T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

ORTAÖĞRETİM 10. VE 11. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN ÇOKGEN, DÖRTGEN, ÇEMBER VE DAİRE BİLGİLERİNİN APOS TEORİSİ ÇERÇEVESİNDE DEĞERLENDİRİLMESİ

DOKTORA TEZİ

Şafak YILDIZ
0000-0001-5372-3526

BURSA – 2025

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

ORTAÖĞRETİM 10. VE 11. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN ÇOKGEN, DÖRTGEN, ÇEMBER VE DAİRE BİLGİLERİNİN APOS TEORİSİ ÇERÇEVESİNDE DEĞERLENDİRİLMESİ

DOKTORA TEZİ

Şafak YILDIZ
0000-0001-5372-3526

Danışman
Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ

BURSA – 2025

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim.

Şafak YILDIZ

13/01/2025

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DOKTORA BENZERLİK YAZILIM RAPORU

BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 13/01/2025

Tez Başlığı / Konusu: Ortaöğretim 10. ve 11. Sınıf Öğrencilerinin Çokgen, Dörtgen, Çember ve Daire Bilgilerinin APOS Teorisi Çerçevesinde Değerlendirilmesi

Yukarıda başlığı gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 162 sayfalık kısmına ilişkin, 12/01/2025 tarihinde şahsım tarafından Turnitin adlı benzerlik tespit programından (Turnitin)* aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan özgünlük raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 9'dur.

Uygulanan filtrelemeler:
1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar hariç/dahil
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Bursa Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü tez çalışması özgünlük raporu alınması ve kullanılması uygulama esaslarını inceledim ve bu uygulama esaslarında belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir benzerlik içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim

13/01/2025

Adı Soyadı:	Şafak YILDIZ
Öğrenci No:	812252002
Anabilim Dalı:	Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi
Programı:	Matematik Eğitimi
Statüsü:	☐Y. Lisans ☒ Doktora

Danışman
Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ
13/01/2025

TEZ YAZIM KILAVUZU'NA UYGUNLUK ONAYI

"Ortaöğretim 10. ve 11. Sınıf Öğrencilerinin Çokgen, Dörtgen, Çember ve Daire Bilgilerinin APOS Teorisi Çerçevesinde Değerlendirilmesi" adlı doktora tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan	Danışman
Şafak YILDIZ	Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi ABD Başkanı
Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ

JÜRİ ONAY SAYFASI

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı'nda 812252002 numara ile kayıtlı Şafak YILDIZ'ın hazırladığı "Ortaöğretim 10. ve 11. Sınıf Öğrencilerinin Çokgen, Dörtgen, Çember ve Daire Bilgilerinin APOS Teorisi Çerçevesinde Değerlendirilmesi" konulu doktora çalışması ile ilgili tez savunma sınavı, 19/02/2025 günü 14:00 - 16:00 saatleri arasında yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin **başarılı** olduğuna **oy birliği** ile karar verilmiştir.

Sınav Komisyonu Başkanı
Prof. Dr. Kürşat YENİLMEZ
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
WoS ResearcherID: LMO-0250-2024
Scopus Author ID: 25028976700
ORCID: 0000-0001-6256-4686

Üye (Danışman)
Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ
Bursa Uludağ Üniversitesi
WoS ResearcherID: A-1802-2016
Scopus Author ID: 6506973222
ORCID: 0000-0001-8619-8334

Üye
Prof. Dr. Gül KALELİ YILMAZ
Bursa Uludağ Üniversitesi
WoS ResearcherID: AAG-9995-2021
Scopus Author ID: 55128406300
ORCID: 0000-0002-8567-3639

Üye
Doç. Dr. Bestami Buğra ÜLGER
Bursa Uludağ Üniversitesi
WoS ResearcherID: J-6898-2018
Scopus Author ID: 56275524200
ORCID: 0000-0003-2898-5625

Üye
Prof. Dr. Hüseyin Bahadır YANIK
Anadolu Üniversitesi
WoS ResearcherID: GIU-4827-2022
Scopus Author ID: 26642256000
ORCID: 0000-0001-7769-2306

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında yaptığı rehberlikten dolayı tez danışmanım Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ'a, çalışmamı detaylı bir şekilde inceleyerek görüşleriyle önemli katkılar sunan Prof. Dr. Kürşat YENİLMEZ'e, tez savunma jürisinde yer alarak önerileriyle çalışmamın daha nitelikli hale gelmesini sağlayan Prof. Dr. Hüseyin Bahadır YANIK'a, tez izleme komitesinde yer alarak görüşleriyle çalışmama katkı sunan Prof. Dr. Gül KALELİ YILMAZ'a ve Doç. Dr. Bestami Buğra ÜLGER'e teşekkür ederim.

Hayatım boyunca her zaman beni destekleyen anneme ve babama teşekkür ederim.

ÖZET

Yazar	Şafak YILDIZ
Üniversite	Bursa Uludağ Üniversitesi
Enstitü	Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Ana Bilim Dalı	Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi
Bilim Dalı	Matematik Eğitimi
Tezin Niteliği	Doktora Tezi
Tezin Sayfa Sayısı	xii + 162
Mezuniyet Tarihi	19 / 02 / 2025
Tez Danışmanı	Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ

ORTAÖĞRETİM 10. VE 11. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN ÇOKGEN, DÖRTGEN, ÇEMBER VE DAİRE BİLGİLERİNİN APOS TEORİSİ ÇERÇEVESİNDE DEĞERLENDİRİLMESİ

Bu çalışmanın amacı 10. sınıf öğrencilerinin çokgen ve dörtgen, 11. sınıf öğrencilerinin ise çember ve daire kavramlarına yönelik oluşan bilgilerini APOS teorisi çerçevesinde incelemektir. Çalışma, durum çalışması ile desenlenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu, Ege Bölgesi'nde yer alan bir devlet ortaöğretim kurumunda 10. ve 11. sınıfa devam etmekte olan 10 öğrenci oluşturmaktadır. Veri toplama aracı olarak yarı yapılandırılmış görüşme formu kullanılmıştır. Elde edilen veriler içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. Çalışma sonunda öğrencilerin çoğunluğunun çokgen kavramını ve paralelkenarın kenar özelliklerini etkin bir şekilde kullanamadığı görülmüştür. Öğrencilerin çoğunluğunun eşkenar dörtgenin alanı ile üçgenin alanı, yamuğun alanı ile üçgen ve dikdörtgenin alanları arasında ilişki kuramadıkları, bunun yerine eşkenar dörtgenin ve yamuğun alanını hesaplamak için bu şekillerin alan formüllerini kullandıkları tespit edilmiştir. Hiçbir öğrencinin dikdörtgenin alanı ile üçgenin alanı, karenin alanı ile üçgenin alanı ve dikdörtgenin alanı ile karenin alanı arasında ilişki kuramadığı görülmüştür. Öğrencilerin çoğunluğunun çemberin açısı ile üçgenin açısı, yay parçasının uzunluğu ile oran-orantı arasında ilişki kuramadığı tespit edilmiştir. Öğrencilerin hiçbirinin daire diliminin alanı ile oran-orantı arasında ilişki kuramadıkları ve genel olarak daire diliminin alanını veren formülü kullandıkları görülmüştür. Çalışma sonunda öğrencilerin çoğunluğunun geometrik kavramları oluşturmada APOS teorisine göre süreç düzeyinde oldukları tespit edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: APOS teorisi, çokgen, çember, daire, dörtgen

ABSTRACT

Name and Surname	Şafak YILDIZ
University	Bursa Uludag University
Institution	Institute of Educational Sciences
Field	Mathematics and Science Education
Branch	Mathematics Education
Degree	PhD Thesis
Page Number	xii + 162
Degree Date	19 / 02 / 2025
Supervisor	Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ

EVALUATION OF SECONDARY EDUCATION 10TH AND 11TH GRADE STUDENTS' KNOWLEDGE ON POLYGON, QUADRANT AND CIRCLE WITHIN THE FRAMEWORK OF APOS THEORY

The aim of this study is to examine the knowledge of 10th grade students about the concepts of polygon and quadrilateral, and 11th grade students about the concepts of circle within the framework of APOS theory. The study group of the research consists of 10 students attending the 10th and 11th grades at a state secondary education institution in the Aegean Region. The study was designed with a case study. A semi-structured interview form was used as a data collection tool. The obtained data were analyzed by content analysis. At the end of the study, it was observed that the majority of the students could not use the concept of polygon and the edge properties of parallelograms effectively. It was determined that the majority of the students could not establish a relationship between the area of a rhombus and the area of a triangle, the area of a trapezoid and the areas of triangles and rectangles, and generally used the area formulas of rhombus and trapezoid. It was observed that none of the students could establish a relationship between the area of a rectangle and the area of a triangle, the area of a square and the area of a triangle, or the area of a rectangle and the area of a square. It was determined that the majority of the students could not establish a relationship between the angle of the circle and the angle of the triangle, the length of the arc segment and ratio-proportion. It was observed that none of the students could establish a relationship between the area of the circle slice and ratio-proportion, and they generally used the formula that gives the area of the circle slice. At the end of the study, it was determined that the majority of the students were at the process level according to APOS theory in constructing geometric concepts.

Keywords: APOS theory, circle, polygon, quadrilateral

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEZ YAZIM KILAVUZU'NA UYGUNLUK ONAYI iii
JÜRİ ONAY SAYFASI iv
TEŞEKKÜR v
ÖZET vi
ABSTRACT vii
İÇİNDEKİLER viii
TABLOLAR LİSTESİ x
ŞEKİLLER LİSTESİ xi

1. BÖLÜM

GİRİŞ

1.1. Problem Durumu 1
1.2. Araştırmanın Problemi 2
1.3. Araştırmanın Amacı 3
1.4. Araştırmanın Önemi 3
1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları 5
1.6. Araştırmanın Varsayımları 5
1.7. Tanımlar 6

2. BÖLÜM

KAVRAMSAL ÇERÇEVE

2.1. Soyutlama 7
2.1.1. Soyutlamada Sosyo Kültürel Bakış Açısı 7
2.1.2. Soyutlamada Bilişsel Bakış Açısı 8
2.2. APOS Teorisi 10
2.3. Geometri 14
2.4. APOS Teorisi İle İlgili Yapılmış Çalışmalar 15

3. BÖLÜM

YÖNTEM

3.1. Araştırmanın Modeli 22
3.2. Çalışma Grubu 23
3.3. Verilerin Toplanması 24
3.4. Çalışmanın Uygulama Aşaması 25
3.5. Verilerin Analizi 25

3.6. Geçerlik ve Güvenirlik 27

4. BÖLÜM

BULGULAR

4.1. Birinci Alt Probleme Yönelik Bulgular 30
4.1.1. Halil'in Oluşan Bilgilerinin Analizi 30
4.1.2. Damla'nın Oluşan Bilgilerinin Analizi 41
4.1.3. Furkan'ın Oluşan Bilgilerinin Analizi 54
4.1.4. Büşra'nın Oluşan Bilgilerinin Analizi 68
4.1.5. Ceren'in Oluşan Bilgilerinin Analizi 80
4.2. İkinci alt probleme yönelik bulgular 93
4.2.1. Gülay'ın Oluşan Bilgilerinin Analizi 93
4.2.2. Merve'nin Oluşan Bilgilerinin Analizi 103
4.2.3. Nazlı'nın Oluşan Bilgilerinin Analizi 112
4.2.4. Pelin'in Oluşan Bilgilerinin Analizi 120
4.2.5. Taner'in Oluşan Bilgilerinin Analizi 129

5. BÖLÜM

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

5.1. Sonuç 139
5.1.1. Birinci Alt Probleme Yönelik Sonuçlar 139
5.1.2. İkinci Alt Probleme Yönelik Sonuçlar 141
5.2. Tartışma 142
5.2.1. Birinci Alt Probleme Yönelik Tartışma 142
5.2.2. İkinci Alt Probleme Yönelik Tartışma 145
5.3. Öneriler 148
KAYNAKÇA 149
Ek 1: 10. Sınıf Veri Toplama Aracı 158
Ek 2: 11. Sınıf Veri Toplama Aracı 160
Ek 3: Araştırma Uygulama İzni 162

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo *Sayfa*

1 Katılımcıların demografik özellikleri 23
2 Örnek veri analizi 26
3 Araştırmalarda kullanılan geçerlik ve güvenirliğe yönelik kavramlar 28
4 Birinci alt probleme yönelik öğrencilerde tespit edilen bilişsel yapılar 93
5 İkinci alt probleme yönelik öğrencilerde tespit edilen bilişsel yapılar 138

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil *Sayfa*

1 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 1$ fonksiyonunun grafiği ... 13
2 Bilişsel yapıların oluşumu ... 13
3 Halil'in birinci soruya yönelik çözümü ... 30
4 Halil'in ikinci soruya yönelik çözümü ... 32
5 Halil'in üçüncü soruya yönelik çözümü ... 33
6 Halil'in dördüncü soruya yönelik çözümü ... 34
7 Halil'in altıncı soruya yönelik çözümü ... 36
8 Halil'in yedinci soruya yönelik çözümü ... 37
9 Halil'in sekizinci soruya yönelik çözümü ... 39
10 Halil'in dokuzuncu soruya yönelik çözümü ... 40
11 Damla'nın birinci soruya yönelik çözümü ... 42
12 Damla'nın ikinci soruya yönelik çözümü ... 43
13 Damla'nın üçüncü soruya yönelik çözümü ... 44
14 Damla'nın dördüncü soruya yönelik çözümü ... 46
15 Damla'nın beşinci soruya yönelik çözümü ... 47
16 Damla'nın altıncı soruya yönelik çözümü ... 49
17 Damla'nın yedinci soruya yönelik çözümü ... 51
18 Damla'nın sekizinci soruya yönelik çözümü ... 52
19 Damla'nın dokuzuncu soruya yönelik çözümü ... 53
20 Furkan'ın birinci soruya yönelik çözümü ... 55
21 Furkan'ın ikinci soruya yönelik çözümü ... 56
22 Furkan'ın üçüncü soruya yönelik çözümü ... 57
23 Furkan'ın dördüncü soruya yönelik çözümü ... 58
24 Furkan'ın beşinci soruya yönelik çözümü ... 60
25 Furkan'ın altıncı soruya yönelik çözümü ... 62
26 Furkan'ın yedinci soruya yönelik çözümü ... 64
27 Furkan'ın sekizinci soruya yönelik çözümü ... 65
28 Furkan'ın dokuzuncu soruya yönelik çözümü ... 66
29 Büşra'nın birinci soruya yönelik çözümü ... 68
30 Büşra'nın ikinci soruya yönelik çözümü ... 69
31 Büşra'nın üçüncü soruya yönelik çözümü ... 70
32 Büşra'nın dördüncü soruya yönelik çözümü ... 72
33 Büşra'nın beşinci soruya yönelik çözümü ... 73
34 Büşra'nın altıncı soruya yönelik çözümü ... 75
35 Büşra'nın yedinci soruya yönelik çözümü ... 76
36 Büşra'nın sekizinci soruya yönelik çözümü ... 77
37 Büşra'nın dokuzuncu soruya yönelik çözümü ... 79
38 Ceren'in birinci soruya yönelik çözümü ... 80

39 Ceren’in ikinci soruya yönelik çözümü 82
40 Ceren’in üçüncü soruya yönelik çözümü 83
41 Ceren’in dördüncü soruya yönelik çözümü 85
42 Ceren’in beşinci soruya yönelik çözümü 86
43 Ceren’in altıncı soruya yönelik çözümü 87
44 Ceren’in yedinci soruya yönelik çözümü 89
45 Ceren’in sekizinci soruya yönelik çözümü 91
46 Ceren’in dokuzuncu soruya yönelik çözümü 92
47 Gülay’ın birinci soruya yönelik çözümü 94
48 Gülay’ın ikinci soruya yönelik çözümü 95
49 Gülay’ın üçüncü soruya yönelik çözümü 96
50 Gülay’ın beşinci soruya yönelik çözümü 98
51 Gülay’ın altıncı soruya yönelik çözümü 100
52 Gülay’ın yedinci soruya yönelik çözümü 102
53 Merve’nin birinci soruya yönelik çözümü 103
54 Merve’nin ikinci soruya yönelik çözümü 105
55 Merve’nin üçüncü soruya yönelik çözümü 106
56 Merve’nin dördüncü soruya yönelik çözümü 108
57 Merve’nin altıncı soruya yönelik çözümü 109
58 Merve’nin yedinci soruya yönelik çözümü 110
59 Nazlı’nın birinci soruya yönelik çözümü 112
60 Nazlı’nın ikinci soruya yönelik çözümü 113
61 Nazlı’nın üçüncü soruya yönelik çözümü 115
62 Nazlı’nın dördüncü soruya yönelik çözümü 116
63 Nazlı’nın altıncı soruya yönelik çözümü 117
64 Nazlı’nın yedinci soruya yönelik çözümü 118
65 Pelin’in birinci soruya yönelik çözümü 120
66 Pelin’in ikinci soruya yönelik çözümü 121
67 Pelin’in üçüncü soruya yönelik çözümü 122
68 Pelin’in dördüncü soruya yönelik çözümü 124
69 Pelin’in beşinci soruya yönelik çözümü 125
70 Pelin’in altıncı soruya yönelik çözümü 126
71 Pelin’in yedinci soruya yönelik çözümü 127
72 Taner’in birinci soruya yönelik çözümü 129
73 Taner’in ikinci soruya yönelik çözümü 130
74 Taner’in üçüncü soruya yönelik çözümü 131
75 Taner’in dördüncü soruya yönelik çözümü 133
76 Taner’in beşinci soruya yönelik çözümü 134
77 Taner’in altıncı soruya yönelik çözümü 135
78 Taner’in yedinci soruya yönelik çözümü 137

1. BÖLÜM
GİRİŞ

1.1. Problem Durumu

Matematik zaman içinde aktarılan deneyimlerden oluşmaktadır. Matematik evrendeki sistemi kendi başına açıklayamasa da kendine özgü mantıksal sistemi diğer bilimlerin kullanmasıyla birçok durumun açıklanmasını sağlayan önemli bir araçtır. Matematik evrendeki görünmeyen düzenin insanları ikna edecek şekilde açıklanmasında önemli bir rol üstlenir.

