KROMATİK POLİNOMLARIN HESAPLANMASINDA YENİ YÖNTEMLER

Utkum ŞANLI

T. C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KROMATİK POLİNOMLARIN HESAPLANMASINDA

YENİ YÖNTEMLER

Utkum ŞANLI
0000-0003-4654-7047

Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2022

TEZ ONAYI

Utkum ŞANLI tarafından hazırlanan "Kromatik Polinomların Hesaplanmasında Yeni Yöntemler" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

Üye:	Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL 0000-0002-0700-5774 Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı	İmza
Üye:	Prof. Dr. Musa DEMİRCİ 0000-0002-6439-8439 Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı	İmza
Üye:	Prof. Dr. Saliha ŞAHİN 0000-0003-2887-5688 Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Kimya Anabilim Dalı	İmza
Üye:	Doç. Dr. Nazlı YILDIZ İKİKARDEŞ 0000-0001-8756-8085 Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı	İmza
Üye:	Prof. Dr. Recep ŞAHİN 0000-0002-4407-2028 Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı	İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü

B. U. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tezdeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar içerisinde elde ettiğimi,
- görsel, yazılı ve işitsel tüm bilgi ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanma durumunda bu eserlere bilimsel kurallara uygun atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü referans gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- bu tezin bir bölümünü bu veya bir başka üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

18/02/2022

İmza

Utkum ŞANLI

TEZ YAYINLAMA

FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezin tümünü veya bir kısmını, basılı (kâğıt) veya elektronik formatta arşivleme ve aşağıda belirtilen koşullarla kullanıma açma izni Bursa Uludağ Üniversitesi'ne aittir. Bu izinle üniversiteye verilen kullanım hakları dışında kalan fikri mülkiyet hakları ile tezin tümünün veya bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, lisans, kitap veya patent vb.) kullanım hakları tarafımıza ait olacaktır. Tezde telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınıp kullanılması zorunlu olan metinlerin bu izin alınarak kullandığını ve gerektiğinde üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederiz.

Yüksek Öğretim Kurulu tarafından yayımlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**" kapsamında yönergede belirtilen kısıtlamaların olmaması durumunda tezin YÖK Ulusal Tez Merkezi / B. U. Ü. Kütüphanesi Açık Erişim Sistemi ve üye olunan diğer veri tabanlarının (Proquest veri tabanı gibi) erişimine açılması uygundur.

Prof. Dr. Naci CANGÜL	Utkum ŞANLI
18/02/2022	18/02/2022

ÖZET

Doktora Tezi

KROMATİK POLİNOMLARIN HESAPLANMASINDA YENİ YÖNTEMLER

Utkum ŞANLI

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

Bu tezde ele alınan graflarda renklendirme problemi, son yılların en hızlı gelişen alanlarından birisi olan graf teorinin önemli alt dallarından birisini oluşturmaktadır. Bu çalışmada, 1736 yılında ortaya atılan bir sorunun cevabının araştırılması sonucunda ortaya çıkan graf teorisinde, bir grafın köşelerinin, komşu iki köşenin aynı renkle boyanmaması şartıyla, en az kaç renkle boyanabileceği şeklinde de ifade edilebilecek olan renklendirme teorisi ele alınmıştır.

Renklendirme teorisi, son yıllarda en hızlı gelişen matematik dalı olan graf teorinin önemli bir alanıdır. Köşelerin renklendirilmesi farklı yöntemlerle yapılabilir. Benzer şekilde kenarlar ve yüzleri de renklendirmek mümkündür. Tüm bu renklendirmeler, farklı uygulamalara sahiptir. Bir anlamda köşelerin renklendirilmesi, grafın etiketlendirmesi probleminin bir benzeridir. Bir grafın tüm renklendirmelerinin sayısına o grafın kromatik sayısı denilir.

Renklendirme probleminde ortaya çıkan polinoma bir grafın kromatik polinomu denilecektir. Bu tezde çeşitli grafların kromatik polinomları ele alınmıştır.

Beş bölümden oluşan bu tezin birinci bölümü giriş bölümüdür. Burada daha sonra kullanılacak olan kavramlar tanıtılmıştır. Ayrıca daha önce ispatlanmış kromatik polinom hesaplama yöntemlerine değinilmiştir.

İkinci bölümde tezin kuramsal temelleri verilmiştir. Üçüncü bölümde tezde kullanılan materyal ve yöntemlerden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde ise verilen bir bağlantılı grafı belli yöntemlerle daha küçük graflara ayırma yoluyla bu grafların kromatik polinomlarının hesaplanması için yeni yöntemler elde edilmiştir. Farklı şekillerde birleştirilen grafların, Birkhoff-Lewis teoremi, köşe ve kenardan ayırma gibi yollarla kromatik polinomlarına ulaşılmıştır.

Beşinci ve son bölümde ise tezin bulguları tartışılmış ve genel bir değerlendirme yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Graf, kromatik sayı, kromatik polinom, renklendirme

2022, vi + 39 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

NEW METHODS OF CALCULATING CHROMATIC POLYNOMIALS

Utkum ŞANLI
Bursa Uludag University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. I. Naci CANGUL

The problem of coloring graphs discussed in this thesis constitutes one of the important sub-branches of graph theory, one of the most growing areas in recent years. In this study, the theory of coloring, which can be expressed as the least how many colors the vertices of a graph can be painted, provided that two adjacent vertices are painted with different colors, in the graph theory that arose as a result of the search for the answer to a question posed in 1736, is discussed.

Coloring graphs is an important field in graph theory, which is the fastest growing branch of mathematics in recent years. Coloring the corners can be done in different ways. Similarly, it is possible to color edges and faces. All these colorings have different applications. In a sense, the coloring of the vertices is analogous to the problem of labeling a graph. The number of all colorings of a graph is called the chromatic number of graph.

The resulting polynomial in the coloring problem will be called the chromatic polynomial of a graph. In this thesis, chromatic polynomials of various graphs are discussed.

The first chapter of this thesis consistsing of five chapters is the introductory part. In this section, the concepts that will be used later are introduced. In addition, the previously proven chromatic polynomial calculation methods are mentioned.

In the second chapter, the theoretical foundations are given. In chapter 3, the materials and methods used in the thesis are mentioned.

In the fourth chapter, by separating a given connected graph into smaller graphs with certain methods, new methods are obtained for calculating the chromatic polynomials of these graphs. The chromatic polynomials of graphs combined in different ways have been obtained by means of the Birkhoff-Lewis theorem, corner and edge separation.

In the fifth and last part, the findings of the thesis were discussed and a general evaluation was made.

Key Words: Graph, chromatic number, chromatic polynomial, graph coloring

2022, vi + 39 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Emeğine duyduğum minneti ifade edecek kelimeler bulamadığım, bu tezin ve bu ünvanın var olma sebebi değerli hocam Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL'e,

Bu tezi yazarken her zaman yanımda ve her zaman destek olan Tuğba CEYLAN'a,

Desteklerini, sevgilerini her zaman hissettiğim, güç aldığım kardeşime ve annem, öğretmenim Nuray ŞANLI'ya

Yolu, yolum olan ulu önderim Gazi Mustafa Kemal ATATÜRK'e

Sonsuz saygı, minnet ve teşekkürle…

Utkum ŞANLI

18/02/2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
G	graf
$V(G)$	G grafının köşe kümesi
$E(G)$	G grafının kenar kümesi
K_n	n köşeli tam graf
C_n	n köşeli devir graf
P_n	n köşeli yol graf
E_n	n köşeli boş graf
G-v	G grafından v köşesini silme
G-e	G grafından e kenarını silme
G/e	G grafında e kenarını büzme
$\chi(G)$	G grafının kromatik sayısı
C(G)	G grafının kromatik polinomu
$A_{n,m,0}$	C_n ve C_m graflarının ortak kenarla yapıştırılması
$A_{n,m,r}$	C_n ve C_m graflarının r köşeli ortak kenarla yapıştırılması
B_n	n köşeye sahip ortak bir kenarla birleşen 4 graf
$G_{3,3,r}$	Ortak olmayan köşelerinden birleştirilmiş C_3 grafları
$G_{a,n}$	Ortak kenarları ayrılarak n köşe konulmuş C_3 grafları
$G_{n,m,r}$	İkili ortak kenarlarla birleştirilmiş C_n, C_m, C_{r+3} grafları
$G_{n,m,s,r}$	$G_{n,m,r}$ grafına s tane köşe eklenerek oluşturulan graf

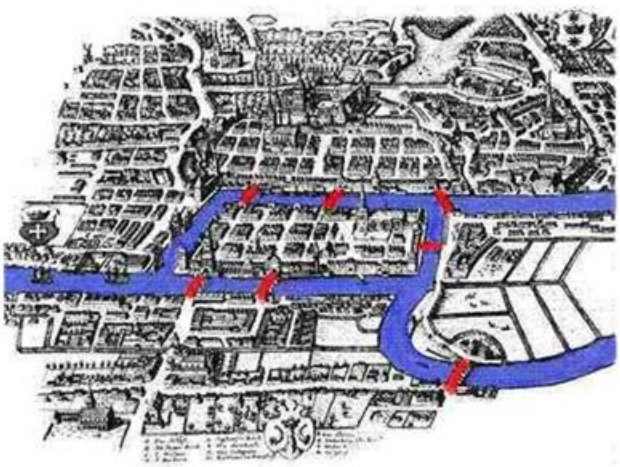
ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

1.1. Giriş ve Temel Kavramlar

3000-4000 yıl öncesine kadar graflara benzer yapıların kullanıldığı bilinse de, modern çağda graf teorinin temellerinin 1736 yılında ortaya atılan bir soruya dayandığı kabul edilmektedir. Königsberg, eskiden Rusya'nın, günümüzde ise Almanya'nın sınırları içerisinde bulunan bir kenttir. Königsberg, Pregel nehri etrafında yer alan kara parçaları üzerine kuruluydu. Bu kara parçaları, Şekil 1.1'de görüldüğü gibi birbirine köprüler ile bağlıydı. Kentteki insanlar tatil günlerinde sırf eğlence olsun diye her köprüden yalnızca birer kez geçerek başladıkları yere dönmeye çalışıyorlardı.



Şekil 1.1. Königsberg köprüleri

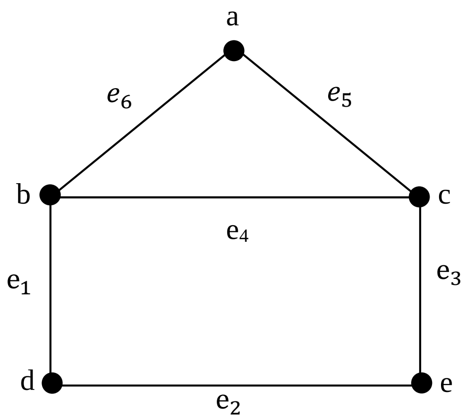
Bu gelenekselleşmiş olay Leonhard Euler'in kulağına gitti. Euler, bu problemin çözümüyle uğraşırken modern graf teorinin temellerini atmıştı. Grafları kullanarak her köprüden bir kere geçmenin imkânsız olduğunu göstermiştir. Çözümün ardından Euler, çözümü açıklayıp ispatladığı ve genelleştirdiği "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis" adlı makalesini yayınlamıştır.

