir ve bu noktalar birleştirilerek doğru çizilir.	Eğer bir fonksiyonun grafiği çizilecekse, uygun şekilde noktalar belirlenir ve bu noktalar birleştirilerek doğru çizilir.	Koordinat sistemi, değer verme, nokta belirleme, nokta birleştirme	Koordinat sistemi kullanımı, Doğrunun eğimi analizi, Doğru çizimi
Cabri-Geometri	Ö1, Ö2	Sabit ve doğrusal fonksiyonların grafiği başlangıç noktasının belirli bir yönde ve oranda hareket etmesi sonucu oluşur. Doğrunun başlangıç noktası ve geometric yer belirleme noktası sabit fonksiyonun grafiğini belirler.	Eğer sabit ya da doğrusal bir fonksiyonun grafiği çizilecekse, başlangıç noktasının belirli bir yönde ve oranda hareket etmesi, bu grafiğin oluşmasını sağlar. Eğer bir doğrunun eğimi ve y eksenini kestiği nokta biliniyorsa, bu bilgiler doğrunun konumunu belirler. Eğer bir nokta belirli bir doğrultuda hareket ediyorsa, bu hareketin oluşturduğu iz, doğrusal fonksiyonun grafiğini belirler.	Başlangıç noktası, geometric yer belirleme noktası, y-eksenini kesme noktası, doğrunun eğimi.	noktanın izini oluşturma, Sabit fonksiyon grafiği oluşturma, Doğrunun hareketini gözlemleme Eğim analizi

	Ö3, Ö4	Başlangıç noktası ve geometric yer belirleme noktası, sabit fonksiyonun grafiğini belirler.	Eğer bir sabit veya doğrusal fonksiyonun başlangıç noktası belirli bir yönde ve oranda hareket ederse, bu hareketin oluşturduğu iz fonksiyonun grafiğini oluşturur.	Başlangıç noktası, geometric yer belirleme noktası,	noktanın izini oluşturma, doğrunun hareketi gözlemleme, sabit fonksiyonu garafiğini oluşturma
	Ö5, Ö6	Doğrunun başlangıç noktası ve geometric yer belirleme noktası sabit fonksiyonun grafiğini belirler.	Eğer bir doğrunun eğimi ve y eksenini kestiği nokta biliniyorsa, bu iki bilgi doğrunun konumunu belirler.	Y-eksenini kesme noktası, doğrunun eğimi, iz belirleme.	Eğim analizi, sabit fonksiyon grafiği oluşturma, Noktnın izini oluşturma

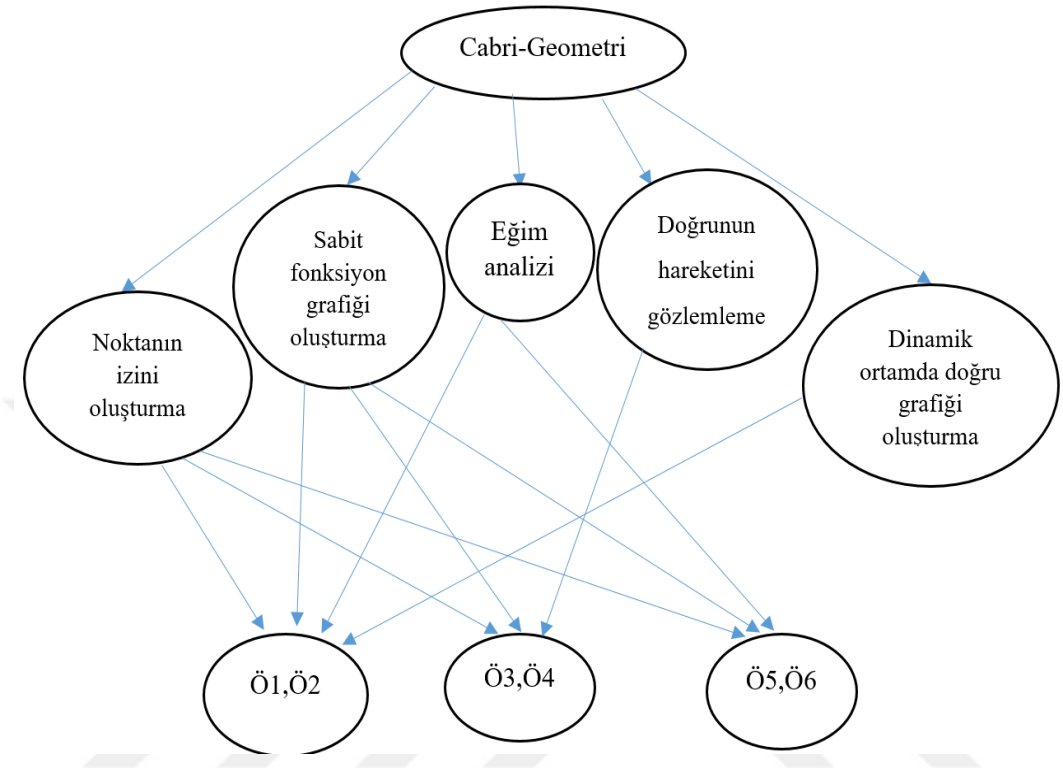
Şekil 146

Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında doğrusal denklemler çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının sentezi



Şekil 147

Öğretmen adaylarının Cabri-Geometri ortamında doğrusal denklemler çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının sentezi



Tablo 27 incelendiğinde, öğretmen adaylarının kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarında doğrusal denklemler çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarında işlevsel sabitler, eylemdeki teoremler ve eylemdeki kavramların farklı şekillerde yapılandığı görülmektedir. Kağıt-kalem ortamında Ö1 ve Ö2'nin sabit fonksiyon grafiği çiziminde başlangıç noktası ve paralellik kavramlarını dikkate aldıkları; Ö3 ve Ö4'ün doğru çiziminde değer verme ve koordinat sistemi kullanımına dayandıkları; Ö5 ve Ö6'nın ise doğru eğimi analiz ederek doğru çizim sürecini gerçekleştirdikleri belirlenmiştir. Buna karşılık, Cabri-Geometri ortamında ise öğretmen adaylarının doğrusal fonksiyonların grafiğini oluştururken başlangıç noktasına bağlı oluşturulan dinamik noktaların izini belirledikleri, başlangıç noktasının hareketiyle grafiklerin oluştuğunu gözlemledikleri ve bu sayede doğrunun eğimi ve konumunu analiz ettikleri görülmektedir. Cabri-Geometri ortamında sağlanan dinamik yapı, öğretmen adaylarının görsel algılarını güçlendirerek fonksiyonların farklı temsillerini daha kolay anlamlandırmalarına olanak sağlamıştır. Kağıt-kalem ortamında statik bir yapı üzerinden işlem yaparken, Cabri-Geometri ortamında grafiklerin hareketli yapısı sayesinde öğretmen adayları doğrunun eğimi ve sabit terim gibi kavramları ilişkisel kavramıştır

Şekil 146'da görüldüğü üzere hazırlanan sentez incelendiğinde, öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında doğrusal denklemler çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarında koordinat sistemi kullanımı, doğru çizimi, doğru eğimi analizi ve sabit fonksiyon grafiği oluşturma kategorilerinde yoğunlaştıkları görülmektedir. Birinci gruptaki Ö1 ve Ö2'nin koordinat sistemi kullanımı ve sabit fonksiyon grafiği oluşturma kategorilerinde başarılı oldukları; ikinci gruptaki Ö3 ve Ö4'ün koordinat sistemi kullanımı ve doğru çizimi üzerine yoğunlaştıkları; üçüncü gruptaki Ö5 ve Ö6'nın ise doğru eğimi analizi ve doğru çizimi kategorilerinde etkin oldukları belirlenmiştir. Bu durum, öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamındaki grafik çizim süreçlerinde farklı kategoriler üzerinden ilerlediklerini ve eylem şemalarının bu süreçte yapılandığını göstermektedir.

Cabri-Geometri ortamında ise öğretmen adaylarının farklı kategorilerde yoğunlaştıkları görülmektedir. Şekil 147'de gösterildiği gibi, Cabri-Geometri ortamında öğretmen adaylarının nokta izi oluşturma, grafik oluşturma ve doğru eğimi analizi kategorilerinde daha aktif oldukları gözlemlenmiştir. Birinci gruptaki Ö1 ve Ö2'nin koordinat sistemi kullanımı, nokta izi oluşturma ve grafik oluşturma kategorilerinde başarılı oldukları; ikinci gruptaki Ö3 ve Ö4'ün koordinat sistemi kullanımı ve grafik oluşturma süreçlerine odaklandıkları; üçüncü gruptaki Ö5 ve Ö6'nın ise doğru eğimi analizi ve sabit fonksiyon grafiği oluşturma kategorilerinde etkin oldukları görülmüştür. Cabri-Geometri ortamındaki dinamik yapı, öğretmen adaylarının doğrunun hareketini, başlangıç noktasının izini ve doğrunun eğimini daha kolay gözlemlemelerine olanak sağlamış ve bu durum öğretmen adaylarının grafik çizim süreçlerinde derinlemesine anlamlandırma yapmalarını kolaylaştırmıştır. Bu bağlamda, Cabri-Geometri ortamının, kağıt-kalem ortamına kıyasla doğrusal fonksiyonların farklı temsillerinin anlamlandırılmasında öğretmen adaylarına görsel ve dinamik bir yapı sunduğu söylenebilir.

İkinci çalışma yaprağı, İkinci dereceden parabol

Kağıt-kalem ortamında öğretmen adaylarının ikinci dereceden parabol fonksiyonlarının farklı temsillerini anlamlandırma sürecinde ortaya çıkan temel kategoriler;

- Koordinat sistemi kullanımı,
- Kökler ve tepe noktası belirleme,
- Grafik çizimi
- Katsayı analizi

şeklinde özetlenebilir. Birinci grupta Ö1 ve Ö2, koordinat sistemini kullanarak kök ve tepe noktası belirleme ve grafik çizimi konularında başarılı olmuşlardır. Ö1, fonksiyona belirli değerler vererek noktaları hesaplamış ve kökler ile tepe noktasını belirleyerek grafiği çizmiştir.

Ö2 ise grafik üzerinde katsayıların etkilerini gözlemlemiş ve bu ilişkileri analiz etmiştir. Ayrıca, katsayıların değişimiyle grafiğin genişleyip daralmasını ve yönünün değişmesini gözlemleyerek fonksiyonun özelliklerini anlamlandırmıştır. İkinci grupta Ö3 ve Ö4, katsayıların grafik üzerindeki etkilerini analiz etmiş ve simetri eksenini belirleyerek parabol grafiğini oluşturmuşlardır. Ö3, katsayı analizini ve simetri eksenini dikkate alarak, Ö4 fonksiyon katsayılarını analiz ederek parabol grafiğini çizmiş ve simetri ekseni ile kolların genişliğini gözlemlemiştir. Üçüncü grupta Ö5 ve Ö6, katsayı analizine ve kolların yön ve genişliğinin analizine odaklanmıştır. Bu doğrultuda Ö5, katsayıların grafik üzerindeki etkilerini incelemiş, simetri eksenini ve kökleri belirlemiştir. Ayrıca, Ö6 kolların genişliği ve yönü üzerinde durarak parabol grafiğini doğru bir şekilde tamamlamıştır. Bu süreçte, kağıt-kalem ortamında öğretmen adaylarının grafik çizimi için katsayıların grafik üzerindeki etkilerini analiz ettikleri, fonksiyonun kök ve tepe noktalarını belirleyerek grafik oluşturdukları ve simetri ekseni ile kolların şekli arasındaki ilişkiyi gözlemledikleri görülmektedir. Ayrıca, parabol grafiği üzerinde noktaların konumunu analiz ederek katsayıların parabolün şekli üzerindeki etkisini anlamlandırmışlardır. Bu durum, kağıt-kalem ortamında öğretmen adaylarının ikinci dereceden parabol fonksiyonların farklı temsillerini anlamlandırma sürecinde, matematiksel bilgilerini koordinat sistemi ve analitik yöntemlerle birleştirerek yapılandırdıklarını göstermektedir.

Cabri-Geometri ortamında öğretmen adaylarının ikinci dereceden parabol fonksiyonlarının farklı temsillerini anlamlandırma sürecinde ortaya çıkan temel kategoriler;

- Tepe noktası ve simetri ekseni ile ilişkilendirme,
- Grafik oluşturma,
- Katsayıların grafik üzerindeki etkisi
- Geometrik yer noktasının hareketi ve iz oluşturma

şeklinde özetlenebilir. Birinci grupta Ö1 ve Ö2, dinamik ortamda simetri ekseni ve tepe noktası ile ilişki kurmuşlardır. Ö1, katsayıların grafik üzerindeki etkisini analiz etmiş ve tepe noktasını belirleyerek grafik oluşturmuştur. Ö2 ise simetri ekseni ve tepe noktası ile katsayı ilişkisini gözlemlemiş ve grafik çiziminde dinamik ortam araçlarını etkili bir şekilde kullanmıştır. İkinci grupta Ö3 ve Ö4, katsayıların değişimine bağlı olarak grafiğin nasıl şekillendiğini gözlemlemiştir. Ö3, katsayı değişimleriyle tepe noktası ve simetri ekseninin nasıl değiştiğini analiz ederek parabol grafiğini çizmiştir, Ö4 ise katsayıların y eksenini kestiği noktayı ve grafiğin şekil değişimini gözlemlemiştir. Üçüncü grupta Ö5 ve Ö6, grafik üzerindeki noktaları hareket ettirerek parabol grafiğini analiz etmişlerdir. Ö5, dinamik ortamda katsayı

değişimi ile grafiğin şekil ve konum değişimini analiz etmiştir. Ö6 ise tepe noktası ve simetri ekseninin grafik üzerindeki değişimlerini gözlemleyerek hareket eden noktaların iz bıraktığını analiz etmiş ve parabol grafiğini oluşturmuştur.

Cabri-Geometri ortamında öğretmen adaylarının grafik çizimi sürecinde dinamik ortam araçlarını etkili bir şekilde kullanarak katsayıların grafik üzerindeki etkisini analiz ettikleri, fonksiyonun kökü, tepe noktası ve simetri ekseni ile ilişki kurdukları ve grafik üzerindeki hareket eden noktaları analiz ettikleri görülmektedir. Ayrıca, fonksiyonun katsayılarında meydana gelen değişimlerin grafikte nasıl bir değişime yol açtığını doğrudan gözlemlemişlerdir. Bu durum, öğretmen adaylarının Cabri-Geometri ortamında grafik oluşturma sürecinde dinamik araçların sağladığı olanakları kullandıklarını ve matematiksel kavramları grafiksel temsiller üzerinden ilişkilendirerek yapılandırdıklarını göstermektedir. Bu süreçte, Cabri-Geometri ortamının sağladığı görselleştirme ve etkileşim olanakları, öğretmen adaylarının fonksiyonların grafiksel özelliklerini anlamlandırmalarını kolaylaştırmış ve matematiksel kavramları dinamik ortam araçları ile bütünleştirmelerini sağlamıştır. Öğretmen adaylarının grafik çizim sürecinde simetri ekseni ve tepe noktası ile katsayılar arasındaki ilişkiyi analiz etmeleri, bu sürecin enstrümantasyon sürecinin bir parçası olduğunu göstermektedir. Tablo 28'de katılımcıların söz konusu ortamlarda ikinci dereceden parabol denklemlerin çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bileşenleri verilmiştir.

Tablo 28

Öğretmen adaylarının ikinci dereceden parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bileşenleri

Ortam	Öğretmen Adayı	İşlevsel Sabitler	Eylemdeki Teoremler	Eylemdeki Kavramlar	Kategori
Kağıt-Kalem	Ö1, Ö2	İkinci dereceden parabol grafiği çizmek için belirli x değerleri verilerek noktalar hesaplanır ve tepe noktası ile kökler belirlenerek grafik oluşturulur.	Analitik düzlemde bir parabol fonksiyonunun grafiği çizilecekse, ya fonksiyona belirli x değerleri verilerek noktalar hesaplanır ya da kökler ve tepe noktası belirlenerek grafik oluşturulur.	fonksiyonun katsayılarının grafik üzerindeki etkileri, analitik çözüm yöntemlerinin uygulanması (örneğin, kök bulma, tepe noktası hesaplama)	Koordinat sistemi kullanımı, Kökler ve tepe noktası belirleme, Grafik çizimi

	Ö3, Ö4	İkinci dereceden parabol grafiği çizmek için denklemdeki mevcut katsayıların grafik üzerindeki etkileri analiz edilerek grafik oluşturulur ve simetri ekseni, kökler ve tepe noktası belirlenerek grafik tamamlanır.	Analitik düzlemde bir parabol fonksiyonu çözülecek ve grafiği çizilecekse, denklemdeki mevcut katsayıların grafik üzerindeki etkileri incelenerek çözüm yapılır ve grafik oluşturulur.	analitik çözümleme ve grafik çizimi, Katsayı analizinin geometrik etkileri yöntemlerinin uygulanması (nokta belirleme, diskriminant hesaplama, simetri ekseni bulma ve kolların genişliği veya daralmasını analiz etme)	Katsayı analizi, Kökler ve tepe noktası belirleme, Grafik çizimi
	Ö5, Ö6	İkinci dereceden parabol grafiği çizmek için denklemdeki katsayıların grafik üzerindeki etkileri analiz edilerek simetri ekseni, kökler ve tepe noktası belirlenir ve parabolün kollarının genişliği veya yönü değerlendirilerek grafik tamamlanır.	Analitik düzlemde bir parabol fonksiyonu çözülecek ve grafiği çizilecek ise, denklemdeki katsayıların grafik üzerindeki etkileri analiz edilerek grafik oluşturulur.	analitik çözümleme, grafik çizimi, katsayıların geometrik etkileri yöntemlerinin uygulanması (nokta belirleme, diskriminant hesaplama, simetri ekseni bulma ve parabolün kollarının genişlik veya yön analizleri	Katsayı analizi, Kökler ve tepe noktası belirleme, Grafik çizimi
Cabri-Geometri	Ö1, Ö2	Dinamik araçların kullanımıyla simetri ekseni, tepe noktası ve grafiksel ilişki kurma, Katsayıların grafik üzerindeki etkilerini analiz etme Parabolün tepe noktası ve simetri eksenini belirleyerek grafik oluşturma.	Bir ikinci dereceden parabol çözülüp ve grafiği oluşturulacak ise, fonksiyonun kökleri, tepe noktası ve simetri ekseni belirlenir; katsayıların grafik üzerindeki etkileri analiz edilerek grafik oluşturulur.	Tepe noktası Simetri ekseni Katsayı Parabol grafiği çizimi Dinamik ortamda katsayıların etkisi	Tepe noktası ve simetri ekseni ile ilişkilendirme, grafik oluşturma Katsayıların grafik üzerindeki etkisi

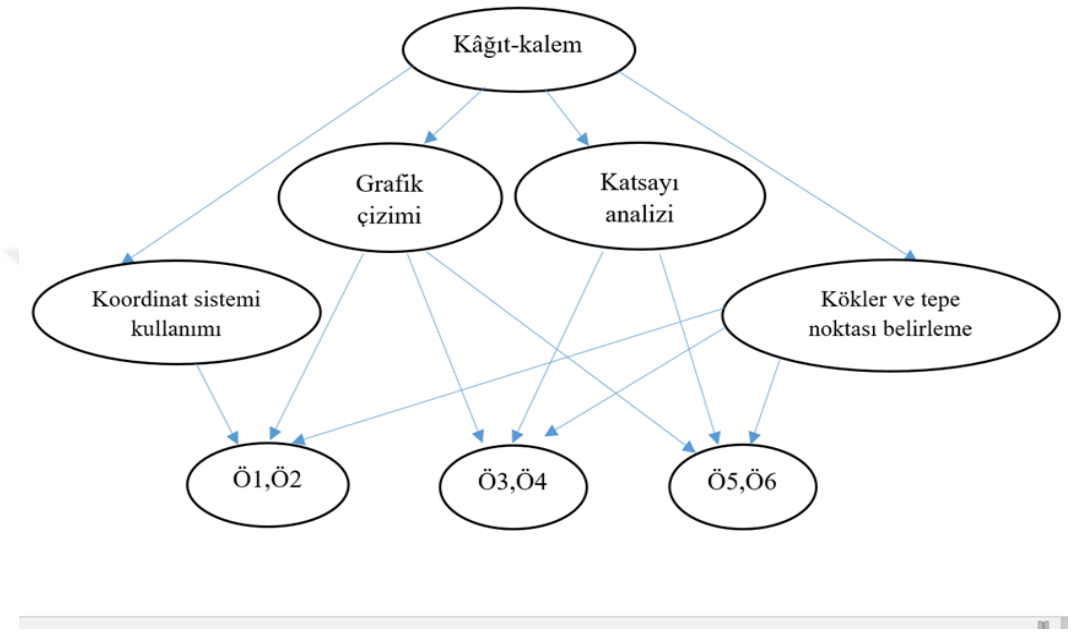
Ö3, Ö4	Dinamik nokta belirleme ve katsayıların grafiksel etkilerini analiz etme Geometrik yer oluşturma ve katsayıların grafik üzerindeki etkilerini gözlemleme.	Bir parabol fonksiyonunun tepe noktası ve simetri ekseni belirlenirse, bu iki unsur, parabolün grafiğinin şeklini ve konumunu belirler. Bir parabol fonksiyonunun katsayıları değiştirilirse, grafik genişler, daralır veya yön değiştirir. Bir parabol fonksiyonunun sabit terimi değiştirilirse, grafik y-eksenini kestiği nokta da değişir. Bir parabol fonksiyonunun grafiği dinamik bir nokta ile oluşturulursa, bu noktanın hareketi parabolün şeklini dinamik olarak belirler.	Dinamik nokta, Simetri ekseni, Tepe noktası, Katsayıların etkisi, Geometrik yer	Katsayıların grafik üzerindeki etkisi, Grafik oluşturma
Ö5, Ö6	Grafik üzerindeki noktaları hareket ettirerek görsel ilişki kurma, Katsayıların değişimiyle grafiğin şekil ve konum değişimini gözlemleme, Dinamik ortamda tepe noktası ve simetri ekseni belirleyerek grafik oluşturma	Bir parabol fonksiyonunun katsayıları değiştirilirse, grafiğin yönü, genişliği ve daralması da değişir. Tepe noktası ve simetri ekseni analiz edilirse, bu unsurların grafik üzerindeki konumları, parabolün şeklini doğrudan etkiler. Parabol grafiği hareket eden bir noktanın iziyle oluşturulursa, bu iz, parabolün eğrisel yapısını belirler. Grafikte belirlenen katsayılar ile tepe noktası ve simetri ekseni arasında ilişki kurulursa, bu ilişki grafiksel temsili anlamlandırmayı sağlar.	Dinamik noktası Katsayıların etkisi Tepe noktası Simetri ekseni Dinamik noktanın noktanın izi	Geometrik yer noktası hareketi ve iz oluşturma, Grafik oluşturma

Tablo 28'de öğretmen adaylarının kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarında ikinci dereceden parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik gerçekleştirdikleri enstrümantal oluşum süreçlerinde ortaya çıkan işlevsel sabitler, eylemdeki teoremler, eylemdeki kavramlar ve kategoriler detaylı bir şekilde sunulmuştur. Kağıt-kalem ortamında öğrencilerin, katsayıların grafik üzerindeki etkisini analiz ederek grafik oluşturma, simetri ekseni ve tepe noktası belirleme gibi temel kategorilerde yoğunlaştıkları görülmektedir. Cabri-Geometri ortamında ise öğretmen adaylarının dinamik ortamın araçları kullanarak katsayıların etkisini analiz etme, oluşturulan dinamik noktaları gözlemleme ve grafik oluşturma süreçlerini gerçekleştirdikleri gözlemlenmiştir. Şekil 148 ve 149'da ise katılımcıların kağıt-kalem ve Cabri-Geometri

ortamında ikinci dereceden parabol denklemlerin çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bir sentezi sunulmuştur.

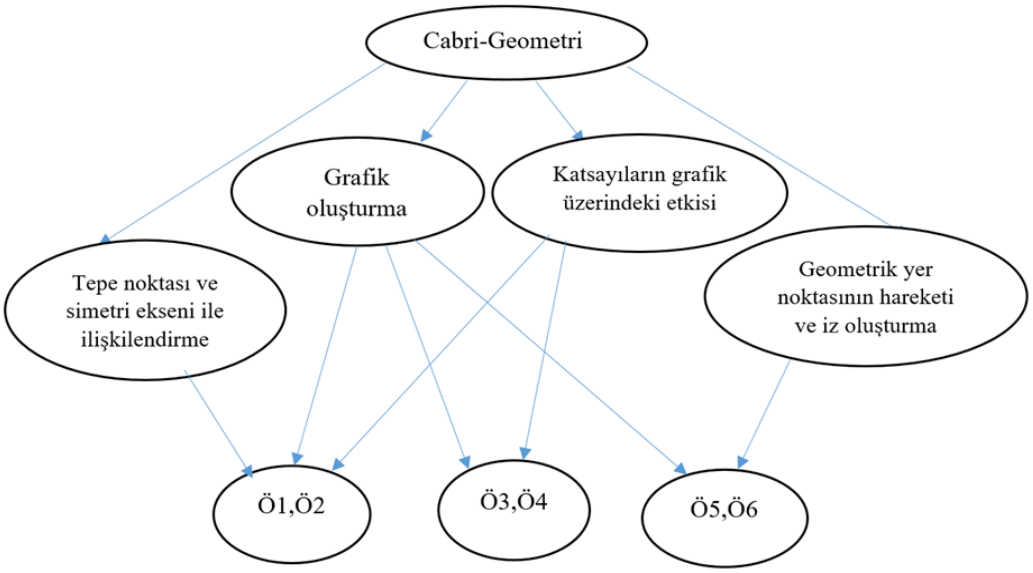
Şekil 148

Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında ikinci dereceden parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının sentezi



Şekil 149

Öğretmen adaylarının Cabri-Geometri ortamında ikinci dereceden parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının sentezi



Kağıt-kalem ortamında öğretmen adaylarının ikinci dereceden parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik gerçekleştirdikleri enstrümantal oluşum süreçlerinde temel

Kağıt-kalem ortamında öğretmen adaylarının ikinci dereceden parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik gerçekleştirdikleri enstrümantal oluşum süreçlerinde temel kategoriler; koordinat sistemi kullanımı, kökler ve tepe noktası belirleme, grafik çizimi, katsayı analizi, simetri ekseni bulma ve kolların genişliği veya yönü analiz etme olarak belirlenmiştir. Ö1 ve Ö2'nin koordinat sistemi kullanarak parabol grafiği oluşturma ve tepe noktası ile kökleri belirleme konusunda başarılı oldukları görülmüştür. Ö3 ve Ö4'ün katsayı analizi ve simetri ekseni bulma kategorilerine yoğunlaştıkları ve grafik çizimi sırasında analitik çözüm yöntemlerini etkili bir şekilde kullandıkları gözlemlenmiştir. Ö5 ve Ö6 ise katsayıların grafik üzerindeki etkilerini analiz ederek kolların genişliği ve yönü konusunda anlamlı çıkarımlar yapmış ve grafik çizim sürecinde farklı stratejiler geliştirmiştir. Bu durum, kağıt-kalem ortamında öğrencilerin farklı matematiksel araçları kullanarak fonksiyonların grafiklerini oluşturma sürecinde geliştirdikleri bilişsel yapıların çeşitliliğini ortaya koymaktadır.