Bireyler yaşamlarının her anında matematiksel düşünceyi kullanmayı gerektiren, yorumlama, akıl yürütme, çıkarım yapma, ilişkilendirme durumlarıyla karşı karşıya kalabilmektedirler. Bu yüzden matematiksel düşünce bireylerin yaşamlarında etkili kararlar almalarını sağlayan önemli bir faktördür. Matematiksel düşünce bireylerin yaşamlarını planlamada, yaratıcı fikirler üretmede ve gelecekte karşılaşabilecekleri durumlara yönelik hazırlık yapmada oldukça etkilidir. Bu açıdan bakıldığında sadece belirli bir meslek grubunun veya kişilerin değil toplumdaki her bireyin matematiksel düşünceyi kullanma ihtiyacı hissedebileceği durumlar oluşabilmektedir.

Matematik öğretiminin amaçlarından birisi bireylerin öğrendikleri kavramları yaşamlarına yansıtabilmeleri ve etkili bir şekilde kullanabilmeleridir. Matematiksel bir kavramın birey tarafından bir şey ifade etmesi ise ilgili kavramın zihinde çeşitli aşamalardan geçerek zihinsel bir ürüne dönüşmesiyle mümkündür. Oluşan bu ürünün ne kadar etkili olduğu ise bireyin kavramın özünü zihnine ne kadar yansıtabildiğiyle ilgilidir. Birey bir kavramı zihninde yapılandırırken farklı kavramlarla ilişkilendirebilmeli, farklı kavramlarla koordinasyon sağlayabilmeli, kavramı farklı yönlerden değerlendirebilmelidir. Bu sayede birey çoklu düşünme yolları geliştirebilecek ve problemlere farklı yaklaşımlar sergileyebilecektir. Fakat birçok öğrencinin kavramsal öğrenmeden ziyade prosedürleri öğrendiği bir gerçektir. Öğrencilerin matematik derslerinde kavramsal öğrenmeyi tam sağlamamaları önemli bir problem olarak öğreticilerin karşısına çıkmaktadır.

Matematik eğitiminde alt öğrenme alanlarından birisi geometridir. Geometriye yönelik kavramlarla günlük hayatta sık karşılaşılmasının yanında geometri kavramları sanatta, mimaride görsel öğe olarak kullanılır ve ölçmeye yönelik bazı meslekleri de doğrudan ilgilendirir. Bireylerin zihinlerinde bir şekli tasvir edebilmelerinde, şekil üzerinde zihinsel dönüşüm gerçekleştirmelerinde ya da düşündükleri bir şekli yansıtabilmelerinde geometri kavramları önemli bir rol almaktadır. Çünkü zihinsel bir tasarım için üç boyutlu düşünebilme oldukça önemlidir. Üç boyutlu düşünebilmek içinse temel geometrik şekiller olan çokgen,

dörtgen, çember ve daire kavramları önemli bir rol üstlenir. Bu yüzden öğrencilerin bu kavramlara yönelik oluşan bilgilerinin incelenmesi, anlamlı ve etkili bir öğrenme için gereklidir.

Kavram öğretildikten sonra ilgili kavramın birey tarafından nasıl öğrenildiğinin tespit edilmesi öğreticilerin öğretimin eksikliklerini giderebilmeleri açısından önemlidir. Yapılan öğretim sonunda hedeflenen kazanımlar ne ölçüde edinilmiştir? Birey ilgili kavramı diğer kavramlarla açıklayabilmekte mi yoksa sadece kuralları mı bilmektedir? Bu soruların öğretici tarafından cevap bulması yapılan öğretimin etkinliğinin tespit edilmesini sağlayabilecektir. Dışarıdan gözlemlenerek bu soruların cevap bulması pek mümkün değildir.

Bireylerin matematiksel kavramları anlamlı bir şekilde oluşturabilmeleri oldukça önemli olmasına rağmen matematiksel kavramların daha çok ezberlendiği düşünülmektedir. Dolayısıyla matematik öğreticilerinin sıkça karşılaştığı temel problem, matematiksel kavramların anlamlı bir şekilde öğrenilmemesi ve öğrenilen kavramın diğer kavramlarla yeterince ilişkilendirilememesidir. Fakat bilginin nasıl oluşturulduğu, yeterli düzeyde olup olmadığı, bilgi oluşturulurken hangi ilişkilerin kurulduğu soyutlama modelleri kullanılarak incelenebilir. Bu çalışmada ortaöğretim öğrencilerinin çokgen, dörtgen, çember ve daire kavramlarına yönelik bilgilerinin değerlendirilmesi bir soyutlama modeli olan APOS teorisi çerçevesinde ele alınmıştır. Apos teorisi, ileri matematiksel kavramların öğretimi üzerine odaklanmış bir soyutlama modelidir. APOS teorisi oluşturulan bir matematiksel kavramın, içselleştirilip içselleştirilmediğini, bireyin zihninde önceden oluşturulmuş kavramlarla ne düzeyde bağlantı kurulduğunu ortaya çıkarabilecek bir teoridir. Bu açıdan APOS teorisi öğreticilere yaptıkları öğretimin ne düzeyde amaca ulaştığını değerlendirebilmelerini sağlamaktadır. Dolayısıyla bu çalışmada, geleneksel öğretim sonunda oluşturulan bilgilerin yeterli düzeyde olup olmadığına odaklanıldığı için APOS teorik çerçevesinin kullanılması uygun bulunmuştur.

1.2. Araştırmanın Problemi

Öğrencilerin çokgenler, dörtgenler, çember ve daire kavramlarına yönelik oluşan bilgilerinin incelendiği bu çalışmanın araştırma problemi şu şekilde ifade edilmiştir: 10. ve 11. sınıf öğrencilerinin çokgenler, dörtgenler, çember ve daire konularına yönelik bilgileri APOS teorisine göre hangi düzeydedir?

Bu soruya cevap verebilmek için aşağıda belirtilen alt problemlere cevap aranmıştır.

1) 10. sınıf öğrencilerinin çokgenler ve dörtgenler konularına yönelik bilgileri APOS teorisine göre hangi düzeydedir?

2) 11. sınıf öğrencilerinin çember ve daire konularına yönelik bilgileri APOS teorisine göre hangi düzeydedir?

1.3. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmada 10. sınıf öğrencilerinin çokgenler ve dörtgenler, 11. sınıf öğrencilerinin ise çember ve daire kavramlarına yönelik oluşan bilgilerinin incelenmesi amaçlanmaktadır. Araştırmada öğrencilerin oluşan bilgileri, bir soyutlama modeli olan APOS teorisi çerçevesinde incelenmiştir. APOS teorisi ile öğrencilerin zihninde oluşan bilginin dışarıya yansıması sağlanabilmekte ve oluşan bilişsel yapının etkinliği değerlendirilebilmektedir. APOS teorisi yapılan öğretimin niteliğinin sorgulanmasını sağlayabilmektedir. Çokgen, dörtgen, çember, daire kavramlarının diğer matematik konularının öğretiminde karşılaşılması ve günlük hayatta sık kullanılması göz önünde bulundurulduğunda, bu kavramların zihinde iyi bir şekilde yapılandırılmasının oldukça önemli olduğu düşünülmektedir. Çalışmada 10. sınıf öğrencilerinin çokgenler ve dörtgenler, 11. sınıf öğrencilerinin ise çember ve daire konularının geleneksel öğretime göre işlenmesinden sonra, bu kavramlara yönelik oluşturulan bilişsel yapının ortaya çıkartılması için derinlemesine inceleme yapılması amaçlanmaktadır. Belirtilen konuların geleneksel öğretimle yapılması durumunda hedeflenen kazanımlar yeterli seviyede edinilmekte midir? Birey oluşan kavramı geri çağırdığında etkili bir şekilde kullanabilecek midir? Birey zihninde bu kavramları oluştururken diğer kavramlarla ilişkilendirebilmekte midir? Bu soruların cevap bulması yapılan öğretimin etkinliği konusunda öğreticilere fikir verebilecektir. Ayrıca çalışmada çokgen, dörtgen, çember, daire kavramlarının nasıl oluşturulduğu ve bu kavramlar oluşturulurken diğer kavramlarla nasıl ilişkilendirildiğinin ortaya konulmasıyla etkili ve kalıcı bir öğretimin planlanması sürecine katkı sağlanması amaçlanmaktadır.

1.4. Araştırmanın Önemi

Matematiksel düşünme tahmin etme, tümevarım, tümdengelim, betimleme, genelleme, analoji, akıl yürütme, doğrulama gibi karmaşık süreçlerin bir birleşimidir (Liu, 2003). Matematiksel düşünmeyi diğer düşünmelerden ayıran en belirgin özellik, bireyin önceden öğrenmiş olduğu matematiksel bilgi ve kavramlardan yola çıkarak yeni bir bilgi ya da kavram elde etmesidir (Alkan ve Bukova-Güzel, 2005). Matematiksel olarak düşünmeyi öğrenmek, matematikleştirme, soyutlama süreçlerini dikkate alan matematiksel bir bakış açısı geliştirebilmeyi ve bunları uygulayabilme eğiliminde olmayı, matematiğin araçları olan soyutlama, sembolik temsil ve sembolik manipülasyonda yetkinliği geliştirebilmeyi ve bu araçları matematiksel yapıları anlamada kullanabilmeyi kapsar (Schoenfeld, 1994).

Matematiksel olarak düşünebilen birey karşılaştığı problemi matematiksel olarak anlamlandırabilir ve soyutlama yoluyla bu probleme çözüm bulabilir.

Anlamak, çeşitli zihinsel süreçlerin meydana geldiği ve etkileşime girdiği uzun bir öğrenme etkinlikleri dizisine dayanır ve bilmekten veya becerikli olmaktan daha fazlasıdır (Dreyfus, 1991). Pirie ve Kieren'a (1989, s.8) göre "matematiksel anlama, seviyeli ama doğrusal olmayan olarak nitelendirilebilir. Bu yinelenen bir olgudur ve fikir karmaşık düzeyler arasında hareket ettiğinde yinelemenin meydana geldiği görülür. Gerçekten her anlama düzeyi, sonraki düzeylerin içinde yer alır. Herhangi bir düzey, içerdiği formlara ve süreçlere bağlıdır ve dahası dışarıdakiler tarafından kısıtlanır."

Cai ve Ding (2017, s.24) alanyazına dayalı olarak matematiksel anlamanın özelliklerini şu şekilde belirtmektedirler:

> "(1) Anlama, hem bir anlama (ya da bilme) süreci hem de anlama eyleminin (ya da bilgi) bir sonucudur; (2) anlama hem bağlantı kurmak hem de bağlantı kurmanın sonucudur; (3) anlama dinamik ve sürekli bir süreçtir; (4) anlamanın farklı düzeyleri ve türleri olabilir; (5) amaç derin bir matematiksel anlayışa ulaşmaktır."

Matematiksel bir fikir, yöntem veya olgu bir iç ağın parçası olması durumunda anlaşılır ve matematiksel bir fikir, prosedür veya olgu mevcut ağlara daha güçlü veya daha fazla sayıda bağlantıyla bağlanırsa anlama tam olarak gerçekleşir (Hiebert ve Carpenter, 1992). Sierpinska (1990, s.24) ise matematikte anlamaya yönelik şu soruları sormaktadır:

> "Anlama, bir eylem mi, duygusal bir deneyim mi, entelektüel bir süreç mi, yoksa bilmenin bir yolu mu? Anlama ve bilme (knowing), düşünme (conceiving), açıklama (explaining), algı (sense), anlam (meaning), epistemolojik engel (epistemological obstacle), sezme (insight) arasındaki ilişkiler nelerdir? Anlamanın seviyeleri, dereceleri veya türleri var mı? Bir kavramı anlamak, bir metni anlamak, bir insan faaliyetini ve onun ürünlerini anlamak farklı kavramlar mıdır, yoksa bunlar sadece genel anlama kavramının özel durumları mıdır?...Bir süreç olarak anlamanın adımları nelerdir? Nasıl anlamaya başlarız? Anlama ölçülebilir mi ve nasıl?"

Bu araştırmada öğrencilerin matematiksel bilgilerinin hangi zihinsel aşamalardan geçerek oluştuğu, bir soyutlama modeli olan APOS teorisi kullanılarak incelenecektir. Ülkemizde APOS teorisi ile ilgi yapılan çalışmaların oldukça az sayıda olduğu tespit edilmiştir. Sınırlı sayıdaki bu çalışmaların ise daha çok ortaokul öğrencileri üzerine yapıldığı, ortaöğretim öğrencileri üzerine yapılan çalışmaların ise yetersiz olduğu görülmektedir.

MEB (2022) sonuçlarına göre PISA'da Türkiye'deki öğrencilerin yaklaşık % 5'i matematikte en iyi performans gösteren öğrenciler arasında iken en az 2. yeterlik düzeyine ulaşan öğrencilerin oranı ise % 61'dir. MEB (2020) sonuçlarına göre ise TIMSS'te Türkiye 4. sınıf düzeyinde 58 ülke arasında 23. sırada, 8. sınıf düzeyinde ise 39 ülke arasında 20. sırada yer almıştır. Bu sonuçların daha iyi seviyeye getirilebilmesi için öğrencilerin matematiksel bilgiyi hangi seviyede yapılandırdıklarının tespit edilmesi matematik eğitiminin iyileştirilmesine yönelik çalışmalara katkı sunabilecektir. MEB (2022) sonuçlarına göre PISA'da geometri konularının ağırlıklı yer aldığı uzay ve şekil konusunda Türkiye'deki öğrencilerin daha başarısız oldukları görülmektedir. Bu sonuç ülkemizde geometri alt öğrenme alanının öğretiminde ciddi sorun olduğunun göstergesidir. Son yıllarda yapılan araştırma ve öğretim deneyimleri, öğrencilerin geometri ve geometrik muhakeme konusunda daha derin bilgiye sahip olmaları durumunda, öğrencilerin matematiğin diğer alanlarını öğrenirken karşılaştıkları bazı zorlukların üstesinden gelebileceklerini göstermiştir (Gutiérrez, 2013). Ayrıca geometrik sezgiye sahip olmak, geometrik bilgi edinmek, geometrik düşünmeyi geliştirmek, geometrik problem çözme yeteneğini arttırmak, bu geometrik dünyada yaşamak için gereklidir (Han, 2007).