Bu soruyla başlayıp günümüze kadar gelişerek devam eden Graf Teori, Çizge ya da Çizgeler Kuramı olarak da adlandırılmaktadır. Bir graf, kenar ve köşe dediğimiz elemanlardan oluşmaktadır. Basit yapılarına rağmen graflar birçok olayı modellemede kullanılmaktadır ve bu nedenle son 50 yılda en hızla gelişen alanlar arasında yerini almıştır. Grafların çok sayıda matematiksel özelliğinin yanı sıra diğer bilim dallarındaki uygulamaları da öne çıkmaktadır. Özellikle iletişim, network ağları, sosyal medya, kimya, fizik devreleri gibi uygulama alanları, grafların kullanıldığı modern alanlar arasında ilk akla gelenlerdir. En yaygın kullanım alanı olan kimyada atomlar birer köşe ile, atomlar arasındaki çeşitli bağlar da birer kenar ile modellenmektedir. Bu sayede bir moleküle karşılık gelen bir graf oluşturulur. Bu grafın matematiksel metotlarla çalışılması, karşılık gelen molekülün çalışılmasından daha kolaydır. Çeşitli fonksiyonlar, matrisler ve diğer matematiksel kavramlar yardımıyla graftan elde edilen veriler yorumlanarak bazı sonuçlar elde edilir ve bu sonuçlardan da kimyasal molekülün çeşitli özellikleri hakkında fikir edinebiliriz. Graflarla ilgili temel kavramlarla ilgili detaylı bilgi için şu kaynaklara bakabilirsiniz: (Aldous & Wilson, (2004)), (Benjamin ve ark., (2015)), (Bondy & Murty, (1982)), (Bondy & Murty, (2008)), (Capobianco & Molluzzo, (1978)), (Chartrand, (1985)), (Chartrand & Zhang, (2012)), (Clark & Holton, (1995)), (Deo, (1974)), (Diestel, (2010)), (Foulds, (1992)), (Gross & Yellen, (2006)), (Hartsfield & Ringel, (2003)), (Sanli ve ark., (2020)), (Skiena, (1990)), (Thulasiraman & Swamy, (1992)), (Togan ve ark., (2020)), Trudeau, (1993)), (Tutte, (1998)), (Vasudev, (2006)), (Vasudev, (2007)), (Wallis, (2007)), (West, (2001)), (Wilson, (1998)) ve (Wilson & Watkins, (1990)).

Bu tezin konusu graflarda renklendirme problemidir. Bu problem verilen bir grafta köşelerin, komşu iki köşe aynı renge sahip olmayacak şekilde en az renk kullanarak boyanması şeklinde ifade edilebilir. Bu şekilde bir grafın boyanması için gereken en az renk sayısına o grafın kromatik sayısı denir. Elimizde k farklı renk olduğunu varsayarsak bu grafın kaç farklı şekilde boyanabildiğini veren bağıntı ise grafın kromatik polinomu olarak adlandırılır. Bu tezde grafların renklendirilmesi probleminin üzerinde durulmuş ve karmaşık yapıdaki grafların kromatik polinomlarını daha kısa yollarla hesaplamak için çeşitli kısa yollar verilmiştir. Graflarda renklendirme ile ilgili temel kavramlar için şu kaynaklara bakabilirsiniz: (Albertson ve ark., (2010)), (Avis ve ark., (2002)), (Beck ve ark., (2015)), (Bollobas, (1978)), (Brown ve Erey, (2015)), (Cardoso ve ark., (2012)), (Chao ve Zhao, (1984)), (Dohmen, (1998)), (Kahale ve Schulman, (1996)), (Kotlyar, (1998)), (Sanli ve Cangul, (2017)), (Sanli ve ark, (2021)) ve (Thomassen, (2009)).

1.1.1 Tanım. Elemanları sonlu sayıda noktadan oluşan ve boş olmayan bir V kümesi ile V kümesinin sıralı olmayan ikililerinin oluşturduğu bir E kümesi alalım. G = (V,E) sıralı ikilisine bir graf denilir. V kümesindeki her bir elemana G grafının bir köşesi, V kümesinden alınan her a, b eleman çifti için a ile b köşelerini birleştirerek elde edilen ab ∈ E elemanına G grafının bir kenarı denilir.

Görüldüğü gibi bir graf, köşeler ile bu köşeleri birleştiren kenarlardan oluşan basit bir şekildir. Küçüklüğümüzden beri defalarca graf çizmiş ve kullanmış olabiliriz. Köşelerin sonsuz çoklukta olduğu graflar da mevcuttur ama pratikte kullanılmamaktadır. V = V(G) köşe kümesi, E = E(G) kenar kümesidir. Köşeler a, b, c, d, … gibi harflerle temsil edilirken; kenarlar adlandırılırken e_1, e_2, … gibi semboller kullanılacaktır.



Şekil 1.2. 5 köşe ve 6 kenarlı bir graf örneği

Şekil 1.2'de verilen G grafı için köşe kümesi V(G) = {a,b,c,d,e} ve kenar kümesi E(G) = $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$'dır.

1.1.2. Tanım. Bir graf tek bir parçadan oluşuyorsa *bağlantılı graf,* birden fazla parçadan oluşuyorsa *bağlantısız graf* denir.

1.1.3. Tanım. Sadece köşelerden oluşan graflara boş (null) graf denir ve n köşesi var ise E_n ile gösterilir.

Şekil 1.3. E_3 boş grafı

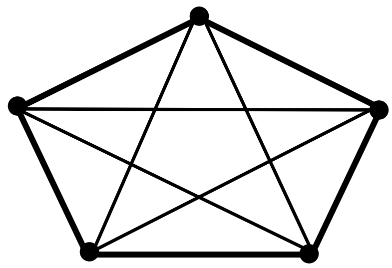
1.1.4.Tanım. Farklı olma zorunluluğu olmayan köşeler dizisi v_1, v_2, v_3 , …, v_k olan bir G grafında, $v_j v_{j+1}$ ϵ E(G) (j=1, 2, 3, …, k-1) olacak şekilde kenarların oluşturduğu yapı yol (walk) olarak adlandırılır. Bir yoldaki tüm köşeler birbirinden farklıysa bu yapıya patika (path) denir. n köşeli bir patika P_n ile gösterilir.

Hangi köşede başlıyorsa yine o köşede biten patikalar ise *kapalı patika* (cycle) olarak adlandırılır.

Şekil 1.4. P_5 patikası

P_n patikası n tane köşe ve n-1 tane kenardan oluşur.

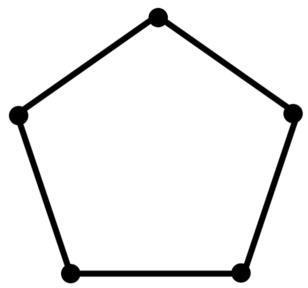
1.1.5. Tanım. Tüm köşeleri diğer köşelerle komşu olan graflara *tam* (complete) graf denir. n köşeli bir tam graf K_n ile gösterilir.



Şekil 1.5. K_5 tam grafı

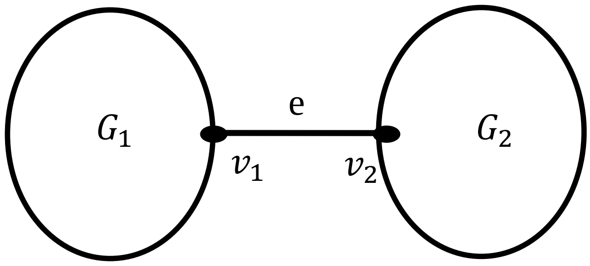
K_n tam grafı n tane köşe ve $\frac{n(n-1)}{2}$ tane kenardan oluşur.

1.1.6.Tanım. Tek bir döngüden oluşan graflara devir grafı (cycle) denir. n köşesi olan bir devir grafı C_n ile gösterilir. C_n grafı n köşe ve n kenardan oluşur.



Şekil 1.6. C_5 devir grafı

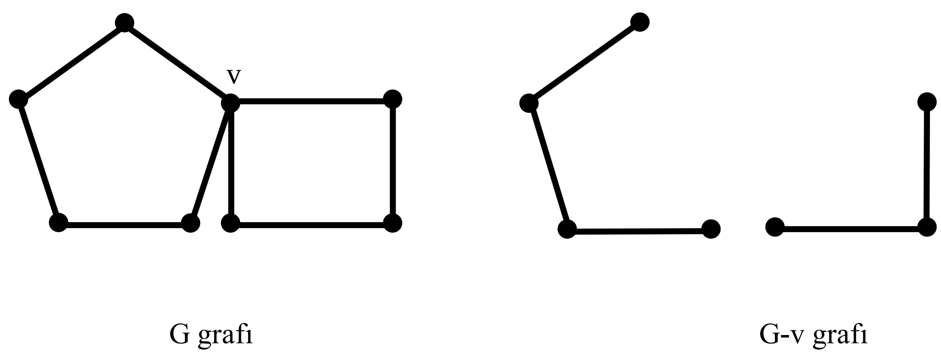
1.1.7.Tanım. Bağlantısı olmayan iki grafı köşelerinden birbirine bağlayan kenara köprü (bridge) denir. Şekil 1.7'de verilen e kenarı bir köprüdür.



Şekil.1.7. Köprü

1.2. Graflarda Köşe Silme, Kenar Silme ve Kenar Büzme İşlemleri

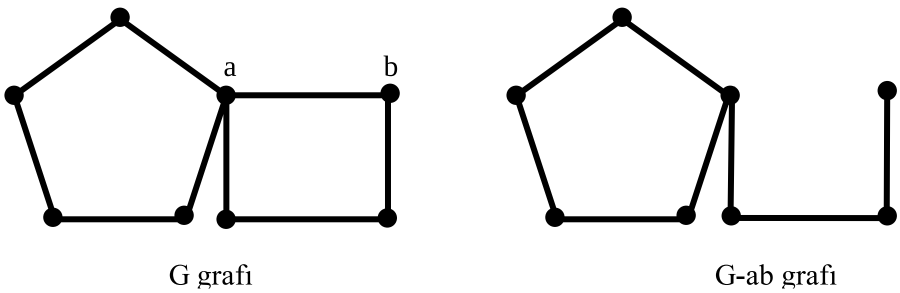
1.2.1.Tanım. Bir grafın bir köşesini ve onunla bitişik olan tüm kenarları silme işlemine *köşe silme işlemi* denir. Graf G ve silinen köşe v ise silme işleminden sonra elde edilen graf G-v ile gösterilir. Örneğin Şekil 1.8'de bir G grafından v köşesi silinmiştir, elde edilen G-v grafı görülmektedir.



Şekil 1.8. G ve G-v grafları

1.2.2 Tanım. Bir grafın belirli bir kenarına bitişik olan köşelerin kalıp sadece kenarın çıkarılması işlemine *kenar silme* işlemi denir.

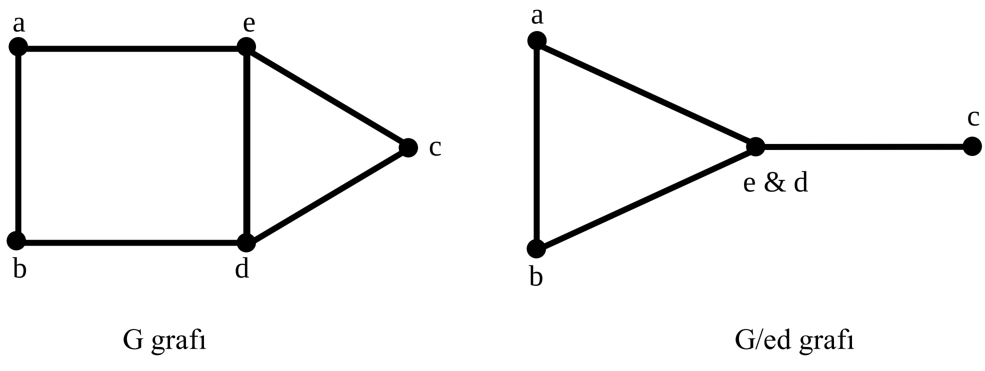
Şekil 1.9'da, bir G grafından silinen "ab" kenarı gösterilmiştir. Bu işlem G-ab ile gösterilir.



Şekil 1.9. G ve G-ab grafları

1.2.3 Tanım. Bir grafta iki köşeyi birleştiren kenarın kaldırılarak, köşelerin birleştirilmesi işlemine *kenar büzme* denir.

Şekil 1.10'da verilen G grafının ed kenarı büzülmüştür. Bu işlem G/ed ile gösterilir.