Cabri-Geometri ortamında öğretmen adaylarının ikinci dereceden parabol denklemler çalışma yaprağına yönelik gerçekleştirdikleri enstrümantal oluşum süreçlerinde temel kategoriler; tepe noktası ve simetri ekseni ile ilişkilendirme, katsayıların grafik üzerindeki etkisi, dinamik nokta ve iz oluşturma ve grafik oluşturma şeklinde belirlenmiştir. Ö1 ve Ö2, dinamik araçları kullanarak parabolün tepe noktası ve simetri ekseni ile katsayıların grafik üzerindeki etkisini analiz etmiş ve grafik oluşturma sürecinde bu ilişkiyi gözlemlemişlerdir. Ö3 ve Ö4 ise katsayıların grafik üzerindeki etkisini analiz ederek grafik oluşturma sürecini başarıyla tamamlamışlardır. Ö5 ve Ö6'nın dinamik noktaların izini kullanarak parabol grafiğini oluşturdukları ve katsayıların grafik üzerindeki etkisini analiz ederek simetri eksenini ve tepe noktasını belirledikleri gözlemlenmiştir. Cabri-Geometri ortamında öğretmen adaylarının farklı araç ve teknikleri kullanarak matematiksel ilişkileri anlamlandırdıkları ve grafiksel temsilleri başarıyla yapılandırdıkları görülmektedir.

Üçüncü çalışma yaprağı, Üçüncü dereceden polinomlar

Kâğıt-kalem ortamında öğretmen adaylarının üçüncü dereceden polinomların farklı temsillerini anlamlandırma sürecinde ortaya çıkan temel kategoriler;

- Koordinat Sistemi Kullanımı
- Kökler ve Kritik Nokta Belirleme
- Türev alma
- Grafik Çizimi

şeklinde özetlenebilir. Birinci grupta Ö1 ve Ö2, koordinat sistemini kullanarak kök ve kritik nokta belirleme ve grafik çizimi konularında başarılı olmuşlardır. Ö1, fonksiyona belirli değerler vererek noktaları hesaplamış ve çarpanlara ayırma yöntemiyle kökleri bularak grafiği oluşturmuştur. Ö2 ise katsayıların grafik üzerindeki etkilerini analiz ederek fonksiyonun davranışını gözlemlemiştir. Ayrıca, katsayıların değişimiyle grafiğin şeklinin nasıl değiştiğini analiz ederek fonksiyonun özelliklerini anlamlandırmıştır. İkinci grupta Ö3 ve Ö4, türev alma ve çarpanlara ayırma yöntemlerini kullanarak kök ve kritik noktaları belirlemiş, grafik çizimi sırasında katsayıların etkilerini analiz etmişlerdir. Ö3, kök ve kritik noktaları belirleyerek grafik üzerinde işaretlemiş, Ö4 ise türev alma yöntemiyle grafiğin tepe noktalarını ve eğimini analiz etmiştir. Ayrıca, Ö4 katsayı değişikliklerinin grafik üzerindeki etkilerini gözlemlemiş ve fonksiyonun genel davranışını analiz etmiştir. Üçüncü grupta Ö5 ve Ö6, katsayı analizine ve kritik noktaların belirlenmesine odaklanmıştır. Ö5, türev alma ve değer verme yöntemlerini kullanarak kökleri ve kritik noktaları belirlemiş, grafiğin şekli ve yönü üzerindeki etkilerini analiz etmiştir. Ayrıca, Ö6 kök ve kritik noktaları grafik üzerinde işaretleyerek katsayıların grafik üzerindeki etkisini gözlemlemiş ve fonksiyonun genel davranışını analiz etmiştir. Bu süreçte, kağıt-kalem ortamında öğretmen adaylarının üçüncü dereceden polinom fonksiyonlarının grafiklerini çizmek için türev alma, değer verme ve çarpanlara ayırma yöntemlerini etkin bir şekilde kullandıkları, fonksiyonun kök ve kritik noktalarını belirleyerek grafik oluşturdukları ve katsayıların grafik üzerindeki etkilerini analiz ettikleri gözlemlenmiştir. Ayrıca, grafik üzerindeki noktaların konumunu analiz ederek katsayıların polinom grafiğinin şekli üzerindeki etkisini anlamlandırmışlardır. Bu durum, kağıt-kalem ortamında öğretmen adaylarının üçüncü dereceden polinom fonksiyonlarının farklı temsillerini anlamlandırma sürecinde, matematiksel bilgilerini koordinat sistemi ve analitik yöntemlerle birleştirerek yapılandırdıklarını göstermektedir.

Cabri-Geometri ortamında öğretmen adaylarının üçüncü dereceden polinomların farklı temsillerini anlamlandırma sürecinde ortaya çıkan temel kategoriler;

- Kökler ve Kritik Noktalar Belirleme
- Fonksiyonların Davranışını Katsayılar üzerinden Analiz Etme
- Grafik oluşturma

şeklinde özetlenebilir. Tablo 29'da katılımcıların söz konusu ortamlarda üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bileşenleri verilmiştir. Şekil 150 ve 151'de ise katılımcıların kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamında üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bir sentezi sunulmuştur.

Tablo 29

Öğretmen adaylarının üçüncü dereceden poinmlar çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bileşenleri

Orta	Öğretmen	İşlevsel Sabitler	Eylemdeki Teoremler	Eylemdeki Kavramlar	Kategori
Kağıt-Kalem	Ö1, Ö2	Üçüncü dereceden polinom grafiği çizmek için x değişkenine değer verilerek noktalar hesaplanır, çarpanlara ayırma yöntemiyle kökler bulunur, işaret tablosu oluşturularak köklerin işaretleri belirlenir, kökler ve kritik noktalar koordinat sistemi üzerinde işaretlenir ve katsayıların etkisi analiz edilerek grafik oluşturulur.	Bir üçüncü dereceden polinomun denklemi çözülecek ve grafiği çizilecek ise, bu polinomun kökleri belirlenmeli ve bu kökler koordinat sistemi üzerinde doğru bir şekilde yerleştirilmelidir. Eğer üçüncü dereceden bir polinomun çözümü yapılacak ve grafiği çizilecek ise, x değişkenine değer verilerek noktalar belirlenmeli ve denklemin köklerini bulmak amacıyla çarpanlara ayırma yöntemi kullanılmalıdır.	çarpanlara ayırma, kökler toplamı ve çarpımı analizi, veya grafik çizme yöntemlerinin uygulanması (örneğin, köklerin çarpanlara ayrılarak bulunması, kökler toplamının ve çarpımının katsayılara göre hesaplanması ve grafik üzerinde görsel analiz yapılması gibi yöntemler). x değişkenine değer vererek nokta bulma', 'çarpanlara ayırma' veya 'işaret tablosu oluşturma' yöntemlerinin uygulanması (örneğin, kökleri bulmak için çarpanlara ayırma, işaret tablosu ile köklerin işaretlerinin belirlenmesi ve grafik üzerinde nokta belirleyerek çizim yapma gibi teknikler)	Koordinat sistemi kullanımı,Kökler ve kritik nokta belirleme,
	Ö3, Ö4	Üçüncü dereceden polinom grafiği çizmek için x değişkenine değer verilerek noktalar hesaplanır, çarpanlara ayırma yöntemi ile kökler, türev hesaplama yöntemleriyle kritik noktalar bulunur, kökler koordinat sistemi üzerinde işaretlenir ve grafik çizilir.	Eğer analitik düzlemde üçüncü dereceden bir polinomun çözümü yapılacak ve grafiği çizilecek ise, x değişkenine değer verilerek noktalar belirlenmeli ve denklemin köklerini bulmak amacıyla çarpanlara ayırma ile türev hesaplama yöntemleri kullanılmalıdır.	x değişkenine değer vererek nokta bulma, çarpanlara ayırma veya türev hesaplama yöntemlerinin uygulanması (örneğin, kökleri bulmak için çarpanlara ayırma, grafik üzerinde nokta belirleyerek çizim yapma ve grafik üzerinde görsel analiz yapılması gibi teknikler)	Koordinat sistemi kullanımı,Kökler ve kritik nokta belirleme,Türev alma, Grafik çizimi

	Ö5, Ö6	Üçüncü dereceden polinom grafiği çizmek için türev alma, değer verme ve kök bulma yöntemleriyle kökler ve kritik noktalar belirlenir, kökler koordinat sistemi üzerinde işaretlenir ve grafik çizilir.	Eğer analitik düzlemde üçüncü dereceden bir polinomun çözümü yapılacak ve grafiği çizilecek ise, türev alma, değer verme ve kök bulma yöntemleri kullanılmalıdır.	türev alma, değer verme ve kök bulma yöntemlerinin uygulanması (örneğin, kökleri belirlemek için türev alma, grafikte noktaları işaretleyerek çizim yapma ve fonksiyonun davranışını analiz etme gibi teknikler).	Koordinat sistemi kullanımı,Kökler ve kritik nokta belirleme,Türev alma, Grafik çizimi
Cabri-Geometri	Ö1, Ö2	Üçüncü dereceden polinomların çözümü ve grafiğinin çizimi için, polinomun köklerinin dinamik araçlar kullanılarak belirlenmesi, grafik üzerinde x-eksenini kesme noktalarının bulunması ve yerel minimum, yerel maksimum ile eğim analizinin yapılması süreçlerinde Cabri-Geometri ortamındaki araçlardan yararlanılmıştır.	Eğer bir polinom fonksiyonunun reel kökleri belirlenmek isteniyorsa, bu kökler fonksiyonun grafiğinin x-eksenini kestiği noktalar olarak alınmalıdır. Eğer bir fonksiyon üçüncü dereceden bir polinom ise, bu fonksiyonun grafiği en az bir yerel maksimum ve bir yerel minimum noktası içerir ve bu noktalarda eğim sıfır olup, fonksiyonun eğiminde değişim meydana gelir. Eğer bir polinom denklemi çarpanlarına ayrılabiliyorsa, bu polinomun kökleri çarpanların sıfıra eşitlenmesiyle doğrudan elde edilebilir. Eğer bir fonksiyon sürekli ise ve bu fonksiyonun belirli bir aralıktaki uç noktalarında aldığı değerler zıt işaretliyse, bu aralıkta fonksiyonun en az	Polinomun kökleri, x-eksenini kesme noktaları, Çarpanlara ayırma, Tam kare açılımı, Yerel minimum ve maksimum, Eğim değişimi	Kökler ve Kritik Noktalar Belirleme,Grafik oluşturma, Fonksiyonların Davranışını Katsayılar üzerinden Analiz Etme

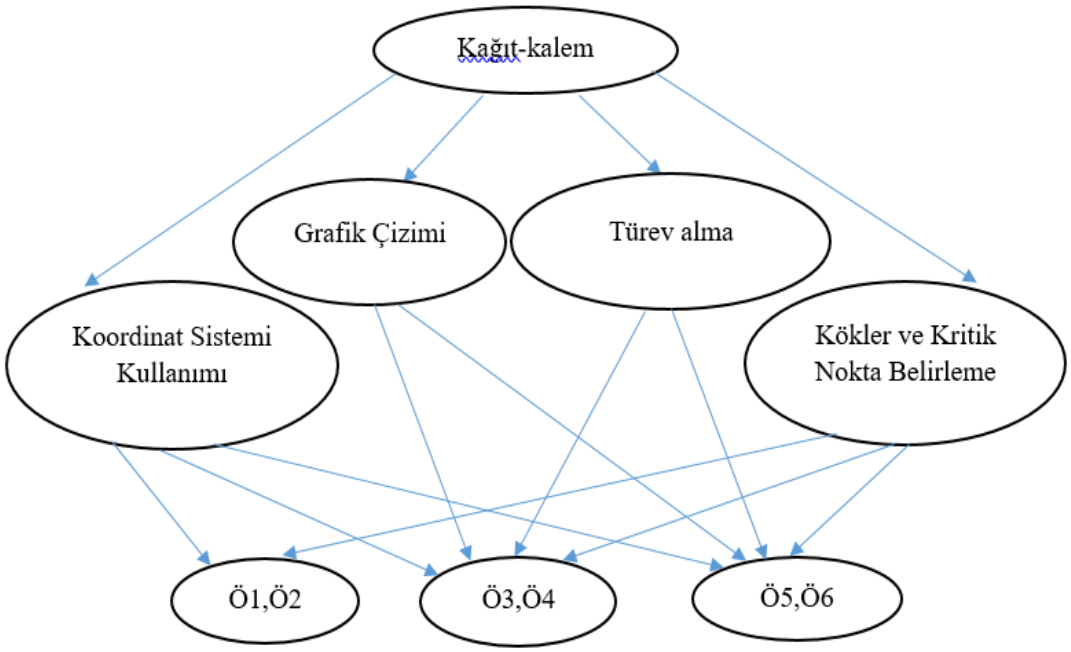
		bir reel kökü vardır. (Ara Değer Teoremi).		
Ö3, Ö4	Üçüncü dereceden polinomların çözümü ve grafiğinin çizimi için Cabri-Geometri ortamında dinamik nokta belirleme, katsayıların grafiksel etkilerini analiz etme ve geometrik yer oluşturma işlemleri uygulanır. Ayrıca, fonksiyonun kökleri, yerel maksimum ve minimum noktaları ile x-eksenini kesme noktaları belirlenir.	Eğer bir üçüncü dereceden polinom fonksiyonunun reel kökleri varsa, bu kökler fonksiyonun grafiğinde x-eksenini kestiği noktaları verir. Eğer bir üçüncü dereceden polinom fonksiyonunun katsayıları değişirse, bu değişiklikler fonksiyonun grafiğinin genişliğini, yönünü ve yerel maksimum ile minimum noktalarının konumunu belirler.	Dinamik nokta belirleme, Katsayıların grafik üzerindeki etkileri, Geometrik yer oluşturma, Yerel maksimum ve minimum noktalarının belirlenmesi, Köklerin belirlenmesi, Grafiğin x-eksenini kesme noktalarının bulunması	Kökler ve Kritik Noktalar Belirleme,Grafik oluşturma
Ö5, Ö6	Üçüncü dereceden polinomların çözümü ve grafiğinin çizimi için Cabri-Geometri ortamında dinamik nokta belirleme, katsayıların grafiksel etkilerini analiz etme ve geometrik yer oluşturma işlemleri uygulanmakta; ayrıca fonksiyonun kökleri, yerel maksimum ve minimum noktaları ile x-eksenini kesme noktaları belirlenmektedir.	Eğer bir üçüncü dereceden polinom fonksiyonunun reel kökleri varsa, bu kökler fonksiyonun grafiksel temsili üzerinde x-eksenini kestiği noktaları belirler. Eğer bir üçüncü dereceden polinom fonksiyonunun türevi alınır ve türev sonucu sıfıra eşitlenirse, elde edilen x değerleri fonksiyonun yerel maksimum ve minimum noktalarını verir; bu noktalarda fonksiyonun davranışı değişir.	Dinamik nokta belirleme, Kök bulma, Türev alma, Katsayıların etkisi, Geometrik yer oluşturma, Yerel maksimum ve minimum noktaları belirleme	Kökler ve Kritik Noktalar Belirleme,Grafik oluşturma, Fonksiyonların Davranışını Katsayılar üzerinden Analiz Etme

Tablo 29'da öğretmen adaylarının kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarında üçücü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik gerçekleştirdikleri enstrümantal oluşum

süreçlerinde ortaya çıkan işlevsel sabitler, eylemdeki teoremler, eylemdeki kavramlar ve kategoriler detaylı bir şekilde sunulmuştur. Kağıt-kalem ortamında koordinat Sistemi Kullanımı, kökler ve kritik nokta belirleme, türev alma, grafik çizimi gibi temel kategorilerde yoğunlaştıkları görülmektedir. Cabri-Geometri ortamında ise öğretmen adaylarının kökler ve kritik noktalar belirleme, fonksiyonların davranışını katsayılar üzerinden analiz etme ve grafik oluşturma süreçlerini gerçekleştirdikleri gözlemlenmiştir. Şekil 150 ve 151'de ise katılımcılarınkağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamında üçüncü dereceden polinomlar çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bir sentezi sunulmuştur.

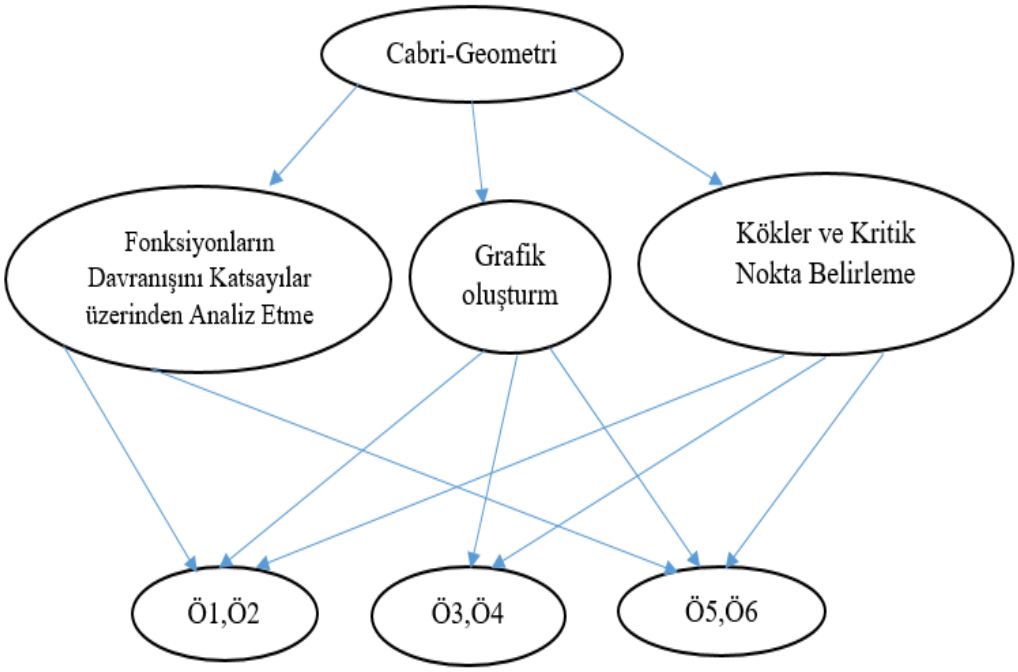
Şekil 150

Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının sentezi



Şekil 151

Öğretmen adaylarının Cabri-Geometri ortamında üçüncü derecedem polinomlar çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının sentezi



Şekil 151

Şekil 150 ve 151'den görüldüğü üzere üçüncü dereceden polinomların grafiklerini çizme sürecinde öğretmen adaylarının yoğunlaştığı kategoriler, hazırlanan sentezde açık şekilde gösterilmektedir. Kağıt-kalem ortamında öğrenciler genellikle koordinat sistemi kullanımı ile kök ve kritik nokta belirlemeye odaklanırken, Cabri-Geometri ortamında grafik oluşturma daha baskın hale gelmiş; bazı gruplarda ise fonksiyonların davranışlarının katsayılar üzerinden analiz edilmesi öne çıkmıştır. Bu durum, dinamik ortamın öğrencilerin grafiksel ilişkileri keşfetmesini ve anlamlandırmasını desteklediğini göstermektedir.

Dördüncü çalışma yaprağı, Ters fonksiyonlar

Kağıt-kalem ortamında öğretmen adaylarının ters fonksiyonların farklı temsillerini anlamlandırma sürecinde ortaya çıkan temel kategoriler;

- Birebirlik ve örtenlik koşullarını tartışma,
- Cebirsel işlem uygulama,
- Grafik oluşturma sırasında kavramsal zorluk

şeklinde özetlenebilir. Birinci grupta Ö1 ve Ö2, kağıt-kalem ortamında ters fonksiyonun tanımlanabilmesi için gerekli koşulları ele alırken, "bir eleman birden fazla elemana giderse

fonksiyon tanımlı olmaz” ve “çıktı kümesi girdi kümesi olur” gibi ifadelerle birebirlik ve örtenlik koşullarını tartışma kategorisinde yer almıştır. Aynı şekilde Ö3 ve Ö4, "Fonksiyonun tersi tanımlanacaksa birebir ve örten olmalı." açıklamasıyla aynı kategoriye dahil edilmiştir. Ö5 ve Ö6 ise “ters fonksiyon olması için birebir ve örten olması gerekiyor” gibi doğrudan ifadelerle bu kategoride yer almıştır. Tüm gruplarda, cebirsel çözüm sürecinde x’in yalnız bırakılmasına yönelik uygulamalar görülmüş, bu da cebirsel işlem uygulama kategorisine dayanak oluşturmuştur. Örneğin Ö2, "x’i yalnız bırakmak için y=2x+3 yazdım, x=(y-3)/2" diyerek doğrudan bu kategoriye işaret etmektedir. Benzer biçimde Ö3, "denklemde x’i yalnız bırakmamız gerekir" ifadesiyle bu süreci vurgulamaktadır. Ö5 ise “x’in parantezini alsak olur mu?” ve “tam kareye tamamladım” gibi ifadelerle bu kategoriye dahil olmuştur.

Bununla birlikte, grafik çizimi sırasında karşılaşılan belirsizlikler ve yanlış çözüm stratejileri nedeniyle, özellikle Ö2’nin "grafiği çizdim ama birebir değil gibi duruyor", Ö5’in “grafiği hareket ettirdikçe görüyorum” gibi açıklamaları grafik oluşturma sırasında kavramsal zorluk kategorisine dahil edilmiştir.

Cabri-Geometri ortamında öğretmen adaylarının ters fonksiyonların farklı temsillerini anlamlandırma sürecinde ortaya çıkan temel kategoriler;

- Doğruya göre simetri alma,
- Geometrik yer belirleme,
- Dinamik grafik oluşturma,
- Grafik üzerinde dinamik değişiklik yaparak ters fonksiyonun görselleştirilmesi

şeklinde özetlenebilir. Birinci grupta Ö1 ve Ö2, y=x doğrusuna göre simetri alma işlemini gerçekleştirmeye çalışırken, “y=x doğrusunu çiziyoruz ve grafiğin simetrisini alıyoruz” açıklamasıyla doğruya göre simetri alma kategorisinde yer almıştır. Ö3 ve Ö4’te benzer biçimde “y=x doğrusuna göre simetri alınmalı” ve “doğruya göre simetri almalıyız” ifadeleriyle aynı kategoriye girilmiştir. Üçüncü grup olan Ö5 ve Ö6 da, “grafiğin simetrisini doğruya göre alıyoruz” ve “y=x doğrusuna göre simetri alma işlemi yapılmalı” açıklamalarıyla bu kategoriye dahil olmuştur. Geometrik yer belirleme kategorisi, her üç grubun da ters fonksiyonun geometrik temsili oluşturulurken, “simetri alınan noktalar üzerinden geometrik yer oluşturdum” (Ö6), “geometrik yer aracıyla oluşturduk” (Ö4) gibi açıklamalarıyla belirlenmiştir. Dinamik grafik oluşturma kategorisinde ise grafiklerin hareketli şekilde oluşturulması vurgulanmıştır. Örneğin, Ö1 “geometrik yer oluşuyor”, Ö3 “geometrik yer oluşturulmalı”, Ö6 ise “noktalar hareket ettikçe grafik çiziliyor” ifadeleriyle bu kategoriye dâhil edilmiştir. Grafik üzerinde dinamik değişiklik yaparak ters fonksiyonun görselleştirilmesi kategorisine ise

özellikle Cabri-Geometri araçlarının aktif kullanımıyla ulaşıldığı gözlemlenmiştir. Ö4'ün "fonksiyonu ters çevirdikçe grafik değişiyor", Ö6'nın "grafik simetriyle değişiyor, dinamik oluyor" açıklamaları bu kategoriye dahil edilmiştir.

Tablo 30'da katılımcıların söz konusu ortamlarda ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bileşenleri (işlevsel sabitler, eylemdeki teoremler ve eylemdeki kavramlar) detaylı biçimde sunulmuştur.