Alanyazında ortaöğretim öğrencilerinin çokgenler, dörtgenler, çember ve daire kavramlarına yönelik oluşan bilgilerini APOS teorisine göre inceleyen bir araştırmaya rastlanılmamıştır. Bu yüzden bu çalışmada öğrencilerin çokgenler, dörtgenler, çember ve daire kavramlarına yönelik oluşan bilgileri APOS teorisi çerçevesinde incelenmiştir. Çalışmanın dörtgenler, çember ve daire kavramlarının öğretiminde, öğrencilerin hangi bilişsel süreçte zorluk yaşadıklarını tespit etmesi, öğretmenlere bu kavramları öğretmede uygun öğrenme ortamlarını tasarlamada yol göstermesi bakımından alanyazına önemli katkı sunacağı düşünülmektedir.

1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları

- Araştırma 2022-2023 eğitim-öğretim yılında Ege Bölgesi'nde yer alan bir devlet ortaöğretim kurumunda 10. ve 11. sınıfına devam etmekte olan 10 öğrenciden elde edilen veriler ile sınırlıdır.
- Araştırmanın verileri ortaöğretim matematik öğretim programının çokgenler, dörtgenler, çember ve daire konuları ile sınırlıdır.

1.6. Araştırmanın Varsayımları

- Öğrencilerin araştırmada kullanılan veri toplama araçlarına samimi bir şekilde yanıt verdikleri varsayılmıştır.

- Araştırmada kullanılan veri toplama araçlarının oluşturulmasında alınan uzman görüşlerinin yeterli olduğu varsayılmıştır.

1.7. Tanımlar

APOS teorisi: Piaget'in çocukların nasıl öğrendiğini ortaya koyan yansıtıcı soyutlama çalışmasının, üniversite matematik öğrenimi düzeyine genişletilmesiyle ortaya çıkmıştır (Dubinsky ve McDonald, 2001).

Soyutlama: Bir dizi farklı durumdan bazı ortak özellikler çıkarılması ve bu durumların bir şekilde birbirine ait olarak sınıflandırılmasıdır (Dienes, 1963).

Yansıtıcı soyutlama: Zihinsel nesnelerin ve bu nesneler üzerindeki zihinsel eylemlerin inşasıdır (Dubinsky, 1991).

Koordinasyon: Zihindeki iki veya daha fazla mevcut yapının, eş güdümlü kullanılarak yeni bir yapı oluşturulmasıdır (Dubinsky ve Lewin, 1986)

Kapsülleme: Bireyin zihninde soyut bir nesne elde edebilmek için bir süreç üzerinde zihinsel olarak hareket etmesidir (Selden ve Selden, 1992).

Şema: Bireyin karşılaştığı yeni bir matematiksel problem durumuna çözüm bulmak için hatırladığı, birbirleri ile uyumlu, eylemler, süreçler, nesneler ve diğer şemalar topluluğudur (Clark ve diğerleri, 1997).

2. BÖLÜM
KAVRAMSAL ÇERÇEVE

Bu kısımda soyutlama, APOS teorisi, geometri ve APOS teorisi ile ilgili yapılmış çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

2.1. Soyutlama

Soyutlama, matematik öğrenmede merkezi bir süreç olmasına rağmen gözlemlenmesi zordur (Schwarz ve diğerleri, 2001). Matematik eğitimi bağlamında birçok yüzü olan soyutlama için araştırmacılar tek bir anlam konusunda fikir birliğine varamamalarına rağmen, soyutlama kavramının çeşitli açılardan incelenebileceği, belirli kavram türlerinin diğerlerinden daha soyut olduğu ve soyutlama yeteneğinin anlamlı matematik öğrenimi için önemli bir beceri olduğu hususlarında uzlaşmışlardır (Hazzan, 1999).

Araştırmacılar soyutlamayı bilişsel ve sosyokültürel olmak üzere iki farklı bakış açısıyla ele almaktadırlar. Bu iki yaklaşım da, soyutlama sonunda yeni bir zihinsel nesne oluşturulduğu ve bu yeni nesne, ilgili özellikler ile ilgisiz olarak kabul edilen özellikleri ayırdığı hususlarında hem fikirdir (Hassan ve Mitchelmore, 2006).

2.1.1. Soyutlamada Sosyo Kültürel Bakış Açısı

Soyutlamayı sosyokültürel bakış açısıyla ele alan araştırmacılara göre öğrenme üzerinde, araç kullanımı, sosyal etkileşim ve öğrenme ortamının koşulları oldukça etkilidir (Yeşildere, 2006). Soyutlama nesnel, evrensel bir süreç olmayıp büyük ölçüde soyutlama etkinliğine katılan katılımcıların kişisel geçmişine ve katılımcılara sunulan eserlere (önceki faaliyetlerin kalıntıları: talimatlar, önceki etkinliklerin fikirleri, kullanılan somut mataryeller vb.) bağlıdır (Schwarz ve diğerleri, 2009).

Etkinlik teorisi önceki etkinliklerden elde edilen sonuçların, sonraki etkinliklerde daha ileri yapılara (artefacts) dönüştüğünü ve bu durumun bir dizi etkinlik boyunca soyutlamanın oluşumunun ve gelişiminin izlenmesi açısından oldukça önemli olduğunu belirtir (Kidron ve Dreyfus, 2008). Etkinlik teorisi, Vygotsky ve teoriyi daha da geliştirmeye devam eden meslektaşı Leontiev'in işbirliğiyle ortaya çıkmıştır (McCafferty ve diğerleri, 2001). Etkinlikler, bir bireyin veya bir grubun bir amaca ulaşmak için kasıtlı çabaları olan birden fazla eylemden oluşur (Leontiev, 1978, aktaran Trust, 2014). Etkinlik teorisi kim, ne yapıyor, neden yapıyor ve nasıl yapıyor ile ilgilendiğinden insan etkinliğini ortaya çıkarmak ve daha iyi anlamak için bir bakış açısı sunar (Hasan ve Kazlauskas, 2013). Etkinlik teorisi, bireysel eylemlerin asgari düzeyde anlamlı bir bağlamın, temel analiz birimine dâhil edilmesi

gerektiğini belirtir ve buradaki birim aktivite olarak adlandırılır (Kuutti, 1996). Etkinlik teorisi, bireyin gelişimi ile bireyin içinde bulunduğu çevre arasındaki temel diyalektik ilişkilerin incelenmesine olanak tanır (Bodker, 1997).

Noss and Hoyles (1996) soyutlamanın, sosyal boyutu göz ardı edilerek sadece epistemolojinin ve psikolojinin etkileşimi ile sınırlandırıldığında, matematiksel öğrenmenin hiyerarşik bir çerçeve içinde bağlamdan bağımsız bilgi oluşturma süreci olacağını belirtmişler ve soyutlamayı bilgiyi yükseltmekten ziyade bir ilişki kurma süreci olarak nitelendirmişlerdir. Bağlam ise insan eylemlerinin yapısını ve anlamını birlikte belirleyen birbirine bağlı faktörler topluluğudur (Van Oers, 1998).

2.1.2. Soyutlamada Bilişsel Bakış Açısı

Soyutlama, bir nesneden belirli özellikleri ayırma eylemidir (Sierpinska, 1994). Bu durumda soyutlama, sunulan bilgilerin bir kısmının seçilerek atılmasını içerir ve bu duruma örnek olarak karşılaşılan veya hayal edilen üçgenlerin açılarının veya boyutlarının detayları göz ardı edilerek ve ortak elemanları (üç düz kenarı ve üç köşesi olan kapalı düzlem şekli) seçilerek üçgen kavramının soyut temsilinin oluşturulması verilebilir (Hampton, 2003). Soyutlama, bir dizi farklı durumdan bazı ortak özellikler çıkarılması ve bu durumların bir şekilde birbirine ait olarak sınıflandırılmasıdır (Dienes, 1963). Bu durumda matematik bağlamında somut bir deneyimde, fiziksel veya gerçek dünya özellikleri bakımından değil, matematiksel fikirler ve durumlar açısından anlamlı ilişkiler kurulacağından, bir öğrenci sayının bir temsilini oluşturmak ve onu gerçek veya resimli bloklarla ilişkilendirmek suretiyle dört kavramını zihninde oluşturabilir (Durmuş ve Karakırık, 2006). Skemp'e (2012, s.11) göre ise:

> "Soyutlama (abstracting), deneyimlerimiz arasındaki benzerliklerin farkına vardığımız bir etkinliktir. Sınıflandırmak (classifying), deneyimlerimizi bu benzerliklere dayanarak bir araya toplamaktır. Soyutlama (abstraction) bir çeşit kalıcı zihinsel değişimdir ve zihinde önceden oluşturulmuş bir sınıf ile benzer özelliklere sahip olan yeni deneyimlerin fark edilmesini sağlayan soyutlamanın (abstracting) sonucudur. Kısaca soyutlama (abstraction), sınıflandırma yapmamızı sağlayan öğrenilmiş bir şeydir ve bir sınıfın belirleyici özelliğidir. Etkinlik kapsamında olan soyutlama (abstracting) ile nihai ürün kapsamında olan soyutlama (abstraction) arasındaki farkı belirtmek için ikincisine kavram denilecektir."

Skemp'in, deneyimlere dayalı olan bu düşüncesi, deneysel soyutlama olarak isimlendirilebilir (Mitchelmore ve White, 2007). Piaget (2001) ise soyutlamayı deneysel (empirical

abstraction), yarı deneysel (pseudo-empirical abstraction) ve yansıtıcı (reflective abstraction) olmak üzere üçe ayırmıştır. Deneysel soyutlama bireyin nesnelerin özelliklerini inceleyerek bilgiyi nasıl oluşturduğuna, sözde deneysel soyutlama bireyin nesneler üzerinde uygulanan eylemlerin özelliklerini inceleyerek nasıl anlam oluşturduğuna, yansıtıcı soyutlama eylemlerin ve işlemlerin temalaştırılmış düşünce veya asimilasyon nesnelerine nasıl dönüştürdüğüne odaklanır (Tall, 2004). Sözde-deneysel soyutlama, deneysel soyutlamada olduğu gibi nesnelerin ve eylemlerin gözlemlenmesiyle ilerlese de sözde-deneysel soyutlama öznenin eylemlerinin koordinasyonu sonucu oluşan ürünlere odaklandığından yansıtıcı soyutlamanın özel bir durumudur (Piaget, 2001).

Hiebert ve Lefevre (1986, s.4-5) göre ise bilginin yapılandırılması iki seviyede gerçekleşir:

> "Birincil seviyede, bilgiyi birbirine bağlayan ilişki, bilginin kendisinin temsil edildiği soyutluk seviyesinde (ya da daha az soyut seviyede) kurulur. Yani ilişki, bağladığı bilgiden daha soyut değildir. Burada soyut terimi, bir bilgi biriminin (veya bir ilişkinin) belirli bağlamlara bağlı olma derecesini ifade etmek için kullanılır. Bilgi, belirli bağlamlardan uzaklaştıkça soyutluk artar….Bazı ilişkiler, birleştikleri bilgi parçalarından daha yüksek, daha soyut bir düzeyde inşa edilir. Biz buna yansıtıcı seviye diyoruz. Bu seviyedeki ilişkiler belirli bağlamlara daha az bağlıdır. Genellikle, yüzeysel olarak farklı olan bilgi parçalarındaki benzer temel özellikler tanınarak oluşturulur. İlişkiler, bilginin şu anda temsil edildiği düzeyi aşar, farklı görünen bilgi parçalarının ortak özelliklerini ortaya çıkarır ve onları birbirine bağlar."

Soyutlamanın bilişsel işlevi, geniş bir uygulanabilirlik (aktarım) sağlamak olmayıp mevcut fikirlerin daha karmaşık fikirlere dönüştürülmesini sağlamaktır (Ohlsson ve Lehtinen, 1997). Bazı matematik eğitimcilerine göre soyutlama, bir takım matematiksel nesnelerden (veya süreçlerden) ileri gelir ve nesnelerin kendisinden ziyade bu nesnelerin bazı ayırt edici özelliklerine ve ilişkilerine odaklanmayı içerir (Hershkowitz ve diğerleri, 2001). Bilişsel soyutlamanın üç özelliği söz konusudur: Soyutlama, belirli nesneler arasındaki ortak özelliklerin tespit edilmesinden kaynaklanır, bağlamdan ayrı olarak gerçekleşen bir süreçtir (yani zaman ve yer koşullarından bağımsızdır) ve somuttan soyuta ilerleyen bir gelişmedir (Özmantar ve Monaghan 2007). Soyutlamayı bilişsel yaklaşımla ele alan modellerden biriside APOS teorisidir.

2.2. APOS Teorisi

Piaget, bir kavramı bir bireyin anlaması için, kavramın zihinde o birey tarafından sosyal bir bağlamda oluşturulması gerektiğini düşünüyordu (Çetin ve Dubinsky, 2017). Piaget'in çalışmasının merkezinde, dengeleme olarak adlandırdığı temel bir bilişsel süreç vardı ve dengeleme bireyin bir bilgi öğesini, kendi bilişsel sisteminde konumlandırarak anlamaya çalıştığı yansıtıcı soyutlama süreci olarak tanımlanabilir (Dubinsky ve Lewin, 1986). Piaget, hem düşüncenin gelişimindeki zihinsel yapılar için ana mekanizmayı hem de bir bireyin zihnindeki tüm mantıksal-matematiksel (logico-mathematical) yapıların geliştirildiği zihinsel mekanizmayı, yansıtıcı soyutlama olarak adlandırır (Arnon ve diğerleri, 2014). Dubinsky'ye (1991) göre yansıtıcı soyutlama, zihinsel nesnelerin ve bu nesneler üzerindeki zihinsel eylemlerin inşasıdır. Yansıtıcı soyutlama sürecinde, birey bilişsel yapılarını, bilişsel besinlerle (cognitive aliments) etkileşim kurarak aşamalı olarak inşa eder ve daha sonra bireyin yeni bilişsel besinlerle etkileşim kurmaya devam etmesiyle inşa edilen bilişsel yapılar aşamalı olarak yeniden yapılandırılır (Dubinsky ve Lewin, 1986).

Piaget'in çocukların nasıl öğrendiğini ortaya koyan yansıtıcı soyutlama çalışmasının, üniversite matematik öğrenimi düzeyine genişletilmesiyle APOS teorisi ortaya çıkmıştır (Dubinsky ve McDonald, 2001). APOS teorisinin savunduğu temel ilkeye göre, bir bireyin matematiksel bir konuya ilişkin anlayışı, sosyal bir bağlamda yer alan problemler ve bu problemlerin çözümleri üzerine düşünerek belirli zihinsel yapıları inşa etmesi veya yeniden yapılandırması ve bu yapıları bu problem durumlarıyla baş etmede kullanabilmek için şemalar halinde düzenlemesi yoluyla gelişir (Çetin ve Dubinsky, 2017). APOS teorisi, nesneler üzerinde bir dönüşüm uygulandığında diğer nesnelerin elde edildiğini ve böylece matematiksel bir kavramın oluşmaya başladığını varsayar (Dubinsky ve diğerleri, 2005). APOS teorisine göre ileri matematiksel düşünmenin gelişimi için içselleştirme (interiorization), koordine etme (coordination), kapsülleme (encapsulation), genelleme (generalization), tersine çevirme (reversal) olmak üzere beş tür yansıtıcı soyutlama mekanizması vardır (Dubinsky, 1991).