Şekil 1.10. G ve G/ed grafları

1.3. Graflarda Renklendirme ve Kromatik Sayı

Bir grafın çalışılmasında kullanılan yöntemlerden birisi de renklendirmedir. Renklendirme denilince ilk akla gelen köşelerin renklendirilmesi olsa da bunun dışında farklı amaçlara yönelik olarak değişik renklendirme çeşitleri tanımlanmakta ve kullanılmaktadır. Renklendirme aslında bir etiketleme veya isimlendirme çeşididir. Bu kısımda renklendirme ile ilgili kavramları hatırlatacağız.

1.3.1. Tanım. Bir G grafı ve bir k tamsayısı verilsin.

$$K: V(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$$

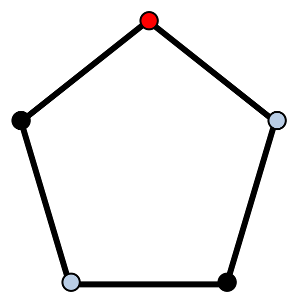
şeklindeki bir fonksiyona G grafının bir *k-renklendirmesi* denilir.

Burada k kullanılabilecek renk sayısını gösterirken, K fonksiyonu her bir köşeye bir renk atamaktadır.

1.3.2 Tanım. Bir G grafında birbirine komşu olan tüm u ve v köşe çiftleri için K(u) ≠ K(v) ise, yani birbiriyle komşu olan köşeler birbirinden farklı renkte ise bu renklendirmeye G grafının bir *öz k-renklendirmesi* denir. Kullanılan renk sayısı k ise, G grafı *k-renklendirilebilir*dir denir.

1.3.3. Tanım. Komşu köşeleri birbirinden farklı renkler olmak koşuluyla, bir G grafının renklendirilmesi için kullanılan en az renk sayısına, G'nin *kromatik sayısı* denir ve χ(G) ile gösterilir.

Örneğin Şekil 1.11'de verilen C_5 devir grafı için en az 3 renk gereklidir. Yani, $\chi(C_5)$ = 3'dür.



Şekil 1.11. C_5 grafının renklendirilmesi

Genel olarak bir C_n devir grafının renklendirilmesinde; n değerinin çift veya tek olmasına göre hareket edilir. n çift ise, başladığımız köşeye ilk renk verilir, ardından gelen köşe için ikinci renk kullanılır. Sonraki köşede ise ilk renge geri dönülebilir. Bu şekilde devam edildiğinde, 2 rengin yeterli olacağı görülecektir. n tek ise, başlanılan köşe kullanılan iki rengin arasında kalacağından üçüncü bir renk kullanılması gerekir.

1.4. Kromatik Polinomlar

Herhangi bir haritada bulunan ülkeler, sınırları ortak olanlar aynı renge boyanmamak üzere en az kaç renk kullanılarak boyanabilir problemi, dört renk problemi olarak literatüre girmiştir. 1900'lü yılların başında Birkhoff ve Lewis dört renk problemi üzerinde çalışırlarken kromatik polinomları ortaya çıkarmıştır. Bu problem üzerine çalışan Birkhoff ile Lewis, grafların farklı renklerle kaç farklı şekilde boyanabileceğinin sayısını veren polinomları bulmuştur. Renklendirmede aynı renkler kullanılsa bile köşelere gelen renkler değiştiğinde elde edilen yeni bir polinomdur. Yani bir grafın renklendirilmesinde en az bir köşe farklı renklendirilirse ortaya çıkan iki farklı polinomdur. Bu polinomlara özel bir isim verilir. Detaylı bilgi için bkz. (Sanli & Cangul, 2017). A New Method for Calculating the Chromatic Polynomial, Applied Sciences (APPS) incelenebilir.

1.4.1. Tanım. Bir G grafının kromatik sayısı yani k renk ile farklı renklendirme sayısı $C_G(k)$ ile gösterilir. Bu sayı k değerine bağlı bir polinomdur ve grafın kromatik polinomu adını alır.

Örneğin K_n tam grafının kromatik polinomu hesaplanmak istenirse, k tane renk ile kaç farklı renklendirme yapılır sorusuna cevap bulunması gerekir. İlk köşe için k renk seçeneği varken, ikinci köşede k-1, sonraki köşede k-2 renk seçeneği olacaktır. n köşeli bu graf için bu renklendirme genelleştirilirse

$$k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)$$

farklı renklendirme olduğu görülecektir. Dolayısıyla $k \geq n$ olmak üzere

$$C_{K_n}(k) = k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)$$

olur.

Birkhoff-Lewis tarafından 1946'da tanımlanan aşağıdaki teorem, kromatik polinom hesaplanırken en fazla kullanılan yöntemlerden biridir.

1.4.2. Teorem. Bir G grafının kromatik polinomu, e, G grafında bir kenar olmak üzere

$$C_G(k) = C_{G-e}(k) - C_{G/e}(k)$$

şeklindedir.

Bu teoreme göre bir grafın kromatik polinomunu hesaplamak yerine bu graftan seçeceğimiz bir e kenarını çıkarmakla elde edilen G-e grafının kromatik polinomu ile aynı e kenarını büzmekle elde edilen G/e grafının kromatik polinomunun farkını almak yeterlidir. Bu da n köşeli ve m kenarlı bir grafın kromatik polinomunu hesaplamak yerine yine n köşeli ve m-1 kenarlı bir polinomdan n-1 köşe ve m-1 kenara sahip bir grafın kromatik polinomunun çıkarılması anlamına gelir ki bu polinomlar ilk polinoma göre daha kolay hesaplanabilirdir. Bu işlemi gerekli sayıda tekrarlarsak köşe ve kenar sayıları oldukça küçük grafların kromatik polinomlarını hesaplayarak aranan polinomu bunların farkları olarak bulabiliriz.

Aşağıdaki sonuç uygulamada oldukça yararlıdır:

1.4.3. Teorem. Bir G grafı ile G'de bulunmayan bir v köşesi verilsin. G'ye v köşesinin katılmasıyla elde edilen bağlantısız graf G_1 ile gösterilsin. G_1 grafının kromatik polinomu

$$C_{G_1}(\mathrm{k}) = \mathrm{k}.\ C_G(k)$$

şeklindedir.

Yani eğer bir G grafında bir izole bir v köşesi, yani köşe derecesi 0 olan bir köşe, varsa, G grafının kromatik polinomunu bulmak için G-v grafının kromatik polinomunu k ile çarpmak yeterlidir. Genelleme yaparsak izole köşeler varsa ve bunların sayısı t ise G'nin bu izole köşeler dışında kalan kısmı G_1 ise G grafının kromatik polinomunu G_1 grafının kromatik polinomunu k^t ile çarparak elde edebiliriz. Matematiksel olarak, birden fazla v_1, v_2, …, v_t izole köşe varsa, G'ye v_1, v_2, …, v_n köşelerinin katılmasıyla elde edilen bağlantısız G_1 grafının kromatik polinomu

$$C_{G_1}(\mathrm{k}) = k^n.\ C_G(k)$$

olacaktır.

Aşağıdaki teoremler kolayca ispatlanabilir:

1.4.4. Teorem. Bir patika grafın kromatik polinomu

$$C_{Pn}(k) = k.(k-1)^{n-1}$$

dir.

1.4.5. Teorem. Bir devir grafın kromatik polinomu

$$C_{Cn}(k) = (k-1)^{n} + (-1)^{n}.(k-1)$$

dir.

1.4.6. Uyarı. Bir G grafı iki köşesi arasında çoklu kenarlara sahipse, kromatik polinom hesaplanırken çoklu kenarlar tek bir kenar olarak hesaplanır.

1.4.7. Teorem. Bağlantısı olmayan iki veya daha fazla grafın oluşturduğu yeni grafın kromatik polinomu, kromatik polinomlarının çarpımı ile bulunur. Yani G grafı, G_1 ve G_2 graflarının ayrık birleşimi ise

$$C_G(k) = C_{G_1}(k) \cdot C_{G_2}(k)$$

şeklindedir.

1.4.8. Teorem. Bir G grafının bir köprü eklenerek bir v köşesine bağlanmasıyla elde edilen graf G_1 ise, G_1 grafının kromatik polinomu

$$C_{G_1}(k) = (k-1) \cdot C_G(k)$$

şeklindedir. Bu sonucu genelleştirebiliriz:

1.4.9. Teorem. Bir G_1 grafı bir köprü aracılığıyla bir P_n patikasına bağlandığında oluşan grafa G dersek

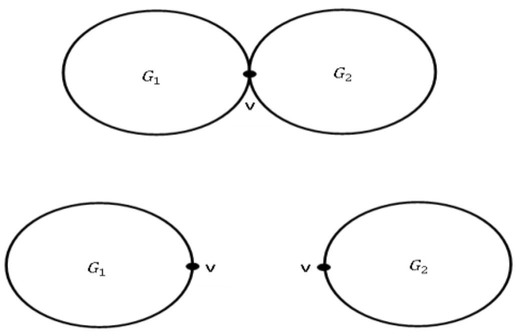
$$C_G(k) = (k-1)^n \cdot C_{G_1}(k)$$

dır.

1.4.10. Teorem. G grafı bir tek ortak köşeye sahip $G_1 ve\ G_2$ graflarının oluşturduğu graf olmak üzere, bkz. Şekil 1.12, bu graflar ortak köşelerinden ayrıldıklarında oluşan bağıntı

$$C_G(k) = \frac{C_{G_1}(k) \cdot C_{G_2}(k)}{k}$$

dır.



Şekil 1.12. Ortak köşelerinden ayrılan $G_1 ve\ G_2$ grafları

1.4.11. Teorem. Bir köprü ile birbirine bağlı G_1 ve G_2 graflarının oluşturduğu graf G olmak üzere,

$$k \cdot C_G(k) = (k-1) \cdot C_{G_1}(k) \cdot C_{G_2}(k)$$

bağıntısı elde edilir.

1.4.12. Sonuç. İki tane patika grafın ortak bir kenarla birbirine yapıştığı graf G grafı olsun. Patika graflar ortak kenarlarından ayrılarak ortak kenar her iki grafta da kalacak şekilde iki bağlantısız grafa bölünürse, ayrılan graflar P_1 ve P_2 olmak üzere oluşan grafın kromatik polinomu

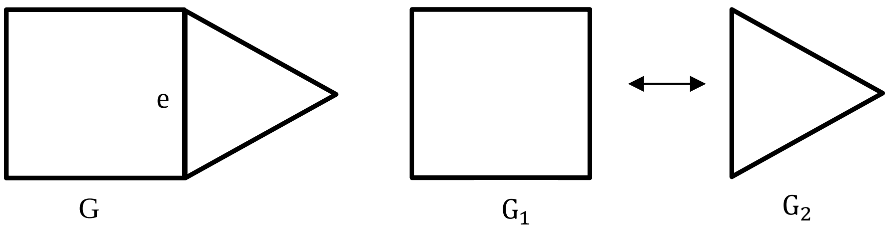
$$k \cdot (k-1) \cdot C_G(k) = C_{P_1}(k) \cdot C_{P_2}(k)$$

şeklindedir.

1.4.13. Sonuç. Ortak tek bir e kenarıyla birbirine bağlanan G_1 ve G_2 graflarından oluşmuş bir G grafı, bu ortak kenar boyunca ayrılır, ortak kenar her iki bileşende de kalacak şekilde iki bağlantısız grafın ayrık birleşimi haline gelirse, bkz. Şekil 1.13,

$$C_G(k) = \frac{C_{G_1}(k) \cdot C_{G_2}(k)}{k(k-1)}$$

bağıntısı elde edilir.