Tablo 30

Öğretmen adaylarının ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bileşenleri

Ortam	Öğrenc	İşlevsel Sabitler	Eylemdeki Teoremler	Eylemdeki Kavramlar	Kategori
Kağıt-Kalem	Ö1, Ö2	Doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların, ters fonksiyonlarının çözümü ve grafiğinin çizimi için, fonksiyonun birebir ve örten olup olmadığı tartışılmıştır. x'i yalnız bırakma ve grafik oluşturma aşamalarında kavramsal zorluk yaşanmıştır.	Analitik düzlemde doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların ters fonksiyonları elde edilip grafiksel temsili çizilecek ise, fonksiyonun birebir ve örten olması gereklidir. ve girdiler ve çıktıların yani x ve y'nin yer değiştirilmesi gerekiyor.	cebirsel işlemler ve işlemsel dönüşümler (örneğin, denklem düzenleme, koordinat dönüşümü gibi teknikler)	Birebirlik ve örtenlik koşullarını tartışma, Cebirsel işlem uygulama, Grafik oluşturma sırasında kavramsal zorluk
	Ö3, Ö4	Doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların ters fonksiyonlarının çözümü ve grafiğinin çizimi sürecinde, fonksiyonun birebir ve örten olup olmadığı tartışılmış; x'i yalnız bırakma ve grafik oluşturma aşamalarında ise kavramsal zorluklar yaşanmıştır.	Analitik düzlemde doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların ters fonksiyonları elde edilip grafiksel temsili çizilecek ise, fonksiyonlar birebir ve örten olmalıdır.	işlemsel dönüşümler (denklem düzenleme, koordinat dönüşümü gibi teknikler)	Birebirlik ve örtenlik koşullarını tartışma, Cebirsel işlem uygulama, Grafik oluşturma sırasında kavramsal zorluk

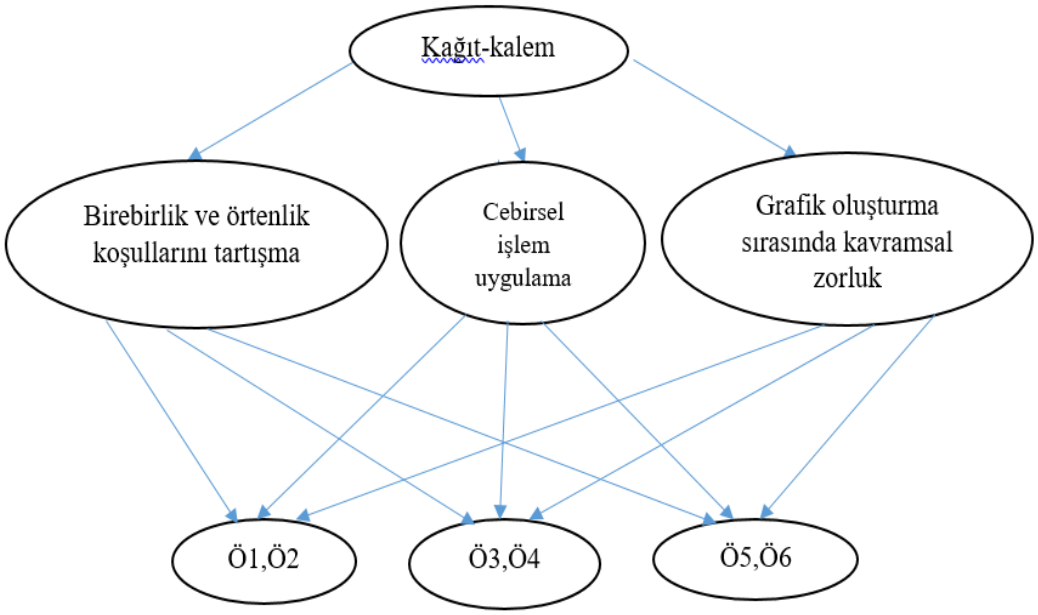
	Ö5, Ö6	Doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların terslerinin çözümü ve grafiğinin çizimi için, x'i yalnız bırakma, doğrusal fonksiyonun tersinin birebir ve örten olup olmadığını tartışma ve parabol fonksiyonunun tersini alırken cebirsel işlemler yapma adımları uygulanır.	Analitik düzlemde doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların ters fonksiyonları elde edilip grafiksel temsili çizilecek ise, fonksiyon birebir ve örten olmalıdır.	cebirsel işlemler ve işlemsel dönüşümler (denklem düzenleme, x'i yalnız bırakma, fonksiyonun tersinin alınması gibi teknikler)	Birebirlik ve örtenlik koşullarını tartışma, Cebirsel işlem uygulama, Grafik oluşturma sırasında kavramsal zorluk
Cabri-Geometri	Ö1, Ö2	Doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların terslerinin çözümü ve grafiğinin oluşturulması sürecinde, doğruya göre simetri alma, ardından geometrik yer belirleme ve dinamik grafik oluşturma işlemleri uygulanır.	Eğer doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların terslerinin çözümü ve grafiği oluşturulacaksa, bu işlem doğruya göre simetri alma, ardından geometrik yer belirleme ve dinamik grafik oluşturma yoluyla gerçekleştirilir.	Simetri alma (y = x doğrusuna göre), Geometrik yer oluşturma, Ters fonksiyon kavramı, Dinamik ortamda grafik oluşturma, Fonksiyon ve ters fonksiyon ilişkisi	Doğruya göre simetri alma, Geometrik yer belirleme, Dinamik grafik oluşturma,
	Ö3, Ö4	Doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların terslerinin çözümü ve grafiğinin oluşturulması sürecinde, doğruya göre simetri alma, ardından geometrik yer belirleme ve dinamik grafik oluşturma işlemleri uygulanır.	Eğer doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların terslerinin çözümü ve grafiği oluşturulacaksa, bu işlem doğruya göre simetri alma, ardından geometrik yer belirleme ve dinamik grafik oluşturma yoluyla gerçekleştirilir.	Simetri alma (y = x doğrusuna göre), Geometrik yer oluşturma, Ters fonksiyon kavramı, Dinamik ortamda grafik oluşturma, Fonksiyon ve ters fonksiyon ilişkisi	Doğruya göre simetri alma, Geometrik yer belirleme,Dinamik grafik oluşturma,

Ö5, Ö6	Doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların terslerinin çözümü ve grafiğinin oluşturulması sürecinde, doğruya göre simetri alma, geometrik yer belirleme ve grafik üzerinde dinamik değişiklikler yaparak ters fonksiyonun görselleştirilmesi adımları izlenir.	Eğer doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların terslerinin çözümü ve grafiği oluşturulacak ise, doğruya göre simetri alınır, geometrik yer belirlenir ve grafik üzerinde dinamik değişiklikler yapılarak ters fonksiyon görselleştirilir.	Doğruya göre simetri alma, Geometrik yer oluşturma, Dinamik grafik oluşturma, Ters fonksiyonun görsel temsili,	Doğruya göre simetri alma, Geometrik yer belirleme, Grafik üzerinde dinamik değişiklik yaparak ters fonksiyonun görselleştirilmesi

Tablo 30'da öğretmen adaylarının kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarında ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik gerçekleştirdikleri enstrümantal oluşum süreçlerinde ortaya çıkan işlevsel sabitler, eylemdeki teoremler, eylemdeki kavramlar ve kategoriler detaylı bir şekilde sunulmuştur. Kağıt-kalem ortamında birebirlik ve örtenlik koşullarını tartışma, cebirsel işlem uygulama, grafik oluşturma sırasında kavramsal zorluk gibi temel kategorilerde yoğunlaştıkları görülmektedir. Cabri-Geometri ortamında ise öğretmen adaylarının doğruya göre simetri alma, geometrik yer belirleme, dinamik grafik oluşturma, grafik üzerinde dinamik değişiklik yaparak ters fonksiyonun görselleştirilmesi kategorileri grafik oluşturma süreçlerini gerçekleştirdikleri gözlemlenmiştir. Şekil 152 ve 153'te ise katılımcıların kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamında ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bir sentezi sunulmuştur.

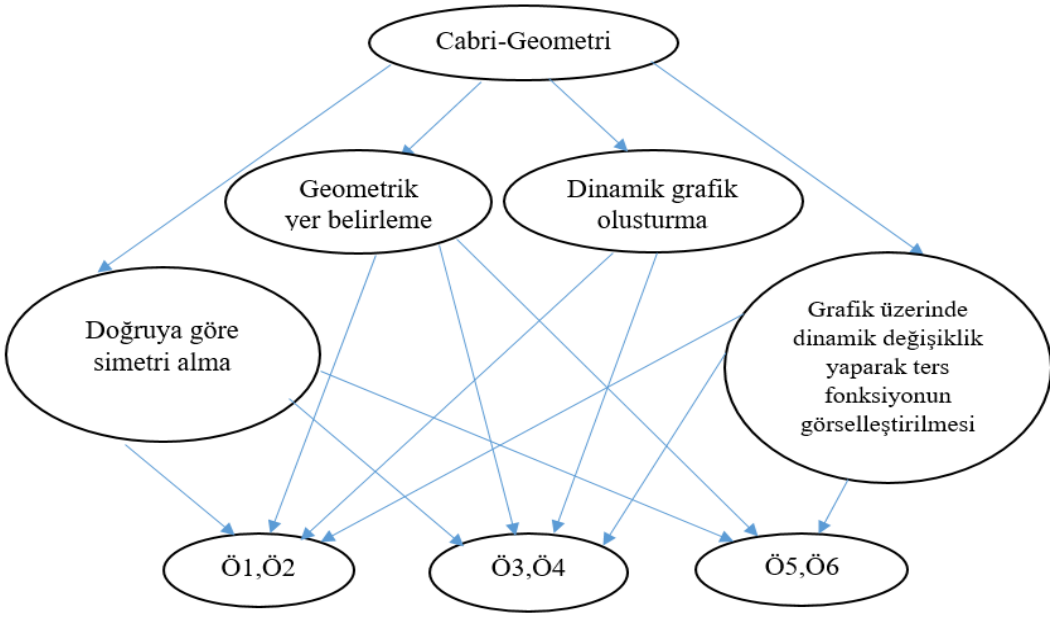
Şekil 152

Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının sentezi



Şekil 153

Öğretmen adaylarının Cabri-Geometri ortamında ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının sentezi



Şekil 152 ve 153'ten görüldüğü üzere ters fonksiyonlar grafiklerini çizme sürecinde öğretmen adaylarının yoğunlaştığı kategoriler, hazırlanan sentezde açık şekilde gösterilmektedir. Kağıt-kalem ortamında katılımcılar genellikle cebirsel işlemlere odaklanmakta, birebirlik ve örtenlik koşullarını tartışmakta ve grafik oluşturma sürecinde kavramsal zorluklar yaşamaktadır. Cabri-Geometri ortamında ise öğretmen adayları doğruya göre simetri alma, geometrik yer belirleme, dinamik grafik oluşturma ve grafik üzerinde dinamik değişiklikler yaparak ters fonksiyonları görselleştirme gibi daha çok görsel ve etkileşimli eylemler üzerine yoğunlaşmaktadır.

Bu çalışma, öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusuna ilişkin farklı temsilleri anlamlandırma süreçlerini, kağıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarında sergiledikleri enstrümanlı eylem şemaları aracılığıyla incelemektedir. Veriler, içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiş ve bu analiz sonucunda her bir çalışma yaprağında ortaya çıkan kategoriler üzerinden temalara ulaşılmıştır. Oluşturulan bu temalar, öğretmen adaylarının farklı ortamları birer enstrüman olarak kullanma becerileri, matematiksel bilgilerini kullanma ve temsil etme yolları, ayrıca bu ortamlarda karşılaştıkları kavramsal zorluklara verdikleri tepkiler temelinde şekillenmiştir.

Kağıt-Kalem Ortamında Oluşan Temalar

Kavramsal Bilgilerin İşleme Dönüşmesi

Bu tema, birebirlik ve örtenlik gibi kavramların grafik oluşturma, fonksiyon tanımlama ve ters fonksiyonun geçerliliğini tartışma süreçlerinde nasıl işlevselleştirildiğine odaklanmaktadır. Özellikle doğrusal fonksiyonun birebirliğini ve örtenliğini sorgulama süreci, bu temanın oluşmasına katkı sunmuştur. Ters fonksiyonun varlık koşulları tartışılırken bu kavramlara teorik düzeyde hâkim olunmasına rağmen uygulama sürecinde zorluklar yaşanmıştır. Benzer şekilde parabol fonksiyonların birebirliği bağlamında yapılan tartışmalar da bu temayı desteklemektedir. Ayrıca, polinom fonksiyonların tanım kümesi ve simetrik davranışları üzerine yapılan çıkarımlar da bu temanın içeriğini zenginleştirmiştir.

İşlem Odaklı Temsil ve Cebirsel Dönüşüm

Öğretmen adaylarının çalışma yapraklarındaki doğrusal, parabolik fonksiyonların terslerini bulmak için x'i yalnız bırakmaya yönelik gerçekleştirdiği cebirsel işlemler bu temanın merkezindedir. Örneğin, doğrusal ve parabolik denklemlerde, fonksiyonun tersini elde etmede doğrudan işlem odaklı bir yaklaşım benimsenmiştir. Üçüncü çalışma yaprağında ise polinom fonksiyonun grafiğini çizebilmek için işaret tablosu, kök bulma, kritik nokta belirleme gibi cebirsel analizlerin tercih edilmesi bu yaklaşımı desteklemiştir. Özellikle değişken değiştirme,

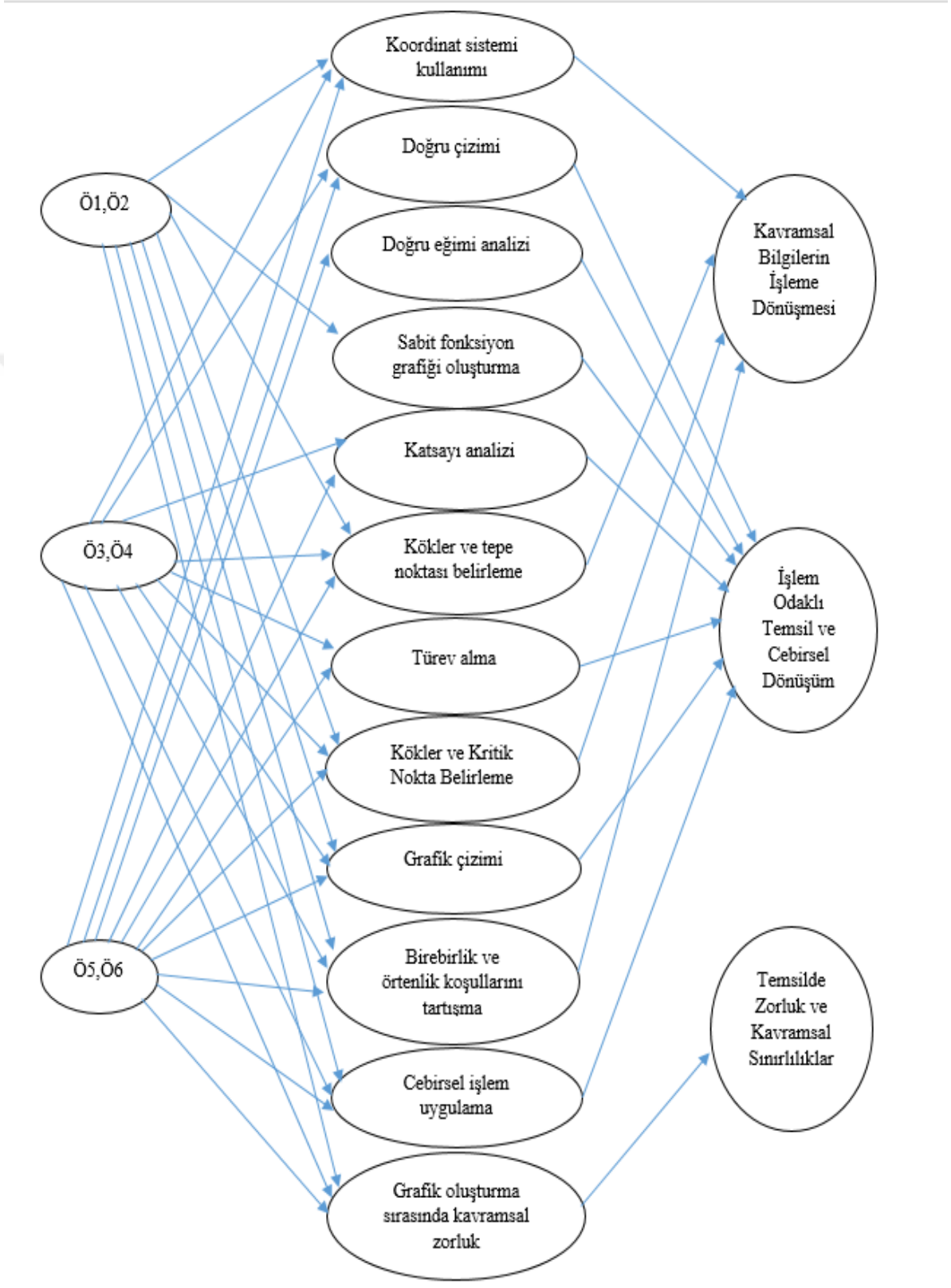
denklem düzenleme ve tam kareye tamamlama gibi teknikler, bu temanın öğretmen adaylarının temsil geçişlerindeki yeri göstermektedir.

Temsilde Zorluk ve Kavramsal Sınırlılıklar

Özellikle grafik oluşturma aşamasında öğretmen adaylarının yaşadığı güçlükler bu temanın temelini oluşturmaktadır. Fonksiyonların tanım ve değer kümelerini doğru belirleyememe, simetri ekseninin grafiksel karşılığını yorumlayamama gibi durumlar ikinci ve üçüncü çalışma yapraklarında belirginleşmiştir. Grafiklerin sadece cebirsel işlem çıktısı olarak görülmesi ve temsilin görsel doğruluğu konusunda yaşanan tereddütler, öğretmen adaylarının kavramsal zeminlerinin sınırlı olduğunu göstermektedir. Ayrıca, üçüncü dereceden fonksiyonlarda yön değişimi ve eğim davranışlarının grafik üzerine doğru yansıtılamaması, temsilde kavramsal eksikliklerin sürdüğünü ortaya koymaktadır. Şekil 154'te, kağıt-kalem ortamında her bir grubun oluşturduğu kategoriler ve bu kategorilerin ilişkili olduğu temalar görselleştirilmişt.

Tablo 154

Öğretmen Adaylarının Kağıt-Kalem Ortamında Geliştirdikleri Kategoriler ve Bu Kategorilere Dayalı Tematik Yapının Sentezi



Şekil 154’te, kâğıt-kalem ortamında gerçekleştirilen öğretim sürecine ait üç grubun (Ö1,Ö2, Ö3,Ö4, Ö5,Ö6) ortaya koyduğu kategorileri ve bu kategorilerle ilişkilendirilen temaları bütüncül bir yapı içerisinde sunmaktadır. Grafikte, her grup için belirlenen kategoriler ayrı ayrı gösterilmiş; bu kategorilerle temalar arasındaki örtüşmeler ise içerik analizi doğrultusunda yansıtılmıştır.

Birinci grup (Ö1,Ö2), "Koordinat sistemi kullanımı", "Sabit fonksiyon doğru çizimi", "Kökler ve tepe noktası belirleme", "Grafik çizimi", "Kökler ve kritik nokta belirleme", "Birebirlik ve örtenlik koşullarını tartışma", "Cebirsel işlem uygulama" ve "Grafik oluşturma sırasında kavramsal zorluk" gibi kategorilerle ilişkilidir. Bu kategoriler, özellikle "Kavramsal Bilgilerin İşleme Dönüşmesi", "İşlem Odaklı Temsil ve Cebirsel Dönüşüm" ve "Temsilde Zorluk ve Kavramsal Sınırlılıklar" temalarıyla örtüşmektedir. İkinci grup (Ö3,Ö4), yukarıdakilere ek olarak "Doğru çizimi", "Katsayı analizi", "Simetri ekseni bulma" ve "Türev alma" gibi daha derinlemesine cebirsel işlemleri ve grafik analizlerini içeren kategoriler geliştirmiştir. Bu yönüyle, ikinci grubun temsil gücünü artırdığı ve farklı temalarla daha güçlü ilişkiler kurduğu görülmektedir. Üçüncü grup (Ö5,Ö6) ise yaklaşık tüm kategorileri kapsayan en kapsamlı yapıya sahiptir. "Doğrunun eğimi analizi" ve "katsayı analizi" gibi daha ayrıntılı ve yapısal analizleri de içeren bu grubun, özellikle kavramsal düşünme, işlem temsili ve temsilde zorluk temalarıyla ilişkilendiği görülmektedir. Şekil 154 , içerik analizine dayalı olarak elde edilen temaların oluşumuna dair örüntüyü açıkça ortaya koymakta ve öğretmen adaylarının tematik alanlarda yoğunlaştıkları yapıları sunmaktadır.

Cabri-Geometri Ortamında Oluşan Temalar

Dinamik Temsil Yoluyla Kavramsal Anlamlandırma

Bu tema, öğretmen adaylarının fonksiyonlara ilişkin yapısal özellikleri grafik üzerinden analiz etmeye yönelik dinamik araçlardan nasıl yararlandıklarını kapsamaktadır. Özellikle dinamik ortamda grafik üzerinde yapılan dönüşümler, doğruya göre simetri alma, tepe noktası ve simetri ekseni ile ilişki kurma gibi işlemler, fonksiyonun yapısal özelliklerini yalnızca cebirsel olarak değil, aynı zamanda grafiksel olarak da anlamlandırma eğiliminde olduklarını göstermektedir. Birinci çalışma yaprağında Ö1 ve Ö2’nin sabit fonksiyon grafiklerini oluştururken dinamik iz araçlarını kullanmaları, ikinci çalışma yaprağında Ö3 ve Ö4’ün simetri eksenini analiz ederken dinamik değişimleri dikkate almaları, üçüncü çalışma yaprağında Ö5 ve Ö6’nın polinom fonksiyonların yerel maksimum ve minimum noktalarını analiz etmeleri bu temayı desteklemektedir. Ayrıca ters fonksiyonların grafiksel simetrik yapıları oluşturulurken kullanılan doğruya göre simetri alma işlemi ve geometrik yer belirleme teknikleri, öğretmen adaylarının fonksiyon yapısnın görsel boyutunu cebirsel yapı ile bütünleştirmelerine olanak

tanımıştır. Bu süreçte grafik üzerinde yapılan her dönüşüm, fonksiyonun cebirsel tanımıyla ilişkili olarak yeniden değerlendirilmiş, böylece öğretmen adaylarının yapısal analiz becerileri gelişmiştir.

Görselleştirme Yoluyla Kavramlar Arası ilişkilendirme

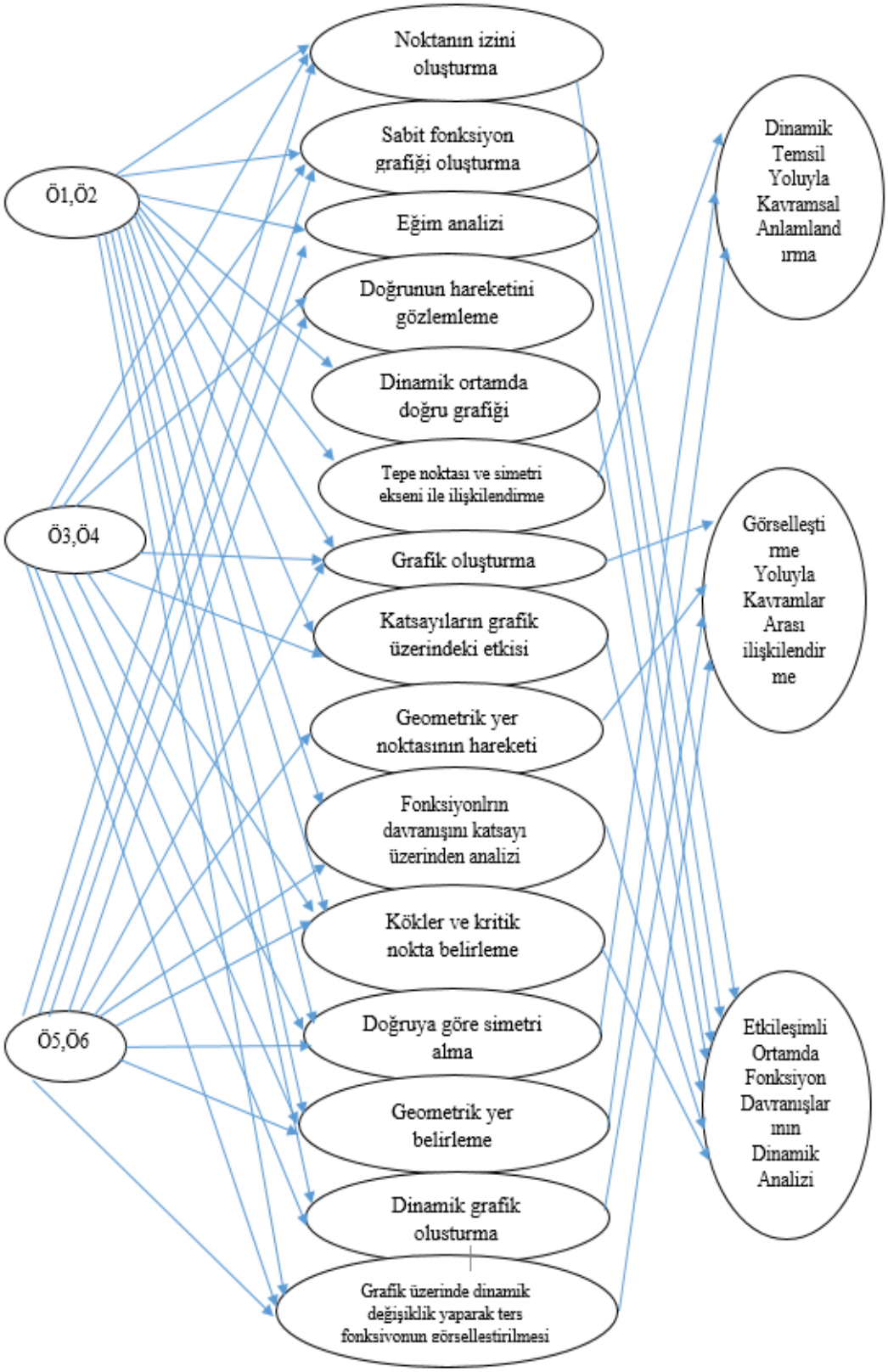
Cabri-Geometri ortamı, öğretmen adaylarının kavramlar arasında ilişki kurmasına olanak tanımaktadır. Özellikle sabit fonksiyonun ya da doğrusal fonksiyonun grafiklerinin oluşturulması sürecinde koordinat sisteminde hareketli noktaların izleri ile sabit terim ve eğim ilişkisini kavramsal düzeyde anlamlandırma süreci bu temanın temelini oluşturmaktadır. Aynı şekilde, parabolün tepe noktası, simetri ekseni ve katsayılar arasındaki ilişkiyi gözlemleme ve bu öğeleri grafik üzerinde bütünleştirme eylemleri, adayların görsel temsiller üzerinden kavramlar arasında bağlantı kurduklarını göstermektedir. Üçüncü derece polinom grafiklerinde eğim değişimi, kökler ve yerel ekstremum noktaları arasındaki ilişkiyi görselleştirerek analiz etme de bu temanın önemli bir göstergesidir. Öğrenciler, Cabri-Geometri ortamında grafik üzerinde yapılan değişimleri takip ederek, farklı kavramların nasıl bir araya geldiğini ve birbirlerini nasıl etkilediğini gözlemlemiştir. Özellikle doğrusal fonksiyon grafiklerinde geometrik yer belirleme noktası aracılığıyla sabit terim ve eğim ilişkisini sezgisel olarak fark etmeleri, fonksiyonun cebirsel ifadesi ile görsel temsilini aynı anda düşünme becerilerinin geliştiğini göstermektedir.

Etkileşimli Ortamda Fonksiyon Davranışlarının Dinamik Analizi

Bu tema, öğretmen adaylarının fonksiyon davranışlarını analiz ederken zamana bağlı değişimleri ve etkileşimli görselleri nasıl yorumladıklarıyla ilişkilidir. Özellikle fonksiyonun grafiği üzerinde hareket eden noktaların oluşturduğu izler, eğim değişimi ve grafikteki yönsel dönüşümler, katılımcıların fonksiyonun davranışına dair analizlerini derinleştirmelerini sağlamaktadır. Üçüncü dereceden polinomlarda eğim değişiminin, yerel maksimum ve minimum noktalarının dinamik ortamda analiz edilmesi; ters fonksiyonlarda grafik üzerindeki değişimin anlık gözlemlenerek yorumlanması ve parabol grafiklerinde kolların genişliği ile yön değişiminin katsayılar üzerinden takip edilmesi bu temanın temel örneklerindendir. Özellikle birinci ve üçüncü çalışma yapraklarında, öğretmen adaylarının grafik üzerinde sürekli olarak yaptıkları değişiklikleri gözlemleyerek, bu değişimlerin fonksiyonun davranışına etkisini anlama çabaları net biçimde gözlenmiştir. Cabri-Geometri ortamında dinamik araçlar (kesişim noktası, ışın, dik doğru, nokta vb.) ile yapılan bu etkileşimli keşifler, fonksiyonun yalnızca statik bir yapı olmadığını, aksine parametrelerin değişimiyle davranışı değişen dinamik bir yapı olduğunu fark etmelerini sağlamıştır. Şekil 155'te, Cabri-Geometri ortamında her bir grubun oluşturduğu kategoriler ve bu kategorilerin ilişkili olduğu temalar görselleştirilmiştir.

Şekil 155

Öğretmen Adaylarının Cabri-Geometri Ortamında Geliştirdikleri Kategoriler ve Bu Kategorilere Dayalı Tematik Yapının Sentezi



Şekil 155'te içerik analizi yöntemiyle belirlenen kategoriler ile bu kategorilerin örtüştüğü temaların grup düzeyindeki dağılımını görsel olarak ortaya koymaktadır. Ayrıca, Cabri-Geometri ortamında öğretmen adaylarının gerçekleştirdikleri enstrümantal oluşum süreçlerini, üç farklı grup (Ö1,Ö2, Ö3,Ö4, Ö5,Ö6) özelinde kategoriler ve bu kategorilerin temalarla ilişkisi bağlamında kavramsal bir yapı içerisinde sunmaktadır.