Soyutlamanın en genel biçimi olan içselleştirme, yapının (formun), örüntünün (koordinasyonun) ve işlemlerin (eylemlerin) deneyimsel şeylerden ve faaliyetlerden izolasyonunu sağlar (Battista, 1999, aktaran Reed, 2007). İçselleştirme, bir dizi maddi eylemin benimsenmiş işlemler sistemine dönüştürülmesidir (Piaget, 1980, aktaran Paschos ve Farmaki, 2006). Dubinsky'ye (1991) göre içselleştirme, algılanan olgulara anlam vermek amacıyla içsel süreçlerin inşa edilmesidir. Koordinasyon, zihindeki iki veya daha fazla mevcut yapının eş güdümlü kullanılarak yeni bir yapı oluşturulmasıdır (Dubinsky ve Lewin,

1986). Dubinsky'ye (1991) göre ise yeni eylemler veya nesneler oluşturmak için iki veya daha fazla sürecin bileştirilmesi veya eş güdümlü kullanılmasıdır. Kapsülleme bireyin, zihninde soyut bir nesne elde edebilmek için bir süreç üzerinde zihinsel olarak hareket etmesidir (Selden ve Selden, 1992). Dubinsky'ye (1991) göre kapsülleme, bir sürecin bir nesneye dönüştürülmesidir. Zihinde kalıcı nesne, nesne üzerindeki sürecin önceliğini korumak için başka bir nesneye fiziksel veya algısal bir eylem uygulanarak oluşturulur (Tall, 1999). Genelleme, bireyin sahip olduğu bir şemayı daha geniş bir olgu topluluğuna uygulayabilmesidir (Dubinsky, 1991). Birey, yeni karşılaştığı bir bilişsel besinin zihnindeki dengeyi bozduğunu düşünürken sonradan uyum sağlayabileceğini fark eder ve bu bilişsel besine sahip olduğu mevcut yapıları uygularken, besin ne kadar farklı görünse de, yalnızca belirli niteliklere sahip olması gerektiğini kabul eder (Dubinsky ve Lewin, 1986). Tersine çevirme, birey bir süreci içsel olarak sahiplendikten sonra, bireyin onu tersten düşünerek orijinal süreci tersine çeviren yeni bir süreç inşa etmesidir (Dubinsky, 1991).

Matematiksel bilginin eylemler, süreçler, nesneler olmak üzere üç genel türü vardır (Cottrill ve diğerleri, 1996). APOS teorisi, bireyin algıladığı matematiksel problem durumlarının üstesinden gelebilmek için zihinsel eylemler, süreçler, nesneler oluşturarak ve bunları şemalar halinde düzenleyerek, durumları anlamlandırma ve problemleri çözme eğilimlerinden matematiksel bilginin oluştuğunu savunur (Dubinsky ve McDonald, 2001). APOS teorisi eylemlerle başlar, süreçler boyunca kapsüllenmiş nesnelere doğru hareket eder ve bunlar daha sonra kendileri nesneler olarak kapsüllenebilen şemalara entegre edilir (Tall, 1999).

Bir kavramı anlama süreci, bireyin önceki deneyimlerinden aşina olduğu ve bireye hangi eylemleri hangi sırayla gerçekleştireceğinin açıklandığı eylemlerle başlar (Tziritas, 2011). Eylem, yeni nesneler elde etmek için zihindeki mevcut nesnelerin dönüşümünü sağlayan tekrarlanabilir fiziksel veya zihinsel manipülasyonlardır (Breidenbach ve diğerleri, 1992). Bu aşamada birey tarafından dışsal olarak algılanan ve açıkça ya da zihinden işlemin nasıl gerçekleştirileceğine ilişkin adım adım yönergelerin verildiği nesneler dönüştürülür (Dubinsky ve McDonald, 2001). Yani bu aşamada birey ne yapması gerektiğine yönelik kesin ayrıntılar içeren dış ipuçlarını (ders kitabı yönergeleri, öğretmen açıklaması vb.) kullanır (Reed, 2007).

Birey bir eylemi tekrarladıkça ve yansıttıkça bu eylem zihinsel bir süreç içerisinde içselleştirilebilir (Dubinsky ve diğerleri, 2005). Süreç aşamasında birey daha önce uyguladığı bir eylemi tekrarlaması gerektiğinde, bu sefer dış uyaranlara ihtiyaç duymadan benzer eylemi gerçekleştirerek zihinsel bir yapı oluşturur (Dubinsky ve McDonald, 2001). Birey bir

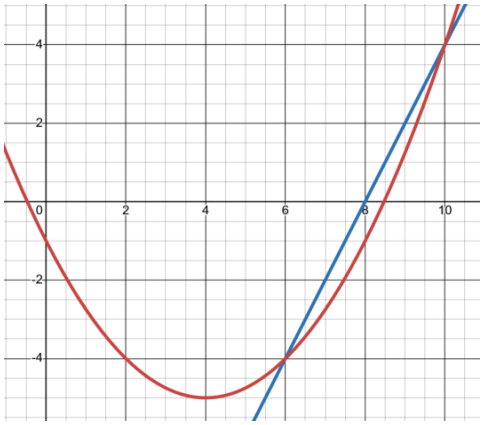
dönüşümü, bu dönüşüm için gerekli olan adımları fiilen yerine getirmeden düşünebilir, tanımlayabilir veya tersine çevirebilir (Reed, 2007). Yani eylemin aksine süreç, birey tarafından dışsal ipuçlarına tepki olarak yapılan bir durum olarak değil, bireyin kontrolü altında içsel bir durum olarak algılanır (Asiala ve diğerleri, 1996). Eylem bir süreç olduğunda, birey bu süreci diğer süreçlerle birleştirebilir veya tersine çevirebilir (Breidenbach ve diğerleri, 1992).

Birey, bir sürecin farklı somut örneklerini yeni bir nesne olarak tanımlayabiliyorsa, bireyin kavrayışı nesne düzeyine ulaşmıştır (Tziritas, 2011). Bireyin zihninde bir süreç bazı eylemlerle dönüştürülebiliyorsa, süreç kapsüllenerek bir nesne haline gelir (Breidenbach ve diğerleri, 1992). Bir süreçten bir nesne inşa edildiğinde birey bu sürecin tamamına hâkimdir (Dubinsky ve McDonald, 2001). APOS teorisine göre süreçleri oluşturmanın birden fazla yolu (eylemleri içselleştirme, süreçleri tersine çevirme veya birleştirme) olmasına rağmen matematiksel bir nesne oluşturmanın tek yolu sürecin kapsüllenmesidir (Breidenbach ve diğerleri, 1992). Bu kapsülleme bireyin süreci bütün olarak görmesi, dönüşümlerin süreç üzerindeki etkisini fark etmesi ve bu tür dönüşümleri inşa edebilmesi ile sağlanır (Cottrill ve diğerleri, 1996). Bir nesne üzerinde bir eylem veya süreç uygulanırken, manipüle etme aşamasında genellikle nesne geldiği sürece geri çevrilerek sürecin özellikleri kullanılır (Asiala ve diğerleri, 1996).

Bir bireyin belirli bir matematiksel kavram hakkındaki bilgisinin bütününe şema denir (Reed, 2007). Clark ve diğerlerine (1997) göre şema bireyin karşılaştığı yeni bir matematiksel problem durumuna çözüm bulmak için hatırladığı, birbirleri ile uyumlu, eylemler, süreçler, nesneler ve diğer şemalar topluluğudur. Dubinsky ve McDonald'a (2001) göre belirli bir matematiksel kavramın şeması, bu kavramı içeren bir problem durumu ile ilgili bir çerçeve oluşturmak için bazı genel ilkelerle birbirine bağlanmış, eylemler, süreçler, nesneler ve diğer şemaların toplamıdır. Bir şema birey tarafından bilinçli bir şekilde açılarak, şemayı oluşturan süreçler, nesneler ve diğer şemalar elde edilebilir (Clark ve diğerleri, 1997). Aynı zamanda birey sahip olduğu bir şemayı daha geniş bir olgu topluluğuna uygulayarak şemayı genelleştirebilir (Dubinsky, 1991). Bir şema, eylemlerin ve süreçlerin uygulanabildiği yeni bir bilişsel nesne haline getirilerek temalaştırılabilir (Clark ve diğerleri, 1997). APOS teorisinde geçen eylem, süreç ve nesne bilişsel yapıları, Şekil 1'deki $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 1$ fonksiyonunun grafiği üzerinden açıklanmıştır.

Şekil 1

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 1$ *fonksiyonunun grafiği*

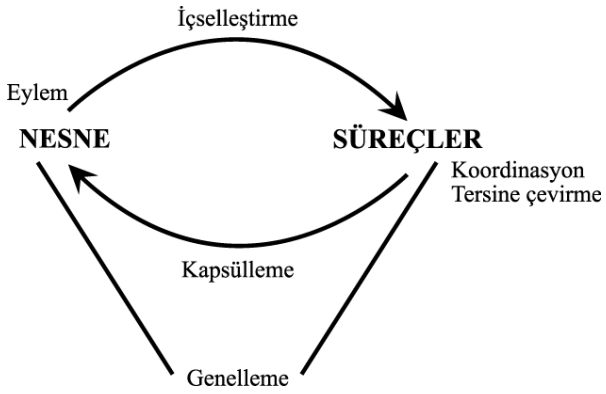


Öğrenci $[6,10]$'nda fonksiyonun değişim hızını hesaplarken daha önce öğrendiği kuralı kullanarak "ortalama değişim hızı $= \frac{f(10)-f(6)}{4-(-4)}$" şeklindeki bir hesaplamadan öteye geçemiyorsa, bu öğrenci süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Fakat öğrenci öğrendiği kuralın ötesine geçerek $[6,10]$'nda fonksiyonun ortalama değişim hızı ile kastedilenin A(10,4) ve B(6,-4) noktalarından geçen doğrunun eğimi olduğu bilincindeyse, bu öğrencinin nesne düzeyinde davranış sergilediği söylenebilir. Bu durumda öğrenci ortalama değişim hızını, eğim kavramına kapsülleyerek nesnelleştirmiştir.

Dubinsky (1991) matematiksel bir kavramın oluşum sürecinindeki eylem, süreç ve nesne bilişsel yapıları arasındaki ilişkiyi Şekil 2'deki gibi göstermektedir.

Şekil 2

Bilişsel yapıların oluşumu (Dubinsky, 1991)



Matematiksel bir kavramın anlaşılması için, önceden oluşturulmuş zihinsel veya fiziksel nesneler, eylemler oluşturması için manipüle edilir, sonra eylemler süreçleri oluşturması için içselleştirilir, sonra süreçler kapsüllenerek nesneler oluşturulur, son olarak ise eylemler, süreçler ve nesneler şemalar halinde organize edilir (Asiala ve diğerleri, 1996).

2.3. Geometri

Geometri uzay ve şeklin incelenmesidir (Clements, 1998). Geometri, fiziksel ve düşünülen uzaysal ortamları kavramsallaştırmak ve analiz etmek için kullanılan birbiriyle ilişkili karmaşık kavramlar ağı, akıl yürütme yolları ve temsil sistemleridir (Battista, 2007). Geometri, mimariden tasarlamaya kadar hayatın birçok yönünün önemli bir bileşeni olan kültürel deneyimlerimizin tamamlayıcı bir parçası olmasının yanında görsel, estetik ve sezgisel duyularımıza hitap eder (Jones, 2000). Geometri fiziksel uzayın modellenmesi gibi göründüğünden ve matematiğin diğer alanlarından farklı olarak ilgilendiği nesneler (çizgiler, düzlemler, noktalar…) doğrudan duyusal deneyimlerden alındığından ortaöğretimde geometri, matematik içerisinde özel bir konuma sahiptir (Parzysz, 1991). Lindquist ve Clements (2001) geometriden beklentilerin çocukların şekillerin niteliklerini tespit ederek şekilleri tanımlamaları (bu şekil üçgendir, çünkü üç kenarı vardır), niteliklerin rolünü analiz etmeleri (bir dörtgenin iki çift paralel kenarının olması karşılıklı açıların ölçülerini nasıl etkiler?), geometrik ilişkilere yönelik elde ettikleri sonuçları mantıksal argümanlar üreterek savunabilmeleri (örneğin ardışık açılar toplamı 180° olacağından karşılıklı açılar eşit olur) olduğunu belirtiyor. Geometri öğretiminde, öğrencilerin geometrik cisimlerin özelliklerini öğrenmelerinin yanında bazı becerileri de edinmeleri beklenmektedir. Hoffer (1981, s.11-13) geometri öğretiminde öğrencilerin edinmesi gereken beş beceri olduğunu belirtir ve bu becerileri aşağıdaki gibi açıklar:

1) Görsel beceriler: Bireyin karşılaştığı geometrik bir şekle yönelik zihninde fikir oluşması.
2) Sözel beceriler: Geometriye yönelik bir durumun (kavramların, şekillerin özelliklerinin açıklaması vb.) kelimelerle açıklanması.
3) Çizim becerileri: Görsel öğe çizimleri (orantılı şekiller çizme, üç boyutlu cisimleri iki boyutlu şekiller olarak görselleştirme vb.) yapılması.
4) Mantık becerileri: Geometri problemlerinin çözülmesinde ilişkilendirme gibi mantıksal becerilerin kullanılması.
5) Uygulama becerileri: Evrendeki durumların açıklanmasında ve günlük hayattaki problemlerin çözümünde geometrinin kullanılması.

Sherard (1981, s.19-21) ise geometrinin temel bir beceri olduğunu belirtir ve bunun nedenlerini aşağıdaki yedi madde ile açıklamaktadır:

a) Geometri iletişim kurmada önemli bir araçtır. Çünkü konuşma ve yazma kelime dağarcığımız geometrik terimler içerir (nokta, doğru, daire, dikdörtgen gibi).

b) Günlük hayatta karşılaşılan problemlere çözüm bulmada ve haritaları anlamlandırmada geometri önemli bir araçtır (evin duvarını boyamak için kaç kutu boya gerektiğini belirleme, haritalarda noktaların şehirleri temsil ettiğini anlama gibi).
c) Geometri, matematiğin diğer alanlarına ait kavramlar için zengin bir görselleştirme olanağı sağladığından, matematik müfredatının tümü için birleştirici bir temadır.
d) Geometri, ileri matematik ve fen bilimleri dersleri ile bazı mesleklere yönelik bireyin önceden hazırlanmasını sağlar.
e) Uzamsal becerilerin geliştirilmesinde etkili bir araçtır.
f) Genel düşünme becerisinin ve problem çözme yeteneğinin geliştirilmesini sağlar.
g) Geometri, kültürel ve estetik değerlerin gelişmesini sağlayan önemli bir araçtır.

Piaget ve Inhelder (1967) çocukların geometrik nesneleri, ilk önce çevreyle olan fiziksel etkileşimlerle karakterize ettiklerini, yavaş yavaş bu eylemleri içselleştirdiklerini ve daha sonra nesneleri zihinsel imgelerle temsil ettiklerini belirtirler (aktaran Wilson, 2002). Piaget ve Inhelder çocuklarda uzay ve geometri kavramlarının gelişimi için çocukların şekilleri dokunarak keşfetmeleri, şekilleri çizmeleri ve farklı bakış açılarını kabul etmeleri gerektiğini belirtirler (aktaran Clements, 1998). Dolayısıyla geometri kavramlarının gelişimi ve kalıcı olması, doğru bir öğretim yaklaşımı ile mümkündür. Bu yüzden Clements ve Battista (1986) geometri öğretiminin etkili olabilmesi için şu hususa dikkat edilmesi gerektiğini belirtmektedirler: Öğretimde birim küpler gibi üç boyutlu materyaller kullanılmalı, öğrencilerden günlük hayatta karşılaşılan geometrik şekillere örnek bulmaları istenmeli, matematik kitaplarındaki geometrik nesnelerin şekillerini incelemeleri ve bu şekilleri çizmeleri istenmeli, geometriyle alakalı bir düşüncenin adını, tanımını veya sembolünü öğrenmeleri istenmelidir.