Şekil 1.13. Bir kenarı boyunca iki grafa ayrılan G grafı

2. KURAMSAL TEMELLER

Graflarda renklendirme problemi, son yarım yüzyılın en hızlı gelişen bilim alanlarından birisi olan graf teorinin önemli alt dallarından birisinin konusudur. Bu tez çalışmasında, 1736 yılında ortaya atılan meşhur köprü dolaşımı problemi olarak da bilinen bir sorunun cevabının araştırılması ve Euler tarafından çözülerek genelleştirilmesi sonucunda ortaya çıkan graf teorisinde, bir grafın köşelerinin, komşu iki köşenin aynı renkle boyanmaması şartıyla, en az kaç renkle boyanabileceği şeklinde de ifade edilebilecek olan renklendirme teorisi ele alınmıştır.

Köşelerin renklendirilmesi farklı yöntemlerle yapılabilir. Benzer şekilde kenarlar ve yüzleri de renklendirmek mümkündür. Tüm bu renklendirmeler, farklı uygulamalara sahiptir. Bir anlamda köşelerin renklendirilmesi, grafın etiketlendirmesi probleminin bir benzeridir. Etiketlenmiş graflar, birbirine izomorf olan birçok grafın etiketlenmemiş olmaları durumunda aynı olacak iken etiketleme sebebiyle farklı olmasına ve dolayısıyla aynı grafın birden fazla olaya karşılık gelebilmesine olanak tanır. Bu nedenle graf teorinin uygulamaları arasında oldukça önemli bir yer tutar. Özellikle komünikasyon, fizik, networkler, yapay sinir ağları, yapay zeka alanlarında etiketlemenin gerekliliği açıktır.

Bir grafın tüm renklendirmelerinin sayısına o grafın kromatik sayısı denilir. Renklendirme probleminde ortaya çıkan polinoma grafın kromatik polinomu denilecektir. Bu tezde çeşitli grafların kromatik polinomları ele alınmıştır. Daha önce de çalışılmış olan bu problemle ilgili olarak bu tezde yapılanlar verilen bağlantılı grafları belli yöntemlerle daha küçük graflara ayırma yoluyla bu grafların kromatik polinomlarının hesaplanması için yeni yöntemler elde edilmesi şeklinde özetlenebilir. Farklı şekillerde birleştirilen grafların, Birkhoff-Lewis teoremi, köşe ve kenardan ayırma gibi yollarla kromatik polinomlarına ulaşılmıştır.

Bu tezdeki sonuçlar kullanılarak bugüne kadar uzun yollarla hesaplanabilen kromatik polinomların kısa zamanda hesaplanabilmesi sağlanacaktır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Yukarıda renklendirmenin önemine değinildi. Bu tezde bu kavramın kullanıldığı alanlarda algoritmalar kullanılmasına gerek kalmadan, kromatik polinomun kolayca hesaplanabilmesini sağlayacak formüller elde edilmiştir. Bunu yaparken klasik graf teori yöntemleri arasında yer alan alt graflardan, kenar silme ve kenar büzme işlemlerinden ve Birkhoff-Lewis teoreminden faydalanılmıştır.

Bu yöntemler genel bir graf için bize uzun algoritmalar kullanılarak kromatik polinomun hesaplanabilmesi için yeterli bilgiyi vermektedir. Ancak matematiksel ve geometrik işlemler gerektiren ve kombinatorik hesaplamalara dayalı olan bu algoritmik süreçler, içiçe geçen hesaplama ve çizimler nedeniyle matematiksel olarak zorlayıcı olabilmektedir. Bu nedenle bu tezde çok sık kullanılan bazı graf yapıları ele alınarak bağlantılı grafları belli yöntemlerle daha küçük graflara ayırma yoluyla bu grafların kromatik polinomlarının hesaplanması için yeni yöntemler elde edilmiştir. Farklı şekillerde birleştirilen grafların, Birkhoff-Lewis teoremi, köşe ve kenardan ayırma gibi yollarla kromatik polinomlarına ulaşabileceğimiz kısayol formülleri elde edilmiştir.

4. KROMATİK POLİNOM HESAPLAMALARINDA YENİ METODLAR

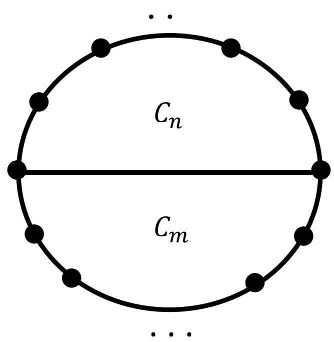
Şimdiye kadar verilen sonuçlarda, graflar ortak bir köşeye sahip iken, ortak kenarlarında ortak köşeler bulunmamaktaydı. Bu bölümde, genel olarak ortak kenar üzerinde ortak köşeler olan graflar ele alınacaktır. Ortak köşelere sahip olmayan ortak kenarlı graflar için; Sanli, U., Paikray, S. K., Cangul, I. N. 2021. New Results on Chromatic Polynomials, New Trends in Applied Analysis and Computational Mathematics, Proceedings of the International Conference on Advances in Mathematics and Computing (ICAMC-2020) incelenebilir.

4.1. Teorem. Ortak bir e kenarına sahip C_n ve C_m devir graflarının oluşturduğu yeni graf $A_{n,m,0}$ olarak tanımlanırsa, bkz. Şekil 4.1, bu grafın kromatik polinomu

$$C_{A_{n,m,0}}(k) = C_{C_{n+m-2}}(k) - \frac{C_{C_{n-1}}(k).C_{C_{m-1}}(k)}{k}$$

dır.

İspat. $A_{n,m,0}$ grafı



Şekil 4.1. $A_{n,m,0}$ grafı

şeklinde verilsin. 1.4.2. Teorem ve 1.4.13. Sonuç gereğince

$$C_{A_{n,m,0}}(k) = \frac{C_{C_n}(k).C_{C_m}(k)}{k(k-1)}$$

dır.

Eğer n ve m çift ise

$$C_{C_n}(k) = (k-1)^n + (k-1)$$

$$= (k-1)\,[\,(k-1)^{n-1}+1]$$

ve

$$C_{C_m}(k) = (k-1)^m + (k-1)$$

$$= (k-1)\,[\,(k-1)^{m-1}+1]$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla

$$C_{A_{n,m,0}}(k) = \frac{(k-1)^2[(k-1)^{n-1}+1][(k-1)^{m-1}+1]}{k(k-1)}$$

$$= \frac{k-1}{k}\,[\,(k-1)^{n-1}+1]\,[\,(k-1)^{m-1}+1]$$

olur. Ayrıca n+m çift olduğundan

$$C_{C_{n+m-2}}(k) \quad = (k-1)^{n+m-2}+(k-1)$$

$$= (k-1).[\,(k-1)^{n+m-3}+1]$$

yazılabilir. Buradan hareketle

$$C_{A_{n,m,0}}(k)\text{-}C_{C_{n+m-2}}(k) = \frac{k-1}{k}\,[(k-1)^{n-1}+1][(k-1)^{m-1}+1]\text{-}(k-1).[(k-1)^{n+m-3}+1]$$

$$= (k-1)[\frac{(k-1)^{n+m-2}+(k-1)^{n-1}+(k-1)^{m-1}+1}{k} - \frac{k(k-1)^{n+m-3}+k}{k}]$$

$$= \frac{k-1}{k}\,[(k-1)^{n+m-3}(k-1-k)+(k-1)^{n-1}+(k-1)^{m-1}-(k-1)]$$

$$= \frac{(k-1)^2}{k}\,[-(k-1)^{n+m-4}+(k-1)^{n-2}+(k-1)^{m-2}-1]$$

$$= -\,\frac{(k-1)^2}{k}\,[(k-1)^{n-2}-1]+[(k-1)^{m-2}-1]$$

$$= -\frac{1}{k}\, C_{C_{n-1}}(k).\, C_{C_{m-1}}(k)$$

elde edilir. Denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$C_{A_{n,m,0}}(k) = C_{C_{n+m-2}}(k) - \frac{C_{C_{n-1}}(k).C_{C_{m-1}}(k)}{k}$$

bulunarak ispat tamamlanmış olur.

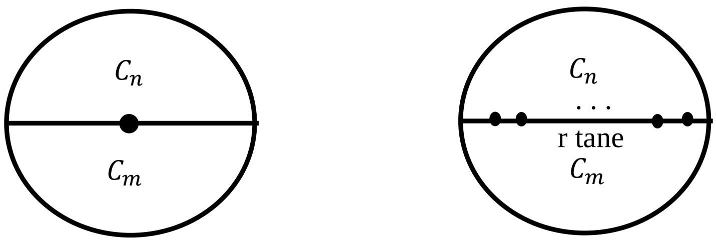
n ve m'nin tek olduğu veya farklı pariteli olduğu diğer durumlar benzer şekilde ispatlanır.

4.2. Teorem. Ortak bir kenara sahip iki devir grafı C_n ve C_m olsun. Bu ortak kenarın iki uç köşesi arasına tam r tane köşe eklenerek oluşan graf $A_{n,m,r}$ ile gösterilirse, $A_{n,m,r}$ grafının kromatik polinomu

$$C_{A_{n,m,r}}(k) = C_{C_{n+m-2}}(k).\frac{C_{C_{r+2}}(k)}{k(k-1)} + (-1)^{r+1}.\frac{C_{C_{n-1}}(k).C_{C_{m-1}}(k)}{k}$$

şeklindedir.

İspat. Tümevarım yöntemi ile ispat yapılacağından, ilk olarak verilen eşitliğin r = 1 için doğru olup olmadığı incelenir.



Şekil 4.2. $A_{n,m,1}$ ve $A_{n,m,r}$ grafları

1.4.2. Teorem ve 1.4.10. Teorem gereği

$$C_{A_{n,m,1}}(\mathrm{k}) = \frac{C_{C_{n+m-2}}(k).k(k-1)}{k} - [C_{C_{n+m-2}}(k) - \frac{C_{C_{n-1}}(k).C_{C_{m-1}}(k)}{k}]$$

$$= C_{C_{n+m-2}}(k).(k-2) + \frac{C_{C_{n-1}}(k).C_{C_{m-1}}(k)}{k}$$

$$= \frac{C_{C_{n+m-2}}(k).C_{C_3}(k)}{k(k-1)} + \frac{C_{C_{n-1}}(k).C_{C_{m-1}}(k)}{k}$$

olur ve böylece önerme r = 1 için doğrudur.

İkinci olarak önerme r = a için doğru olsun. Yani

$$C_{A_{n,m,a}}(\mathrm{k}) = C_{C_{n+m-2}}(k)\frac{C_{C_{a+2}}(k)}{k(k-1)} + (-1)^{a+1}\frac{C_{C_{n-1}}(k).C_{C_{m-1}}(k)}{k}$$

olsun. Göstermemiz gereken, önermenin r = a+1 için de doğru olup olmadığıdır. 1.4.2. Teorem ve 1.4.10. Teorem gereğince

$$C_{A_{n,m,a+1}}(\mathrm{k}) = C_{C_{n+m-2}}(k)\frac{C_{P_{a+2}}(k)}{k} - C_{A_{n,m,a}}(\mathrm{k})$$

$$= C_{C_{n+m-2}}(k)\frac{C_{P_{a+2}}(k)}{k} - C_{C_{n+m-2}}(k)\frac{C_{C_{a+2}}(k)}{k(k-1)} + (-1)^{a}\frac{C_{C_{n-1}}(k).C_{C_{m-1}}(k)}{k}$$

$$= \frac{C_{C_{n+m-2}}(k)}{k}[C_{P_{a+2}}(k) - \frac{C_{C_{a+2}}(k)}{(k-1)}] - (-1)^{a+1}\frac{C_{C_{n-1}}(k).C_{C_{m-1}}(k)}{k}$$

yazılır. P_{a+2} ve C_{a+2} graflarının kromatik polinomları denklemde yerlerine yazılırsa

$$C_{A_{n,m,a+1}}(\mathrm{k}) = \frac{C_{C_{n+m-2}}(k)}{k}[\mathrm{k}(k-1)^{a+1} - \frac{(k-1)^{a+2}+(-1)^{a+2}(k-1)}{k-1}]$$

$$- (-1)^{a+1}\frac{C_{C_{n-1}}(k).C_{C_{m-1}}(k)}{k}$$

$$= \frac{C_{C_{n+m-2}}(k)}{k}[\mathrm{k}(k-1)^{a+1} - \frac{(k-1)[(k-1)^{a+1}-(-1)^{a+1}]}{k-1}]$$

$$- (-1)^{a+1}\frac{C_{C_{n-1}}(k).C_{C_{m-1}}(k)}{k}$$

elde edilir. Denklemin sağ tarafında gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$C_{A_{n,m,a+1}}(\text{k}) = \frac{C_{C_{n+m-2}}(k)}{k}\left[(k-1)^{a+2} + (-1)^{a+1}\right] - (-1)^{a+1}\frac{C_{C_{n-1}}(k)C_{C_{m-1}}(k)}{k}$$

$$= \frac{C_{C_{n+m-2}}(k)}{k}\left[\frac{(k-1)^{a+2}+(-1)^{a+1}}{k-1}(\text{k-1})\right] - (-1)^{a+1}\frac{C_{C_{n-1}}(k).C_{C_{m-1}}(k)}{k}$$

$$= \frac{C_{C_{n+m-2}}(k)}{k}\left[\frac{(k-1)^{a+3}+(-1)^{a+3}(k-1)}{k-1}\right] \text{-}(-1)^{a+1}\frac{C_{C_{n-1}}(k).C_{C_{m-1}}(k)}{k}$$

$$= \frac{C_{C_{n+m-2}}(k)C_{C_{a+3}}(k)}{k(k-1)} + (-1)^{a+2}\frac{C_{C_{n-1}}(k).C_{C_{m-1}}(k)}{k}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