Birinci grup (Ö1, Ö2), "Koordinat sistemi kullanımı", "Nokta izi oluşturma", "Tepe noktası ve simetri ekseni ile ilişkilendirme", "Katsayıların grafik üzerindeki etkisi", "Kökler ve kritik noktalar belirleme", "Fonksiyonların davranışını katsayılar üzerinden analiz etme", "Doğruya göre simetri alma", "Geometrik yer belirleme" ve "Dinamik grafik oluşturma" gibi 9 kategoriye sahiptir. Bu kategoriler, özellikle "Dinamik Temsil Yoluyla Kavramsal Anlamlandırma", "Görselleştirme Yoluyla Kavramlar Arası İlişkilendirme" ve "Etkileşimli Ortamda Fonksiyon Davranışlarını Dinamik Analizi" temalarının tümüyle ilişkilidir. Ö1 ve Ö2'nin sabit fonksiyon grafikleriyle koordinat düzleminde iz noktaları oluşturması, parabolde simetri ekseni ile tepe noktası ilişkisini analiz etmeleri ve polinom grafiklerde yerel ekstremumları belirlemeleri bu tematik ilişkileri desteklemektedir.

İkinci grup (Ö3, Ö4), "Koordinat sistemi kullanımı", "Nokta izi oluşturma", "Katsayıların grafik üzerindeki etkisi", "Kökler ve kritik noktalar belirleme", "Doğruya göre simetri alma", "Geometrik yer belirleme" ve "Dinamik grafik oluşturma" gibi 7 kategoriyle grafik üzerinde temsil edilen yapıları oluşturmuştur. Bu grup, özellikle "Görselleştirme Yoluyla Kavramlar Arası İlişkilendirme" ve "Etkileşimli Ortamda Fonksiyon Davranışlarının Dinamik Analizi" temalarıyla güçlü bağlar kurmuştur. Parabol fonksiyonlarda katsayı değişimlerinin grafik üzerindeki etkilerinin analiz edilmesi ve ters fonksiyon grafiklerinde doğruya göre simetri alma süreçleri, tematik yapının bu grupta da çeşitlendiğini göstermektedir.

Üçüncü grup (Ö5, Ö6) ise, 9 kategoriyle en geniş kapsamlı yapıya sahip olan gruptur. "Doğru eğimi analizi", "Sabit fonksiyon grafiği oluşturma", "Dinamik nokta ve iz oluşturma", "Dinamik grafik oluşturma", "Kökler ve kritik noktalar belirleme", "Fonksiyonların davranışını katsayılar üzerinden analiz etme", "Doğruya göre simetri alma", "Geometrik yer belirleme" ve "Grafik üzerinde dinamik değişiklikle görselleştirme" gibi kategoriler, özellikle "Etkileşimli Ortamda Fonksiyon Davranışlarının Dinamik Analizi" temasının yoğun olarak ortaya çıktığını göstermektedir. Üçüncü derece polinom grafiklerinde yerel maksimum ve minimum noktaları analiz etme ve ters fonksiyon grafiklerinde anlık grafik değişimlerini gözlemleyerek yorumlama bu temanın somut göstergeleri arasındadır.

Bir sonraki bölümde, uygulama öncesinde gerçekleştirilen öğretmen adayı görüşme formları ile çalışma yapraklarının uygulanmasının ardından ve sürekli analiz aşamaları

sürecinde, uygulamanın son veri toplama aracı olarak uygulama sonrasında yapılan yüz yüze görüşmelerden elde edilen bulgular, araştırmanın temaları doğrultusunda sunulmuştur.

4.3. Uygulama öncesi ve sonrası öğretmen adayı görüşme formları ve uygulama sonrası yüz yüze görüşmeler ile ilgili bulgular

Ö1, uygulama öncesinde cebirsel ifadelere karşı oldukça olumlu bir tutuma sahip olduğunu, "bence bu çok eğlenceli bir konuydu, severdim" diyerek belirtmiş ve denklemleri çözmenin kendisi için bir tür "çekirdek çitlemek" gibi olduğunu anlatmıştır. Ancak, önceden cebirsel ifadelerle ilgili bazı kavramları eksik öğrendiğini, örneğin "2x + 5 = 10" denkleminde, her iki tarafa da -5 eklenmesi gerektiğini bilmediğini; bu işlemin yerine "+5'i karşıya at" şeklindeki eksik ifadesini kullandığını ve bu tür kavramları sonradan fark ettiğini belirtmiştir. Bu, kağıt-kalem ortamında karşılaştığı kavramsal sınırlılıkların bir örneğidir. Ö1'in bu süreci, İşlem Odaklı Temsil ve Cebirsel Dönüşüm ve Temsilde Zorluk ve Kavramsal Sınırlılıklar temalarıyla ilişkilidir. Ö1, uygulama sonrasında Cabri-Geometri ortamında cebirsel ifadelerin grafiklerini çizerken bu ortamın kendisine farklı bakış açıları kazandırdığını belirtmiştir. Örneğin, "x'in değişken olduğunu biliyorduk ama bu şekilde bilmiyorduk" diyerek, Cabri-Geometri ortamında x değişkeninin dinamik bir şekilde kullanılmasının kavramsal anlamda katkı sağladığını vurgulamıştır. Bu durum, Dinamik Temsil Yoluyla Kavramsal Anlamlandırma teması ile örtüşmektedir. Ayrıca Cabri ortamında grafik çizim sürecinde "sayısal değerleri atama" ve "geometrik yer belirleme" gibi adımların cebirsel ifadelerin görsel temsillerini anlamlandırmasına olanak sağladığını ifade etmiştir. Bu da Görselleştirme Yoluyla Kavramlar Arası İlişkilendirme temasına işaret etmektedir.

Ö1, kağıt-kalem ortamında çözüm sürecinde "katsayılar tam sayı olmadığında sonucu bulamıyoruz" diyerek, bu ortamda karşılaştığı zorlukları dile getirmiştir. Cabri-Geometri ortamında ise bu tür zorlukların ortadan kalktığını; "kağıt-kalem ortamında kökleri bulmak zor olabilir, ama Cabri'de bu şekilde bir sıkıntı yok" diyerek vurgulamıştır. Bu gözlem, İşlem Odaklı Temsil ve Cebirsel Dönüşüm temasını desteklemektedir.

Öğretmen adayı, Cabri-Geometri ortamında başlangıçta zorluk yaşadığını; ancak zamanla yazılımın mantığını ve algoritmasını anladığını ve sürecin kolaylaştığını belirtmiştir. "İlk başlarda uygulamayı unuttuğumuz için işlem yapmakta zorlanıyorduk" derken, daha sonra bu zorlukların üstesinden gelerek "yine Cabri ortamında aynı mantıkla devam ettim" ifadesiyle enstrümanlı eylem şemasının geliştiğini vurgulamıştır. Bu açıklamalar, Dinamik Temsil Yoluyla Kavramsal Anlamlandırma temasını öne çıkarmaktadır.

Son olarak, “çemberin $x\,2+y\,2=1$ denklemi bile verilirse, önce denklemde y’yi yalnız bırakarak açık denklem elde ederim ve doğrusal, parabol vb. gibi grafik oluşturabilirim” diyerek Cabri-Geometri ortamında elde ettiği becerilerin kapsamını genişlettiğini ifade etmiştir. Bu süreç, Ö1 öğretmen adayının enstrümanlı eylem şemasının Cabri-Geometri ortamında daha kapsamlı ve kavramsal olarak zenginleşmiş bir yapıya dönüştüğünü göstermektedir.

Ö2'nin uygulama öncesi ve sonrasında verdiği yanıtlar incelendiğinde, uygulama öncesinde, cebirsel ifadelere karşı olumlu bir tutum sergileyen ve daha önce GeoGebra gibi yazılımları sınırlı bir ölçüde kullanan Ö2, cebirsel ifadelerin karmaşık ve öğrenilmesi gereken temel konulardan biri olduğunu belirtmiştir. Ancak, uygulama sonrasında Cabri-Geometri kullanımıyla birlikte, başlangıçta yaşadığı zorluklara rağmen, bu yazılımın sunduğu imkanlarla cebirsel kavramları daha derinlemesine anlama yolunda önemli bir ilerleme kaydetmiştir. Ö2'nin, "ters fonksiyon çiziminde simetriyi hep orijine göre alacağımızı düşünüyordum" ifadesi, uygulama sonrası, "Dinemik Temsil Yoluyla Kavramsal Anlamlandırma" temasına uygun olarak, simetri kavramını daha iyi anladığını göstermektedir. Cabri-Geometri'nin sağladığı dinamik ortam, Ö2'nin matematiksel kavramları görselleştirmesine ve anlamlandırmasına katkıda bulunmuştur.

Enstrümanlı eylem şemasındaki bu değişim, "Dinamik Ortamda Çoklu Temsillerin Kullanımı" temasında da kendini göstermektedir. Ö2, Cabri-Geometri'de katsayıların doğru şekilde belirlenmesi ve grafiklerin doğru bir biçimde çizilmesiyle ilgili başlangıçta yaşadığı zorlukları aşarak, zamanla dinamik geometri aracını kullanmayı öğrenmiştir. Bu da, enstrümanlı eylem şemasının daha kapsamlı ve işlevsel bir hâle geldiğini göstermektedir.

Özetle, Ö2'nin deneyimi, Cabri-Geometri'nin cebirsel ifadeleri anlama ve görselleştirme sürecinde önemli bir rol oynadığını ve bu sürecin öğretmen adayının kavramsal anlayışını derinleştirdiğini ortaya koymaktadır.

Uygulama öncesinde, cebirsel ifadelerle ilgili olumsuz tutumları olduğu görülen Ö3, bu sürecin ardından algısında belirgin bir dönüşümün olduğu görülmektedir. Öncesinde “ortaokulda sevmezdim, lisede sevmeye başladım” diyerek cebirle olan ilişkisini zorlu bir geçmişle tanımlarken, uygulama sonrasında “grafik çizmeyi sıkıcı bulurdum, artık bilgisayar uygulamalarıyla çizerken eğleniyorum” sözleriyle bu algının değiştiğini belirtmiştir. Ayrıca, “ortaokulda cebir çok karmaşık ve anlamsız geliyordu” ifadesiyle geçmişteki kavramsal yetersizliğine dikkat çekmiş; Cabri-Geometri yazılımını kullandıktan sonrasında ise “bilgisayar kullanımı sayesinde anlamlı hale geldi” diyerek, teknolojik ortamın kavramsal anlamaya katkısını vurgulamıştır. Ö3, uygulama öncesinde dinamik geometri yazılımlarını hiç kullanmadığını belirtmiş, ancak uygulama sonrasında bu yazılımların cebirsel ifadelerin

grafiksel temsiline katkısını açıkça ifade etmiştir. Cabri-Geometri ortamının dinamik araçları sayesinde, özellikle grafik çiziminin kolaylaştığını ve cebirsel ifadeleri daha anlamlı hale getirdiğini belirtmiştir. İlk başta, doğrusal fonksiyonların çiziminde zorlandığını ifade eden Ö3, zamanla bu yapıları daha rahat çizdiğini ve bu deneyimin ardından parabol, polinom ve ters fonksiyonların grafiklerini de kolaylıkla oluşturabildiğini aktarmıştır. Bu durum, grafik oluşturma mantığının kavranmasıyla birlikte, teknolojik ortamın işlevsel bir aracına dönüştüğünü göstermektedir.

Uygulama sonrasında yapılan bireysel görüşmede Ö3, Cabri-Geometri ortamında oluşturduğu grafiklerin cebirsel ifadelerle ve ilişkili matematiksel kavramlarla bağ kurmasına önemli ölçüde katkı sağladığını ifade etmiştir. Özellikle doğrusal fonksiyonların grafiklerini incelerken, "eğim arttıkça doğrunun y eksenine yaklaştığını" gözlemlediğini ve bu durumu "tan(90)'a yaklaşmak gibi düşünmeye başladım ama tam dik de olmuyor" şeklinde dile getirmiştir. Bu gözlem, Ö3'ün grafiksel temsiller aracılığıyla soyut matematiksel kavramları daha somut ve anlamlı hale getirebildiğini göstermektedir. Ayrıca Ö3, dinamik ortamın cebirsel ifadelerin çözüm sürecine sağladığı katkıyı da vurgulamış; kağıt-kalem ortamında hata yapma riskinin yüksek olduğunu belirtmiş ve "kağıt kalemde bu zor olabilir ama Cabri'de çok kolay oluyor" diyerek, dinamik ortamın sağladığı doğruluk, hız ve işlem kolaylığının altını çizmiştir. Grafik çiziminin yalnızca teknik anlamda kolaylaşmadığını, aynı zamanda yorumlama sürecini de desteklediğini belirtmiştir. "Evet, kolay çizebiliyoruz ama asıl fark daha kolay ve anlamlı bir şekilde açıklayabiliyoruz" ifadesi, bu sürecin öğretmen adayının kavramsal analiz gücünü artırdığını göstermektedir.

Bu ifadeler bütüncül olarak değerlendirildiğinde, Ö3'ün enstrümanlı eylem şemalarının süreç içerisinde dönüşüm geçirdiği görülmektedir. Sürecin başlangıcında çizim odaklı bir yapıya sahip olan enstrümanlı eylem şemasının, Cabri-Geometri ortamındaki dinamik etkileşimler sayesinde grafiksel temsiller üzerinden cebirsel ilişkileri analiz etmeye ve yorumlamaya yönelik şekillendiği anlaşılmaktadır. Bu dönüşüm, Cabri-Geometri yazılımının yalnızca bir çizim aracı olmaktan çıkıp, kavramsal anlamlandırmanın temel bir bileşeni haline geldiğini ortaya koymaktadır.

Ö3'ün bu deneyimi, öncelikle "Dinamik Temsil Yoluyla Kavramsal Anlamlandırma" teması ile örtüşmektedir. Özellikle doğrusal fonksiyonların grafiklerindeki eğim değişimlerinin etkilerini görsel olarak gözlemlemesi ve bu durumu "tanjant 90'a yaklaşmak gibi ama tam dik olmuyor" şeklinde yorumlaması, soyut cebirsel kavramların dinamik temsiller aracılığıyla somutlaştırıldığını göstermektedir. Bu süreç, yalnızca grafik oluşturmayı değil, aynı zamanda

bu grafiklerden cebirsel özellikleri çıkarabilme ve yorumlayabilmesini geliştirdiğini ortaya koymaktadır.

İkinci olarak, "Etkileşimli Ortamda Fonksiyon Davranışlarının Dinamik Analizi" teması, Ö3'ün deneyimlerinde açık bir biçimde izlenmektedir. Grafik çizimi sürecinin yalnızca teknik olarak kolaylaşmadığını, aynı zamanda daha anlamlı açıklamalar yapabilmeyi sağladığını belirtmiş; geometrik yer belirleme noktası takibi, katsayı değişimlerinin grafik üzerindeki etkilerini gözlemleme gibi dinamik etkileşimlerin, kağıt-kalem yöntemlerine kıyasla anlamlı bir kavrayış sunduğunu vurgulamıştır.

Sonuç olarak, Ö3'ün süreci, enstrümantal oluşum bağlamında değerlendirildiğinde, başlangıçta sınırlı kalan teknoloji kullanımının zamanla kavramsal anlamlandırmaya entegre hale geldiği, grafik üretimiyle başlayan sürecin cebirsel kavramların dinamik analizine dönüştüğü görülmektedir. Bu dönüşüm, teknolojik aracın anlamlı bir öğrenme ortamı haline gelerek öğretmen adayının kavramsal gelişimini desteklediğini açıkça ortaya koymaktadır.

Ö4'ün uygulama öncesi görüşme formları doğrultusunda verdiği yanıtlar incelendiğinde, cebirsel ifadelere karşı genel olarak olumlu bir tutuma sahip olduğu, ancak teknoloji kullanımının sınırlı kaldığı anlaşılmaktadır. Özellikle "bazen Geogebra kullandık" ifadesiyle, önceki yıllarda bazı derslerde teknolojik araçlarla karşılaşmış olsa da bu deneyiminde eksiklikler olduğu görülmektedir. Cebirsel ifadelerin grafiklerinin çizimi konusunda teknolojiye dayalı öğrenme fırsatlarının sınırlı olduğu, "kağıt üzerinden ezbere çizmeler yapıyorduk" ifadesiyle açıkça ortaya çıkmaktadır. Bu durum, grafiksel temsillerin oluşturma sırasında öğretmen adaylarının fonksiyonel yapılarla doğrudan etkileşim kurmak yerine, daha çok işlem odaklı ve ezbere dayalı bir strateji geliştirdiğini göstermektedir. Ö4'ün bu deneyimi, öncelikle "Temsilde Zorluk ve Kavramsal Sınırlılıklar" teması ile örtüşmektedir. Ayrıca kağıt-kalem ortamında yapılan çizimlerde denklemlere bağlı simetrik yapıların göz ardı edildiği bu süreç, "Kavramsal Bilgilerin İşleme Dönüşmesi" temasını da destekler niteliktedir. Bu bağlamda, uygulama öncesinde Ö4'ün enstrümanlı eylem şemasının daha çok işlem basamaklarına dayalı, sınırlı bir araç kullanımına dayandığı söylenebilir.

Buna karşın, uygulama sonrasında edinilen deneyimler Ö4'ün cebirsel kavramları ve grafik oluşturma sürecini anlamlandırmasına yönelik farklı bir anlayış geliştirmesini sağlamıştır. Ö4, teknolojik ortamda grafik oluşturmanın yalnızca teknik bir kolaylık olmadığını, aynı zamanda cebirsel ifadeleri daha anlamlı hale getirdiğini vurgulamıştır. "Daha çok özelliklerine göre çizme yapabildik" ve "özelliklerine, tanım kümelerine ve değişkenlere daha çok dikkat ettim" ifadeleri, bu dönüşümün belirgin örneklerindendir. Ö4'ün bu deneyimi, öncelikle "Dinamik Temsil Yoluyla Kavramsal Anlamlandırma" teması ile örtüşmektedir.

Grafik üretiminin sadece çizim değil, yapının görsel olarak incelenmesine dönüştüğü bu süreçte, öğrenci grafik üzerinden cebirsel ilişkileri kurma becerisi geliştirmiştir. Bu gelişim, öğretmen adayının enstrümanlı eylem şemasında da değişim ve zenginleşme yaşandığını ortaya koymaktadır. Başlangıçta sadece grafik çizmeye yönelik olan enstrümanlı eylem şeması, artık grafik üzerinden kavramsal analiz yapma kapasitesini de içermektedir.

Yüz yüze görüşme sırasında yaptığı açıklamalar, Ö4'ün teknolojik ortamda ters fonksiyon çizimi sürecinde karşılaştığı güçlükleri aktarırken "ilk önce biz tanım kümemizi belirlemediğimiz için tam bir fonksiyon çizemedik" ifadesiyle, daha önce göz ardı ettiği kavramsal bileşenlerin dinamik ortamda belirleyici hale geldiğini fark ettiğini belirtmiştir. Süreç içerisinde bu eksiklikle karşılaşmış ve "birebir ve örten olmadığından dolayı tanım kümesini yeniden düzenlememiz gerekti" diyerek, ters fonksiyon kavramını grafik üzerinde anlamlı biçimde yapılandırmaya başladığını göstermiştir. Bu bağlamda, "Dinamik Temsil Yoluyla Kavramsal Anlamlandırma" teması, Ö4'ün deneyimlerinde açık bir biçimde izlenmektedir. Grafik üzerinde birebirlik ve örtenlik gibi soyut kavramların somut temsiller aracılığıyla fark edilmesi, öğrencinin fonksiyon yapısına dair kavrayışını derinleştirmiştir. Aynı zamanda bu süreç, Ö4'ün eylem şemasının içeriğine yeni kavramlar (birebirlik, örtenlik, simetri) eklemesiyle, şemanın yapısal olarak da geliştiğini göstermektedir.

Kağıt-kalem ortamı ve Cabri-Geometri ortamı arasındaki farkı açıklarken, "kağıt kalemde sadece bir sonuç buluyoruz, ama Cabri'de grafikteki yerini ve noktasını da buluyoruz" demesi, kağıt-kalem yönteminde yalnızca cebirsel işlemlere odaklanıldığını; buna karşılık Cabri-Geometri ortamında grafiksel temsiller aracılığıyla yapıya dair anlamların daha açık hale geldiğini göstermektedir. Ö4, grafik çiziminde tanım kümesinin önemini fark ettiğini "kağıt-kalem ortamında tanım kümesine çok önem vermiyordum, ama Cabri'de tanım kümesini tam olarak belirlemezsek grafik çizmiyor" diyerek açıklamıştır. Ayrıca "kendi çizdiğimiz eksene göre çizebiliyoruz" ifadesiyle kağıt-kalem ortamındaki kontrolsüz çizimlerin farkında olduğunu, buna karşılık Cabri-Geometri'de "aralıklar eşit verildiği için gerçek sonuçları görebiliyoruz" diyerek dinamik yazılımın nesnel ve ölçülebilir temsiller sunduğunu belirtmiştir. Ö4'ün bu değerlendirmeleri, "Etkileşimli Ortamda Fonksiyon Davranışlarının Dinamik Analizi" teması ile örtüşmektedir. Ö4, sabit sayılar ve katsayıları değiştirerek grafik üzerindeki etkilerini doğrudan gözlemleyebilmiş ve bu etkiyi anlamlı hale getirebilmiştir. Tüm bu süreç, enstrümanlı eylem şemasının işlevsel sabitler kazanarak kalıcı hale geldiğini, öğretmen adayının artık sadece eylem değil, bu eylemin matematiksel anlamı üzerine düşünmeye başladığını göstermektedir.

Ö4'ün yazılımı kullanma sürecinde edindiği deneyimler, cebirsel ifadelerin anlamlandırma sürecine olumlu yansımıştır. “Hesap makinesi, sayı aracı, dik doğru çizimi, kesişim noktaları belirlemeyi kullandım” ifadesi, yazılımın sunduğu olanakların aktif biçimde kullanıldığını göstermektedir. Ancak ters fonksiyon grafiğini çizerken karşılaştığı zorlukla ilgili “bir türlü tanım kümesini çizmeyi, belirlemeyi bilemedik” sözleri, grafik oluşturma sürecinin yalnızca kolaylık değil, aynı zamanda kavramsal mücadeleleri de içerdiğini ortaya koymaktadır. Ö4’ün bu süreci, “Görselleştirme Yoluyla Kavramlar Arası İlişkilendirme” teması ile ilişkilidir. Tanım kümesi belirlemedeki ya da grafik çizimindeki yaşanan zorluklar, katılımcının işlem temelli yaklaşımından kavramsal farkındalığa geçiş sürecini ortaya koymaktadır. Bu farkındalık, öğretmen adayının enstrümanlı eylem şemasında kavramsal düzeyde bir yeniden yapılanmanın yaşandığını ve eylemlerinin artık matematiksel doğruluk denetimiyle desteklendiğini göstermektedir.

Son olarak Ö4’ün “Işın tanımlama aklımıza gelmediği için sürekli başlangıç tanımlamaya çalıştık... o konuda biraz daha Cabri’yi öğrenmemiz gerektiğini düşünüyorum.” ifadesi, sürecin geneline dair önemli bir öz değerlendirmeyi yansıtmaktadır. Bu açıklama, öğrencinin Cabri-Geometri ortamını bir çizim aracı olarak görmekten çıkarıp, fonksiyon yapısını analiz etmesini sağlayan bir öğrenme ve anlamlandırma ortamı olarak değerlendirmeye başladığını göstermektedir. Genel olarak, Ö4’ün enstrümanlı eylem şeması uygulama süreci boyunca yalnızca teknik beceriler değil, aynı zamanda kavramsal anlamlandırma temelli yapılar kazanarak geliştiği ve yeniden şekillendiği görünmüştür.

Ö5'in uygulama öncesi ve sonrası görüşme formları ve uygulama sonrası yüz yüze görüşmelerin yanıtları karşılaştırıldığında, uygulama öncesinde cebirsel ifadelere yönelik ilgisi belirgin olsa da, teknolojik araç kullanımında sınırlı bir deneyime sahip olduğu görülmektedir. Ancak, uygulama sonrasında Cabri-Geometri kullanımıyla birlikte, cebirsel kavramları daha derinlemesine anladığı ve bu süreçte teknolojiye olan güveninin arttığı gözlemlenmiştir. Ö5, öncesinde cebirsel ifadeleri çözmede yaşadığı zorlukları belirtirken, uygulama sonrasında teknolojik araçları kullanarak bu zorlukları aştığını ifade etmiştir. Bu, "Dinamik Temsil Yoluyla Kavramsal Anlamlandırma" temasında önemli bir dönüşümü işaret etmektedir.

Başlangıçta yaşadığı zorluklara rağmen, zamanla Cabri-Geometri'nin araçlarını daha etkin kullanarak, grafiklerin doğru çizimi konusunda beceri kazanmıştır. Bu süreç, enstrümanlı eylem şemasının sadece teknik becerileri değil, aynı zamanda kavramsal anlayışı da içeren daha kapsamlı bir yapıya dönüştüğünü ortaya koymaktadır. Sonuç olarak, Ö5'in deneyimi, Cabri-Geometri'nin cebirsel ifadeleri anlama ve görselleştirme sürecinde öğretmen adaylarına

sağladığı katkıları vurgulamaktadır. Bu süreç, öğretmen adayının kavramsal anlayışını derinleştirirken, aynı zamanda teknolojiyi daha etkili kullanma yetisini de geliştirmiştir.

Ö6'nın uygulama öncesi ve sonrası görüşme formları ile uygulama sonrası yüz yüze görüşme yanıtları karşılaştırıldığında, öğretmen adayının enstrümanlı eylem şemasında değişiklik yaşandığı görülmektedir. Uygulama öncesinde Ö6, cebirsel ifadeleri sevdiğini belirterek "ben cebiri seviyorum çünkü içinde bilinmeyen var" ifadesiyle konuya yönelik olumlu bir yaklaşım sergilemiştir. Bununla birlikte, "çarpanlara ayırmayı daha iyi yapmak isterdim" şeklindeki açıklaması, cebirsel ifadelerin çözümünde işlem basamaklarında öğrenme ve uygulama sürecinde gelişim ihtiyacını vurgulamaktadır. Ayrıca "çoklu temsil" kavramının ne olduğuna dair bilgisi olmadığını açıkça ifade etmiştir.

Uygulama sonrasındaki görüşme formlarında ise Ö6'nın, grafik çizimi ve temsil çeşitliliği konularında daha bilinçli ve kavrayış düzeyi yüksek bir yaklaşıma sahip olduğu gözlemlenmiştir. Bu bağlamda, "aynı kavramları daha farklı ifade edebilmek çok güzeldi" ve "grafik çizmek çok güzeldi, çünkü ben onu bir oyun gibi gördüm, oyun gibi olduğunda ilgimi çekiyor" ifadeleri, Dinamik Temsil Yoluyla Kavramsal Anlamlandırma temasına karşılık gelmektedir. Ö6, cebirsel ifadelerin grafiksel temsilleri üzerinden kavramsal anlamlandırma sürecinde teknoloji destekli ortamın etkisini olumlu şekilde deneyimlemiştir.

Ö6'nın enstrümanlı eylem şemasındaki bu değişim, aynı zamanda Görselleştirme Yoluyla Kavramlar Arası İlişkilendirme teması kapsamında da değerlendirilmelidir. Uygulama öncesinde, yalnızca cebirsel işlem becerisine dayalı bir yapı öne çıkarken, uygulama sonrasında Cabri-Geometri yazılımı sayesinde dinamik temsillerin kullanımıyla bu yapı zenginleşmiştir.