2.4. APOS Teorisi İle İlgili Yapılmış Çalışmalar

APOS teorisi ile ilgili yapılan çalışmaların daha çok analiz ve cebir kavramlarının öğretimine odaklandığı görülmektedir. Ortaöğretimde geometri ile ilgili kavramları APOS teorik çerçevesinde ele alan çalışmaların sınırlı olduğu görülmektedir. Alanyazında APOS teorisiyle ilgili yapılmış çalışmalar aşağıda sunulmuştur.

Stewart (2008) yaptığı çalışmada lineer cebir kavramlarının öğrenilmesini incelemek için matematiğin üç dünyası ile birlikte APOS teorisinin uygulanmasına yönelik bir çerçeve önermektedir. Araştırmanın katılımcıları, bir üniversitede öğrenim gören birinci ve ikinci sınıf öğrencileridir. Çalışmanın sonunda, öğrencilerin kavramları anlamalarının sınırlı olduğu, temel kavramları birbirine bağlama konusunda yetersiz oldukları, temsili çeşitliliğe sahip

olanların kavramlar hakkında daha genel bir anlayışa sahip olduğu, somutlaştırılmış fikirlerin öğrencilerin düşüncelerine önemli katkı sağladığı tespit edilmiştir.

Çetin (2009) tarafından üniversite öğrencilerinin limit konusunu nasıl kavradıkları APOS teorisi çerçevesinde incelenmiştir. Çalışmada desen olarak durum çalışması kullanılmıştır. Çalışmaya matematik bölümü 1. sınıfta analize giriş dersi alan 25 öğrenci katılmıştır. Öğrenciler her hafta limit konusu ile ilgili bilgisayar programlama etkinlikleri için iki saatlik laboratuvar uygulamalarına, daha sonra ise dört saatlik derslere katılmışlardır. Öğrencilerin limit konusunu anlama seviyelerindeki değişimi tespit etmek için açık uçlu sorulardan oluşan anket öğrencilere ön-test ve son-test olarak uygulanmıştır. Öğrencilerin limit konusunu nasıl kavradıklarını derinlemesine incelemek için ise öğrencilerle yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen veriler APOS teorisi çerçevesinde analiz edilmiştir. Çalışma sonunda araştırmacı tarafından oluşturulan genetik çözümleme ile çalışma sonunda elde edilen verilerin uyumlu olduğu, araştırmacı tarafından tasarlanan öğretim ortamının, limit konusunun öğretimine olumlu yönde etki ettiği tespit edilmiştir.

Weller ve diğerleri (2009) yaptıkları çalışmada, APOS teorisi temel alınarak ACE öğretim döngüsü ile tasarlanan derslerde, öğretmen adaylarının devirli ondalık gösterim konusuna yönelik matematiksel performanslarını incelemişlerdir. Çalışmaya bir üniversitede öğrenim gören öğretmen adayları katılmıştır. Katılımcılar deney ve kontrol grubu olmak üzere iki gruba ayrılmışlardır. Kontrol grubunda geleneksel öğretim, deney grubunda ise ACE öğretim döngüsü kullanılmıştır. Çalışma sonunda, deney grubundaki öğrencilerin $0,\overline{9} = 1$ ifadesini ve rasyonel sayı ile onun ondalık gösterimi arasındaki genel ilişkiyi anlamada kontrol grubundaki öğrencilere göre önemli ölçüde ilerleme gösterdikleri tespit edilmiştir.

Parraguez ve Oktaç (2010) yaptıkları çalışmada vektör uzayı kavramına yönelik bir genetik ayrıştırma önerisinde bulunmuşlardır. Çalışmada vektör uzayı yapısının bir parçasını oluşturan iki işlem arasındaki koordinasyona ve vektör uzayı şemasının diğer kavramlarla (ikili işlemler vb.) ilişkisine odaklanılmıştır. Çalışmanın katılımcıları 10 lisans matematik öğrencisidir. Çalışmada veriler anket ve mülakat yoluyla elde edilmiştir. Çalışmanın sonunda öğrencilerin ön koşul yapılarının eksik olması durumunda, vektör uzayı kavramına yönelik güçlü bir şema geliştiremedikleri tespit edilmiştir.

Tziritas (2011) yaptığı çalışmada öğrencilerin değişim oranı problemlerine ilişkin kavramsal anlayışlarını geliştirmeye yönelik bir öğretim döngüsü geliştirmeyi amaçlamış ve bunun için APOS teorisini kullanmıştır. Çalışmada, genetik ayrıştırma yapılarak değişim oranı problemlerinin öğrenilmesinin ilk aşamalarında öğrenci başarısı için gerekli olan

zihinsel yapılar tespit edilmiştir. Genetik ayrıştırmadan yola çıkılarak ACE öğretim döngüsü oluşturulmuş ve iki öğrenci grubu üzerinde test edilmiştir. Çalışmaya bir üniversitede analiz dersini alan gönüllü 4 öğrenci katılmıştır. Öğrenciler ikişer kişilik iki gruba ayrılmıştır. Öğrenciler, büyük kâğıtlara basılan problemleri, ikişer kişilik gruplar halinde çözmüşlerdir. ACE öğretim döngüsünün sınıf tartışması bölümünde öğretmen ile öğrenciler arasında gerçekleşen tartışmalar ses kaydına alınmıştır. Daha sonra öğrencilerle bireysel görüşme yapılarak öğrencilerden değişim oranı problemlerini çözmeleri istenmiştir. Çalışmanın sonucunda öğrencilerin değişim oranı problemlerini tam olarak çözemedikleri görülmüştür. Bu durum ise genetik ayrıştırmanın, problemlerin temel geometrik doğasına yeterince odaklanmaması ile açıklanmıştır.

Deniz (2014) gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımı ile düzenlenen bir öğretim ortamında, öğrencilerin eğim kavramını matematikleştirme ve oluşturma süreçlerini incelemiştir. Öğrencilerin eğim kavramını oluşturma süreçlerini APOS teorisi çerçevesinde ele almıştır. Çalışmada desen olarak nitel araştırma yöntemlerinden öğretim deneyi kullanılmıştır. Çalışmanın katılımcıları 8. sınıf öğrencileri arasından seçilmiştir. Öğrencilerin eğim kavramını matematikleştirme ve oluşturma süreçlerini belirlemek için 5 öğrenci ile klinik görüşmeler yapmıştır. Çalışma sonunda, eylem düzeyindeki katılımcıların eğimi bir algoritma olarak ezberledikleri ve eğimi bulmada bu algoritmayı kullandıkları, süreç düzeyindeki katılımcıların eğimi zihinlerinde bir oran olarak yapılandırdıkları, nesne düzeyine geçme aşamasındaki katılımcıların ise eğimle doğrudan bağlantılı olmayan bir problem durumunda eğimi yansıtabildikleri ve eğimi farklı kavramlarla ilişkilendirebildikleri tespit edilmiştir.

Açan (2015) öğrencilerin dönüşüm geometrisi konusundaki bilgiyi oluşturma süreçlerini APOS teorisi çerçevesinde incelemiştir. Çalışmada desen olarak durum çalışması kullanılmıştır. Çalışmanın katılımcıları 8. sınıf öğrencileri arasından seçilmiştir. Öğrencilerin dönüşüm geometrisindeki bilgi oluşturma süreçlerini tespit etmek için 12 öğrenci ile klinik görüşmeler yapılmıştır. Çalışma sonunda öğrencilerin yansıma çizgisine ve dönüşüm hareketlerinin özelliklerine dikkat etmede, dönme merkezini belirlemede zorlandıkları görülmüştür.

Açıl (2015) yaptığı çalışmada öğrencilerin denklem kavramlarını oluşturma süreçlerini APOS teorisi çerçevesinde incelemiş ve denklem konusunun öğretiminde ACE öğretim döngüsü ile geleneksel öğretim yönteminin matematiksel başarı düzeyine etkisi karşılaştırılmıştır. Çalışmada nicel ve nitel araştırma yöntemleri bir arada kullanılmıştır. Çalışmada desen olarak nicel kısımda deneysel, nitel kısımda ise durum çalışması

kullanılmıştır. Çalışmanın katılımcıları ortaokul 3. sınıf öğrencileridir. Çalışmada 31 öğrenci deney, 32 öğrenci kontrol grubunda yer almıştır. Öğretim, kontrol grubunda Milli Eğitim Bakanlığı'nın önerdiği ders kitaba göre, deney grubunda ise ACE öğretim döngüsüne göre gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin denklem kavramına yönelik soyutlama süreçlerini derinlemesine incelemek için, deney ve kontrol gruplarından seçilen dörder öğrenci ile görüşmeler yapılmıştır. Çalışma sonunda ACE öğretim döngüsü ile yapılan öğretimin, diğer öğretime göre daha etkili olduğu, görsel şekillerin kullanımının soyutlama sürecini olumlu yönde etkilediği, bir kavramın soyutlama sürecinin çok yönlü olduğu, soyutlama süreçlerinin incelenmesinde öğrencilerin iletişim yeteneklerinin önemli olduğu tespit edilmiştir.

Salgadoa ve Trigueros (2015) yaptıkları çalışmada özdeğer, özvektör ve özuzay kavramlarının öğretilmesinde, modelleme problemleri ve APOS teorisi göz önünde bulundurularak hazırlanan etkinliklerin kullanılmasının etkisini incelemişlerdir. Çalışma grubunu bir üniversitede iktisat bölümünde öğrenim gören ve lineer cebir dersine kayıtlı olan 30 öğrenci oluşturmaktadır. Çalışmada özdeğer, özvektör ve özuzay kavramlarına yönelik genetik ayrıştırma yapılmıştır. Daha sonra genetik ayrıştırmaya dayalı etkinlikler tasarlanmış ve ekonomi bağlamında modelleme problemleri hazırlanmıştır. Çalışma sonunda bazı öğrencilerin özdeğer ve özvektör kavramlarına yönelik nesne düzeyinde anlayış sergiledikleri, öğretimde kullanılan yaklaşımın özdeğerin ve özvektörün öğretilmesinde faydalı olduğu tespit edilmiştir.

Chimhande ve diğerleri (2017) yaptıkları çalışmada 11. sınıf öğrencilerinin fonksiyon tanımı ve temsiline yönelik kavramları anlama düzeylerini incelemişlerdir. Çalışma grubunu Güney Afrika'da 11. sınıfta öğrenim gören 6 öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmacılar APOS teorisi kavrama düzeylerine uygun göstergeler hazırlamışlar ve elde ettikleri verileri bu göstergelere uygun kategorize etmişlerdir. Çalışma sonunda öğrencilerin, fonksiyonla ilgili kavramları açıklamada yetersiz oldukları, sembolik ve grafiksel temsiller arasında dönüşüm yapmada prosedürleri ezberledikleri, dolayısıyla öğrencilerin fonksiyona yönelik anlayışlarının eylem ve süreç düzeyinde olduğu tespit edilmiştir.

Borji ve diğerleri (2018) yaptıkları çalışmada türevin grafiksel anlayışına vurgu yaparak öğretilmesi için APOS teorisi çerçevesinde ACE öğretim döngüsüne göre ders tasarlamışlardır. Araştırmacılar daha önce yapılan çalışmaların sonuçlarına ve kişisel deneyimlerine dayanarak konunun genetik ayrıştırmasını yapmışlardır. Çalışmaya elektrik mühendisliği bölümünde okuyan gönüllü üniversite öğrencileri katılmıştır. Deney grubu 26, kontrol grubu ise 24 öğrenciden oluşmaktadır. Araştırmacılar deney grubuna uygulamak için maple yazılımını kullanarak ACE öğretim döngüsüne göre ders tasarlamışlardır. Deney

grubunda ders süresinin yarısı bilgisayar laboratuvarın da maple ile program yazmaya ayrılırken, geri kalan dersler ise sınıfta işlenmiştir. Kontrol grubunda ise dersler tahtada tebeşirle işlenmiştir. Çalışma sonunda, deney grubundaki öğrencilerin türevi, kontrol grubundaki öğrencilerden daha iyi kavradıkları tespit edilmiştir.

Koçyiğit-Gürbüz (2018) öğrencilerin oran-orantı kavramlarını oluşturma süreçlerini APOS teorisi çerçevesinde incelemiştir. Öğretimde otantik öğrenme yaklaşımına dayalı etkinlikler düzenlenmiştir. Çalışmada desen olarak öğretim deneyi kullanılmıştır. Çalışmanın katılımcıları 7. sınıfta öğrenim gören 8 öğrencidir. Çalışmanın verileri, araştırmacı günlüklerinden, çalışma kâğıtlarından ve görüşmelerden elde edilmiştir. Çalışma sonunda, eylem basamağındaki öğrencilerin oran kavramını çarpımsal ilişki olarak yorumlayamadıkları, orantı kavramını açıklayamadıkları, süreç düzeyindeki öğrencilerin oran kavramını iki çokluk arasındaki sabit bir ilişki olarak düşünebildikleri, çokluklardaki değişimi yorumlayabildikleri, nesne düzeyindeki öğrencilerin oran kavramını farklı problem durumlarında kullanabildikleri, orantı kavramını iki oranın eşitliği olarak yorumlayabildikleri, orantı kavramına günlük hayattan örnekler gösterebildikleri tespit edilmiştir.

Öksüz (2018) öğrencilerin kesir kavramına ilişkin bilgi oluşturma süreçlerini APOS teorisi çerçevesinde incelemiştir. Çalışmada desen olarak eylem araştırması kullanılmıştır. Çalışmanın katılımcıları ortaokul 5. sınıf öğrencileri arasından seçilmiştir. Çalışmaya 15 öğrenci katılmıştır. Öğrencilerden beklenen davranışları tespit etmek için uygulama öncesinde kesir kavramına yönelik genetik çözümleme yapılmıştır. Çalışmada elde edilen veriler içerik analizi ile analiz edilmiştir. Çalışma sonunda, eylem düzeyinde olan öğrencilerin istenen paylaştırmayı yapabilmelerine rağmen sonuçları kesir olarak yazamadıkları, aynı kesrin farklı gösterimlerini yazabildikleri, süreç aşamasında olan öğrencinin eşit paylaştırma yaptıktan sonra durumu kesir olarak yazabildiği ve istenen dönüşümleri yapabildiği, nesne düzeyindeki öğrencinin kesir kavramını soyut olarak oluşturabildiği, denk kesirleri zorlanmadan yazabildiği, bütünden parçaya ve parçadan bütüne geçmede zorlanmadığı tespit edilmiştir.

Ocakbaşı (2019) öğrencilerin karekök kavramını oluşturma süreçlerini APOS teorisi çerçevesinde incelemiştir. Çalışmada öğretim ortamı gerçekçi matematik eğitimi (GME) yaklaşımı ile tasarlanmıştır. Çalışmada desen olarak durum çalışması kullanılmıştır. Çalışmanın katılımcıları 8. sınıfta öğrenim gören 16 öğrencidir. Çalışmaya başlamadan önce öğrencilere karekök konusu ile ilgili hazır bulunuşluk testi uygulanmış ve bu testin sonuçlarına göre heterojen gruplar oluşturulmuştur. Amaçlı örnekleme yöntemine göre seçilen 3 katılımcı ile klinik görüşmeler yapılmıştır. GME yaklaşımına uygun olarak tasarlanan öğretim ortamındaki tartışmalardan, çalışma kâğıtlarından ve klinik görüşmelerden elde

edilen veriler içerik analizi ile analiz edilmiştir. Çalışmanın sonunda üç katılımcının da tam kare sayıların karekökünü nesne düzeyinde yapılandırabildikleri, karekök kavramının yapılandırılmasında üslü ifadeler, rasyonel ifadeler gibi bazı kavramların koordinasyon aşamasında oldukça önemli konuma sahip olduğu görülmüştür.

Ağaçdiken (2021) çalışmasında dinamik matematik yazılımı ile desteklenen bir öğretim ortamında öğrencilerin dikdörtgenin alanı kavramını oluşturma süreçlerini APOS teorisi çerçevesinde incelemiştir. Çalışmada desen olarak durum çalışması kullanılmıştır. Çalışmanın katılımcıları 5. sınıfta öğrenim gören 13 öğrencidir. Uygulamadan önce öğrencilere, alan kavramı ile ilgili hazır bulunuşluk testi, öğretim sırasında geogebra ile hazırlanan etkinlikler uygulanmıştır. Amaçlı örnekleme yöntemine göre seçilen 5 öğrenci ile klinik görüşmeler yapılmıştır. Elde edilen verilerin analizde içerik analizi kullanılmıştır. Çalışma sonunda, öğrencilerin alan ve alan formülü kavramlarını kapsülleme sırasında sorun yaşadıkları, boyut ilişkisinin anlaşılmasının alan formülünün öğrenilmesi açısından önemli olduğu tespit edilmiştir.