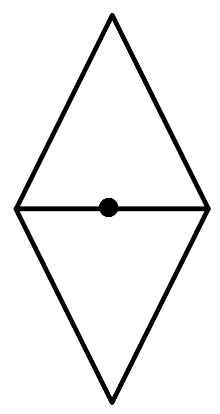
Yukarıdaki teoremin sık karşılaşılan özel bir durumu olarak $A_{3,3,r}$ grafını veren eşitlik 4.3. Sonuç'da verilecektir.

4.3. Sonuç. $A_{3,3,r}$ grafının kromatik polinomu

$$C_{A_{3,3,r}}(k) = C_{A_{3,3,0}}(k).(k-1)^r + C_{C_{r+1}}(k).(2\text{k-}3)$$

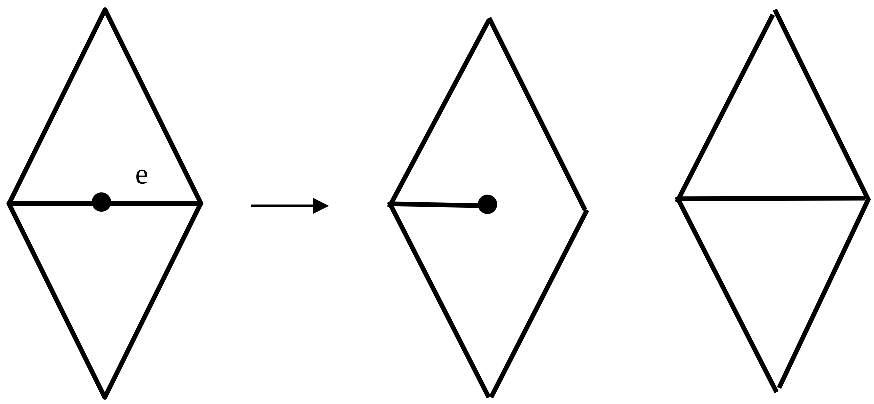
eşitliğini sağlar.

İspat. Tümevarım yöntemiyle ispat yapılacaktır. İlk olarak denklemin r = 1 için doğruluğu kontrol edilmelidir.



Şekil 4.3. $A_{3,3,1}$ grafı

Eşitliğin sol tarafını hesaplamak için Birkhoff-Lewis Teoremi kullanılırsa yapılan işlem Şekil 4.4'de gösterilmiştir.



Şekil 4.4. $A_{3,3,1}, A_{3,3,1} - e$ ve $A_{3,3,1}/e$ grafları

1.4.13. Sonuç ve 1.4.10. Teorem gereğince

$$C_{A_{3,3,1}}(k) = \frac{k(k-1)k(k-1)(k^2-3k+3)}{k} - \frac{k^2(k-1)^2(k-2)^2}{k(k-1)}$$

$$= k(k-1)^2(k^2-3k+3) - k(k-1)(k-2)^2 \qquad \text{(i)}$$

$$= k(k-1)[k^3-5k^2+10k-7]$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı hesaplanırsa

$$C_{A_{3,3,0}}(k)(k-1) + C_{C_2}(k)(2k-3) = k(k-1)^2(k-2)^2 + C_{C_2}(k)(2k-3)$$

eşitliği bulunur. Burada karşımıza çıkan C_2 devir grafı aynı zamanda P_2 patika grafına eşittir. Bu grafın kromatik polinomu yerine yazılırsa

$$C_{A_{3,3,0}}(k)(k-1) + C_{C_2}(k)(2k-3) = k(k-1)^2(k-2)^2 + (k-1)(2k-3)$$

$$= k(k-1)[\, k^3-5k^2+10k-7] \qquad \text{(ii)}$$

olur. (i) = (ii) olduğundan denklem r = 1 için doğrudur.

İkinci adımda önermenin r = t için doğru olduğunu kabul ederiz. Yani

$$C_{A_{3,3,t}}(k) = \quad C_{A_{3,3,0}}(k)(k-1)^t + \; C_{C_{t+1}}(k)(2k-3)$$

denkleminin sağlandığını kabul edelim. r = t+1 için

$$C_{A_{3,3,t+1}}(k) = C_{A_{3,3,0}}(k)(k-1)^{t+1} + C_{C_{t+2}}(k)(2k-3)$$

denkleminin doğruluğu kontrol edilirse Teorem 1.4.2 ve Sonuç 1.4.13 gereği

$$\begin{aligned}
C_{A_{3,3,t+1}}(k) &= C_{C_4}(k).(k-1)^{t+1} - C_{A_{3,3,t}}(k) \\
&= (k-1)^{t+1}k(k-1)(k^2-3k+3) - [C_{A_{3,3,0}}(k)(k-1)^t + C_{C_{t+1}}(k)(2k-3)] \\
&= k(\, k^2-3k+3)\,(k-1)^{t+2} - k(k-2)^2(k-1)^{t+2} - (k-1)^{t+1}(2k-3) \\
&\qquad -(-1)^{t+1}(k-1)(2k-3)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
C_{A_{3,3,t+1}}(k) &= (k-1)^{t+1}[k(k-1)\,(\, k^2-3k+3) - k(k-2)^2-2k+3] - (-1)^{t+1}(k-1)(2k-3) \\
&= (k-1)^{t+1}[k^4-5k^3+10k^2-9k+3] + (-1)^{t+2}(k-1)(2k-3) \\
&= (k-1)^{t+1}(k-1)(\, k^3-4k^2+6k-3) + (-1)^{t+2}(k-1)(2k-3) \\
&= (k-1)^{t+1}(k-1)(\, k^3-4k^2+4k+2k-3) + (-1)^{t+2}(k-1)(2k-3) \\
&= (k-1)^{t+1}(k-1)(k(k-2)^2 + (2k-3) + (-1)^{t+2}(k-1)(2k-3) \\
&= (k-1)^{t+1}(k-1)k(k-2)^2 + (k-1)^{t+2}(2k-3) + (-1)^{t+2}(k-1)(2k-3)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu polinomların ait oldukları graflar $A_{3,3,0}$ ve C_{t+2} olduğundan

$$C_{A_{3,3,t+1}}(k) = C_{A_{3,3,0}}(k)(k-1)^{t+1} + C_{C_{t+2}}(k)(2k\text{-}3)$$

yazılır. Böylece r = t+1 için denklem sağlandığından ispat tamamlanmış olur.

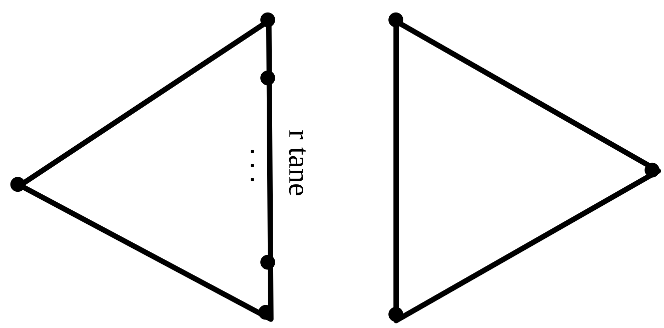
Aşağıdaki teoremde ortak olan kenardan ayırmak suretiyle $A_{3,3,r}$ grafının kromatik polinomuna ulaşılan ikinci bir yol verilmiştir. Daha önce ispatlanmış olan ortak kenardan ayırarak oluşturulan ayrık iki graf cinsinden polinomu ifade edebilme, şimdi de ortak kenarları üzerinde ortak noktalar olan grafları ayırarak verilecektir.

4.4. Teorem. $A_{3,3,r}$ grafının kromatik polinomu

$$C_{A_{3,3,r}}(k) = \frac{C_{C_{r+3}}(k)\, C_{C_3}(k)}{k(k-1)} + C_{C_{r+1}}(k)(k-1)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

İspat. $A_{3,3,r}$ grafı ortak kenarlarında bulunan (ortak kenarın uç köşeleri hariç) köşeleri, ayrılan graflardan tek bir tanesinde kalacak şekilde iki ayrı bağlantısız grafa ayrılsın. Elde edilen yeni graf Şekil 4.5'de gösterilmiştir.



Şekil 4.5. $A_{3,3,r}$ grafının iki bağlantısız grafa ayrılması

İspat, daha önce elde edilen formüllerle sonuç karşılaştırarak yapılacaktır. 4.3.Teorem gereği

$$C_{A_{3,3,r}}(k) = \quad C_{A_{3,3,0}}(k).(k-1)^{r} + C_{C_{r+1}}(k).(2k\text{-}3)$$

şeklinde yazılır. 1.4.13. Sonuç gereğince

$$C_{A_{3,3,r}}(k) = \text{k(k-1)}(k-2)^2(k-1)^r + C_{C_{r+1}}(k).((\text{k-1})+(\text{k-2}))$$

$$= \text{k}(k-2)^2(k-1)^{r+1} + C_{C_{r+1}}(k).(\text{k-1}) + C_{C_{r+1}}(k).(\text{k-2})$$

$$= \text{k}(k-2)^2(k-1)^{r+1} + [(k-1)^{r+1} + (-1)^{r+1}(k-1)](\text{k-2}) + C_{C_{r+1}}(k).(\text{k-1})$$

$$= \text{k}(k-2)^2(k-1)^{r+1} + (\text{k-2})(k-1)^{r+1} + (-1)^{r+1}(k-1)(\text{k-2}) + C_{C_{r+1}}(k).(\text{k-1})$$

yazılabilir. Burada işareti değiştirmeyeceğinden $(-1)^{r+1}$ yerine $(-1)^{r+3}$ alınabilir. O halde

$$C_{A_{3,3,r}}(k) = (k-1)^{r+1}(\text{k-2})[\text{k(k-2)+1}] + (-1)^{r+3}(k-1)(\text{k-2}) + C_{C_{r+1}}(k).(\text{k-1})$$

$$= (k-1)^{r+1}(k-1)^2(\text{k-2}) + (-1)^{r+3}(k-1)(\text{k-2}) + C_{C_{r+1}}(k).(\text{k-1})$$

$$= (k-1)^{r+3}(\text{k-2}) + (-1)^{r+3}(k-1)(\text{k-2}) + C_{C_{r+1}}(k).(\text{k-1})$$

olur ve devir grafların kromatik polinomlarının isimleri denklemde yerine konulursa

$$C_{A_{3,3,r}}(k) = C_{C_{r+3}}(k)(k-2) + C_{C_{r+1}}(k)(k-1)$$

$$= \frac{C_{C_{r+3}}(k)\, C_{C_3}(k)}{k(k-1)} + C_{C_{r+1}}(k)(k-1)$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur.