Sonuç olarak, Ö6'nın deneyimi, uygulama öncesinde işlemsel bilginin ağırlıklı olduğu bir yapının, uygulama sonrasında grafik temsillerin sunduğu çoklu bakış açısıyla kavramsal düşünmeyi içeren daha esnek ve işlevsel bir enstrümanlı eylem şemasına dönüştüğünü ortaya koymaktadır. Bu süreç, Ö6'nın hem teknolojik araçları öğrenme sürecine katılımını artırmış hem de cebirsel ifadeleri yorumlama ve anlamlandırma becerilerini geliştirmiştir.

4.4. Alt Problemlere İlişkin Bulguların Sentezi

Kağıt-kalem ortamında cebirsel ifadelerin yazımına yönelik enstrümanlı eylem şemaları incelendiğinde, öğretmen adaylarının genellikle cebirsel ifadeleri belirli işlem basamaklarına göre yeniden yapılandırdıkları gözlemlenmiştir. Bu bağlamda 'cebirsel dönüşümler' ifadesiyle kastedilen; parantez açma, benzer terimleri birleştirme, her iki tarafa aynı işlemi uygulama gibi eşitliği koruyan cebirsel işlemler bütünüdür. Öğretmen adaylarının bu tür işlemler yoluyla bilinmeyen terimi yalnız bırakmaya çalıştıkları ve çözüm süreçlerini yapılandırdıkları

anlaşılmaktadır. Bu yapılar, işlem sırası ve cebirsel ilişkilerin korunmasına dayalı bir düzen içinde gerçekleşmiş; öğrenciler çözüm sürecini mantıksal bütünlük içinde yürütmüştür. Bu şemalarda yer alan eylemdeki teoremler, büyük ölçüde eşitliğin her iki tarafında yapılan işlemlerin eşdeğerliği ilkesine dayanmaktadır. Kullanılan kavramlar ise cebirsel anlamda temel olan değişken, eşitlik, sabit sayı ve terim kavramlarıyla sınırlı kalmıştır.

Kâğıt-kalem ortamında grafik çizim süreçlerinde öğretmen adayları genellikle belirli x değerleri verip y'yi hesaplamış ve bu noktalardan yola çıkarak grafik oluşturmaya çalışmışlardır. Katılımcılar, eksenleri elle çizip, noktaları yerleştirerek grafik elde etmiş, ardından noktaları birleştirerek grafik çizimini tamamlamışlardır. Ancak bazı öğretmen adaylarının örneğin simetri yapısını fark edemedikleri ve tepe noktası gibi özel noktaları belirlemekte zorlandıkları gözlenmiştir. Ayrıca fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkları ve çıktı değerlerini ifade eden grafiksel yapılarla ilgili kavramsal farkındalıklarının sınırlı kaldığı da dikkati çekmektedir. Bu şemalarda kullanılan kavramlar arasında bağımlı ve bağımsız değişkenler, simetri tanımı ve görüntü kümeleri yer almaktadır.

Dinamik geometri ortamında öğretmen adayları cebirsel ifadeleri yazarken yazılımın menülerinde bulunan araçlardan faydalanmışlardır. Bazı adaylar ifadeyi yazarken eksik girdiler kullanmış, ancak yazılımın uyarı sistemi sayesinde bu eksiklikleri fark ederek düzeltmişlerdir. Bu süreçte yazılımın sunduğu anlık görselleştirme, öğretmen adaylarının yazdıkları ifadeyle oluşan grafik arasındaki ilişkiyi fark etmelerine katkı sağlamıştır. Yazılan cebirsel ifadenin katsayılarının değiştirilmesiyle grafiğin değiştiği gözlemlenmiş, bu da anlamlı bir öğrenme sürecine yol açmıştır. Bu süreçte, cebirsel ifadelerde yer alan katsayıların grafik üzerinde yarattığı değişimlerin fark edilmesi, grafik oluşturma sürecinde doğru matematiksel ifadelerin seçilmesi ve girilen sembolik ifadelerle oluşan grafikler arasındaki karşılıklı ilişkinin anlaşılması kavramları öne çıkmaktadır. Bu kavramlar, öğretmen adaylarının dinamik ortamda yalnızca teknik bir işlem değil, aynı zamanda kavramsal bir eşleme süreci yürüttüklerini yani cebirsel ifadeler ile grafiksel temsiller arasında anlamlı bir bağlantı kurarak, her iki temsil türünü karşılıklı olarak ilişkilendirdiklerini göstermektedir.

Dinamik geometri ortamında gerçekleştirilen grafik oluşturma süreçlerinde öğretmen adayları, yazılımın sunduğu araçları kullanarak koordinat eksenlerini tanımlamış, ardından grafik oluşturma sürecine geçmiştir. Bu süreçte ölçüm aktarım aracı, dik doğrular ve geometrik yer araçları sıklıkla tercih edilmiştir. Örneğin Ö5 ve Ö6, üçüncü dereceden bir polinomun grafiğini oluştururken geometrik yer noktası oluşturmuş, bu noktayı hareket ettirerek dinamik değişim sürecini gözlemlemişlerdir. Bu sayede grafiksel yapının yerel maksimum ve minimum noktaları ile kökleri fark edebilmişlerdir. Bu ortamdaki enstrümanlı eylem şemalarında

"geometrik yer noktası", "geometrik yer", "simetri ekseni", "dinamik değişim" gibi kavramlar ön plana çıkmaktadır.

Kağıt-kalem ortamında cebirsel ifade yazımı tamamen öğrencinin zihinsel işlem basamaklarına dayalı olarak gerçekleşmiş, işlem sıralaması, sadeleştirme ve eşitliği koruma gibi kurallara bağlı kalınmıştır. Bu ortamda öğrenciler süreci tamamen kendi kontrolünde yürütmüştür. Dinamik geometri ortamında ise yazılım arayüzü öğrencilerin cebirsel ifadeleri belirli formlarda yazmasını gerektirmiş, yanlış girilen ifadelerde uyarı vermiştir. Bu da öğretmen adaylarının doğruluğu denetleyerek ifadeyi yazma becerilerini geliştirmiştir. Ancak sembolik üretim süreci, yazılımın kısıtlayıcı yönleri nedeniyle daha çok rehberli bir yapı kazanmıştır. Burada 'rehberli yapı' ifadesiyle, yazılımın kullanıcıyı belirli giriş biçimlerine yönlendirmesi, hatalı girişlerde uyarı vermesi ve sadece belirli formatlarda ifade kabul etmesi kastedilmektedir. Bu yönlendirme, öğrencilerin işlemleri belirli sınırlar içinde gerçekleştirmesine neden olmuş, böylece süreç öğrenci kontrolünden ziyade yazılımın sunduğu seçeneklerle şekillenmiştir. Bu durum iki ortam arasında bilişsel yük, hata farkındalığı ve sembolik üretim süreci açısından belirgin farklılıklar ortaya çıkarmaktadır.

Kağıt-kalem ortamında grafik oluşturma süreci, öğrencilerin belirli noktalardan yola çıkarak elle çizim yapması biçiminde ilerlemiştir. Bu süreçte simetri ekseni, tepe noktası, yerel maksimum ve minimum noktalar gibi grafiksel öğeler kimi zaman göz ardı edilmiştir. Cabri-Geometri ortamında ise grafik, yazılıma entegre dinamik araçlarla oluşturulmuş; geometrik yer gibi araçlar kullanılarak grafikler daha bütüncül bir biçimde inşa edilmiştir. Dinamik değişiklikler sayesinde katılımcılar grafiksel temsil ve cebirsel ifade ilişkisini doğrudan gözlemleyebilmiştir. Bu da dinamik ortamın kavramsal anlamlandırmayı desteklediğini, görselleştirme yoluyla öğrenci düşüncesini ilişkilendirdiğini göstermektedir

5. BÖLÜM
SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu araştırmanın amacı, öğretmen adaylarının dinamik geometri ortamda cebirsel ifadelerin yazımı ve grafiklerinin çizimi süreçlerinde ortaya koydukları enstrümanlı eylem şemalarını incelemek ve bu süreçlerde kağıt-kalem ortamında yaşanan farklılıkları değerlendirmektir. Araştırma soluçları, teknolojik öğrenme ortamlarının özellikle grafik oluşturma ve cebirsel yapıları görselleştirme bağlamında öğretmen adaylarının kavramsal anlayışlarını desteklediğini göstermiştir. Bu bölümde, araştırmanın sonuçları veri analizi sürecinde ortaya çıkan temalar doğrultusunda yapılandırılarak sunulmuş; elde edilen sonuçlar ilgili literatür ve kavramsal çerçeve ışığında ele alınmıştır. Sonuçların mevcut çalışmalarla benzerlik ve farklılıkları gerekçeleriyle birlikte tartışılmış, araştırmanın güçlü ve sınırlı yönleri ortaya konularak alan yazına katkısı vurgulanmıştır. Ayrıca uygulamaya yönelik çıkarımlar yapılmış ve öğretimin niteliğini arttırılmasına ve gelecekteki çalışmalara ilişkin önerilere yer verilmiştir.

5.1. Çalışmanın Alt Problemlerine İlişkin Sonuçlar ve Tartışma

Bu çalışmanın birinci alt problemine ilişkin sonuçları, kağıt-kalem ortamında cebirsel ifadelerin yazımına yönelik enstrümanlı eylem şemaları incelendiğinde, öğretmen adaylarının bu ifadeleri genellikle belirli işlem basamaklarına dayalı bir düzen içinde yapılandırdıkları görülmüştür. Çözüm süreçlerinin, işlem sırası ve cebirsel ilişkilerin korunmasına odaklanan bir yaklaşımla şekillendiği tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının bu süreçteki enstrümanlı eylem şemaları, "Eğer kağıt-kalem ortamında doğrusal, parabol ve polinom fonksiyonları çözülecek ise, x ve y değişkenine değer verilerek, y ve x değişkenine yönelik sonuç değeri elde edilir. Gereken fonksiyonlarda denklemin köklerini, tepe noktasını, grafiğin minimum ve maksimum noktalarını bulmak amacıyla çarpanlara ayırma ile türev hesaplama yöntemi kullanılarak bu noktalara ilişkin değerler elde edilir." olarak tespitlenmiştir. Bu çalışmada, öğretmen adaylarının cebirsel ifadeleri kağıt-kalem ortamında işlerken ağırlıklı olarak işlemsel bilgiye dayalı bir yaklaşım benimsedikleri ve sabit, kurallı çözüm yollarını tercih ettikleri görülmüştür. Ancak bazı adayların, işlemsel yaklaşımların yanı sıra kavramsal anlamaya yönelik çabalar sergilediği ve alternatif çözüm yolları geliştirdiği tespitlenmiştir. Katılımcıların çoğunluğu, değişkenlerin yapısal anlamını sorgulamak yerine ifadeleri işlemsel düzeyde dönüştürme eğiliminde olsa da, bu bireysel farklılıklar öğrenme süreçlerindeki çeşitliliği ortaya koyduğu görülmüştür. Bu sonuçlar, çalışmada ortaya çıkan "işlem odaklı temsil", "cebirsel dönüşümde zorluk" ve "bireysel farklılıklar" temalarıyla doğrudan ilişkilidir. Çalışmanın sonuçları, ilgili literatürde yer alan çalışmalarla benzerlik göstermekte ve söz konusu araştırmaların ortaya

koyduğu sonuçlarla örtüşmektedir. Drijvers (2019) tarafından 15 ülkede yapılan çalışmada belirtilen, kağıt-kalem ortamlarda prosedürel bilginin kavramsal anlamayı geciktirebileceği görüşüyle uyumludur. Ancak Xu (2025), kağıt-kalem ortamının temel becerilerin önemli rolüne vurgu yaparken, aynı zamanda öğrencilerin bireysel öğrenme yollarına dikkat çekmiş ve bu ortamın farklı öğrenme stillerine uyum sağlayabileceğini belirtmiştir. Kieran & Drijvers (2006) da benzer şekilde, geleneksel öğretim süreçlerinde işlemsel düşüncenin ön planda olduğunu ve yapısal kavrayışın ihmal edildiğini belirtmiştir. Trouche (2005) ise araçların enstrümantal dönüşümünün gerçekleşmediği durumlarda kavramsal anlamanın sınırlı kaldığını ifade etmiştir.

Bu araştırma sonucunda, ikinci alt probleme ilişkin öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında grafik çizimine yönelik folowing enstrümanlı eylem şemasını benimsedikleri belirlenmiştir: "Eğer kağıt-kalem ortamında doğrusal, parabol ve polinom fonksiyonlarının grafiği çizilecek ise, x ve y değişkenlerine değer verilerek iki nokta belirlenir ve bu noktalar birleştirilerek doğru oluşturulur. Gereken durumlarda denklemin köklerini, tepe noktasını, grafiğin minimum ve maksimum noktalarını bulmak amacıyla çarpanlara ayırma ile türev hesaplama yöntemi kullanılır ve bu noktalar koordinat sistemi üzerinde yerleştirilerek grafik çizilir." Öğretmen adaylarına ilişkin belirlenen enstrümanlı eylem şeması, grafik çiziminde temel olarak işlemsel bir yaklaşım benimsediğini göstermektedir. Öğretmen adaylarının, eksenleri elle çizmiş olmaları ve belirledikleri noktaları koordinat sisteminde işaretlemiş olmaları, çoğunlukla grafiklerin şekilsel doğruluğuyla sınırlı kalmıştır. Özellikle simetri yapısını fark etmeme, tepe noktası gibi özel noktaları belirlemede zorlanma ve fonksiyonun tanım aralıkları ile çıktı değerlerine ilişkin kavramsal farkındalık eksikliği dikkat çekmektedir. Bu sonuçlar, öğretmen adaylarının grafik çiziminde işlemsel becerilere hakim olduğunu, ancak grafiklerin yapısal ve davranışsal özelliklerini (simetri, tepe ve maksimum-minimum noktalar vb.) yorumlamada yetersiz kaldıklarını ortaya koymaktadır. Bu durum, cebirsel ifadeler eğitiminde grafik çizim çalışmalarının yalnızca işlemsel değil, aynı zamanda kavramsal boyutunu vurgulayan bir yaklaşımla desteklenmesi gerektiğine işaret etmektedir. Eisenberg ve Dreyfus (1991)'in vurguladığı gibi, öğrencilerin grafiklerin biçimsel yönlerini üretme konusunda başarılı oldukları ancak bu grafiklerin ardındaki matematiksel anlamı yapılandırmada yetersiz kaldıkları sonucu, bu çalışmanın sonuçlarıyla örtüşmektedir. Adayların grafik üretimini yalnızca bir işlem olarak görmeleri, grafiksel temsillerin kavramsal analizine yönelik yaklaşımlarının zayıf kaldığını göstermektedir. Literatürde yer alan çalışmalar (örneğin, Kaplan, 2010; Hazzan & Goldenberg, 1997) benzer şekilde, öğrencilerin ve öğretmen adaylarının grafik çiziminde genellikle cebirsel işlemlere dayalı, ancak grafiklerin işlevsel ve geometrik özelliklerini göz ardı eden bir yaklaşım sergilediklerini ortaya koymuştur. Bu

bağlamda, öğretmen adaylarının koordinat düzlemine doğru yerleştirme ve görsel bütünlük sağlamada başarılı olmalarına rağmen, grafiklerin davranışsal özelliklerini (artma-azalma, simetri gibi) açıklamada zorlandıkları görülmektedir. Ancak, deneyimli öğretmenlerin grafik çiziminde daha önce edindikleri mesleki bilgi ve sınıf içi uygulama tecrübeleri sayesinde, bu tür kavramsal ve yapısal özellikleri öğrencilerine aktarma ve yorumlama konusunda zorlanmadıkları, aksine bu süreçleri daha etkili yürüttükleri görülmektedir (Bautista vd., 2015).

Araştırmanın üçüncü alt problemine ilişkin sonuçlar, dinamik geometri ortamında öğretmen adayları cebirsel ifadeleri çözerken, yazılımın menülerinde bulunan araçlardan faydalanmışlardır. Öğretmen adaylarının dinamik geometri ortamında fonksiynların çözümüne oluşturdukları enstrümanlı eylem şeması 'Eğer dinamik geometri ortamında doğrusal, parabol ve polinom fonksiyonlar çözülecek ise, öncelikle dinamik ortamın sağladığı sayı aracı yardımıyla fonksiyonlara ait katsayılar ve sabit sayılar tanımlanır, ardından yazılımın hesap makinesi aracı yardımı ile tanımlanan değerler hesap makinesine işlenir ve sonuç değer (y) elde edilir.'olarak belirlenmiştr. Bu araştırmada öğretmen adaylarının cebirsel ifadelerin çözüm sürecinde anlam odaklı ve ilişkilendirmeye dayalı yaklaşımlar sergiledikleri, değişkenler arası ilişkileri gözlemleyerek anlam kurmaya çalıştıkları görülmüştür. Adaylar, cebirsel ifadeleri oluştururken yalnızca işlemleri değil, bu işlemlerin temsil ettiği matematiksel yapıları da dikkate almış, sembollerin (katsayılar ve değişkenler) neyi temsil ettiğini sorgulamışlardır. Bu sonuçlar, öğretmen adaylarının matematiksel yapıları dinamik geometri ortamında kavramsal anlamaya dayalı şekilde inşa ettiklerini göstermektedir. Araştırmada elde edilen bu sonuçlar, Haspekian vd., (2024) ; Brating & Kilhamn, (2021); Drijvers, (2015) dinamik ortamların, bireylerin cebirsel ifadelerle grafik temsiller arasında daha güçlü kavramsal bağlar kurmalarına yardımcı olduğu sonuçlarıyla tutarlılık göstermektedir. Bu çalışma, adayların teknolojiyi yalnızca işlemsel bir araç olarak değil, düşünmeyi yapılandıran ve neticesinde enstrümanlı eylem şemalarını geliştiren ve güçlendiren bir ortam olarak gördüklerini ortaya koymuştur. Bu yapı, "dinamik temsil yoluyla kavramsal anlamlandırma" temasıyla doğrudan ilişkilidir. Ancak literatürde, dinamik ortamların her zaman kavramsal anlamayı derinleştirmediğine ilişkin farklı bulgular da bulunmaktadır. Örneğin, Baccaglini-Frank & Antonini (2016) dinamik geometri ortamlarında öğrencilerin belirli örüntülere veya duruma özel gözlemlere odaklanabildiklerini, bu durumun ise genellenebilir kavramsal anlayışı engelleyebileceğini ileri sürmüştür. Bu sonuç, dinamik ortamların kavramsal gelişim üzerindeki etkisinin bireyden bireye değişebileceğini göstermektedir. Nitekim bu araştırmada görüşme yapılan öğretmen adaylarından biri (Ö1), bu durumun tersine, dinamik geometri yazılımını anlam kurma ve grafiksel yorumlama açısından güçlü bir araç olarak kullandığını ifade etmiştir. Ö1, "Ben artık ne fonksiyon verilirse verilsin,

örneğin çemberin kapalı formu olan '$x^2+y^2=1$' verildiğinde, bunu y değişkenine göre düzenleyip Cabri-Geometri'de çizebiliyorum ve bu çizim sayesinde grafiği yorumlayabiliyorum" diyerek, teknolojiyi kavramsal düşünmenin bir aracı olarak benimsediğini açıkça ortaya koymuştur. Bu ifade, dinamik yazılımların bireysel deneyimlere bağlı olarak farklı şekillerde kullanılabildiğini ve bazı öğretmen adaylarının bu ortamı anlam kurmak amacıyla kullandığını göstermektedir.

Araştırmanın dördüncü alt problemine ilişkin sonuçlar, dinamik geometri ortamında öğretmen adaylarının cebirsel ifadelerin grafiklerini çizimi için oluşturdukları enstrümanlı eylem şemaları 'Eğer dinamik geometri ortamda doğrusal, parabol ve polinom fonksiyonların grafikleri oluşturulacak ise, denklemin bu ortamda çözümü sırasında elde edilen sonuç değeri (y), ölçüm aktarım aracı yardımı ile y eksenine aktarılır. Başlangıç ve sonuç noktalarından dik doğrular çizilerek bu iki doğrunun kesişim noktası belirlenir. Bu kesişim noktası, geometrik yer noktası veya iz noktası olarak isimlendirilir. Geometrik yer aracı kullanılarak kesişim noktasının başlangıç yani x noktasına göre geometrik yeri elde edilir. Yani x noktasının hareketi ile kesişim noktasının oluşturduğu iz denklemin grafiği olarak elde edilir.' Şeklinde belirlenmiştir. Dinamik geometri ortamında gerçekleştirilen grafik oluşturma süreçlerinde öğretmen adayları, yazılımın sunduğu araçları kullanarak koordinat eksenlerini tanımlamış, ardından grafik oluşturma sürecine geçmiştir. Bu süreçte ölçüm aktarım aracı, dik doğrular ve geometrik yer araçları sıklıkla tercih edilmiştir. Örneğin üçüncü dereceden bir polinomun grafiğini oluştururken geometrik yer noktası oluşturmuş, bu noktayı hareket ettirerek dinamik değişim sürecini gözlemlemişlerdir. Bu sayede grafiksel yapının yerel maksimum ve minimum noktaları ile kökleri fark edebilmişlerdir. Bu ortamdaki enstrümanlı eylem şemalarında "geometrik yer noktası", "geometrik yer", "simetri ekseni", "dinamik değişim" gibi kavramlar ön plana çıkmaktadır. Bu araştırmanın sonuçları, dinamik geometri ortamında grafik üretim sürecinin öğretmen adayları açısından yalnızca teknik bir çizim etkinliği olmaktan çıkarak, kavramsal anlamlandırmaya dayalı bir öğrenme sürecine dönüştüğünü ortaya koymuştur. Katılımcıların, parametre değişimlerine bağlı olarak grafiklerde meydana gelen dönüşümleri gözlemleyip yorumlayabilmeleri; eğim, yön ve maksimum-minimum noktalar gibi grafik özelliklerine yönelik sezgisel ve mantıksal çıkarımlarda bulunmaları, kavramsal muhakemelerinin geliştiğine işaret etmektedir. Elde edilen bu sonuçlar, "görselleştirme yoluyla kavramlar arası ilişkilendirme" temasıyla örtüşmekte ve dinamik ortamların kavramsal öğrenmeye olan katkısını desteklemektedir. Literatürde yer alan çalışmalar da bu sonuçlarla örtüşmektedir. Mariotti (2000), bu tür ortamların öğrencilerin grafiksel davranışları yorumlama ve çoklu temsiller arasında geçiş yapma becerilerini geliştirdiğini vurgulamaktadır. Zhang et

al., (2025) ise dinamik araçların, grafiklerin cebirsel ifadelerle ilişkilendirilmesini kolaylaştırarak anlam inşasında kritik bir rol oynadığını ifade etmektedir. Ayrıca, bazı araştırmacılar tarafından vurgulandığı üzere, dijital teknolojiler sadece temsil araçları değil, aynı zamanda öğrencilerin matematiksel kavramlarla etkileşim biçimlerini dönüştüren öğrenme ortamları olarak işlev görmektedir (Weigand et al., 2024). Bu bağlamda, bu çalışma, dinamik yazılım ortamlarının öğretmen adaylarının grafiksel muhakeme süreçlerine kavramsal düzeyde katkı sunduğunu göstermektedir. Ancak elde edilen bu sonuçların her durumda geçerli olmayabileceği göz önünde bulundurulmalıdır. Nitekim bazı araştırmalar, dinamik geometri ortamlarının kavramsal anlamayı desteklediğini ortaya koymakla birlikte, bu desteğin öğrencilerin ön bilgi düzeyine ve öğretim tasarımının niteliğine bağlı olarak değişkenlik gösterebileceğini belirtmektedir. Örneğin, Donnelly-Hermosillo et al., (2020), grafik teknolojilerinin kısa vadede öğrencilerin sorgulamaya dayalı akıl yürütmelerini geliştirdiğini; ancak uzun vadede kavramsal bilgilerin kalıcılığı üzerinde tutarlı bir etki göstermediğini ortaya koymuştur. Benzer şekilde, Pittalis ve Drijvers (2023), dinamik geometri ortamlarında sürükleme yoluyla yapılan etkinliklerin çoğunlukla işlemsel yeterlikleri artırdığını; ancak kavramsal anlayış gelişiminde sınırlı katkı sağladığını belirtmişlerdir. Bu sonuçlar, dinamik yazılımların grafik üretimini kolaylaştırmakla birlikte, her öğrenci için doğrudan kavramsal anlamaya yol açmayabileceğini göstermektedir. Dolayısıyla, bu çalışmanın bulgular bölümünde de vurgulandığı üzere, bu tür öğrenme ortamlarının öğretmen rehberliğinde yapılandırılmış etkinliklerle desteklenmesi; öğrencilerin matematiksel düşünme ve grafiksel muhakeme becerilerini geliştirmeleri açısından önemlidir.

Bu araştırmanın beşinci alt probleme ilişkin sonuçları, öğretmen adaylarının dinamik geometri ortamlarında cebirsel ifadelerle çalışırken kağıt-kalem ortamına kıyasla daha kavramsal ve ilişkisel bir yaklaşım sergilediklerini ortaya koymaktadır. Bokhove ve Drijvers (2012), dijital araçların matematik eğitiminde yalnızca teknik bir destek olmadığını, aynı zamanda öğrencilerin matematiksel kavrayışlarını derinleştiren bilişsel araçlar olarak işlev gördüğünü vurgulamaktadır. Bu çalışmada da dinamik geometri yazılımlarının, öğretmen adaylarının cebirsel ifadeleri yalnızca manipüle etmekle kalmayıp aynı zamanda bu ifadelerin grafiksel temsilleriyle anlamlı bağlantılar kurmalarına olanak tanıdığı ortaya çıkarılmıştır. Özellikle yazılımın sağladığı anlık geri bildirim mekanizmaları, katılımcıların hatalarını derhal fark etmelerini ve matematiksel düşüncelerini yeniden yapılandırmalarını sağlamıştır. Bu sonuçlar, güncel literatürle tutarlılık göstermektedir. Wei et al., (2023), teknoloji destekli öğrenme ortamlarının bilişsel köprüler oluşturarak kavramsal anlamayı desteklediğini belirtmektedir. Ancak, Barabash, (2019) gibi araştırmacılar, dijital araçların aşırı kısıtlayıcı

yapılandırmalarının öğrencilerin yaratıcılığını sınırlayabileceği konusunda uyarıda bulunmaktadır. Bu çalışmada dinamik geometri ortamının, öğretmen adaylarının değişkenler arasındaki ilişkileri doğrudan gözlemlemelerine ve cebirsel ifadelerin yapısal özelliklerini keşfetmelerine imkan verdiği görülmüştür. Ancak, Bokhove ve Drijvers'in (2012) belittiği üzere, teknolojik araçların tasarımındaki kısıtlamaların öğrenme süreçlerini olumsuz etkilememesi için dikkatli bir şekilde planlanması gerekmektedir. Bu çalışmada da dinamik yazılımın belirli formatlara sıkı sıkıya bağlı olmasının, bazı katılımcıların alternatif çözüm yolları geliştirmesini sınırlandırdığı tespit edilmiştir. Bu sonuçlar ışığında, matematik eğitiminde teknolojik araçların kullanımının, Bokhove ve Drijvers (2012) tarafından önerildiği gibi, öğrencilerin kavramsal anlamalarını destekleyecek şekilde tasarlanması gerektiği sonucuna varılmıştır. Ayrıca, teknolojik ve kağıt-kalem ortamların güçlü yönlerinin dengeli bir şekilde harmanlandığı öğrenme deneyimlerinin, öğretmen adaylarının matematiksel becerilerini daha kapsamlı bir şekilde geliştirebileceği öne sürülebilir. Bu yaklaşım, öğrencilerin hem işlemsel becerilerini hem de kavramsal anlayışlarını aynı anda geliştirmelerine olanak tanıyacaktır.