Hazar (2021) üç boyutlu hologram teknolojisi kullanılarak ACE öğretim döngüsüne göre tasarlanan bir öğretimde, lineer cebir kavramlarının yapılandırılması sürecini, APOS teorisi çerçevesinde incelemiştir. Çalışmada desen olarak öğretim deneyi kullanılmıştır. Çalışmanın katılımcıları ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü 2. sınıfında öğrenim gören 7 öğrencidir. Uygulama öncesinde konuya yönelik genetik çözümleme yapılarak araştırmada kullanılacak problemler hazırlanmıştır. Araştırmada veriler, öğretimde kullanılan problemler ve klinik görüşmelerden elde edilmiştir. Elde edilen verilerin analizinde APOS teorisi göz önünde bulundurularak betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Çalışma sonunda öğrencilerin nesne düzeyinde beceriler sergiledikleri, öğrencilerin yaptığı bazı hataların ön bilgi yetersizliğinden kaynaklandığı, hologram sisteminin derslerde kullanılmasının öğrencilerin derse olan ilgisini arttırdığı tespit edilmiştir.

Batır (2022) APOS teorisi çerçevesi göz önünde bulundurularak ACE öğretim döngüsüne göre tasarlanan öğretimin öğrenci başarısına etkisini incelemiştir. Çalışmada nitel ve nicel yöntemler birlikte kullanılmış olup araştırmanın nicel kısmı deneysel desen, nitel kısmı durum çalışması olarak tasarlanmıştır. Çalışmanın katılımcıları ortaöğretimden mezun olmuş ve üniversite hazırlık kursuna devam eden 20 öğrencidir. Araştırmacı öğretimde 12. sınıfta yer alan maksimim minimum problemleri konusu üzerinde durmuştur. Araştırmacı APOS teorisini göz önünde bulundurarak maksimum minimum problemleri için genetik çözümleme yapmıştır. Veriler başarı testinden, türev tutum ölçeğinden, yarı yapılandırılmış görüşmelerden, öğrenci günlüklerinden ve araştırmacı gözleminden elde edilmiştir. Çalışma

sonunda APOS teorik çerçevesinde hazırlanan öğretimin öğrenci başarısını arttırdığı görülmüştür.

Kemp ve Vidakovic (2023) yaptıkları çalışmada öğrencilerin daire kavramını anlamalarında APOS teorisini çerçeve olarak kullanmışlardır. Çalışmada taksi geometrisi ile öklid geometrisi şemalarının etkileşimini tanımlayan bir çerçeve kullanarak, katılımcıların daire kavramına ilişkin anlayışlarını detaylandırırken hangi bileşenleri kullandıklarını ve bu bileşenler arasında nasıl bir ilişki olduğu belirlenmiştir. Çalışmanın katılımcıları bir üniversitede geometri dersine kayıtlı 15 öğrencidir. Veriler yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilmiştir. Çalışma sonunda birçok öğrencinin daire şemalarının bileşenleri arasında bağlantılar oluşturmayı başardıkları görülmüştür.

Sonuç olarak APOS teorisi ile ilgili yapılan çalışmaların devirli ondalık gösterim (Weller ve diğerleri, 2009), lineer cebir (Stewart, 2008; Hazar, 2021), limit (Çetin, 2009), vektör uzayı (Parraguez ve Oktaç, 2010), değişim oranı problemleri (Tziritas, 2011), eğim (Deniz, 2014), dönüşüm geometrisi (Açan, 2015), denklemler (Açıl, 2015), özdeğer, özvektör ve özuzay (Salgadoa ve Trigueros, 2015), fonksiyonlar (Chimhande ve diğerleri, 2017), türevin grafiksel anlayışı (Borji ve diğerleri, 2018), oran-orantı (Koçyiğit-Gürbüz, 2018), kesirler (Öksüz, 2018), karekök (Ocakbaşı, 2019), dikdörtgenin alanı (Ağaçdiken, 2021), maksimum minimum problemleri (Batır, 2022), daire (Kemp ve Vidakovic, 2023) üzerine olduğu görülmektedir. Bu çalışmada ise öğrencilerin ortaöğretim matematik öğretim programında yer alan dörtgen, çember ve daire konularına yönelik bilgilerinin değerlendirilmesi APOS teorisi çerçevesinde ele alınmıştır.

3. BÖLÜM
YÖNTEM

Bu kısımda çalışmanın modeli, çalışma grubu, verilerin nasıl elde edildiği, verilerin nasıl analiz edildiği, geçerlik ve güvenirlik hakkında bilgi verilmiştir.

3.1. Araştırmanın Modeli

Bu çalışmada ortaöğretim öğrencilerinin, oluşan geometrik kavramları, APOS teorik çerçevesinde ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Öğrencilerin soruları çözüm sürecindeki düşünce yapılarını incelemek için öğrencilerle birebir görüşmeler yapılarak çok miktarda veri elde edilmeye çalışıldığından, çalışmada öğrencilerin bilgilerini değerlendirebilmek için nitel araştırma yöntemleri kullanılmıştır. Nitel araştırmacılar, insanlar tarafından oluşturulan anlamları yani insanların dünyalarını ve deneyimlerini nasıl anlamlandırdıklarını anlamakla ilgilenirler (Merriam, 2009). Nitel araştırma "gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırmadır" (Yıldırım ve Şimşek, 2018, s.37). Van Maanen'e (1979, s.520) göre ise "niteliksel yöntemler etiketinin hiçbir sosyal bilimde kesin bir anlamı yoktur. En iyi şekilde sosyal dünyada az çok doğal olarak meydana gelen belirli olguların sıklığıyla değil, tanımlamanın, kod çözmenin, tercüme etmenin ve farklı anlam üzerinde uzlaşmanın amaçlandığı bir dizi yorumlayıcı tekniği kapsayan bir şemsiye terimdir." Nitel araştırmalarda araştırılan konunun ne kadar iyi olduğunu ortaya koymaktan ziyade konuya geniş açıdan bakılması sağlanır (Büyüköztürk ve diğerleri, 2016). Nitel araştırmalarda veriler genellikle saha çalışmasından toplanır ve bu verilerin niteliği genellikle araştırmacının metodolojik becerisine, duyarlılığına ve dürüstlüğüne bağlıdır (Patton, 2002). Nitel araştırmalarda elde edilen sonuçlara, araştırmacının topladığı verileri yorumlamasından ulaşıldığından, nitel bir çalışmanın sonuçları genellenemediği gibi bu sonuçların nesnelliğinden ve istatiksel geçerliliğinden de söz edilemez (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Nitel araştırmaların genel amacı, insanların hayatlarını nasıl anlamlandırdıklarını kavramak, anlam oluşturma süreçlerini tanımlamak ve deneyimlerini nasıl yorumladıklarını açıklamaktır (Merriam, 2009).

Öğrencilerin oluşan bilgileri, görüşmeler yoluyla ayrıntılı incelenerek, öğrencilerin zihinlerinde oluşan bilişsel yapıların ortaya çıkartılması amaçlandığından, araştırmada desen olarak durum çalışması kullanılmıştır. Durum çalışması bir veya birden fazla olayın, ortamın, programın, toplumsal grubun ya da diğer birbiriyle ilişkili sistemleri derinlemesine araştıran bir yöntemdir (McMillan, 2000, aktaran Büyüköztürk ve diğerleri, 2016). Durum çalışması güncel bir olguyu derinlemesine ve bulunduğu bağlamda inceleyen, olgu ve bağlam

arasındaki sınırların net bir şekilde belli olmadığı durumlarda kullanılan görgül bir araştırmadır (Yin, 2009). Durum çalışması, araştırmacının gerçek yaşamı, günümüze ait sınırlı bir sistemi (durum) veya birden fazla sınırlı sistemi (durumları) zaman içinde araştırdığı, birden fazla bilgi kaynağını (gözlemler, görüşmeler, vb.) içeren ayrıntılı, derinlemesine veri topladığı ve durum temelli temaları ve durum tanımını raporladığı nitel bir yaklaşımdır (Creswell, 2013). Durum çalışmasında durumla ilgili etkenler (ortam, bireyler gibi) bütüncül bir şekilde ele alınır ve bu etkenlerin ilgili durumu nasıl etkiledikleri ve ilgili durumdan nasıl etkilendikleri üzerine yoğunlaşılır (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Patton (2002, s.447) ise durum çalışmasını şu şekilde açıklamaktadır: "Nitel analizde durum çalışması yaklaşımı, verileri toplamanın, düzenlemenin ve analiz etmenin özel bir yolunu oluşturur; bu anlamda bir analiz sürecini temsil ediyor. Amaç ilgilenilen her durum hakkında kapsamlı, sistematik ve derinlemesine bilgi toplamaktır. Analiz süreci bir ürünle sonuçlanır: bir durum çalışması. Dolayısıyla durum çalışması terimiyle, analiz süreci veya analiz ürünü veya her ikisini birden kastedilebilir."

3.2. Çalışma Grubu

Araştırma, Ege Bölgesi'nde bulunan bir devlet ortaöğretim kurumunda, 10. ve 11. sınıfta öğrenim gören 10 öğrenci üzerinde yürütülmüştür. Araştırmanın katılımcıları amaçlı örnekleme yöntemlerinden biri olan ölçüt örnekleme yöntemiyle belirlenmiştir. Amaçlı örneklemede, çalışmanın amacı göz önünde bulundurularak veri çeşitliliği açısından fazla olan durumlar tercih edilir (Büyüköztürk ve diğerleri, 2016). Ölçüt örneklemede ise katılımcılar önceden belirlenen ölçütlere uygun seçilir (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Bu araştırmada çalışmanın amacına hizmet edecek şekilde veri çeşitliği sağlamak ve yeterli veri toplayabilmek için çalışmaya katılacak öğrencileri belirlemede 3 ölçüt kullanılmıştır. Bu ölçütler, (1) öğrencilerin dörtgenler, çember ve daire konularını derste işlemiş olmaları, (2) öğrencilerin birinci dönem matematik sınav notlarının ortalamasının 50 ve üzerinde olması, (3) matematik dersi öğretmeninin iletişim yönünden öğrenciler hakkında olumlu görüş bildirmesi. Çalışma grubunu oluşturan öğrencilerin demografik özellikleri Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1

Katılımcıların demografik özellikleri

Öğrenci	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cinsiyet	Kadın	Kadın	Kadın	Erkek	Erkek	Kadın	Kadın	Kadın	Kadın	Erkek
Sınıf	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11

Tablo 1 incelendiğinde 10. sınıf öğrencilerinin 3 tanesinin kadın 2 tanesinin erkek, 11. sınıf öğrencilerinin 4 tanesinin kadın 1 tanesinin erkek olduğu görülmektedir.

3.3. Verilerin Toplanması

Üç çeşit nitel veri vardır (Patton, 2002, s.4):

> "Mülakatlar: Açık uçlu sorular ve detaylı araştırmalar ile insanların deneyimleri, algıları, görüşleri, duyguları ve bilgileri hakkında derinlemesine yanıtların elde edilmesini sağlar…Gözlemler: Saha çalışmaları sırasında, etkinlikler, davranışlar, eylemler, konuşmalar, kişilerarası etkileşimler, organizasyonel veya topluluk süreçleri, farklı insan deneyimleri gözlemlenerek veri elde edilebilir…Dökümanlar: Yazılı materyaller ve örgütsel, klinik veya program kayıtlarından elde edilen diğer belgeler; muhtıralar ve yazışmalar; resmi yayınlar ve raporlar; kişisel günlükler, mektuplar, sanatsal çalışmalar, fotoğraflar ve tarihi, kültürel vb. nedenlerle değer gören nesneler; açık uçlu anketlere verilen yazılı yanıtlar."

Bu araştırmanın verilerini elde etmek için öğrencilerle yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır.

Görüşme önceden belirlenmiş ve ciddi bir amaç ile sınırlı olduğundan, bir sohbetten hem daha fazladır ve hem daha azdır (Stewart, 1991). Görüşme, araştırmacının ve katılımcının, araştırma çalışmasıyla ilgili sorulara odaklanan bir sohbete katıldıkları bir süreçtir (deMarrais, 2004). Doğrudan gözlemleyemediğimiz şeyleri ortaya çıkarmak için insanlarla görüşme yapılır ve bu görüşmenin amacı karşımızdaki kişinin bakış açısına girmektir (Patton, 2002). Görüşme ile bireyin bir konuya yönelik duygu, düşünce ve inançlarının neler olduğu ortaya konulmaya çalışılır (Çepni, 2018). Görüşme esnek bir araç olduğundan araştırma sürecinin her aşamasında kullanılabilir (Büyüköztürk ve diğerleri, 2016). Görüşmede araştırmacı, katılımcıların görüşlerine ve deneyimlerine odakladığından genellikle katılımcıdan daha az konuşur (deMarrais, 2004). Bu çalışmada öğrencilerin bilgilerini derinlemesine incelemek için öğrencilerle yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır.

Yarı yapılandırılmış görüşme formunu oluşturmak için açık uçlu sorular kullanılmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşme formunu oluşturmak için 10. sınıf çokgen ve dörtgenler, 11. sınıf çember ve daire konularına yönelik kazanımlar belirlenmiştir. Daha sonra bu

kazanımlara yönelik Milli Eğitim Bakanlığı'nın ortaöğretim kurumlarında ders kitabı olarak kullanılmasını önerdiği kaynaklardan açık uçlu sorular seçilmiştir. Bu sorular seçilirken öğrencilerin ilgili konulara yönelik eylem, süreç ve nesne zihinsel yapılarının gözlemlenmesini sağlayacak nitelikte olmasına dikkat edilmiştir. Hazırlanan form 10. sınıfta 11 sorudan, 11. sınıfta 10 sorudan oluşmuştur. Hazırlanan formun uygunluğu için matematik eğitiminde uzman bir akademisyenin görüşüne başvurulmuştur. Daha sonra 2022-2023 eğitim-öğretim yılı 2. döneminde 10. sınıf ve 11. sınıfa devam eden 2'şer öğrenci ile hazırlanan bu formun pilot çalışması yapılmıştır. Çalışma sonunda 10. sınıfta 7 sorunun, 11. sınıfta 3 sorunun eylem, süreç ve nesne zihinsel yapılarını tam yansıtmadığı görülerek görüşme formundan çıkartılmıştır. 11. sınıf görüşme formuna yeni soru eklenmeden, 10. sınıf görüşme formuna ise kazanımlar doğrultusunda 5 soru eklenerek form tekrar düzenlenmiştir. Son durumda görüşme formu 10. sınıfta 9 sorudan, 11. sınıfta 7 sorudan oluşmuştur. Yeniden hazırlanan formlar için tekrar uzman görüşü alınmıştır.

3.4. Çalışmanın Uygulama Aşaması

Çalışmanın uygulaması 11. sınıflarda 2022-2023 eğitim öğretim yılı 2. döneminde yapılırken, 10. sınıflarda 2022-2023 eğitim öğretim yılı 2. döneminde ve 2023-2024 eğitim öğretim yılı 1. döneminde yapılmıştır. Öğrencilerle yapılan görüşmeler 15 dakika ile 35 dakika arasında sürmüştür. Yapılan görüşmeler ses kayıt cihazı ile kayıt edilmiştir.