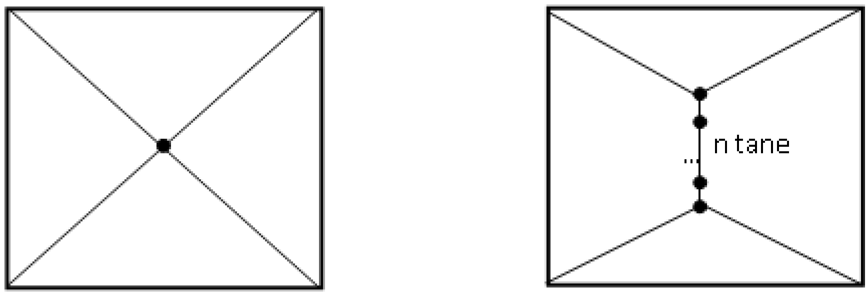
4.5. Teorem. Farklı dört devir grafının, Şekil 4.6'daki gibi tek bir noktada kesişerek oluşturduğu graf B_1 olsun. Ortak olan kesişim noktasına, her adımda birer köşe ekleyerek ortak bir patika graf haline getirdiğimizde oluşan graf, n köşe için B_n olacaktır. B_n grafının kromatik polinomu aşağıdaki şekildedir:

$$C_{B_n}(k) = (\text{k-1}) \left[\, C_{B_{n-1}}(k) + (-1)^n \text{k(k-2)(k-3)} \,\right]$$

B_n grafı, ilk graf olan B_1 türünden ifade edilirse

$$C_{B_n}(k) = (k-1)^{n-1} C_{B_1}(k) + 2.(\text{k-2})\,(\text{k-3})\, C_{C_n}(k)$$

dır.



Şekil 4.6. B_1 ve B_n grafları

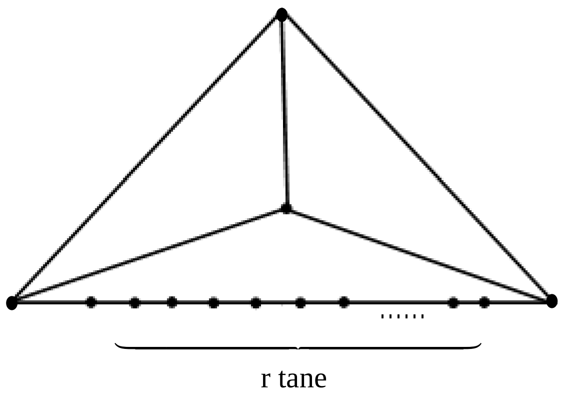
İspat yukarıdaki sonuçlar gibi tümevarım yöntemiyle yapılabilir.

4.6. Teorem. Üç köşeli iki devir grafı ortak bir kenar boyunca yapıştırılıp, serbest köşelerinden bir e kenarı ile birleştirilirse ortaya çıkan yeni graf, $G_{3,3,0}$ ile gösterilsin, bkz. Şekil 4.7. Eğer e kenarı üzerinde r tane köşe olursa ortaya çıkan $G_{3,3,r}$ grafının kromatik polinomu

$$C_{G_{3,3,r}}(k) = C_{G_{3,3,0}}(k).(k-1)^r + 2C_{C_{r+1}}(k).(k\text{-}2)$$

dır.

İspat. $G_{3,3,r}$ grafı



Şekil 4.7. $G_{3,3,r}$ grafı

şeklindedir. 1.4.2. Teorem gereği

$$C_{G_{3,3,r}}(k) = C_{A_{3,3,r}}(k) - C_{C_{r+3}}(k)$$

dır. 4.3. Sonuç gereği $A_{3,3,r}$ grafının kromatik polinomu yerine yazılırsa

$$C_{G_{3,3,r}}(k) = C_{A_{3,3,0}}(k)(k-1)^r + C_{C_{r+1}}(k)(2k-3) - C_{C_{r+3}}(k)$$

yazılır. Belirtilen grafların kromatik polinomları yukarıdaki eşitlikte yerine konulursa

$$\begin{aligned}
C_{G_{3,3,r}}(k) &= k(k-1)(k-2)^2(k-1)^r + [(k-1)^{r+1}+(-1)^{r+1}(k-1)](2k-3) \\
&\quad - [(k-1)^{r+3} + (-1)^{r+3}(k-1)] \\
&= k(k-2)^2(k-1)^{r+1} + (k-1)^{r+1}(2k-3) + (-1)^{r+1}(k-1)(2k-3) \\
&\quad - (k-1)^{r+3} - (-1)^{r+1}(k-1) \\
&= k(k-2)^2(k-1)^{r+1} + (k-1)^{r+1}(2k-3) - (k-1)^{r+3} + \\
&\quad (-1)^{r+1}(k-1)(2k-4) \\
&= (k-1)^{r+1}[k(k-2)^2 + 2k+3 - (k-1)^2] + 2(-1)^{r+1}(k-1)(k-2) \\
&= (k-1)^{r+1}[(k-1)(k-2)^2] + 2(-1)^{r+1}(k-1)(k-2) \\
&= (k-1)^{r+1}[k^3-5k^2+8k-4-2k+4+2k-4] + 2(-1)^{r+1}(k-1)(k-2) \\
&= (k-1)^{r+1}[k^3-5k^2+6k] + (k-1)^{r+1}[2k-4] + 2(-1)^{r+1}(k-1)(k-2) \\
&= (k-1)^{r+1}k(k-2)(k-3) + 2C_{C_{r+1}}(k)(k-2) \\
&= C_{G_{3,3,0}}(k)(k-1)^r + 2C_{C_{r+1}}(k)(k-2)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

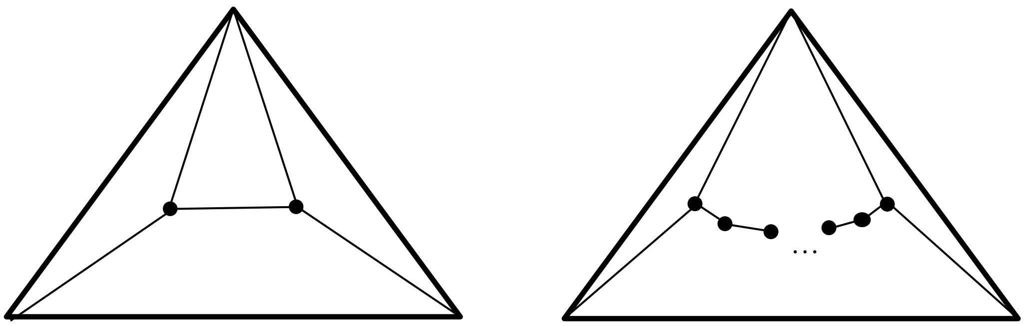
Bu grafın ortak kenarlarından biri yerine bir devir graf konulursa elde edilen yeni graf $G_{a,n}$ ile ifade edilsin. Aşağıdaki teorem bu grafın kromatik polinomunu vermektedir:

4.7. Teorem. $G_{3,3,r}$ grafında üç köşeli iki döngü grafın ortak kenarı yerine bir devir graf konulsun. Bu devir graf 3 köşeli ise $G_{a,0}$ ile, n+3 köşeli ise $G_{a,n}$ ile ifade edilirse, kromatik polinomu

$$C_{G_{a,n}}(\mathrm{k}) = (\mathrm{k}-1)(k-2)^3[\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^k\, C_{P_k}(\mathrm{k})] + (-1)^n\, C_{G_{a,0}}(\mathrm{k})$$

dır.

İspat. $G_{a,0}$ ve $G_{a,n}$ grafları Şekil 4.8'de gösterilmiştir.



Şekil 4.8. $G_{a,0}$ ve $G_{a,n}$ grafları

Birkhoff-Lewis Teoremi ve 1.4.13. Sonuç gereğince

$$C_{G_{a,1}}(\mathrm{k}) = \frac{(C_{C_3}(k))^3 C_{P_2}(k)}{k^3(k-1)^2} - C_{G_{a,0}}(\mathrm{k})$$

yazılabilir. Bu sonuç ardışık olarak devam ettirilirse

$$C_{G_{a,2}}(\mathrm{k}) = \frac{(C_{C_3}(k))^3 C_{P_3}(k)}{k^3(k-1)^2} - C_{G_{a,1}}(\mathrm{k})$$

$$C_{G_{a,3}}(\mathrm{k}) = \frac{(C_{C_3}(k))^3 C_{P_4}(k)}{k^3(k-1)^2} - C_{G_{a,2}}(\mathrm{k})$$

$$C_{G_{a,4}}(\text{k}) = \frac{(C_{C_3}(k))^3 C_{P_5}(k)}{k^3(k-1)^2} - C_{G_{a,3}}(\text{k})$$

ve

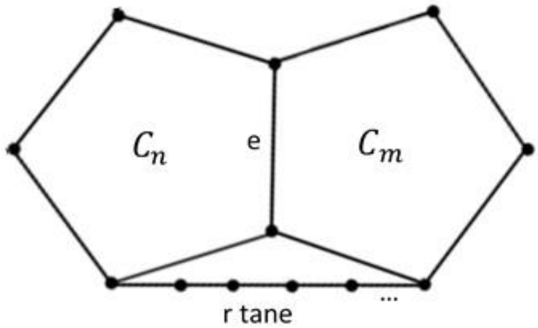
$$C_{G_{a,n}}(\text{k}) = \frac{(C_{C_3}(k))^3 C_{P_{n+1}}(k)}{k^3(k-1)^2} - C_{G_{a,n-1}}(\text{k})$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerdeki $G_{a,2m-1}$ şeklindeki çift köşeli devir grafların olduğu denklemler -1 ile çarpılıp tüm denklemler taraf tarafa toplanırsa

$$C_{G_{a,n}}(\text{k}) = (\text{k-1})(k-2)^3[\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^k\, C_{P_k}(\text{k})] + (-1)^n\, C_{G_{a,0}}(\text{k})$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

4.8. Teorem.



Şekil 4.9. $G_{n,m,r}$ grafı

$G_{n,m,r}$ grafı; $C_n, C_m,\ C_{r+3}$ şeklinde üç devir graftan oluşan, ikili olarak ortak bir kenara ve Şekil 4.9'da görüldüğü gibi ortak tek bir köşeye sahip bir graf olmak üzere bu grafın kromatik polinomu aşağıdaki şekildedir:

$$C_{G_{n,m,r}}(\text{k}) = \frac{C_{C_n}(k)C_{C_m}(k)C_{C_{r+1}}(k)}{k^2(k-1)} + (-1)^r C_{G_{n,m,0}}(\text{k})$$

İspat. 1.4.2. Teorem ve 1.4.13. Sonuç gereğince

$$C_{G_{n,m,r}}(\mathrm{k}) = \frac{C_{C_n}(k)C_{C_m}(k)C_{P_{r+1}}(k)}{k^2(k-1)} - C_{G_{n,m,r-1}}(\mathrm{k})$$

$$= \frac{C_{C_n}(k)C_{C_m}(k)C_{P_{r+1}}(k)}{k^2(k-1)} - [\frac{C_{C_n}(k)C_{C_m}(k)C_{P_r}(k)}{k^2(k-1)} - C_{G_{n,m,r-2}}(\mathrm{k})]$$

$$= \frac{C_{C_n}(k)C_{C_m}(k)C_{P_r}(k)}{k^2(k-1)}(\mathrm{k}-2) + C_{G_{n,m,r-2}}(\mathrm{k})$$

$$= \frac{C_{C_n}(k)C_{C_m}(k)C_{P_{r-1}}(k)}{k^2(k-1)}(k^2-3\mathrm{k}+3) - C_{G_{n,m,r-3}}(\mathrm{k})$$

$$= \frac{C_{C_n}(k)C_{C_m}(k)C_{P_{r-2}}(k)}{k^2(k-1)}(k^3-4k^2+6\mathrm{k}-4) + C_{G_{n,m,r-4}}(\mathrm{k})$$

$$\ldots$$

$$= \frac{C_{C_n}(k)C_{C_m}(k)C_{P_2}(k)}{k^2(k-1)} \frac{C_{C_{r+1}}(k)}{k(k-1)} + (-1)^r\, C_{G_{n,m,0}}(\mathrm{k})$$

dır. Böylece aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$C_{G_{n,m,r}}(\mathrm{k}) = \frac{C_{C_n}(k)C_{C_m}(k)C_{C_{r+1}}(k)}{k^2(k-1)} + (-1)^r C_{G_{n,m,0}}(\mathrm{k})$$