Bu çalışmanın altıncı alt probleme ilişkin sonuçları sonuçları, öğretmen adaylarının grafik çizim süreçlerinde kullandıkları enstrümanlı eylem şemalarının, çalışılan ortamın doğasına göre önemli farklılıklar gösterdiğini ortaya koymaktadır. Kağıt-kalem ortamında grafik oluşturma süreci, temel olarak mekanik bir nokta belirleme ve birleştirme işlemine indirgenmiş; simetri ekseni, tepe noktası ve yerel minimum ve maksimum noktalar gibi kritik matematiksel özellikler çoğunlukla göz ardı edilmiştir. Bu durum, grafik çiziminin yalnızca şekilsel doğrulukla sınırlı kaldığı ve kavramsal eksiklikler barındıran bir uygulama olarak gerçekleştiğini göstermektedir. Buna karşılık, Cabri-Geometri gibi dinamik yazılım ortamlarında, geometrik yer araçları sayesinde grafiklerin yapısal özellikleri doğrudan gözlemlenebilmiş ve matematiksel ilişkiler somutlaştırılabilmiştir. Araştırma sonuçları, Yerushalmy (2006) ve Mariotti (2000)'nin çalışmalarıyla uyumlu şekilde, dinamik ortamların öğrencilere çoklu temsiller arasında geçiş yapma ve grafiklerin davranışsal özelliklerini analiz etme olanağı sunduğunu doğrulamaktadır. Özellikle, fonksiyonların artış-azalış eğilimleri, yön değişim noktaları ve simetri özellikleri gibi kavramsal boyutların, dinamik ortamlarda anlanlandırılarak kavrandığı ortaya çıkarılmıştır. Bu sonuçlar, matematik eğitiminde teknoloji entegrasyonunun yalnızca görselleştirme değil, aynı zamanda kavramsal anlamayı destekleme potansiyeline işaret etmektedir.

Sonuç

Bu araştırmada öğretmen adaylarının kağıt-kalem ve dinamik geometri ortamlarında gerçekleştirdikleri cebirsel ifade yazımı ve grafik çizimi süreçleri, enstrümantal oluşum teorisi çerçevesinde incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, kullanılan ortamın öğretmen adaylarının enstrümanlı eylem şemalarını doğrudan etkilediğini göstermektedir. Kağıt-kalem ortamında adaylar genellikle işlemsel bilgiye dayalı, sabit ve doğruluğa odaklı çözüm stratejileri geliştirirken; dinamik geometri ortamında etkileşimli ve kavramsal yönelimler sergilemişlerdir. Dinamik ortamda geliştirilen enstrümanlı eylem şemaları, özellikle çoklu temsiller arasında geçiş yapabilme, grafik davranışlarını gözlemleme ve anlamlandırma, değişkenler arasındaki ilişkileri açıklayabilme gibi kavramsal özellikler taşımaktadır. Bu çalışma, öğretmen adaylarının geliştirdiği enstrümanlı eylem şemalarının, yalnızca kullandıkları dijital veya geleneksel araçlardan değil, bu araçlarla kurdukları etkileşimden beslendiğini; bu etkileşimin ardında yatan dinamikleri kavramada ise enstrümantal oluşum teorisinin, öğrenmenin doğasını ve dönüşümünü anlamak için vazgeçilmez bir kuramsal anahtar olduğunu açıkça ortaya koymaktadır.

5.2. Araştırmanın Sonuçlarına Yönelik Öneriler

Bu bölümde araştırma sonuçları temel alınarak gelecek çalışmalara yönelik öneriler ‘Öğretimin Niteliğini Artırmaya Yönelik Öneriler’ ve ‘Gelecekte Yapılacak Araştırmalar İçin Öneriler’ iki ana başlık altında verilmiştir.

5.2.1. Öğretimin Niteliğini Artırmaya Yönelik Öneriler

Bu tez kapsamında yalnızca öğretmen adaylarıyla çalışılmıştır. İlerleyen çalışmalarda, ortaokul ve lise düzeyindeki öğrencilerle benzer dinamik geometri ortamlarında yürütülecek araştırmalar, farklı yaş gruplarının cebirsel ifadeleri yazma ve grafik oluşturma süreçlerini anlamada katkı sağlayabilir. Ayrıca, bu çalışma sadece cebirsel ifadelerin yazımı ve grafiklerinin oluşturulmasına odaklanmıştır. Bundan sonraki araştırmalarda, fonksiyonlara ilişkin limit, türev ve integral gibi daha ileri düzey kavramların öğretiminde dinamik yazılım destekli yaklaşımların etkisi incelenebilir.

Yapıan araştırma kapsamında kullanılan Cabri-Geometri yazılımı aracılığıyla, öğretmen adaylarının dinamik ortamdaki etkileşimleri analiz edilmiştir. Gelecekte, GeoGebra gibi farklı yazılımların kullanıldığı araştırmalarla enstrümantal oluşum süreçlerinin nasıl farklılaştığı karşılaştırmalı olarak ele alınabilir. Böylece farklı teknolojik araçların öğrenme süreçlerine etkisi daha kapsamlı şekilde değerlendirilebilir.

Tez kapsamında yürütülen sınıf içi uygulamalarda, araştırmacı ile öğretmen adayı arasındaki etkileşimin katılımcıların geliştirdikleri enstrümanlı eylem şemalarını doğrudan etkilediği gözlemlenmiştir. Bu doğrultuda, araştırmacının özellikle sorgulamaya dayalı bir öğretim yaklaşımı benimseyerek öğretmen adaylarının düşünme ve anlamlandırm süreçlerini yönlendirmesi ve kavramsal anlamlandırmalarını desteklemesi önerilmektedir. Böyle bir öğretim yaklaşımı, öğretmen adaylarının enstrümantal oluşumlarını daha sağlam temellere oturtmalarına katkı sağlayabilir.

Ayrıca bu tez kapsamında öğrenciler ikişerli gruplar halinde çalışmışlardır. Grup çalışması, bireyler arasında fikir alışverişine imkân tanıyarak öğrenmeyi desteklemiş olabilir; ancak aynı zamanda grup içinde baskın öğrencinin görüşlerinin belirleyici olmasına yol açma potansiyeli de taşımaktadır. Bu nedenle ileriki çalışmalarda her öğrenciye bir bilgisayarın düştüğü bireysel çalışma ortamlarında gerçekleştirilecek benzer öğretim uygulamaları ile elde edilen enstrümanlı eylem şemalarının karşılaştırmalı olarak incelenmesi, grup dinamiklerinin öğrenme süreçlerine etkisinin daha ayrıntılı değerlendirilmesine katkı sağlayabilir.

5.2.2. Gelecekte Yapılacak Araştırmalar İçin Öneriler

Bu çalışmada yürütülen uygulama süreci bir öğretim dönemi boyunca ve bir ders kapsamında sınırlı kalmıştır. İlerleyen araştırmalarda, öğretmen adaylarının teknolojik araçlarla uzun vadeli etkileşimleri izlenerek enstrümantal oluşum süreçlerindeki gelişim incelenebilir.

Araştırmada nitel veri toplama yöntemleri tercih edilmiştir. Bu bağlamda, daha geniş örneklem gruplarıyla yapılacak karma yöntem araştırmaları, hem nitel hem de nicel bulgularla desteklenerek sonuçların genellenebilirliğini artırabilir.

Son olarak, bu tez kapsamında elde edilen bulgular, dinamik yazılım kullanımının kavramsal anlamayı desteklediğini ortaya koymaktadır. Bu doğrultuda, ileriki çalışmalarda dinamik ortamların öğrencilerin problem çözme becerilerine, kavramlar arası ilişki kurma yeterliliklerine ve öğrenme kalıcılığına etkisi araştırılabilir.

KAYNAKÇA

Açıkgül, K. (2012). *The effect of multiple representations on the understanding of the function concept in mathematics education* (Yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Ainsworth, S., Bibby, P., & Wood, D. (2002). Examining the effects of different multiple representational systems in learning primary mathematics. *The Journal of the Learning Sciences, 11*(1), 25–61. https://doi.org/10.1207/S15327809JLS1101_2

Aldon, G., Cusi, A., Schacht, F., & Swidan, O. (2021). Teaching mathematics in a context of lockdown: A study focused on teachers' praxeologies. *Education Sciences*, 11(2), 38. https://doi.org/10.3390/educsci11020038

Aliu, Erëmirë R., Teuta Jusufi Zenku, Egzona Iseni, and Shpetim Rexhepi. "The Advantage of Using GeoGebra in the Understanding of Vectors and Comparison with the Classical Method." *International Electronic Journal of Mathematics Education* 20, no. 2 (2025). https://doi.org/10.29333/iejme/16007

Alqahtani, M. M., & Powell, A. B. (2017). Teachers' instrumental genesis and their geometrical understanding in a dynamic geometry environment. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 3(1), 9-38. https://doi.org/10.1007/s40751-016-0025-5

Altun, M. (2005). *İlköğretim ikinci kademede matematik öğretimi*. Bursa: Alfa Basım Yayım.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245–274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Ayyıldız, H., & Aktaş, M. C. (2022). Türkiye'deki matematik eğitimi alanındaki temsil araştırmalarının eğilimleri: Tematik içerik analizi çalışması. *Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi, 11*(1), 127–144. https://doi.org/10.30703/cije.9698

Baccaglini-Frank, A., & Antonini, S. (2016). From conjecture generation by maintaining dragging to proof. *arXiv*. arXiv:1605.02583

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(3), 225-253. https://doi.org/10.1007/s10758-010-9169-3

Baki, A. (2001). Bilişim teknolojisi ışığı altında matematik eğitiminin değerlendirilmesi. *Milli Eğitim Dergisi, 149*(1), 26–31.

Baki, A. (2002). *Bilgisayar destekli matematik*. İstanbul: Ceren Yayınları.

Barabash, M. (2019). Dragging as a geometric construction tool: Continuity considerations inspired by students' attempts. *Digital Experiences in Mathematics Education, 5*(2), 124–144. https://doi.org/10.1007/s40751-019-0050-2

Baştürk-Şahin, B. N., Tapan-Broutin, M. S., Trouche, L., Gueudet, G., Pepin, B., Baştürk, N., … & Tapan-Broutin, S. (2020). Didaktiğe dokümantal yaklaşım. *DAD-Multilingual*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100011-

Bautista, A., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Schliemann, A. D. (2015). Examining how teachers use graphs to teach mathematics during a professional development program. *Journal of Education and Training Studies, 3*(2), 91–106. http://dx.doi.org/10.11114/jets.v3i2.676

Bokhove, C., & Drijvers, P. (2012). Effects of a digital intervention on the development of algebraic expertise. *Computers & Education, 58*(1), 197–208. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.08.010

Borg, A., & Fahlgren, M. (2025). Students' Development of Instrumented Action Schemes for Numerically Determining Limits Using Programming. *Digital Experiences in Mathematics Education,* 1-33. https://doi.org/10.1007/s40751-025-00177-w

Bozkurt, G. (2012). *A case study of secondary teachers' use of digital technologies for teaching mathematics* (Unpublished master's thesis). Gazi University, Institute of Educational Sciences. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01184-4

Bozkurt, G., & Uygan, C. (2020). Lesson hiccups during the development of teaching schemes: a novice technology-using mathematics teacher's professional instrumental genesis of dynamic geometry. ZDM, 1-15. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01184-4

Bråting, K., & Kilhamn, C. (2021). Exploring the intersection of algebraic and computational thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 23*(2), 170–185. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1779012

Bretscher, N. (2008). Dynamic geometry software: The teacher's role in facilitating instrumental genesis. British Society for Research into Learning Mathematics.

Buabeng-Andoh, C. (2012). Factors influencing teachers' adoption and integration of information and communication technology into teaching: A review of the literature. *International Journal of Education and Development Using ICT, 8*(1).

Cabrilog. (2005). *Cabri II Plus user manual: Reference manual – Perpendicular constructs*. https://download.cabri.com/data/pdfs/manuals/cabri2plus140/Man_uk_PDF1.pdf

Cabrilog. (n.d.). *Cabri Geometry II manual: User manual – Objects and tools*. https://www.schoolnet.org.za/PILP/one-step-further/resources/cabri-manual.pdf

Clarou, P., Laborde, C., & Capponi, B. (2001). *Géométrie avec Cabri: Scénarios pour le lycée*. Grenoble: Editions CRDP.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009

Creswell, J. (2013). *Qualitative inquiry & research design: Choosing among five approaches* (3rd ed.). Sage.

Czarnocha, B., & Maj, B. (2008). Teaching experiment. In B. Czarnocha (Ed.), *Handbook of mathematics teaching research: Teaching experiment – A tool for teacher-researchers* (pp. 47–58). University of Rzeszow.

Çetin, H. (2017). Çoklu temsiller destekli tasarlanan manipülatiflerin "tam sayı" öğretiminde öğrenci başarısına etkisi. *Uluslararası Eğitim Bilimleri Dergisi, 11*, 55–69.

Çıkla Akkuş, O. (2004). *The effects of multiple representations-based instruction on seventh grade students' algebra performance, attitude towards mathematics, and representation preference* (Unpublished master's thesis). Middle East Technical University, Ankara.

Çiftci, O., & Tatar, E. (2014). Pergel-cetvel ve dinamik bir yazılım kullanımının başarıya etkilerinin karşılaştırılması. *Journal of Computer and Education Research, 2*(4), 111–133.

Dede, Y., & Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24*, 180–185.

Delice, A., & Sevimli, E. (2010). Geometri problemlerinin çözüm süreçlerinde görselleme becerilerinin incelenmesi: Ek çizimler. *Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Eğitim Bilimleri Dergisi, 31*(31), 83–102. http://dspace.marmara.edu.tr/handle/18832014/957

Deniz, S. (2016). *Doğrusal denklemlerin 7. sınıflarda öğretiminde geometri sketchpad kullanımının çoklu temsil ve enstrümantal yaklaşım boyutundan incelenmesi [Examination of the use of geometry sketchpad in the teaching of linear equations in the 7th grade in terms of multiple representation and instrumental approach]* (Yüksek lisans tezi). Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Dennis, C., & Buchbinder, O. (2023). Opportunities for Instrumental Genesis in Mathematics Lessons. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Dindyal, J. (2003). *Algebraic thinking in geometry at high school level* (Unpublished doctoral dissertation). Illinois State University.

Donnelly-Hermosillo, D. F., Gerard, L. F., & Linn, M. C. (2020). Impact of graph technologies in K-12 science and mathematics education. *Computers & Education, 146*, 103748. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.103748

Dreher, A., & Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 88*(1), 89–114. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9577-8

Dreher, A., Wang, T. Y., Feltes, P., Hsieh, F.-J., & Lindmeier, A. (2024). High-quality use of representations in the mathematics classroom – A matter of the cultural perspective? *ZDM–Mathematics Education, 56*(5), 965–980. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01597-5

Dreyfus, T., & Tsamir, P. (2004). Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *The Journal of Mathematical Behavior, 23*(3), 271–300. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.06.002

Dreyfus, T., Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2006). Mechanisms for consolidating knowledge constructs. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 465–472). Prague, Czech Republic: Charles University, Faculty of Education.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2001). Abstraction in context II: The case of peer interaction. *Cognitive Science Quarterly, 1*(3–4), 307–368.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context: Theory as methodological tool and methodological tool as theory. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods* (pp. 185–217). Springer.

Drijvers, P. (2015). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). In S. J. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 135–151). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_8

Drijvers, P. (2019, February). Embodied instrumentation: Combining different views on using digital technology in mathematics education. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (No. 1). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME. https://hal.science/hal-02436279/

Drijvers, P., & Gravemeijer, K. (2005). Computer as catalyst for rich mathematics? The case of algebra. In D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 189–215). Springer.

Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics* (Vol. 2, pp. 363–392). Information Age Publishing.

Drijvers, P., Tacoma, S., Besamusca, A., Doorman, M., & Boon, P. (2013). Digital resources inviting changes in mid-adopting teachers' practices and orchestrations. *ZDM–Mathematics Education, 45*, 987–1001. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0535-1

Dur, Z. (2016). *7. sınıf öğrencilerinin bir dinamik geometri ortamında kullandıkları sürükleme ve ölçme araçlarının enstrümantal oluşumlarının incelenmesi [Investigation of instrumental genesis of dragging and measuring artefacts used by the 7th grade students in the dynamic geometry environment]* (Doktora tezi). Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25–37). Mathematical Association of America.

Ekiz, D. (2003). *Eğitimde araştırma yöntem ve metodlarına giriş: Nitel, nicel ve eleştirel kuram metodolojileri*. Ankara: Anı Yayıncılık.

Engelhardt, P. V., Corpuz, E. G., Ozimek, D. J., & Rebello, N. S. (2004, September). The teaching experiment—What it is and what it isn't. *AIP Conference Proceedings, 720*(1), 157–160. https://doi.org/10.1063/1.1807265

Eroğlu, D. (2020). Ortaokul matematik öğretmen adaylarının sözel-sembolik temsil dönüşümlerinin ve süreçte yaptıkları hataların incelenmesi. *Yükseköğretim ve Bilim Dergisi, 10*(3), 438–450. https://doi.org/10.5961/jhes.2020.405

Ersoy, M. (2009). *Bilgisayar destekli ders uygulamalarının ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometri başarılarına etkisi ve öğrenme ve öğretmeye yönelik görüşleri* (Yüksek lisans tezi). Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir. https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/tezSorguSonucYeni.jsp

Ersoy, Y., & Erbaş, K. (1998). İlköğretim okullarında cebir öğretimi: Öğrenmede güçlükler ve öğrenci başarıları. In *Cumhuriyetin 75. Yılında İlköğretim I. Ulusal Sempozyumu*. Başkent Öğretmenevi, Ankara.

Frankel, R. M., & Devers, K. J. (2000). Study design in qualitative research–1: Developing questions and assessing resource needs. *Education for Health, 13*(2), 251–261. https://journals.lww.com/edhe/abstract/2000/13020/study_design_in_qualitative_research_1__developing.14.aspx

García Cuéllar, D. J., & Martínez Miraval, M. A. (2018). Estudio del proceso de génesis instrumental del artefacto simbólico función exponencial. Transformación, 14(2), 252-261.

Gelibolu, M. F. (2009). *Gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımıyla geliştirilen bilgisayar destekli mantık öğretimi materyallerinin 9. sınıf matematik dersinde uygulanmasının değerlendirilmesi* (Unpublished master's thesis). Ege University, İzmir.

GeoGebra. (2025). *About GeoGebra*. https://www.geogebra.org/about

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. Zdm, 39(1), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godwin, S., & Sutherland, R. (2004). Whole-class technology for learning mathematics: The case of functions and graphs. *Education, Communication & Information, 4*(1), 131–152.

Godwin, S., & Sutherland, R. (2007). Whole-class technology for learning mathematics: The case of functions and graphs. *Education and Information Technologies, 12*(1), 61–73. https://doi.org/10.1007/s10639-006-9002-z

Godwin, S., & Sutherland, R. (2020). Technologies and representations: The role of representations in supporting mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics, 103*(3), 365–384.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (2013). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397–430). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203053126

Goss, M., Powers, R., & Hauk, S. (2013). Identifying change in secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge. In *Proceedings of the 16th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*.

Gregersen, R. M. (2024). Analysing instrumented justification: Unveiling student's tool use and conceptual understanding in the prediction and justification of dynamic behaviours. *Digital Experiences in Mathematics Education,* 10(1), 47-75. https://doi.org/10.1007/s40751-024-00134-z

Guin, D., & Trouche, L. (1998). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*, 195–227. https://doi.org/10.1023/A:1009892720043

Guin, D., & Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: Necessity of instrumental orchestration. *ZDM–Mathematics Education, 34*(5), 204–211. https://doi.org/10.1007/BF02655823

Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (Eds.). (2005). *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument* (Vol. 36). Springer.

Gürbüz, K., & Durmuş, S. (2009). İlköğretim matematik öğretmenlerinin dönüşüm geometrisi, geometrik cisimler, örüntü ve süslemeler alt öğrenme alanlarındaki yeterlikleri. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 9*(1), 1–22.

Gürbüz, R., & Şahin, S. (2015). 8. sınıf öğrencilerinin çoklu temsiller arasındaki geçiş becerileri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 23*(4), 1869–1888. https://dergipark.org.tr/tr/pub/kefdergi/issue/22597/241376

Gürefe, N., & Kan, A. (2013). Öğretmen adayları için geometrik cisimler konusuna yönelik tutum ölçeği geliştirme: Geçerlik ve güvenirlik çalışması. *İlköğretim Online, 12*(2), 356–366.

Gürhan, S. (2015). *Ortaokul öğrencilerinin dörtgenleri sınıflandırmaya dair kavramsal anlayışlarının bilgisayar destekli ortamlarda geliştirilmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Mevlâna Üniversitesi, Konya.

Haque, M. N. (2024). The role of multiple representations and attitudes in enhancing statistical and mathematical learning. *Smart Internet of Things, 1*(4), 298–312. https://doi.org/10.22105/siot.vi.52

Haspekian, M. (2005). An “instrumental approach” to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10*(2), 109–141. https://doi.org/10.1007/s10758-005-0395-z

Haspekian, M., Kieran, C., Drijvers, P., Bråting, K., & Tabach, M. (2024). Algebra education and digital resources: A long-distance relationship? In L. Ball, S. Lerman, & M. Tabach (Eds.), *Handbook of digital resources in mathematics education* (pp. 439–470). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-45667-1_16

Hayati, Z., & Ulya, K. (2022). DEVELOPING STUDENTS’MATHEMATICAL UNDERSTANDING USING GEOGEBRA SOFTWARE. JURNAL ILMIAH DIDAKTIKA: Media Ilmiah Pendidikan dan Pengajaran, 22(2), 134-147. https://doi.org/10.22373/jid.v22i2.11451

Hazzan, O., & Goldenberg, E. P. (1997). Students' understanding of the notion of function in dynamic geometry environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1,* 263–291. https://doi.org/10.1007/BF00182618

Healy, L., & Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: Making connections with computers? *Mathematical Thinking and Learning, 1*(1), 59–84. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0101_3

Herbert, K., & Brown, R. H. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics, 3*(6), 340–344.

İpek, A. S., & Baran, D. (2011, September). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının teknoloji destekli temsillerle ilgili düşünceleri. In *5th International Computer and Instructional Technologies Symposium*. Fırat Üniversitesi, Elazığ.

İpek, A. S., & Okumuş, S. (2012). The representations of pre-service elementary mathematics teachers used in solving mathematical problems. *Gaziantep University Journal of Social Sciences, 11*(3), 681–700.

İpek, S. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımları kullanarak gerçekleştirdikleri geometrik ve cebirsel ispat süreçlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 79–103. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)80062-5

Janvier, C. E. (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 1–9). Lawrence Erlbaum Associates.

Jonassen, D. H., Peck, K. L., & Wilson, B. G. (1999). *Learning with technology: A constructivist perspective*. Merrill Prentice Hall.

Kaplan, M. (2010). *Pre-service elementary mathematics teachers' views about using graphing calculators in elementary school algebra: The case of using Classpad* (Master's thesis). Middle East Technical University, Turkey.

Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19–26). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53–74). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47201-5

Kaput, J. J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 265–281. https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80062-7

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2017). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–18). Routledge.

Kaylak, S. (2014). *Gerçekçi matematik eğitimine dayalı ders etkinliklerinin öğrenci başarısına etkisi* (Yüksek lisans tezi). Necmettin Erbakan Üniversitesi, Türkiye.

Kendal, M., & Stacey, K. (1999). Varieties of teacher privileging for teaching calculus with computer algebra systems. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 6*(4), 233–247.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317–326.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 390–419). Macmillan.

Kieran, C. (2004a). The core of algebra: Reflections on its main activities. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 21–33). Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. (2004b). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139–151.

Kieran, C. (2013). The false dichotomy in mathematics education between conceptual understanding and procedural skills: An example from algebra. In S. J. Hegedus & J. Roschelle (Eds.), *Vital directions for mathematics education research* (pp. 153–171). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6977-3_7

Kieran, C., & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 11*, 205–263. https://doi.org/10.1007/s10758-006-0006-7

Knuth, E., & Elliott, R. (1997). Preservice secondary mathematics teachers' interpretations of mathematical proof. In J. Dossey, J. Swafford, M. Parmantie, & A. Dossey (Eds.), *Proceedings of the 19th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 545–551). PME-NA.

Kösa, T., & Karakuş, F. (2010). Using dynamic geometry software Cabri 3D for teaching analytic geometry. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 2*(2), 1385–1389. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.204

Kükey, E. (2023). Düşünmenin matematiksel hali: Matematiksel düşünme. *Matematik ve Fen Bilimleri Eğitiminde Yeni Yaklaşımlar 2023-II.*

Laborde, C. (2002). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283-317. https://doi.org/10.1023/A:1013309728825

Laborde, C. (2003). Technology used as a tool for mediating knowledge in the teaching of mathematics: The case of Cabri-geometry. In *Plenary speech delivered at the Asian Technology Conference in Mathematics.* https://doi.org/10.1023/A:1013309728825

Lagrange, J.-B., & Richard, P. (2024). Teachers' mathematical work based on examples presented in the classroom: The perspective of the theory of mathematical working spaces. *Frontiers in Education, 9*, 1346091. https://doi.org/10.3389/feduc.2024.1346091

Lesh, R., Kelly, A. E., & Yoon, C. (2008). Multitiered design experiments in mathematics, science, and technology education. In A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education* (pp. 131–148). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315759593

Lovett, J. N., Dick, L. K., Lee, H. S., McCulloch, A. W., Cayton, C., & Hollebrands, K. F. (2024). PREPARING SECONDARY PROSPECTIVE TEACHERS TO TEACH MATHEMATICS WITH TECHNOLOGY. The AMTE Handbook of Mathematics Teacher Education: Reflection on Past, Present and Future–Paving the Way for the Future of Mathematics Teacher Education, Volume 5, 221.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(3), 217–232. https://doi.org/10.2307/749214

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics, 33*(1), 1–19. https://doi.org/10.1023/A:1002970913563

Malone, A. S., Schenke, K., Rucinski, C., & Day, L. (2020). Using multiple representations to improve algebra learning: A meta-analysis. *Journal of Educational Psychology, 112*(8), 1533–1551. https://doi.org/10.1037/edu0000427

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1), 25–53. https://doi.org/10.1023/A:1012776425693

Mariotti, M. A. (2002). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 257–281. https://doi.org/10.1023/A:1013357611987

Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: The Pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM, 45*(7), 959–971. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0533-3

Miller, D., Infante, N., & Weber, K. (2018). How mathematicians assign points to student proofs. *Journal of Mathematical Behavior, 49*, 24–34. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.03.002

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2008). *Öğretmen yeterlikleri.* Devlet Kitapları Müdürlüğü.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). *Ortaokul Matematik Dersi (5–8. Sınıflar) Öğretim Programı.* Ankara: MEB.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2015). *Strateji Geliştirme Başkanlığı 2015–2019 Stratejik Planı.* MEB Yayınları.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve ortaokul 1–8. sınıflar).* Ankara: MEB.