3.5. Verilerin Analizi

Bu çalışmada toplanan veriler içerik analizi ile incelenmiştir. İçerik analizinde, benzerliği bulunan veriler tespit edilerek belirli kavramlar ve temalar çatısı altında toplanır ve bunlar okuyucunun anlayabileceği şekilde düzenlenerek yorumlanır (Yıldırım ve Şimşek, 2018). İçerik analizinde toplanan veriler, verilerin kodlanması, temaların bulunması, kodların ve temaların düzenlenmesi, bulguların tanımlanması ve yorumlanması sırasına göre analiz edilir (Çepni, 2018). Öğrencilerin görüşmeler sırasındaki konuşmalarının ses kayıtları yazılı metine dönüştürülmüştür. Veri kaybını önlemek için ses kayıtları farklı zamanlarda tekrar incelenmiştir. Bu metinler birkaç kez okunarak analiz edilmiştir. Ses kayıtlarıyla birlikte görüşme formundan elde edilen veriler de analiz sürecine dâhil edilmiştir. Ses kayıtlarından elde edilen yazılı metinlerden kodlar çıkartılmış, kodlar belirli kategoriler altında toplanmış ve temalar belirlenmiştir. İki araştırmacı belirlenen kodları, kategorileri ve temaları incelemiş ve farklı düşünülen durumlarda ortak bir fikir birliğine varılmıştır. Kodlama güvenirliği için Miles & Huberman (1994) tarafından önerilen, Güvenirlik = Görüş birliği/(Görüş birliği + Görüş ayrılığı) formülü kullanılmıştır. Bu çalışmanın güvenirliği ise %75 olarak hesaplanmıştır.

Öğrencilerin cevapları analiz edilirken öğrencinin hangi bilişsel yapıda olduğunu ortaya koymak için aşağıdaki davranışlar dikkate alınmıştır.

Eylem: Bu seviyedeki öğrenci problemin çözümünde önceden öğrendiği prosedürleri kullanabilmek için dışsal ipucuna ihtiyaç duyar. Problemin çözüm sürecinin herhangi bir aşamasında ne yapacağını bilemez. Kavrama yönelik prosedürleri içselleştirememiştir.

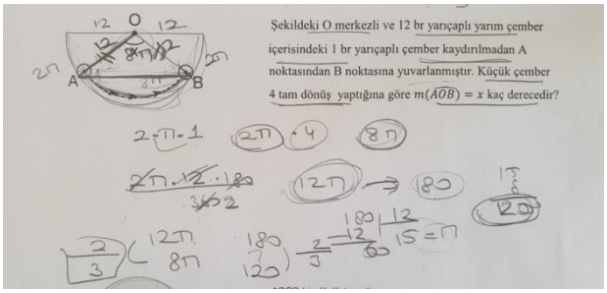
Süreç: Bu seviyedeki öğrenci problemin çözümünde önceden öğrendiği prosedürleri kendi kontrolünde kullanır. Kullandığı kavramın özüne yönelik bir farkındalığı olmamasına rağmen kavrama yönelik prosedürleri içselleştirmiştir.

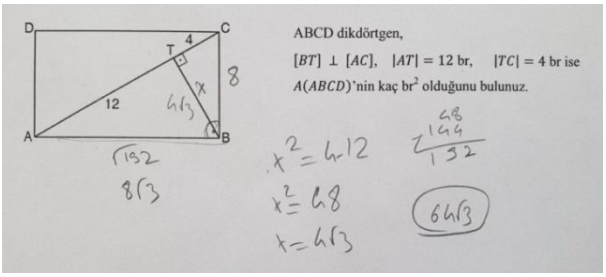
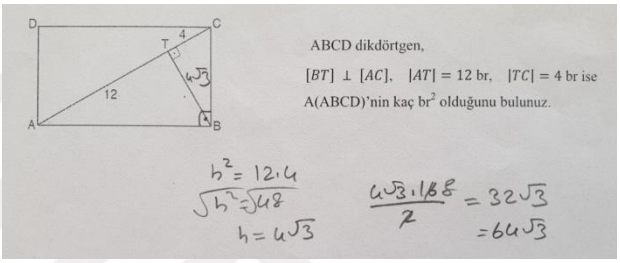
Nesne: Bu seviyedeki öğrenci problemin çözümünde önceden öğrendiği prosedürleri kullanmak yerine kavramın özünün farkındadır ve kavramın özüne yönelik bir uygulama yapar.

Örneğin öğrenci dikdörtgenin alanını bulmak için; kenar uzunluklarını kullanması gerektiğine yönelik dışsal ipucuna ihtiyaç duyarsa eylem, dışsal ipucuna ihtiyaç duymadan dikdörtgenin alan formülünü kullanırsa süreç, dikdörtgenin alan formülü yerine üçgenin alanından yararlanırsa nesne düzeyinde kabul edilmiştir. Çalışmada verilerin nasıl analiz edildiğine yönelik örnek Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2

Örnek veri analizi

Düzey	Açıklama	Çalışmadan örnek
Eylem	Öğrenci talimatla hareket eder. Kendi kontrolünde bir davranış gerçekleştiremez. Öğrenciye ne yapması gerektiğini açıkça belirten yönerge, kural vb. verilmelidir.	 Bu soruda öğrenciye, araştırmacı çemberin çevresi ile AB yayının uzunluğu arasında ilişki kurması gerektiğe yönelik talimat verdiği için öğrenci eylem düzeyinde davranış sergilemiştir.

Süreç	Öğrenci eylem aşamasında öğrendiği talimatları, kuralları bu aşamada kendi kontrolünde gerçekleştirir. Dışarıdan ipucuna ihtiyaç duymaz. Öğrendiği kuralların, talimatların ötesine geçemez.	 Burada öğrenci dikdörtgenin alanını bulmak için dikdörtgenin alan formülünü kullandığından süreç düzeyinde davranış sergilemiştir.
Nesne	Öğrenci süreç aşamasında gerçekleştirdiği kuralların ötesine geçer ve ele aldığı kavramı başka kavramlardan yararlanarak açıklar. Bir matematiksel kavramı farklı bir matematiksel kavrama kapsüller. Öğrenci edindiği yeni kavramı farklı kavramlarla ilişkilendirir.	 Burada öğrenci dikdörtgenin alanını bulmak için dikdörtgenin alan formülü yerine üçgenin alanından yararlandığından nesne düzeyinde davranış sergilemiştir.

3.6. Geçerlik ve Güvenirlik

Bir araştırmacı, okuyucusunu bir araştırmanın bulgularının dikkate alınmaya değer olduğuna ikna edebilmek için geleneksel paradigma içerisinde iç geçerlik, dış geçerlik, güvenilirlik ve nesnellik olarak adlandırılan argümanları ileri sürebilir (Lincoln ve Guba, 1985).

İç geçerlik nicel bağlamda tanımlanır ve değişkenler arasındaki ilişkilerin ne ölçüde doğru yorumlandığı anlamındadır (Punch, 2005). İç geçerlik, bağımlı bir değişkendeki değişikliklerin derecesi, bağımsız bir değişkendeki kontrollü değişime ne ölçüde atfedilebileceğidir (Lincoln ve Guba, 1985). Dış geçerlik neden ve sonucun alternatif ölçümlerinde, farklı türdeki kişiler, ortamlar ve zamanlar karşısında varsayılan nedensel ilişkinin, genelleştirilebileceği sonucunun çıkartıldığı yaklaşık geçerliktir (Cook ve Campbell, 1979). Güvenirlik ise çalışmaların ne ölçüde tekrarlanabileceği anlamına gelir ve aynı

yöntemleri kullanan bir araştırmacının önceki bir çalışmayla aynı sonuçları elde edebilmesini gerektirir (LeCompte ve Goetz, 1982).

Nicel ve nitel araştırmalar birbirinden farklı yapıya sahiptirler. Bu yüzden nicel ve nitel araştırmalarda kullanılan güvenirlik ve geçerlik kavramları arasında farklılık bulunmaktadır. Nicel ve nitel araştırmalarda kullanılan geçerlik ve güvenirliğe yönelik kavramların birbirine karşılıklarını Guba (1981) Tablo 3'deki gibi belirtmektedir.

Tablo 3

Araştırmalarda kullanılan geçerlik ve güvenirliğe yönelik kavramlar (Guba, 1981)

Bakış açısı (Aspect)	Fen açısından (Scientific term)	Natüralist açıdan (Naturalistic term)
Gerçek değer (Truth value)	İç geçerlik (İnternal validity)	İnanırlılık (Credibility)
Uygulanabilirlik (Applicability)	Dış geçerlik (External validity) Genellenebilirlik (Generalizability)	Aktarılabilirlik (Transferability)
Tutarlılık (Consistency)	Güvenirlik (Reliability)	Tutarlılık (Dependability)
Tarafsızlık (Neutrality)	Nesnellik (Objectivity)	Onaylanabilirlik (Confirmability)

İnanırlık "bulgular gerçeklikle ne kadar uyumlu? Bulgular gerçekte orada olanı yansıtıyor mu? Araştırmacılar ölçtüklerini düşündükleri şeyi gözlemliyor mu yoksa ölçüyor mu?" (Merriam, 2009, s.213) sorularıyla ilgilenmektedir. Bu araştırmada inandırıcılığı sağlamak için çeşitleme, uzman incelemesi, uzun süreli gözlem, araştırmacının ön yargıları stratejileri kullanılmıştır. Araştırmada veri toplama araçları olarak, yarı yapılandırılmış görüşme formu ve ses kayıt cihazı kullanılmıştır. Çalışmanın inandırıcılığını arttırmak için birden fazla veri toplama aracı kullanılarak çeşitleme yapılmıştır. Uzman incelemesinde, veri toplama aracının geliştirilmesinde ve elde edilen verilerin yorumlanmasında uzman görüşüne başvurulmuş ve uzmanların önerileri doğrultusunda gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Uzun süreli gözlemde, araştırmada tek bir uygulama yapılması yerine uzun bir süreç takip edilmiştir. Araştırmacının ön yargılarında, araştırmanın sınırlılıkları ve varsayımları araştırmacı tarafından belirlenmiştir.

Doğa bilimci için genellenebilirliğe (veya dış geçerliğe) benzeyen kavram, kendisi de iki bağlam arasındaki benzerlik derecesine bağlı olan aktarılabilirliktir (Guba, 1981). Geleneksel paradigmada genelleme, en azından tesadüfleşme ve örnekleme koşulları

karşılandığında mutlak iken aktarılabilirlik her zaman göreceli olup tamamen belirgin koşulların örtüşme veya eşleşme derecesine bağlıdır (Guba ve Lincoln, 1989). Doğa bilimci, bağlamlar arasındaki uyum derecesine bağlı olarak bir bağlamdan diğerine aktarılabilecek işe yarar hipotezler oluşturmaya çalışır (Guba, 1981). Bu yüzden nitel araştırmacılardan, okuyucuya araştırma boyunca gerçekleşen bütün aşamalara yönelik detaylı bilgi vermesi beklenir (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Bu çalışmada araştırmada katılımcı seçimi, veri toplama araçları, uygulama süreci, verilerin analiz süreci gibi araştırmanın gerçekleşmesini sağlayan tüm adımlar ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Böylece okuyucuların elde edilen sonuçların başka ortamlara aktarılmasının mümkün olup olmayacağına karar verebilmeleri sağlanmıştır.

Tutarlılık, çalışma sürecinin tutarlı, zaman içinde, araştırmacılar ve yöntemler arasında makul ölçüde istikrarlı olmasıdır (Miles ve Huberman, 1994). Tutarlılık, verileri nasıl topladığınıza dair mantıklı bir argümanımızın olmasını ve verilerin argümanınızla tutarlı olmasını gerektirir (Ravitch ve Carl, 2016). Bu çalışmada tutarlılığı sağlamak için uzman görüşüne başvurulmuştur. Araştırmacının elde ettiği bulgular ve bulgulara ait elde ettiği sonuçlar başka bir uzman tarafından incelenmiştir. İki araştırmanın değerlendirmeleri karşılaştırılarak ortak bir fikir birliğine varılmıştır. Böylece elde edilen verilerin kendi içerisinde tutarlı ve anlamlı olması sağlanmıştır.

Onaylanabilirlik, nesnellik olarak kabul edilebilir ve verilerin, yorumların, araştırma sonuçlarının, değerlendirici dışındaki bağlamlara ve kişilere dayandığının ve değerlendiricinin hayal ürünü olmadığının güvence altına alınmasıdır (Guba ve Lincoln, 1989). Bu yüzden "araştırmacıların, tasarım kararının nasıl alındığını, yöntem ve yorumların nasıl geliştiğini dikkatli bir şekilde belgelemeleri önemlidir. Bu tür belgelere denetim izi (audit trail) adı verilir ve araştırmacıların yöntem ve yorumlarının, diğer işbirlikçilerin veya bağımsız araştırmacıların bakış açısından güvenilir olup olmadığının kontrol edilmesi için bir temel sağlar" (Franklin ve diğerleri, 2010, s:256). Bu çalışmada, yarı yapılandırılmış görüşmeler yoluyla öğrencilerden elde edilen veriler, bulgular kısmında sunulmuştur. Böylece çalışmaya yönelik kanıtlar sunularak çalışma hakkında bilgisi olmayan bir araştırmacının bile ikna edilebilmesi sağlanmıştır.

4. BÖLÜM
BULGULAR

Bu kısımda öğrencilerle yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Burada kullanılan öğrenci isimleri kodlanmış olup, xyH kodlaması, x: hangi soru olduğunu, y: çözüm adımlarını ve H: öğrenci adının ilk harfini belirtmektedir.

4.1. Birinci Alt Probleme Yönelik Bulgular

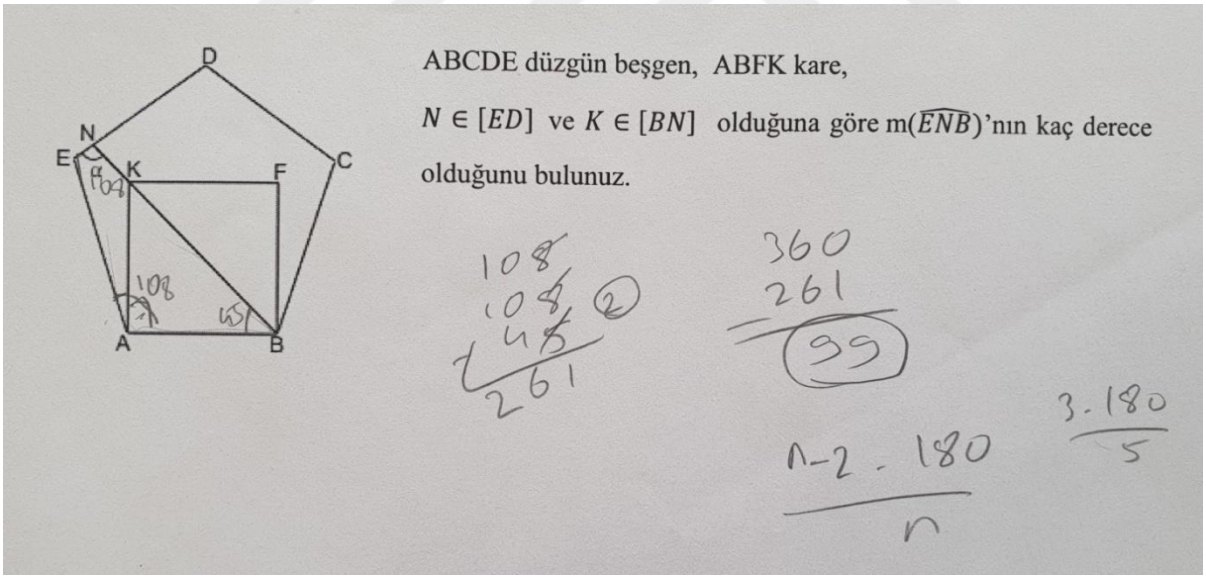
Bu başlık altında, çokgenler ve dörtgenler konularına yönelik hazırlanan yarı yapılandırılmış görüşme formu aracılığıyla elde edilen bulgulara ve bu bulguların yorumlarına yer verilmiştir.

4.1.1. Halil'in Oluşan Bilgilerinin Analizi

Birinci soru "çokgen kavramını açıklayarak işlemler yapar" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çokgen kavramını açıklamaya yönelik olan bu soruda, Halil'in nesne düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Halil'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 3'te sunulmuştur (H: Halil).