4.9. Teorem $\mathrm{G}_{\mathrm{n,m,r}}$ grafında C_n *ve* C_m graflarının ortak kenarlarında uç köşeler hariç s tane köşe olsun. Bu durumda elde edilen grafı $\mathrm{G}_{\mathrm{n,m,s,r}}$ olmak üzere kromatik polinomu

$$C_{\mathrm{G}_{\mathrm{n,m,s,r}}}(k) = \frac{C_{C_{n+m-2}}(k)C_{C_{s+2}}(k)C_{r+3}(k)}{k^2(k-1)} + (-1)^{r+1}C_{G_{n,m,s,0}}(\mathrm{k})$$

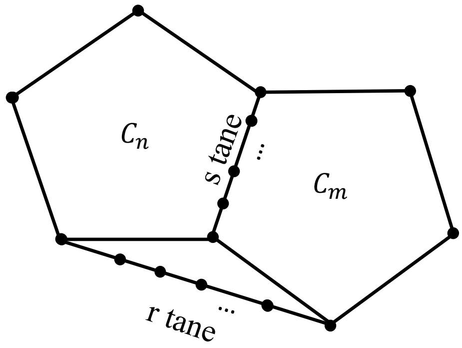
ile ifade edilir. Bu denklemde $\mathrm{G}_{\mathrm{n,m,s,0}}$ grafının kromatik polinomu ise

$$C_{\mathrm{G}_{\mathrm{n,m,s,0}}}(k) = \frac{C_{C_{n+m-2}}(k)C_{C_{s+2}}(k)}{k(k-1)} + (-1)^{s+1}\frac{C_{C_{n-1}}(k)C_{C_{m-1}}(k)}{k} - [\frac{C_{C_{n+m-4}}(k)C_{C_{s+3}}(k)}{k(k-1)}$$

$$+ (-1)^{s+2}\frac{C_{C_{n-2}}(k)C_{C_{m-2}}(k)}{k}]$$

şeklindedir.

İspat.



Şekil 4.10. $G_{n,m,s,r}$ grafı

1.4.2. Teorem, 1.4.10. Teorem ve 1.4.13. Sonuç gereğince

$$
\begin{aligned}
C_{G_{n,m,s,r}}(k) &= \frac{C_{A_{n,m,s}}(k)C_{P_{r+1}}(k)}{k} - C_{G_{n,m,s,r-1}}(k) \\
&= \frac{C_{A_{n,m,s}}(k)C_{P_{r+1}}(k)}{k} - \left[\frac{C_{A_{n,m,s}}(k)C_{P_{r}}(k)}{k} - C_{G_{n,m,s,r-2}}(k)\right] \\
&= \frac{C_{A_{n,m,s}}(k)C_{P_{r}}(k)}{k}(k-2) + C_{G_{n,m,s,r-2}}(k) \\
&= \frac{C_{A_{n,m,s}}(k)C_{P_{r}}(k)}{k}(k-2) + \frac{C_{A_{n,m,s}}(k)C_{P_{r-1}}(k)}{k} - C_{G_{n,m,s,r-3}}(k) \\
&= \frac{C_{A_{n,m,s}}(k)C_{P_{r-1}}(k)}{k}[(k-1)(k-2)+1] - C_{G_{n,m,s,r-3}}(k) \\
&= \frac{C_{A_{n,m,s}}(k)C_{P_{r-1}}(k)}{k}[k^2-3k+3] - C_{G_{n,m,s,r-3}}(k) \\
&= \frac{C_{A_{n,m,s}}(k)C_{P_{r-1}}(k)}{k}[k^2-3k+3] - \frac{C_{A_{n,m,s}}(k)C_{P_{r-2}}(k)}{k} \\
&\qquad + C_{G_{n,m,s,r-4}}(k) \\
&= \frac{C_{A_{n,m,s}}(k)C_{P_{r-2}}(k)}{k}[(k^2-3k+3)(k-1)-1] + C_{G_{n,m,s,r-4}}(k) \\
&= \frac{C_{A_{n,m,s}}(k)C_{P_{r-2}}(k)}{k}[k^3-4k^2+6k-4] + C_{G_{n,m,s,r-4}}(k)
\end{aligned}
$$

ve böylece

$$C_{\mathrm{G_{n,m,s,r}}}(k) = \frac{C_{A_{n,m,s}}(k)C_{P_2}(k)C_{C_{r+3}}(k)}{k^2(k-1)} + (-1)^{s+1}C_{G_{n,m,s,0}}(\mathrm{k})$$

denklemine ulaşılır. 4.2. Teorem ve 1.4.13. Sonuç gereğince

$$C_{\mathrm{G_{n,m,s,r}}}(k) = \frac{C_{C_{n+m-2}}(k)C_{C_{s+2}}(k)C_{C_{r+3}}(k)}{k^2(k-1)} + (-1)^{s+1}C_{G_{n,m,s,0}}(\mathrm{k})$$

elde edilir.

Bu denklemde $\mathrm{G_{n,m,s,0}}$ grafının kromatik polinomu ise

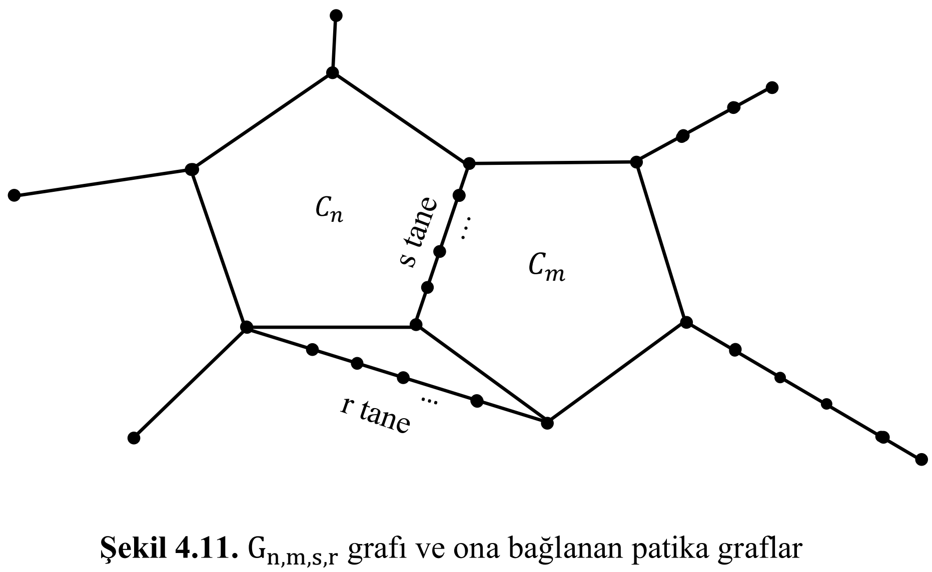
$$C_{\mathrm{G_{n,m,s,0}}}(k) = \frac{C_{C_{n+m-2}}(k)C_{C_{s+2}}(k)}{k(k-1)} + (-1)^{s+1}\frac{C_{C_{n-1}}(k)C_{C_{m-1}}(k)}{k}$$
$$-\left[\frac{C_{C_{n+m-4}}(k)C_{C_{s+3}}(k)}{k(k-1)} + (-1)^{s+2}\frac{C_{C_{n-2}}(k)C_{C_{m-2}}(k)}{k}\right]$$

şeklindedir.

4.10. Sonuç $\mathrm{G_{n,m,s,r}}$ grafında köşelere patika graflar eklenince oluşan yeni graf G olmak üzere, G grafının kromatik polinomu aşağıdaki şekildedir:

$$C_G(k) = \frac{C_{\mathrm{G_{n,m,s,r}}}(k)\prod_{a=1}^{n+m-2} C_{\mathrm{P_a}}(k)}{k^{n+m-2}}$$

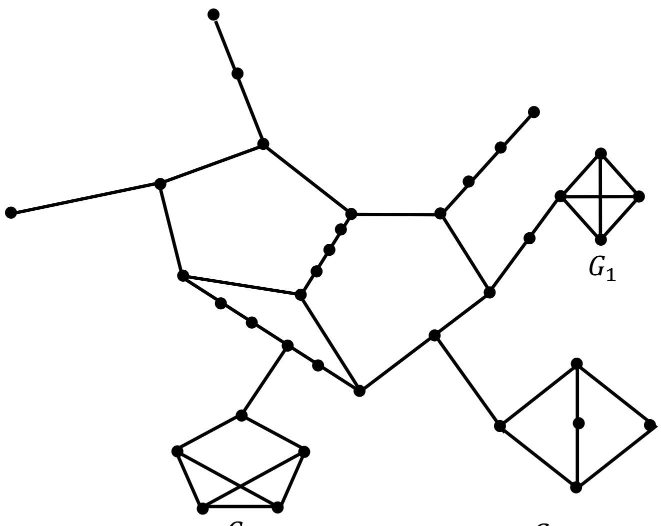
İspat.



Şekil 4.11. $\mathrm{G_{n,m,s,r}}$ grafı ve ona bağlanan patika graflar

$G_{n,m,s,r}$ grafı n+m-2 tane köşeye sahiptir. Her köşesine, kenar sayıları aynı veya farklı patika graflar eklenirse, 1.4.10. Teorem gereğince her patika graf, köşesinden ayrıldığında kromatik polinomlar çarpılıp k'ya bölünür. Dolayısıyla G grafının kromatik polinomu tüm grafların kromatik polinomlarının çarpımının k^{n+m-2} ile bölümüyle bulunur.

4.11. Örnek. Şekil 4.12'de verilen graf, G ile gösterilsin. Kromatik polinomunu hesaplamak için köşelerinden ayrılarak 1.4.10. Teorem gereğince düzenlenirse



Şekil 4.12. $G_{5,6,3,4}$ ve onunla bağlantılı graflar

$$C_G(\mathrm{k}) = \frac{C_{G_{5,6,3,4}}(k)C_{G_1}(k)C_{G_2}(k)C_{G_3}(k)C_{P_2}(k)C_{P_3}(k)C_{P_4}(k)C_{P_3}(k)C_{P_2}(k)C_{P_2}(k)}{k^9}$$

$$= \frac{C_{G_{5,6,3,4}}(k)C_{G_1}(k)C_{G_2}(k)C_{G_3}(k)[C_{P_2}(k)]^3[C_{P_3}(k)]^2C_{P_4}(k)}{k^9} \quad \ldots(*)$$

elde edilir. İfadede yer alan grafların kromatik polinomları

$$C_{G_{5,6,3,4}}(k) = \frac{C_{C_9}(k)C_{C_5}(k)C_{C_7}(k)}{k^2(k-1)} + C_{G_{5,6,3,0}}(k)$$

$$C_{G_{5,6,3,0}}(k) = \frac{C_{C_9}(k)C_{C_5}(k)}{k(k-1)} + \frac{C_{C_4}(k)C_{C_5}(k)}{k} - [\frac{C_{C_7}(k)C_{C_6}(k)}{k(k-1)} - \frac{C_{C_3}(k)C_{C_4}(k)}{k}]$$

$$C_{G_1}(k) = C_{K_4}(k)$$

$$= k(k-1)(k-2)(k-3)$$

$$C_{G_2}(k) = C_{C_4}(k)(k-1) - \frac{C_{C_3}(k)C_{C_3}(k)}{k(k-1)}$$

$$= (k-1)^5 + (k-1)^2 - k(k-1)(k-2)^2$$

$$= (k-1)[(k-1)^4 + (k-1) - k(k-2)^2]$$

$$= k(k-1)(k^3 - 5k^2 + 10k - 7)$$

$$C_{G_3}(k) = \frac{C_{C_3}(k)C_{C_3}(k)C_{P_2}(k)}{k^2(k-1)} - C_{K_4}(k)$$

$$= k(k-1)^2(k-2)^2 - k(k-1)(k-2)(k-3)$$

$$= k(k-1)(k-2)[k^2 - 4k + 5]$$

şeklinde elde edilir.