National Assessment of Educational Progress [NAEP]. (2002). *Mathematics framework for the 2003 National Assessment of Educational Progress.* U.S. Department of Education.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Author.

Ndlovu, M., Wessels, D., & De Villiers, M. (2013). Competencies in using Sketchpad in geometry teaching and learning: Experiences of preservice teachers. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 17*(3), 231–243. https://hdl.handle.net/10520/EJC144352

Nguyen, A. T. T., Thanh, H. N., Le Minh, C., Tong, D. H., Uyen, B. P., & Khiem, N. D. (2023). Combining Flipped Classroom and GeoGebra Software in Teaching Mathematics to Develop Math Problem-Solving Abilities for Secondary School Students in Vietnam. *Mathematics Teaching Research Journal*, 15(4), 69-97.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers* (Vol. 17). Springer.

Noss, R., & Hoyles, C. (2003). Exploring mathematics through construction and collaboration. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 67–89. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_4

Nwabueze, K. K. (2006). Technology class format versus traditional class format in undergraduate algebra. *Technology, Pedagogy and Education, 15*(1), 79–93. https://doi.org/10.1080/14759390500435788

Ogbonnaya, U. I., & Mushipe, M. (2020). The efficacy of GeoGebra-assisted instruction on students' drawing and interpretations of linear functions. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research, 19*(9), 1–14. https://doi.org/10.26803/ijlter.19.9.1

Okumuş, S. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel problem çözmede kullandıkları temsiller. *Gaziantep University Journal of Social Sciences, 11*(3).

Olkun, S., Toluk, Z., & Durmuş, S. (2002). Sınıf öğretmenliği ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin geometrik düşünme düzeyleri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 12*, 23–34.

Oral, B., İlhan, M., & Kinay, İ. (2013). 8. sınıf öğrencilerinin geometrik ve cebirsel düşünme düzeyleri arasındaki ilişkinin incelenmesi. *Pamukkale University Journal of Education, 34,* 1–14. https://doi.org/10.9779/PUJE469

Öner, A. T. (2009). *İlköğretim 7. sınıf cebir öğretiminde teknoloji destekli öğretimin öğrencilerin erişi düzeyine, tutumlarına ve kalıcılığa etkisi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Gazi Üniversitesi, Ankara.

Özdemir Erdoğan, E. (2016). Enstrümantal oluşum teorisi. In S. Durmuş (Ed.), *Matematik eğitiminde kuramlar ve yaklaşımlar* (pp. 223–245). Pegem Akademi.

Pandiscio, E. A. (2002). Exploring the link between preservice teachers' conception of proof and the use of dynamic geometry software. *School Science and Mathematics, 102*(5), 216–221. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2002.tb18144.x

Pierce, R., Stacey, K., & Bardini, C. (2010). Linear functions: teaching strategies and students' conceptions associated with y= mx+ c. *Pedagogies: An International Journal*, 5(3), 202-215. https://doi.org/10.1080/1554480X.2010.486151

Pittalis, M., & Drijvers, P. (2023). Embodied instrumentation in a dynamic geometry environment: Eleven-year-old students' dragging schemes. *Educational Studies in Mathematics, 113*(2), 181–205. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10222-3

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instruments contemporains.* Armand Colin.

Rabardel, P. (2002). *People and technology: A cognitive approach to contemporary instruments.* https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01020705

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2007). Abduction–induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(2), 140–155. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.05.001

Ruiz-López, N. (2018). The instrumental genesis process in future primary teachers using Dynamic Geometry Software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(4), 481-500. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1377302

Ruthven, K., & Hennessy, S. (2002). A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics, 49*(1), 47–88. https://doi.org/10.1023/A:1016059617362

Ruthven, K., Deaney, R., & Hennessy, S. (2009). Using graphing software to teach about algebraic forms: A study of technology-supported practice in secondary-school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 279–297.

Sebsibe, A. S., & Abdella, N. M. (2025). The effect of GeoGebra integrated instruction on students' learning of the quadratic function concept. *F1000Research*, 14, 671. https://doi.org/10.12688/f1000research.163113.1

Seloane, M., Ramaila, S., & Ndlovu, M. (2023). Developing undergraduate engineering mathematics students' conceptual and procedural knowledge of complex numbers using GeoGebra. *Pythagoras*, 44(1), a763. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v44i1.763

Sibgatullin, I. R., Korzhuev, A. V., Khairullina, E. R., Sadykova, A. R., Baturina, R. V., & Chauzova, V. (2022). A systematic review on algebraic thinking in education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*(1).

Steffe, L. P., & Ulrich, C. (2014). Constructivist teaching experiment. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 102–109). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_32

Steffe, L. P., Thompson, P. W., & von Glasersfeld, E. (2012). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267–306). Routledge. https://doi.org/10.29333/ejmste/11486

Tabach, M. (2011). A mathematics teacher's practice in a technological environment: A case study analysis using two complementary theories. *Technology, Knowledge and Learning, 16*(3), 247–265. https://doi.org/10.1007/s10758-011-9186-x

Tan, Q., & Yuan, Z. (2024). A professional development course inviting changes in preservice mathematics teachers' integration of technology into teaching: the lens of instrumental orchestration. *Humanities and Social Sciences Communications*, 11(1), 1-15. https://doi.org/10.1057/s41599-024-03408-4

Tapan, M. S. (2006). *Différents types de savoirs mis en œuvre dans la formation initiale d'enseignants de mathématiques à l'intégration de technologies de géométrie dynamique* (Yayımlanmamış doktora tezi). Université Joseph-Fourier – Grenoble I.

Tapan-Broutin, M. S. (2010). *Bilgisayar etkileşimli geometri öğretimi: Cabri Geometri ile dinamik geometri etkinlikleri.* Ezgi Kitabevi.

Tapan-Broutin, M. S. (2015). *Computer-interactive geometry teaching* (2nd ed.). Ezgi Kitabevi Publishing.

Taşlıbeyaz, E. (2010). *Ortaöğretim öğrencilerinin bilgisayar destekli matematik öğretiminde matematik algılarına yönelik durum çalışması: Lise 3. sınıf uygulaması* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Teke, B., & Durmuş, S. (2023). Dünyada ve Türkiye'de matematik öğretim programları: Karşılaştırmalı bir inceleme. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 23*(4), 2187–2212. https://doi.org/10.17240/aibuefd.2023..-1329279

Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: Étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. *Educational Studies in Mathematics, 41,* 239–264. https://doi.org/10.1023/A:1003939314034

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*(3), 281–307. https://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5

Trouche, L. (2005). Instrumental genesis, individual and social aspects. In D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 197–230). Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-3042-1_9

Trouche, L., & Drijvers, P. (2010). Handheld technology for mathematics education: Flashback into the future. *ZDM, 42,* 667–681. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0269-2

Tsamir, P., & Dreyfus, T. (2005). How fragile is consolidated knowledge? Ben's comparisons of infinite sets. *The Journal of Mathematical Behavior, 24*(1), 15–38. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.12.001

Tuluk, G. (2014). Sınıf öğretmeni adaylarının nokta, çizgi, yüzey ve uzay bilgileri ve çoklu temsilleri. *Kastamonu Education Journal, 22*(1), 361–384.

Turgut, M., & Drijvers, P. (2021). Instrumentation schemes for solving systems of linear equations with dynamic geometry software. International Journal for Technology in Mathematics Education, 28(2), 65-80. https://doi.org/10.1564/tme_v28.2.01

Türer, G., & Günhan, B. C. (2022). Türkiye'de matematik eğitiminde çoklu temsiller ile ilgili yapılan çalışmaların incelenmesi. *Fen Matematik Girişimcilik ve Teknoloji Eğitimi Dergisi, 5*(3), 214–236.

Uzuner, Y. (1999). Niteliksel araştırma yaklaşımı. In A. Yıldırım (Ed.), *Sosyal bilimlerde araştırma yöntemleri* (pp. 175–190). T.C. Anadolu Üniversitesi Yayınları No: 1081, Açıköğretim Fakültesi Yayını No: 601.

Van Meter, P., Aleksic, M., Firetto, C. M., & Bulatovich, K. (2020). The role of multiple representations in algebra learning: A systematic review. *Contemporary Educational Psychology, 62,* 101887. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2020.101887

Vérillon, P., & Andreucci, C. (2006). Artefacts and cognitive development: How do psychogenetic theories of intelligence help in understanding the influence of technical environments? In *International handbook of technology education: The state of the art* (Vol. 1, p. 399).

Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artefacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education, 10*(1), 77–101. https://doi.org/10.1007/BF03172796

Villa-Ochoa, J. A., & Suárez-Téllez, L. (2021). Computer algebra systems and dynamic geometry for mathematical thinking. In Handbook of cognitive mathematics (pp. 1-27). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-44982-7_36-1

Vízek, Lukáš, Libuše Samková, and Jon R. Star. "Assessing the quality of conceptual knowledge through dynamic constructions." *Educational Studies in Mathematics* 117, no. 2 (2024): 167-191. https://doi.org/10.1007/s10649-024-10349-x

Weber, K., Maher, C., Powell, A., & Lee, H. S. (2008). Learning opportunities from group discussions: Warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics, 68*, 247–261.

Wei, H., Bos, R., & Drijvers, P. (2023). An embodied approach to abstract functional thinking using digital technology: A systematic literature review. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 30*(2), 75–94. https://doi.org/10.1564/tme_v30.2.2

Weigand, H. G. (2017). What is or what might be the benefit of using computer algebra systems in the learning and teaching of calculus?. *In Innovation and Technology Enhancing Mathematics Education: Perspectives in the Digital Era* (pp. 161-193). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-61488-5_8

Weigand, H. G., Trgalová, J., & Tabach, M. (2024). Mathematics teaching, learning, and assessment in the digital age. *ZDM–Mathematics Education, 56*(4), 525–541. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01612-9

Weigand, H.-G., Hollebrands, K., & Maschietto, M. (2025). Geometry education at secondary level: A systematic literature review (2013–2024). *ZDM – Mathematics Education*, 57(2), 245–269. https://doi.org/10.1007/s11858-025-01703-1

Xu, C. (n.d.). *Improving mathematical skills of mathematics education students through integrated use of graphing software and programming techniques.* https://doi.org/10.58557/(ijeh).v5i1.277

Yerushalmy, M. (2006). Mobile environments for learning mathematics: Designing systems and curricula. *Journal of Educational Computing Research, 34*(3), 255–276. https://doi.org/10.2190/7Q02-52B7-8PBK-4T62

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2005). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (8. baskı). Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (9. baskı). Seçkin Yayıncılık.

Zengin, Y., & Tatar, E. (2014). Using GeoGebra software in teaching applications of derivative. *Kastamonu Education Journal, 22*(3), 1209–1228.

Zhang, Y., Wang, P., Jia, W., Zhang, A., & Chen, G. (2025). Dynamic visualization by GeoGebra for mathematics learning: A meta-analysis of 20 years of research. *Journal of Research on Technology in Education, 57*(2), 437–458. https://doi.org/10.1080/15391523.2023.2250886

Ziatdinov, R., & Valles, J. R., Jr. (2022). Synthesis of Modeling, Visualization, and Programming in GeoGebra as an Effective Approach for Teaching and Learning STEM Topics. Mathematics, 10(3), 398. https://doi.org/10.3390/math10030398

Zulkipli, N. H., & Musa, M. (2022). Education 4.0: An analysis of teachers' attitude towards the use of technology in teaching mathematics. *International Journal of Information and Education Technology, 12*(7), 609–614. https://doi.org/10.18178/ijiet.2022.12.7.1660

EKLER

EK 1: Araştırma ve Yayın Etik Kurul İzni

BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
ARAŞTIRMA VE YAYIN ETİK KURULLARI
(Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırma ve Yayın Etik Kurulu)
TOPLANTI TUTANAĞI

OTURUM TARİHİ	OTURUM SAYISI
27 EKİM 2023	2023-09

KARAR NO 34: Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'nden alınan Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı öğretim üyelerinden Doç. Dr. Menekşe Seden TAPAN BROUTİN'in danışmanlığında Matematik Eğitimi Bilim Dalı doktora programını öğrencisi Naz MARDANİ'nin "Teknolojik Ortamda Cebirsel İfadelerin Farklı Temsillerinin Anlamlandırılması Sürecinde Öğretmen Adaylarının Enstrümantal Oluşumlarının İncelenmesi" konulu tez çalışması kapsamında uygulanacak görüşme sorularının değerlendirilmesine geçildi.

Yapılan görüşmeler sonunda; Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'nden alınan Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı öğretim üyelerinden Doç. Dr. Menekşe Seden TAPAN BROUTİN'in danışmanlığında Matematik Eğitimi Bilim Dalı doktora programını öğrencisi Naz MARDANİ'nin "Teknolojik Ortamda Cebirsel İfadelerin Farklı Temsillerinin Anlamlandırılması Sürecinde Öğretmen Adaylarının Enstrümantal Oluşumlarının İncelenmesi" konulu tez çalışması kapsamında uygulanacak görüşme sorularının **"Mülakat/Görüşme Bilgileri" (Ek:1-2-10) bulunan izin formundaki ad-soyad bilgisini içerdiğinden "Kişisel Verilerin Korunması Kanunu" kapsamında** alınması **nedeniyle çalışmadan çıkarılması koşuluyla"** sorularının fikri, hukuki ve telif hakları bakımından metot ve ölçeğine ilişkin sorumluluğu başvuruculara ait olmak üzere uygun olduğuna oybirliği ile karar verildi.

EK 2: Uygulama Öncesi ve Sonrası Görüşme Formları

Öğrenci Bilgi ve Öz Değerlendirme Formu (ilk Versiyon)

Adı ve Soyadı :

Üniversiteye Giriş Tarihi :

Mezun olduğu lise:

Görüşme Soruları

1- Öğretmenlik bölümünü neden seçtiniz? Cevabınızı gerekçesiyle açıklar mısınız?

2- A) Sizce bir matematik öğretmeninin sahip olması gereken nitelikler nelerdir?
B) Siz bunların hangilerine sahip olduğunu düşünüyorsunuz?

3- Matematikle ilgili gelişmeleri takip ediyor musunuz ediyorsanız bir örnek verir misiniz?

4- Bir kavramın öğretimi ve öğrenci tarafından anlaşılması zor ise hangi yöntem ve teknikere başvurulabilir?

5- Matematik eğitiminde Çoklu temsil kullanımıyla ilgili ne düşünüyorsunuz? Açıklayınız.

Öğrenci Bilgi ve Öz Değerlendirme Formu

Adı ve Soyadı :

Üniversiteye Giriş Tarihi :

dönem:

Mezun olduğu lise:

Görüşme Soruları

1- Öğretmenlik bölümünü neden seçtiniz? Cevabınızı gerekçesiyle açıklar mısınız?

2- Bursa'daki ikamet durumunuzu belirtiniz.

3- Ev ortamında kendinize ait teknolojik aletleriniz var mı? Varsa hangi aletler olduğunu ve kullanma amacınızı açıklarmısınız. Yoksa neden olmadığını ve açıklayın?

4- Bilgisayar kullanma seviyeniz nedir? Ve kaç yaşında bilgisayar kullanmaya başladığınızı açıklan.

5- Matematik eğitimi hayatınızda veya daha önce gördüğünüz matematik derslerinde teknolojik araçlar kullandınız mı? Kullandıysanız hangi araçlar ve hangi ders kapsamında kullandığınızı açıklayın.

6- Önceki soruya cevabınız evet ise, teknolojik aracın kullanımında zorluk veya sıkıntı yaşadınız mı yoksa sevdiniz mı açıklayın.

7- Daha önce Dinamik geometri yazılımı kullandınız mı? Kullandıysanız ne zaman ve hangi ders kapsamında kullandınız? Başka kullanan birisini gördünüz mü? Cevabınız evet ise kimden gördünüz?

8- Matematik eğitiminde Dinamik Geometri Yazılımları kullanılmalı mı? Cevabınız evet ise sizce ne zaman, bir örnek ile açıklayınız.

9- Şu ana kadar gördüğünüz matematik konularından sizde iz bırakan konu hangisidir? Ve neden?

10- Matematik eğitiminde anlatmasını en sevdiğiniz konu nedir? Ve neden?

Uygulama Öncesi Öğretmen Adayı Görüşme Formu (ilk Versiyon)

1- Cebirsel ifadeler konusu dersinize hazırlık aşamasında ne tür kaynaklardan faydalanırsınız?

2- Dersten önce yazılı bir program hazırlar mısınız?

3- Dersin giriş aşamasında öğrencilerin dikkatini çekmek için ne yaparsınız?

4- Dersinizde ne tür materyaller kullanırsınız? Bu materyallerin hedef davranışlara ne tür bir katkısı olduğunu düşünürsünüz?

5- Dersin gelişim kısmında öğrencileri aktif tutmak için neler yapıyorsunuz?

6- Cebirsel ifadeler konusunun çoklu temsil yoluyla ifade edilmesi konusunda ne gibi hazırlıklar yaptınız?

7- Cebirsel ifadeler konusunu çoklu temsil yoluyla anlatmanın öğrencide ne gibi katkısı olacağını düşünüyorsunuz?

Uygulama Öncesi Öğretmen Adayı Görüşme Formu

1- Cebir ve Cebirsel ifadeler konusu hakkında ne düşünüyorsunuz? Sever miydiniz?

2- Cevabınız evet ise cebirsel ifadeleri sevme nedeniniz ne idi?

3- Cevabınız hayır ise sizi zorlayan, anlamakta güçlük çektiğiniz, başaramayacağınızı düşünmenize sebep olan noktalar, olaylar, faktörler nelerdir? Detaylı bir şekilde anlatınız. Örnekler veriniz.

4- Matematik öğretmeni adayı olarak bilmediğiniz veya geçmiş cebir öğreniminizde öğrenmediğinize üzüldüğünüz bir konu var mı? Örnek ile açıklayınız.

5- Siz bir öğretmen olarak cebirsel ifadeler konusu dersinize hazırlık aşamasında ne tür kaynaklardan faydalanırsınız?

6- Matematik eğitiminde kullanılan çoklu temsillerin ne olduğunu biliyor musunuz? Açıklayınız

7- Öğretmen olunca cebirsel ifadeler konu anlatımında ne tür materyaller kullanırsınız? Bu materyallerin hedef davranışlara ne tür bir katkısı olduğunu düşünürsünüz?

8- Cebirsel ifadeler konusunu çoklu temsil yoluyla anlatımının size ne gibi katkısı olacağını düşünüyorsunuz?

Uygulama Sonrası Öğretmen Adayı Görüşme Form

1- Cebir ve Cebirsel ifadeler konusu hakkında ne düşünüyorsunuz? Sever miydiniz?

2- Cevabınız evet veya hayır ise cebirsel ifadeleri sevme ya da sevmeme nedeniniz ne idi?

3- Önceden gördüğünüz cebir dersi öğrenimi ile bu sene görmüş olduğunuz dersin arasında bir fark var mıdır? Cevabınız evet ise lütfen gördüğünüz farkları tanımlayarak detaylı bir şekilde anlatınız.

4- Geçmiş yıllarda görmüş olduğunuz cebirsel ifadeler konusu ile bu sene gördüğünüz ders kapsamındaki cebirsel ifadeler konusunun farklılık oluşturmasında bilgisayar kullanımının rolü var mıdır?

5- Daha önce görmüş olduğunuz cebir konusu ile bu sene gördüğünüz cebirsel ifadeler ve grafiklerinin çizimi konusunun farklılık oluşturmasında bilgisayar kullanımının rolü var mıdır?

6- Sizce Bilgisayar Destekli Matematik dersi kapsamında bilgisayar kullanımının cebirsel ifadeler ve grafiklerinin çizimi öğrenimine ve dersin işlenişine olumlu yönde katkısı var mıdır?

7- Bilgisayar Destekli Matematik dersi kapsamında almış olduğunuz öğretim süreci cebirsel ifadeler ve grafik çizimine olan bakış açınızı ve tutumunuzu değiştirdi mi? Cevabınız evet ise bu değişiklik olumlu yoksa olumsuz yönde midir?

8- Cebire yönelik tutum ve bakış açınızı değiştiren faktörleri detaylı bir şekilde anlatınız.

9- Ders esnasında cebirsel ifadeler ve grafik çizimine bakışınızı etkileyen faktörlere ders sürecinden somut bir örnek sununuz.

Uygulama Sonrası Öğretmen Adayı Görüşme Formu (İlk Versiyon)

1- Ders esnasında sizi zorlayan, anlamakta güçlük çektiğiniz, başaramayacağınızı düşünmenize sebep olan noktalar, olaylar, faktörler nelerdir? Detaylı bir şekilde anlatınız. Örnekler veriniz.

2- Dersler sırasında dikkatinizi çeken veya sizi şaşırtan konuları, olayları veya etkenleri açıklayın. Bu konuları ayrıntılı bir şekilde anlatarak örnekler verin.

3- Dersler sırasında sıkıcı bulduğunuz veya ilginç bulmadığınız konuları, olayları veya etkenleri açıklayın. Bu unsurları detaylı bir şekilde anlatarak örnekler verin.

4- Ders sırasında keyif aldığınız, eğlendiğiniz veya ilginç bulduğunuz konuları, olayları veya etkenleri açıklayın. Bu unsurları detaylı bir şekilde anlatarak örnekler verin.

5- Dersler sırasında matematik öğretmeni adayı olarak bilmediğiniz veya geçmiş cebir öğreniminizde öğrenmediğinize üzüldünüz mü? Bu konuda örnekler veriniz.

6- Cebirsel ifadeler konusunu çoklu temsil yoluyla anlatmanın öğrencide ne gibi katkısı olacağını düşünüyorsunuz?

7- Siz bir öğretmen olarak cebirsel ifadeler ve grafik çizimi konusunu gelecekte öğretirken, dersi geleneksel öğrenme yöntemleriyle mi bu ders kapsamına uyumlu bir şekilde mi öğretmeyi tercih edersiniz? Bu tercihiniz neden kaynaklanır?

8- Gelecek eğitim döneminde bu dersin etkili bir şekilde geliştirilmesi için öğretim sürecinde hangi değişiklikler yapılabilir? Lütfen önerilerinizi paylaşır mısınız?

9- Dersinizde ne tür materyaller kullanırsınız? Bu materyallerin hedef davranışlara ne tür bir katkısı olduğunu düşünürsünüz?

10- Cebirsel ifadeler konusunu çoklu temsil yoluyla anlatmanın öğrencide ne gibi katkısı olacağını düşünüyorsunuz?

1- Bilgisayar destekli matematik öğretim ve öğrenimi mesleki gelişim sürecinize ne gibi değişiklikler katacağını düşünüyorsunuz?

2- Bu süreçte zorlandığınız sıkıntılar oldu mu? Varsa ne gibi sıkıntılar oldu? Sebepleriyle açıklar mısınız?

3- Sizce bilgisayar destekli cebir öğretiminin eski geleneksel cebir öğretimine göre farklılıkları nelerdir? Açıklar mısınız?

4- Bilgisayar destekli cebir öğretim ve öğreniminde zorluk yaşadınız mı? Varsa ne tür zorluklardır bunlar?

EK 3: Örnek Ses Kaydının Transkripti

Ö4: Analitik düzlemde parabolün tanımı nedir ve hangi formülle ifade edilir diye sormuş. $f(x)=ax^2+bx+c$ şeklinde yazılan 2 dereceden grafiklerin denklemine parabol denir diye yazdım ben.

Ö3: ben de 2 dereceden polinomların grafiksel halidir ax^2+bx artı c ile gösterilir dedim.

Ö4: $f(x)=x^2$ ve $f(x)= 3x^2$ kare parabollerinin grafiğini istemiş 2. soruda x2'yi biliyorum zaten hemen çizdim $3x^2$ kolları y eksenine daha yakın olan şeklinde iç içe ikisini çizdim.

Ö3: Ben de x2 denklemi için x'e 1 verdim y = 1 oldu noktayı belirledim ve orijinden geçen dedim o şekilde çizdim. $f(x) = 3x^2$ yine x'e 1 verdim. y=3 oldu o şekilde nokta belirleyip çizdim. 3. soruda $f(x) = 2x^2+4$ denkleminin grafiğini çizin demiş yine nokta belirleyip çizdim aynı şekilde soru 4'te $f(x)=4x^2 - 3$ olan parabolün grafiğini çiziniz demiş burada x'e 0 verdim y=-3 oldu sonra y'ye 0 verdim $x=\sqrt{3}/2$ ve $x =- \sqrt{3}/2$ oldu. Grafiği çizdim. $2x^2+4$ parabolünü genel $f(x) = ax^2+c$ ile yazdığım için $4x^2 - 3$ grafiğini kolayca çizdim ve sayısını 4 yapınca parabolün kollarının y eksenine yaklaşıp C'yi -3 yapınca y eksenini kestiği noktanın değiştiğini gözlemledim.

Ö4: Ben $f(x) = 2x^2+4$ parabolün grafiğini çizmek için $2x^2=-4$ Bundan da x kare eşittir -2 olmaz x kare eşittir 2 olarak elde ettim noktaları buldum ve grafiği çizdim. $4x^2 - 3$ Parabolü için de x'e 0 verdim y= 0 oldu Y'ye 0 verdim x =5/3 oldu. Ama önce ben 5/3'ü yanlış yapmıştım köklü bir şey bulmuştum sonra yanlış yaptığımı fark ettim ve 5/3'ü elde ettim sonra grafiği çizdim.

Ö4: $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$ parabolünün grafiğinin çizmesi için x'e 0 verdim y eksi 5 oldu Y'ye 0 verdim x'leri buldum. Sonra diskriminant hesapladım -36 oluyor

Ö3: nasıl -36? Hayır -31

Ö4: Evet evet -31. yani, delta küçüktür 0'dan, O yüzden reel kök yoktur yani x eksenini kesmez bu grafik. Tepe noktasını da buldum -b/2a formülü ile 3/4 olarak elde ettim grafiği bu şekilde çizdim. Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar nelerdir diye sormuş buna ben şok şekilde yazdım a'yı -3'den -2'ye artırınca Kolları genişlediği ve b'yi değiştirdikçe simetri ekseninin değiştiğini gördüm şeklindedir.

Ö3: Ben $f(x)=-3x^2 + 5x$ için Değerler verip ve çözdüm. Bu soruda bu şekilde diyebilirim a'yı negatif yapınca kolları aşağı doğru olduğu C'yi 0 alınca y eksenini (0,0) noktasında kestiğini gördüm. $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$ çözüp ve grafiğini çizmek için x = 0 iken y eşittir -5, y = 0 iken reel kök yok yani Delta eşittir - 31. Tepe noktasını da -b/2a'dan eşittir 3/4 olarak buldum grafiği bu şekilde çizdim. a katsayısını -3'ten -2'yi artırınca kolları genişlediği ve b katsayısını

değiştirdikçe simetri ekseninin değiştiğini gözlemledim. Kâğıt-kalem ortamındaki sorular bitti şu an Cabri-Geometri ortamına geçelim.

Ö4: önce eksenleri göster diyorum. Hesap makinesinden

Ö3: Bence sayı atacağız Hatta 3 tane sayı Ata. Bence önce x kareden başlayalım.

Ö4: sayıları eksenlere taşıyalım

Ö3: Hayır ezbere yapıyorsun şu an Bir dakika dur.