$C_{P_n}(k) = k\,(k-1)^{n-1}$ olduğundan

$$[C_{P_2}(k)]^3[C_{P_3}(k)]^2 C_{P_4}(k) = k^6(k-1)^{10}$$

$$[C_{P_2}(k)]^3[C_{P_3}(k)]^2 C_{P_4}(k) C_{K_4}(k) = k^7(k-1)^{11}(k-2)(k-3)$$

şeklindedir. Bu polinomlar (*) ifadesinde yerlerine yazılır ve düzenlenirse G grafının kromatik polinomu

$$\frac{\left[\frac{C_{C_9}(k)C_{C_5}(k)C_{C_7}(k)}{k^2(k-1)} + \mathrm{G}_{5,6,3,0}\right] k^9(k-1)^{13}(k^6 - 11k^5 + 53k^4 - 142k^3 + 222k^2 - 191k + 70)}{k^9}$$

bağıntısı ile elde edilir. Dolayısıyla

$$C_G(k) = \Big[\ \frac{((k-1)^8-1)((k-1)^4-1)((k-1)^6-1)(k-1)^2}{k^2} + \frac{k-1}{k}[((k-1)^8-1)((k-1)^4-1)$$

$$-\left((k-1)^6-1\right)\left((k-1)^5+1\right)\Big] + \frac{(k-1)^2}{k}\left[k\left((k-1)^3+1\right)\left(k^3-4k^2+7k-6\right)\right]\Big]$$

$$= (k-1)^{13}\left(k^6-11k^5+53k^4-142k^3+222k^2-191k+70\right)$$

olarak ifade edilir.

5. BULGULAR, TARTIŞMA VE SONUÇ

Graflar, son yıllarda başta fizik, biyoloji, kimya, elektronik, farmakoloji, toplum bilimi, ağlar gibi alanlardaki uygulamalarından dolayı önemli ve sık kullanılan bir çalışma alanı haline gelmiştir. Matematiğin günümüzde en hızla gelişen ve diğer alanlara en yaygın şekilde uygulanan dalı graf teoridir. Bu nedenle graflar üzerine oldukça yüksek sayıda araştırma vardır ve matematikçiler dışında, grafların uygulanabildiği tüm bilim alanlarındaki araştırmacılar için bu alan önemli bir disiplin olmuştur.

Bu tezde graf teorinin önemli bir alt dalı olan renklendirme teorisi ele alınmıştır. Eskiden beri bilinen sonuçlardan faydalanarak bir grafın kromatik polinomunun hesaplanmasında kullanılabilecek bazı yeni kısa metodlar elde edilmiştir. Bu metodların elde edilmesinde Birkhoff-Lewis teoremi ve verilen grafın bir köşesi veya bir kenarından alt graflarına bölünmesi yöntemlerinden faydalanılmıştır. Ancak yapılan hesaplamaların algoritmalara dayalı içiçe geçen hesaplamalar olması nedeniyle ana çalışma alanı matematik olmayan bilim insanları için çeşitli zorluklar söz konusu olmaktadır.

Bu tezde bu kavramın kullanıldığı alanlarda algoritmalar kullanılmasına gerek kalmadan, kromatik polinomun kolayca hesaplanabilmesini sağlayacak formüller elde edilmiştir. Bunu yaparken klasik graf teori yöntemleri arasında yer alan alt graflardan, kenar silme ve kenar büzme işlemlerinden ve Birkhoff-Lewis teoreminden faydalanılmıştır.

Bu yöntemler genel bir graf için bize uzun algoritmalar kullanılarak kromatik polinomun hesaplanabilmesi için yeterli bilgiyi vermektedir. Ancak yukarıda da belirtilen algoritmik süreçler, içiçe geçen hesaplama ve çizimler nedeniyle matematiksel olarak zorlayıcı olabilen bu hesaplamaları kolaylaştırmak amacıyla bu tezde çok sık kullanılan bazı graf yapıları ele alınarak bağlantılı grafları belli yöntemlerle daha küçük graflara ayırma yoluyla bu grafların kromatik polinomlarının hesaplanması için yeni yöntemler elde edilmiştir. Farklı şekillerde birleştirilen grafların, Birkhoff-Lewis teoremi, köşe ve kenardan ayırma gibi yollarla kromatik polinomlarına ulaşabileceğimiz kısayol formülleri elde edilmiştir..

Benzer çalışmalar köşe ve kenar silme ve köşe ekleme işlemleri için de yapılabilir.

KAYNAKLAR

Albertson, M. O., Boutin, D. L., Gethner, E. (2010). *The thickness and chromatic number of r-inflated graphs*, Discrete Mathematics, 310, 2725-2734.

Aldous, J. M., Wilson, R. J. (2004). *Graphs and Applications, An Introductory Approach*, Springer, London.

Avis, D., De Simone, C., Nobili, P. (2002). *On the chromatic polynomial of a graph*, Math. Program., Ser. B. 82, 439-452.

Beck, M., Blado, D., Crawford, J., Jean-Louis, T., Young, M. (2015). *On weak chromatic polynomials of mixed graphs*, Graphs and Combinatorics, 31, 91-98.

Benjamin, A., Chartrand, G., Zhang, P. (2015). *The Fascinating World of Graph Theory*, Princeton University Press, Princeton.

Bollobas, B. (1978). *Chromatic number, girth and maximal degree*, Discrete Mathematics, 24, 311-314.

Bondy, J. A., Murty, U. S. R. (1982). *Graph Theory with Applications*, North Holland, NY.

Bondy, J. A., Murty, U. S. R. (2008). *Graph Theory*, Springer NY.

Brown, J., Erey, A. (2015). *New bounds for chromatic polynomials and chromatic roots*, Discrete Mathematics, 338, 1938-1946.

Capobianco, M., Molluzzo, J. C. (1978). *Examples and Counterexamples in Graph Theory*, North-Holland, NY.

Cardoso, D. M., Silva, M. E., Szymanski, J. (2012). *A generalization of chromatic polynomials of a graph subdivision*, Journal of Mathematical Sciences, 182 (2), 246-254.

Celik, F., Sanli, U., Cangul, I. N. (2021). *The Spectral Polynomials of Two Joining Graphs: Splices and Links*, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática (preprint)

Chao, C-Y., Zhao, L-C. (1984). *Chromatic polynomials of connected graphs*, Arch. Math., 43, 187-192.

Chartrand, G. (1985). *Introductory Graph Theory*, New York, Dover.

Chartrand, G., Zhang, P. (2012). *A First Course in Graph Theory*, New York, Dover.

Clark, J., Holton, D. A. (1995). *A First Look at Graph Theory*, World Scientific, Singapour.

Deo, N. (1974). *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*, Prentice-Hall, NJ.

Diestel, R. (2010). *Graph Theory*, Springer GTM.

Dohmen, K. (1998). *Bounds to the chromatic polynomial of a graph*, Result. Math., 33, 87-88

Foulds, L. R. (1992). *Graph Theory Applications, Springer, New York.*

Gross, J. L., Yellen J. (2006). *Graph Theory and Its Applications (Second Edition),* CRC Press, USA.

Hartsfield, N., Ringel, G. (2003). *Pearls in Graph Theory, A Comprehensive Introduction,* Dover NY.

Kahale, N., Schulman, L. J. (1996). *Bounds on the chromatic polynomial and on the number of acyclic orientations of a graph*, Combinatorica, 16 (3), 383-397

Kotlyar, B. D. (1998). *Necessary condition for a chromatic polynomial,* Cybernetics and Systems Analysis, 34 (5), 779-780.

Sanli, U., Cangul, I. N. (2017). *A New Method for Calculating the Chromatic Polynomial*, Applied Sciences (APPS), 19, 110-121

Sanli, U., Celik, F., Delen, S., Cangul, I. N. (2020). *Connectedness Criteria for Graphs by Means of Omega Invariant*, FILOMAT, 34 (2), 647-652

Sanli, U., Paikray, S. K., Cangul, I. N. (2021). *New Results on Chromatic Polynomials*, New Trends in Applied Analysis and Computational Mathematics, Proceedings of the International Conference on Advances in Mathematics and Computing (ICAMC-2020), Advances in Intelligent Systems and Computing, 1356, Edtrs. S. K. Paikray, H. Dutta, J. N. Mordeson, Springer Singapore, 89-98.

Skiena, S. (1990). *Implementing Discrete Mathematics*, Combinatorics and Graph Theory with Mathematica, Reading, MA, Addison-Wesley, 210.

Thomassen, C. (2009). *The chromatic polynomial and list colorings*, Journal of Combinatorial Theory. Ser. B, 99, 474-479.

Thulasiraman, K., Swamy, M. N. S. (1992). *Graphs: Theory and Algorithms,* John Wiley and Sons, NY.

Togan, M., Yurttas, A., Sanli, U., Celik, F., Cangul, I. N. (2020). *Inverse problem for Bell Index*, FILOMAT, 34 (2), 615-621.

Trudeau, R. J. (1993). *Introduction to Graph Theory, Dover, NY.*

Tutte, W. T. (1998). *Graph Theory as I have Known It*, Oxford Science Publications, Oxford.

Vasudev, C. (2006). *Graph Theory with Applications*, New Age International Publishers, India.

Vasudev, C. (2007). *Combinatorics and Graph Theory,* New Age International Publishers, India.

Wallis, W. D. (2007). *A Beginner's Guide to Graph Theory,* Birkhauser, Boston.

West, D. B. (2001). *Introduction to Graph Theory*, Pearson, India.

Wilson, R. J. (1998). *Introduction to Graph Theory,* Addison Wesley, Malaysia.

Wilson, R. J., Watkins, J. J. (1990). *Graphs, An Introductory Approach*, John Wiley and Sons, NY.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Utkum ŞANLI
Doğum Yeri ve Tarihi	: Ankara / 1982
Yabancı Dili	: İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	
Lise	: Bursa Kız Lisesi
Lisans	: Ankara Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2004
Yüksek Lisans	: Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik ABD, 2015
Doktora	: Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, 2021
İletişim (e–posta)	: utkumsanli@hotmail.com

Yayınları:

Sanli, U., Cangul, I. N. (2017). *A New Method for Calculating the Chromatic Polynomial*, Applied Sciences (APPS), 19, 110-121

Togan, M., Yurttas, A., Sanli, U., Celik, F., Cangul, I. N. (2020). *Inverse problem for Bell Index*, FILOMAT, 34 (2), 615-621

Sanli, U., Celik, F., Delen, S., Cangul, I. N. (2020). *Connectedness Criteria for Graphs by Means of Omega Invariant*, FILOMAT, 34 (2), 647-652

Celik, F., Sanli, U., Cangul, I. N. (2021). *The Spectral Polynomials of Two Joining Graphs: Splices and Links*, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática (preprint)

Sanli, U., Paikray, S. K., Cangul, I. N. (2021). *New Results on Chromatic Polynomials*, New Trends in Applied Analysis and Computational Mathematics, Proceedings of the International Conference on Advances in Mathematics and Computing (ICAMC-2020), Advances in Intelligent Systems and Computing, 1356, Edtrs. S. K. Paikray, H. Dutta, J. N. Mordeson, Springer Singapore, https://doi.org/10.1007/978-981-16-1402-6_8, 89-98.