Ö4: Dur baştan yapacağım

Ö3: Hayır niye baştan yapıyorsun 1 yap katsayı. Bak Buradan x ekseninden herhangi bir x noktası seçeceğiz. Ben buldum galiba şimdi FX = $ax^2+bx + c$ için 3 tane sayı atacağız a b c. Bir tane de x ekseni üzerinde nokta belirleyeceğiz.

Ö4: şimdi bu katsayıları aktaralım eksenlere

Ö3: Hayır İşte ben bu sayıları Hesap makinesinde işleyeceğiz dur bak. Bak şimdi Hesap makinesinde yazıyorum bu başka sayı çarpı noktanın karesi yani sayı olarak karesi Artı bu sayı çarpı yine x ekseni üzerindeki belirlediğimiz nokta artı sabit sayı. Niye ben a sayısını hesap makinesinde işleyince a, sonra x sayısını b olarak yazıyor, b katsayımı da c olarak yazıyor, c katsayımı da d olarak yazıyor. Neden acaba? (Cabri-Geometri yazılımının sınırlılıklarından dolayı)

Ö4: Bence hepsini baştan yap bir kere daha

Ö3: Hayır neden öyle yapayım

Ö4: Bak bence Önce $f(x) =ax^2$ yi yapalım. Bir tane bir olarak katsayı atayalım Bir tane de x ekseni üzerinde bir nokta belirleyelim. x ekseni üzerinde 4 sayısını belirledim yani x=2 noktasını belirledim.

Ö3: Şimdi Hesap makinesinde ne yapacağız?

Ö4: Şimdi sayımı bir belirlemiştim Bu sayı çarpı x ekseni üzerindeki sayının karesi. Zaten Sonuç belli, 4 olacak. Şimdi sayıları eksenlere taşıyorum

Ö3: Hayır sayıları niye taşıyacaksın ki. Sadece elde ettiğimiz sonucu taşıyacaksın sayfaya

Ö4: Ben de hepsini taşıyacağız demedim ki Sadece 4'ü yani sonucu ve 2 belirlediğimiz nokta. Şimdi elde ettiğim 4 sayısını sürükledim sayfaya şimdi aktarma aracıyla bu sayıyı y eksenini aktar diyeceğim yani 4'ü y eksenini aktardım.

Ö3: Şimdi dik doğru araçlarıyla bu noktalardan geçen ve X ve Y eksenlerine dik olan doğruları çizeceğiz kesişme noktasını belirleyeceğiz. Şimdi bunun geometrik yerini alacağız. Yani kesişim noktasından x noktasına göre. Geometrik yer dediğimde çizmiyor neden çizmiyor

Ö4: Neden olmadı sanki biz doğrusal bir grafik mi yaptık?

Ö3: Hayır doğrusal yapmıyoruz.

Ö4: Neden geometrik yerini alamıyoruz acaba. Acaba 0,0'dan geçen bir nokta daha mı belirlesek. Araştırmacı hocaya soralım ya burada bir sıkıntı var. Hocam biz neden geometrik yer alamıyoruz her şeyi doğru yaptık

Araştırmacı: Başlangıç sayınızı tam sayı olarak aldıysanız belki olabilir

Ö3: Evet ya tam da öyle biz niye Unuttuk ya bunu tam sayı olarak almışız Evet 2 aldık ya x ekseni üzerinde 2 Noktasını belirledik başlangıç sayısı olarak

Ö4: Herhangi bir x noktası belirli Egemen rastgele. Şimdi bir tane sayı tanımla katsayı olarak mesela 1. Şimdi belirlediğin noktanın koordinatlarını göstermen lazım. Hesap makinesine gelelim bu sayı çarpı x ekseni üzerinde belirlediğimiz sayının karesi eşittir Tamam sonuç çıktı. Şimdi bunu eksene taşıyacaksın. Ölçümü aktarımda y eksenine taşıyacaksın. Dik doğrular aracıyla dik doğruları çizeceksin noktalardan geçen kesişme noktasını belirleyeceksin. Şimdi kesişme noktasının x yani başlangıç noktasına göre geometrik yer aracını kullanarak geometrik yerine belirleyeceksin oldu mu Al bak işte oldu.

Ö3: bizim hatamız ise reel sayı olarak almıyorduk Çünkü tam sayı alıyorduk o şekilde de nokta şeklinde çıkıyordu grafik.

Ö4: neden acaba çizmiyordu tam sayı olarak aldığımızda? (yazılımı sorguluyor)

Ö3: Niye çizmiyor Çünkü aradaki reel sayıların ne olduğunu bilmiyor. (Cabri-Geometri yazılımı kısıtlama nedeniyle)

Ö4: Şimdi gel $f(x) = 3x^2$ yapalım. Katsayıya 3 yap. Evet, grafik değişti denklemi de değişti x kare 3x kare olduğuna göre kolları daraldı y eksenine daha yaklaştı. Şimdi yaptığımız grafik bu şekilde sabit dursun bunun üstüne farklı sayılar ekleyelim.

Ö4: şimdi $4x^2 - 3$'ü yapalım. X ekseni üzerinde herhangi bir sayı Yani bir nokta belirle koordinatını yaz koordinat aracıyla. Sonra sayılarımızı atayalım 4 ve -3'ü ata. Hesap makinesini aç.

Ö3: Evet şimdi yazıyorum 4 x parantezin içinde x sayısının karesi artı sabit sayımız yani -3. elde ettiğim sonucu şimdi sürükleyip sayfayım bir kenarına koyuyorum ve y eksenine aktarıyorum.

Ö4: Evet doğru. Şimdi x ve y noktalarından y ve x eksenlerine dik olan doğruları çiziyoruz. Kesişim noktasını elde ettim koordinatını da yaz.

Ö3: Evet aynen öyle yaptım

Ö4: şimdi kesişim noktası yani Z noktasının x eksenine göre geometrik yerini elde edeceğiz.

Ö3: hayır olur mu? x eksenine göre değil ilk noktasına göre yani en başta belirlediğimiz x eksenindeki noktaya göre Hani reel sayılardan seçmiştik.

Ö4: A öyle mi. Tamamdır o zaman Anladım. Şimdi $2x^2 + 4$ Denkleminin grafiğini çizmemiz lazım. Şimdi ben diyorum ki baştan yapmayalım buradaki sayıları değiştirelim nasıl olur.

Ö3: Aynen öyle ben de öyle düşündüm.

Ö4: şimdi atadığımız sayılar vardı ya 4 ve -3 4'ü 2 yapacağız -3'ü de 4 yapacağız bak grafik kendiliğinden değişti denklemi de değişti. Şimdi $f(x) = -3x^2 + 5x$ Grafiğini çizelim bunu nasıl yapacağız.

Ö3: şimdi $f(x)= ax^2 + bx + c$ şeklinde olan fonksiyonlara Direkt geçmek istiyorum. Neden biliyor musun A B C sayılarını atacağım ama C sayısına sıfır vereceğim o zaman $-3x^2 + 5x$ grafiğini çizerim sonra diğer sorulara geldiğimde C'ye değer veririm mesela $-2x^2 + 3x - 5$ grafiğini çizmek için C sayısını sıfırdan -5'e indireceğim mesela. Öyle işte bir sürü denklem kurmama gerek kalmıyor.

Ö4: çok mantıklı. O zaman baştan başlayalım koordinatları göster yine reel sayı olarak x ekseninde bir sayı belirle ve koordinatını yaz.

Ö3: aslında biliyor musun Ben en başta onu yapmak istemiştim mesela x kareyi yapmak yapmamız gerekiyordu ya orada yine 3 tane sayı atamak istemiştim x karenin katsayısına yani baş katsayı 1 yapardım. Diğer b ve c katsayılarına sıfır atardım sonra ilerledikçe b ve c'yi değiştirebilirdim.

Ö4: Evet ama başta ne yapacağımızı tam bilmiyorduk ya o yüzden adım adım yapmaya karar verdik

Ö3: şimdi o zaman sayı atıyorum -3 + 5 ve 0. Hesap makinesine geliyorum o zaman bu sayı çarpı x'in karesi +5. Doğru mu bu? Şimdi sonucu etsene taşıyacağım. Şimdi geometrik yerine bakalım doğru mu?

Ö4: Evet doğru. Kontrol de edelim noktayı hareket ettir Evet doğru. Evet, evet kontrol ettik noktayı sıfıra taşıdığımızda y değeri de 0 oluyor 0'a 0 oldu Yani doğru o zaman şimdi a b c d 0 olmayan ax2+bx+c şeklindeki fonksiyonları geçelim. Sadece atadığımız sayıları değiştirecektir değil mi?

Ö3: Evet evet

Ö4: şimdi bu soruları çözdükten sonra nasıl bir sonuç elde ettiniz diye sormuş. Ben yazdım ki buraya kısaca x ekseni üzerinde tanım sayımız reel sayılar olmak üzere tanımladığımızdan sonra denklem için ABC katsayılarını sayı olarak atadık. Bunları da Hesap

makinesinde işleme sokup elde ettiğimiz sonucu ye eksenini aktardık kesiştirdiğimiz dik doğruları kesişim noktasını aldık ve kesişen noktanın x noktasına göre geometrik yerini aldık.

Ö3: soru 2 de uygulamanın sonunda elde ettiğiniz sonuç nedir sorusuna şöyle yazdım: ilk başta x'i sadece tam sayı olarak atamıştık böyle deneyince x2 grafiğini çizemedik çünkü yazılım iki tamsayı arasındaki reel sayıları grafikte tanımlayamadı. Noktayı x ekseninden reel sayı olarak atadığımızda grafiği sorunsuz bir şekilde çizdik. İkinci soruda yani $f(x) = 2x^2+4$ denkleminin grafiğini çizerken, x^2 ve sabit terimin katsayılarını el ile atamak yerine "sayı" aracı ile atayarak tüm ax2+c parabollerini gözlemledim.

Ö4: bende şöyle yazdım: x'i tanım kümesine uygun tanımladıktan sonra 2'yi baş katsayı olarak belirliyoruz. Çarptığımız sayıya göre parabolün kolları genişleyip daralıyor.

Ö3: $f(x) = -3x^2 + 5x$ parabolün grafiğini çizdikten sonra elde ettiğim sonuca şöyle yazdım: a'yı negatif yapınca kolların aşağıya doğru olduğunu ve c'yi sıfır olarak alınca grafik eksenleri (0,0) noktasında kestiğini gördüm. Sonrasındaki sorusa b katsayısını değiştirince grafiğin simetri ekseninin değiştiğini gördüm.

Ö4: aynen sonuçları bende elde ettim.

Ö3: genel olarak Cabri-Geometri de grafikleri çizdikten sonra şöyle bir sonuca vardım: her bir parabol için ayrı ayrı denklem küremek yerine tüm katsayıları tek bir denkleme yazmanın daha kolay ve doğru olduğunu anladım çünkü tek bir grafikten tüm parabollere ulaşabiliyorum. Böylelikle kolların durumunu, simetri eksenini ve y ekseninin kesim noktalarını değişimine bakabiliyorum.

Ö4: bende x ekseni üzerinde tanım kümesini reel sayı olarak tanımlıyoruz. Sonra denklem için uygun a, b, c katsayılarını tanımlıyoruz. Bunları değişken ile hesap makinesi aracıyla işleme sokup elde ettiğimiz sonucu x noktasın görüntüsü olarak y eksenine aktarıyoruz. Dik doğruları çizip kesişim noktasının koordinatını buluyoruz. Denklemini denklem aracı ile yazıyoruz. Sonra sayları değiştirdiğimizde denklem ver grafiğin değiştiğini gözlemliyoruz.

EK 4: Çalışma Yaprakları

Birinci Çalışma Yaprağı: Doğrusal Fonksiyonlar

Analitik Düzlemde Bir Noktanın Hareket Edişiyle oluşturduğu yolun Geometrik Görüntüsünün Koordinatları

SORU 1: Koordinat sistemi nedir ve özellikleri nelerdir?

SORU 2: Analitik düzlemde doğrunun tanımı nedir ve özellikleri nelerdir?

SORU 3: x=4 ve $f(x)= -2$ doğrularının grafiklerini koordinat sisteminde gösteriniz.

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.

Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……..şeklindedir.

SORU 4: Koordinat sisteminde denklemi $f(x)$=3x olan ve orijin den geçen doğrunun grafiğini çiziniz.

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.

Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……..şeklindedir.

SORU 5: Koordinat sisteminde denklemi $f(x)$=x-1 olan ve orijin den geçen doğrunun grafiğini çiziniz.

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.

Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……..şeklindedir.

SORU 6: koordinat sisteminde $f(x)=2x-2$ doğrusunun grafiğini çiziniz.

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.

Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……..şeklindedir.

SORU 7: Koordinat sisteminde denklemi $f(x)= -4x+2$ olan ve orijin den geçen doğrunun grafiğini çiziniz.

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.

Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……..şeklindedir.

Şimdi ise aşağıdaki soruları Cabri yardımıyla cevaplandıralım.

SORU 8: Denklemi $f(x)$= x+b olan doğrunun grafiğini çiziniz.

Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……..şeklindedir.

SORU 9: Denklemi $f(x)$= ax olan doğrunun grafiğini çiziniz.

Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar…….şeklindedir.

SORU 10: Denklemi $f(x)$= ax+b olan doğrunun grafiğini çiziniz.

Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar…….. şeklindedir.

UYGULAMA 1)

1) Cabri programını çalıştırınız araç çubuğundan Eksenleri Göster seçeneğini seçiniz.

2) Araç çubuğundaki nokta aracı düğmesini açarak Nesne Üzerinde Nokta aracını seçiniz. X ekseni üzerinde herhangi bir yerde tıklayıp noktayı oluşturunuz ve N olarak isimlendiriniz.

3) Araç çubuğunda uzunluk aracı menüsünden Denklem ya da Koordinatlar ifadesini seçiniz ve N noktasına tıklayarak noktanın koordinatını belirleyiniz.

4) Araç çubuğundan Sayı aracını kullanarak her hangi bir boş bölgede istenilen sayıyı giriniz

5) Araç çubuğundan Hesap Makinesi ifadesini seçiniz ve verilen denklemi belirlenen sayı ve N noktasına göre giriniz. Hesap makinesine verildiği komuta göre bir sonuç elde edilecektir. Sonucu her hangi bir boş tere taşıyınız.

6) Araç çubuğundan Ölçüm Aktarım aracı yardımıyla elde edilen sonuç sayısını y eksenine aktarınız. (Bunun için önce sonuç sayısına sonra y eksenine tıklamak yeterli olacaktır). Y ekseni üzerinde oluşan yeni nokta ekrana gelecektir. Bu noktayı M olarak isimlendiriniz.

7) araç çubuğundan Dik Doğru aracını kullanarak N noktasından geçen x eksenine dik olan ve M noktasından geçen y eksenine dik olan doğruları oluşturunuz. Oluşan doğruları d1 ve d2 olarak isimlendiriniz.

8) d1 ve d2 doğrularının kesişim noktasını araç çubuğunda bulunan Kesişim Noktası aracı yardımıyla belirleyiniz. Ve Z olarak isimlendiriniz.

8) x'in hareketiyle ortaya çıkan geometrik yolun grafiğini çizmek için araç çubuğundan Geometrik Yer aracını kullanarak önce z sonra x noktalarına tıklayınız.

9) Elde edilen grafiğin denklemini görmek için araç çubuğundan denklem ya da koordinatlar aracını kullanarak gösteriniz. (bunun için aracı seçtikten sonra elde edilen grafiğe tıklamak yeterli olacaktır)

İkinci Çalışma Yaprağı: İkinci Dereceden Parabol denklemler

İkinci Çalışma Yaprağı:

Analitik Düzlemde Bir Noktanın Hareket Edişiyle oluşturduğu yolun Geometrik Görüntüsünün Koordinatları- 2

SORU 1: Analitik düzlemde parabolün tanımı nedir ve hangi formülle ifade edilir?

SORU 2: $f(x)= x^2$ ve $f(x)= 3x^2$ parabollerinin grafiğini koordinat sisteminde çiziniz.
Yazalım:

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.

Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……
……
…….. şeklindedir.

SORU 3: Koordinat sisteminde denklemi $f(x)= 2x^2 + 4$ olan parabolün grafiğini çiziniz.
Yazalım:

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.

Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……
……
…….. Şeklindedir.

SORU 4: koordinat sisteminde denklemi $f(x)= 4x^2 - 3$ olan parabolün grafiğini çiziniz.
Yazalım:

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.

Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……
……
…….. Şeklindedir.

SORU 5: Koordinat sisteminde denklemi $f(x)= -3x^2+ 5x$ olan parabolün grafiğini çiziniz. Yazalım:

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.

Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……
……
…….. Şeklindedir.

SORU 6: Koordinat sisteminde denklemi $f(x)= -2x^2+ 3x- 5$ olan parabolün grafiğini çiziniz. Yazalım:

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.

Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……
……
…….. Şeklindedir.

SORU 7: Denklemleri $f(x)= ax^2$, $f(x)= ax^2 + bx$, $f(x)= ax^2+ bx+ c$ olan parabollerin grafiğini Cabri yardımıyla çiziniz.
Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……
……
…….. şeklindedir.

Üçüncü Çalışma Yaprağı: Üçüncü Dereceden Polinomlar

Üçüncü Çalışma Kâğıdı: Üçüncü Dereceden Polinmlar
Analitik Düzlemde Bir Noktanın Hareket Edişiyle oluşturduğu yolun Geometrik Görüntüsünün Koordinatları

SORU 1: Analitik düzlemde polinom tanımı nedir?

SORU 2: denklemi $f(x)= ax^3+ bx^2+ cx+ d$ olan polinomda a, b, c, d değişkenleri size neyi ifade ediyor? Açıklayınız

SORU 3: $f(x)= x^3$ ve $f(x)= 2x^3$ polinomların grafiğini koordinat sisteminde çiziniz.
Yazalım:

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.

Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……
……
…….. şeklindedir.

SORU 4: Koordinat sisteminde denklemi $f(x)= 2x^3 + 4$ olan polinomun grafiğini çiziniz.
Yazalım:

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.

Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……
……
…….. şeklindedir.

SORU 5: koordinat sisteminde denklemi $f(x)= 2x^3+ 4x$ olan polinomun grafiğini çiziniz.
Yazalım:

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.

Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……
……
…….. Şeklindedir.

SORU 6: Koordinat sisteminde denklemi $f(x)= x^3+ 4x^2$ olan polinomun grafiğini çiziniz.

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.

Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……
……
…….. Şeklindedir.

SORU 7: Koordinat sisteminde denklemi $f(x)= 2x^3+ x^2+3x- 1$ olan polinomun grafiğini çiziniz. Yazalım:

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.
Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……
……
…….. Şeklindedir.

SORU 8: Denklemi $f(x)= ax^3+ bx^2+ cx+ d$ olan polinomun grafiğini Cabri yardımıyla çiziniz.
Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……
……
…….. şeklindedir.

Dördüncü Çalışma Yaprağı: Ters Fonksiyonlar

Dördüncü Çalışma Yaprağı: Ters Fonksiyonlar
Analitik Düzlemde Bir Noktanın Hareket Edişiyle oluşturduğu yolun Geometrik Görüntüsünün Koordinatları

SORU 1: Ters fonksiyon nedir?

SORU 2: Bir fonksiyonun ters fonksiyonu tanımlanabilmesi için hangi şartlar gereklidir? Açıklayınız

SORU 3: Fonksiyonun tersi nasıl alınır?

SORU 4: Koordinat sisteminde verilen $f(x)= 2x + 3$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz ve elde ettiğiniz ters fonksiyonun grafiğini çiziniz. Ayrıca, bulduğunuz ters fonksiyonunun matematiksel ifadesini yazınız.

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.
Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……
……
……şeklindedir.

SORU 5: Koordinat sisteminde verilen $f(x)= x^2 +2x +3$, $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ parabolüne ait ters fonksiyonunu bulunuz ve elde ettiğiniz ters fonksiyonun grafiğini çiziniz. Ayrıca, bulduğunuz ters fonksiyonunun matematiksel ifadesini yazınız.

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.
Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……
……
……şeklindedir.

SORU 6: Koordinat sisteminde denklemi $f(x)= x^3$, $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ olan polinomun tersini bulunuz ve elde ettiğiniz ters fonksiyonun grafiğini çiziniz. Ayrıca, bulduğunuz ters fonksiyonunun matematiksel ifadesini yazınız.

Şimdi ise aynı örnekleri Cabri yardımıyla cevaplandıralım.
Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……
……
……şeklindedir.

SORU 8: Denklemi $f(x)= ax^3 + bx^2 + cx + d$ olan polinomun ters fonksiyonunun grafiğini Cabri yardımıyla çiziniz.
Uygulama sonunda elde ettiğim sonuçlar……

ÖZ GEÇMİŞ

ÖZ GEÇMİŞ			
Adı-Soyadı	Naz MARDANİ		
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce Farsça		
Eğitim Durumu	**Başlama - Bitirme**		**Kurum Adı**
Lise	1998	2002	Alzehra Kız Lisesi/ İRAN
Lisans	2002	2008	İran Azad Üniversitesi Matematik Öğretmenliği/ İRAN
Yüksek Lisans	2013	2016	Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, bilgisayar bilimleri
Doktora	2020	2025	Bursa Uludağ Üniversitesi Matematik Eğitimi Doktora Programı
Çalıştığı Kurum	**Başlama - Ayrılma**		**Çalışılan Kurumun Adı**
Üye Olduğu Bilimsel ve Meslekî Kuruluşlar			
Katıldığı Proje ve Toplantılar	1) Mardani, N., & Tapan Broutin, M. S. (2025). Teknolojik ortamda doğrusal denklemlerin farklı temsillerinin anlamlandırılması sürecinde öğretmen adaylarının enstrümantal oluşumlarının incelenmesi. In 13th International Zeugma Congress on Scientific Research: Proceedings book (pp. 735–741). Gaziantep, Türkiye. http://www.zeugmakongresi.org 2) Golghasemi Sorkhabi, F., & Nuriyev, U. G. (2021, October 27–29). Mathematical modeling of the planning of measures to improve road safety (pp. 193–196). In Proceedings of the International Conference on Problems of Logistics, Management and Operation in the East-West Transport Corridor (PLMO), Baku, Azerbaijan. http://conf.cyber.az 3) Mardani, N., & Nuriyev, U. G. (2013, October 27–30). Yol-bakım birimlerinde yol-bakım araçları ile yol güvenliğin arttırmak için tedbirlerin planlanması (pp. 197–198). In Proceedings of the 8th International Statistics Congress, Kemer, Antalya, Turkey.		

Yayınlar:	1) Mardani, N., & Tapan Broutın, M. S. (2024). Investigating the Differentiated Experiences of an Academician in the Transition to Distance Education Through a Documentational Framework. Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24(3), 1580-1598. https://doi.org/10.17240/aibuefd.2024..-1442986 2) Gürmen, S., Mardani, N., & Tapan Broutin, M. S. (2024). Analysing 8th and 9th Grade Mathematics Textbooks in the Context of Multiple Representation. SSD Journal, 9(44), 35–55. 0 3) Golghasemi Sorkhabi, F., Tapan Broutin, M. S., & Basturk Sahin, B. N. (2022). Examining the change in the resource system of a faculty member who switched to distance education due to the Covid pandemic. Journal of Didactic, 1(2), 72–81. Institut National de Recherche en Education (INRE). 4) Şahin, H. G., Mardani, A., & Mardani, N. (2024). Performance requirements and optimum mix proportion of high-volume fly ash 3D printable concrete. https://doi.org/10.3390/buildings14072069 5) Mardani, A., Şahin, H. G., Kaya, Y., Mardani, N., Assaad, J. J., & El-Hassan, H. (2025). Enhancing strength and durability of recycled fine aggregate mixtures using steel fibers, silica fume, and latex polymers. Developments in the Built Environment, 21, 100599. https://doi.org/10.1016/j.dibe.2024.100599 6) İsafça-Kaya, T., Kaya, Y., Mardani, N., Mardani, A., & Doğangün, A. (2025). Improving Lime-Based Restoration Mortars: Effect of Type and Utilization Rate of Binder and Aggregate. Materials, 18(5), 961. https://doi.org/10.3390/ma18050961 7) Kaya, Y., Şahin, H. G., Mardani, N., & Mardani, A. (2024). Influence of Grinding Aids on the Grinding Performance and Rheological Properties of Cementitious Systems. Materials, 17(21), 5328. https://doi.org/10.3390/ma17215328 8) Kaya, Y., Kobya, V., Mardani, A., Mardani, N., & Beytekin, H. E. (2024). Effect of Grinding Conditions on Clinker Grinding Efficiency: Ball Size, Mill Rotation Speed, and Feed Rate. Buildings, 14(8), 2356. https://doi.org/10.3390/buildings14082356 9) Mardani, A., Hatungimana, D., Mardani, N., Assaad, J., & El-Hassan, H. (2025). Feasibility of steel fiber-reinforced self-compacting concrete containing recycled aggregates–compliance with EFNARC guidelines. International Journal of Sustainable Engineering, 18(1), 2538858. https://doi.org/10.1080/19397038.2025.2538858 10) Kaya, Y., Kobya, V., Tabansiz-Goc, G., Mardani, N., Cavdur, F., & Mardani, A. (2025). Investigation of the Impact of Clinker Grinding Conditions on Energy Consumption and Ball Fineness Parameters Using Statistical and Machine Learning Approaches in a Bond Ball Mill. Materials, 18(13), 3110. https://doi.org/10.3390/ma18133110

	11) Unverdi, M., Kazemi, R., Kaya, Y., Mardani, N., Mardani, A., & Mirjalili, S. (2025). Predicting compressive and splitting tensile strength of high volume fly ash roller compacted concrete using ANN and ANN-biogeography based optimization models. Scientific Reports, 15(1), 21794. https://doi.org/10.1038/s41598-025-05700-y 12) Kaya, Y., Kobya, V., Eser, M., Mardani, N., Bilgin, M., & Mardani, A. (2025). Evaluation of the Effect of Using Different Types of Clinker Grinding Aids on Grinding Performance by Numerical Analysis. Materials, 18(12), 2712. https://doi.org/10.3390/ma18122712 13) Kaya, Y., Öztürk, H. T., Kobya, V., Mardani, N., & Mardani, A. (2025). Experimentally and Modeling Assessment of Parameters Affecting Grinding Aid-Containing Cement–PCE Compatibility: CRA, MARS and AOMA-ANN Methods. Polymers, 17(11), 1583. https://doi.org/10.3390/polym17111583 14) Ünverdi, M., Kaya, Y., Mardani, N., & Mardani, A. (2025). Investigation of the Microstructural and Mechanical Properties of Fiber-Reinforced Roller-Compacted Concrete Under High-Temperature Exposure. Materials, 18(11), 2430. https://doi.org/10.3390/ma18112430 15) Şahin, H. G., Kaya, Y., Akgümüş, F. E., Mardani, N., Mardani, A., Assaad, J., & Hamad, B. (2025). Degradation of mechanical properties of 3D fiber reinforced printed concrete mixtures exposed to elevated temperatures. Case Studies in Construction Materials, 22, e04506. https://doi.org/10.1016/j.cscm.2025.e04506 16) 16) Kaya, Y., Kobya, V., Ünverdi, M., Mardani, N., & Mardani, A. (2025). Polymers in Sustainable Construction Composites: Rheology, Mechanical Performance, and Durability. Polymers, 17(16), 2186. https://doi.org/10.3390/polym17162186
Diğer:	
Tarih	01.09.2025
İmza	
Adı-Soyadı	Naz MARDANİ