Şekil 3

Halil'in birinci soruya yönelik çözümü



11H: Düzgün beşgen dediği için bir kenarı 108, aman bir açısı 108. Burası {($\widehat{KAB}$)'nı kastediyor} 90'sa kare olduğuna göre tamamı 108.

12H: Burası köşegen olduğu için 45,

13H: burası da {($\hat{E}$)'nı kastediyor} 108.

14H: Burası bir dörtgen {ABEN dörtgenini kastediyor} toplamı 360 olması lazım. 108, 108, 45'i toplayacağız, {burada hesaplama yapıyor} 261. 360'dan 261'i çıkardım 99.

Halil beşgene yönelik bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $m(\widehat{BAE})$'nü buluyor (11H). Kareye yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin köşegen özelliklerini kullanarak $m(\widehat{ABN})$'nü buluyor (12H). Çokgende açıya yönelik bilgilerini yeni duruma tekrar uyarlıyor ve $m(\widehat{AEN})$ 'nü buluyor (13H). Dörtgeni fark ederek dörtgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve dörtgenin iç açılarını kullanarak istenilen açının ölçüsünü buluyor (14H).

Halil sorunun çözümü için ABNE dörtgeninin iç açılarını kullanmayı planlamıştır. Beşgende açıya yönelik bilgilerini kullanarak $m(\widehat{BAE})$ ve $m(\widehat{AEN})$'nü bulmuştur. $[NB]$'nın aynı zamanda karenin köşegeni olduğunu fark etmiştir. Bunu fark eden Halil karenin temel elemanlarına ve açılarına yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini koordine ederek $m(\widehat{ABK})$'nü bulmuştur. Son olarak ise ABNE dörtgeninin iç açılarını toplamış ve istenilen açıyı bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. ABNE dörtgenine odaklanarak soruyu çözebileceğini fark etmiştir. Bu durum çokgenin kenarları arasında ilişki kurabildiğinin göstergesidir. Sonuç olarak Halil'in sorunun çözümünde dörtgen ve beşgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordineli kullandığı, çokgen kavramını etkin kullanabildiği görülmektedir.

İkinci soru "çokgen kavramını açıklayarak işlemler yapar" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çokgen kavramını açıklamaya yönelik olan bu soruda, Halil'in süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Halil'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (H: Halil).

21H: Bir beşgen dediği için iç açılarının toplamı 540 olması lazım.

22H: Burası 130, burası 110, burası 140, burası da 100, topladığımızda 480.

23H: 540'dan 480 çıkardım 60°(Bkz. Şekil 4).

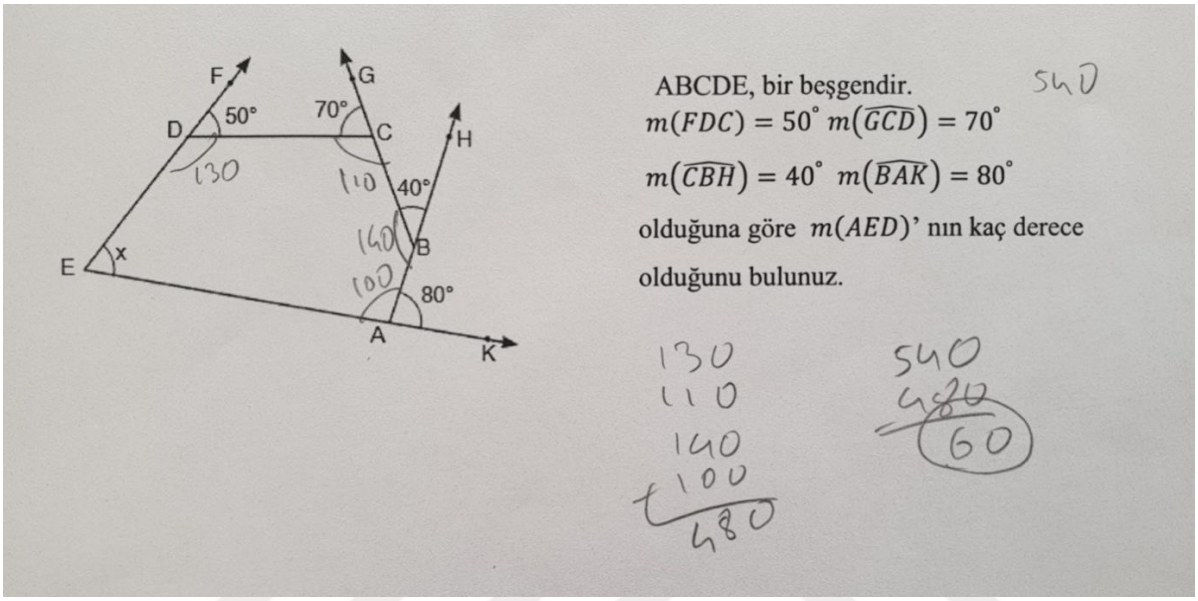
Halil beşgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve beşgenin iç açılar toplamını buluyor (21H). Açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve beşgenin iç açı ölçülerini buluyor (22H). Çokgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve istenilen açının ölçüsünü buluyor (23H).

Halil sorunun çözümü için beşgenin iç açılarını kullanmayı planlamıştır. Bunun için açıya yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartmış ve beşgenin iç açılarını bulmuştur. Daha sonra bulduğu bu açıların ölçüleri toplamını, beşgende iç açı toplamı bilgisiyle koordine ederek sonuca ulaşmıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat çokgenin dış açılarını kullanarak soruyu çözebileceğini

fark edememiştir. Bu durum çokgenin açılarını etkili kullanamadığının göstergesidir. Sonuç olarak Halil'in sorunun çözümünde açı ve beşgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordineli kullandığı fakat çokgen kavramını etkin kullanamadığı görülmektedir.

Şekil 4

Halil'in ikinci soruya yönelik çözümü



Üçüncü soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Halil'in süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Halil'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (H: Halil).

31H: DC, a ; BR, b'ymiş.

32H: Demek ki $a^2 - b^2 = 191$ 'miş. Bize çevresini sorduğuna göre,

$(a - b).(a + b) = 191$ 'den çarpanlarına ayırırsak, $(a + b)$, 191 ; $(a - b)$'de 1.

{Burada $(a - b) = 1$, $(a + b) = 191$ denklem sistemini çözüyor}

$a = 96$, b'de burdan 95 gelir.

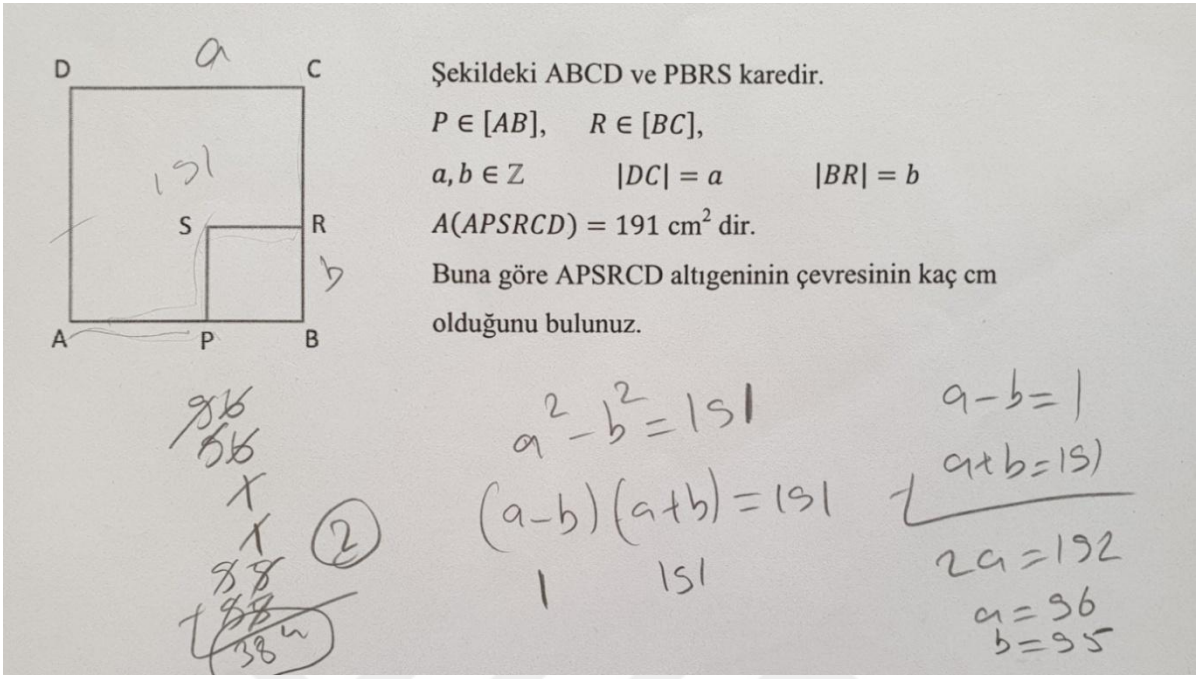
33H: Bize altıgenin çevresini sormuş,

{Burada $96 + 96 + 1 + 1 + 95 + 95$ işlemini yapıyor}, 384 (Bkz. Şekil 5).

Halil cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin kenar uzunluklarını cebirsel olarak temsil ediyor (31H). Denklemlere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin kenar uzunluklarını buluyor (32H). Altıgenin kenar uzunluklarını topluyor ve istenilen sonucu buluyor (33H).

Şekil 5

Halil'in üçüncü soruya yönelik çözümü

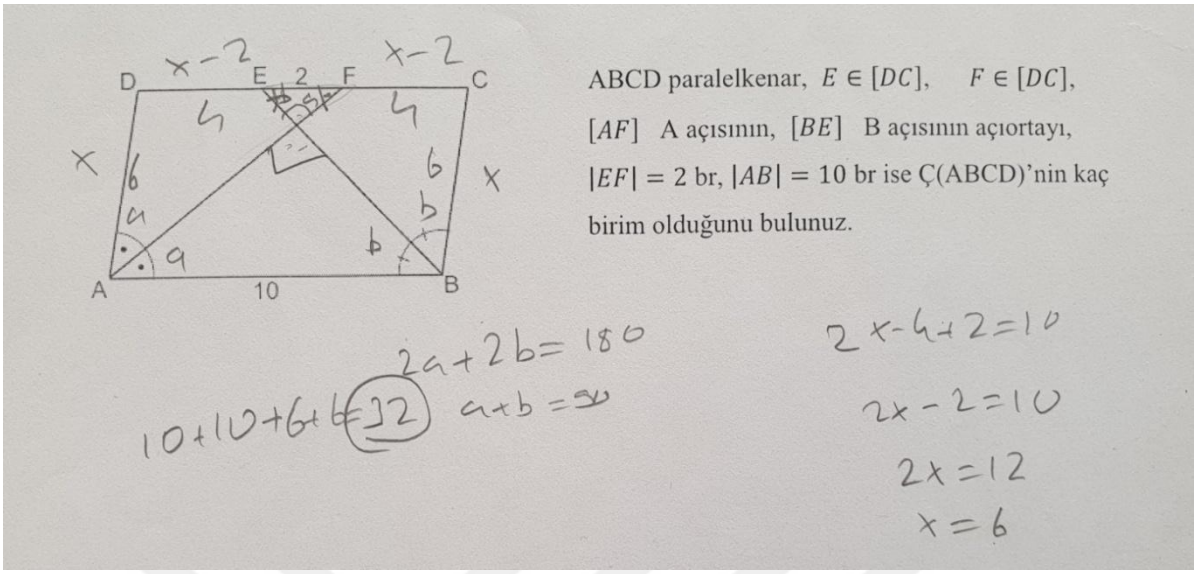


Halil ABCD ve PBRS karelerinin alanları arasında ilişki kurmuştur. Denklemler şemasını işe koşmuş ve karelerin alanları arasında kurduğu ilişki sayesinde bir denklem elde etmiş ve bu denklemi çözerek karelerin kenar uzunluklarını bulmuştur. Daha sonra altıgenin kenar uzunluklarını toplamıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat APSRCD altıgenin kenarları ile PBRS karesinin kenarları arasında ilişki kuramamıştır. Bu yüzden APSRCD altıgeninin çevresini hesaplarken altıgenin kenar uzunluklarını toplamıştır. $|PS|$ ile $|BR|$ ve $|SR|$ ile $|PB|$ arasında ilişki kurabilseydi, APSRCD altıgeninin çevresinin ABCD karesinin çevresine eşit olduğunu fark edebilirdi. Sonuç olarak Halil'in sorunun çözümünde karenin alanı, cebirsel ifadeler ve denklemler kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordineli kullandığı, fakat dörtgenin kenar özelliklerini etkili kullanamadığı görülmektedir.

Dördüncü soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Halil'in süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Halil'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 6'da sunulmuştur (H: Halil).

Şekil 6

Halil'in dördüncü soruya yönelik çözümü



41H: Buraya a dedik buraya b {($\hat{A}$) ile ($\hat{B}$)'nı harfle temsil ediyor}.

42H: $$2a + 2b = 180$$

$$a + b = 90$$

43H: Burası da 90 burası da 90 {$[EB]$ ile $[AF]$'nın kesişimi ile oluşan açıdan bahsediyor}.

44H: Şurdan şuraya bi z kuralı uyguladığımızda burası a oluyor burası da b oluyor {iç ters açıları gösteriyor}.

45H: Buraya {$[BC]$'nı kastediyor} x desem, burası da b, b'den $x - 2$ olur {ECB üçgeni üzerinde çalışıyor}. Burası da {$[AD]$'nı kastediyor} x doğal olarak a'nın karşısı, burası da $x - 2$ oldu.

46H: Buraların toplamı 10'a eşit olması lazım {$|DE|+|EF|+|FC|$'nu kastediyor}.

$2x - 4 + 2 = 10$ {denklemi sesli bir şekilde çözüyor}

$$x = 6$$

47H: Burası 6, burası 6, burası 4, burası da 4 {paralelkenarın kenar uzunluklarını söylüyor}.

$10 + 10 + 6 + 6 = 32$

Halil cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve ($\hat{A}$) ile ($\hat{B}$)'nı sembolle temsil ediyor (41H). Denklemlere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartıyor ve paralelkenar bilgisi ile koordine ederek bir denklem elde ediyor (42H). Fakat bu denklemi daha sonra çözüm için kullanmıyor. Açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartıyor ve $[EB]$ ile $[AF]$'nın kesişimi ile oluşan açıyı buluyor (43H). Fakat bu açıyı daha sonra çözüm için kullanmıyor. Açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve ($\widehat{BEC}$) ile ($\widehat{AFE}$)'nı sembolle temsil ediyor

(44H). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve ADF üçgeni ile BCE üçgeninin ikizkenar üçgen olduğunu fark ediyor (45H). Aynı zamanda cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve ADF üçgeni ile BCE üçgeninin kenar uzunluklarını cebirsel olarak temsil ediyor (45H). Denklemlere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve paralelkenarın kısa kenar uzunluğunu buluyor (46H). Paralelkenarın kenar uzunluklarını topluyor ve istenilen sonucu buluyor (47H).

Halil çözüme cebirsel ifadelere yönelik bilgilerini işe koşmakla başlamıştır. Böylece eşit açıları aynı sembolle temsil etmiştir. Sorunun çözümüne denklemlere yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak devam etmiş ve bir eşitlik elde etmiştir. Üçgene yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak elde ettiği bu eşitlikle koordine etmiş ve $[EB]$ ile $[AF]$'nın kesişimi ile oluşan açının 90° olduğunu bulmuştur. Fakat buradan bir sonuç elde edemediğinden bu yaklaşımdan vazgeçmiştir. Cebirsel ifadeler ve açılara yönelik bilgilerini işe koşarak iç ters açıları sembolle temsil etmiştir. Üçgen, paralelkenar, cebirsel ifadeler ve denklemlere yönelik bilgilerini koordineli kullanarak paralelkenarın çevresini bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. ADF üçgeni ile BCE üçgeni arasında ilişki kurarken, paralelkenarın karşılıklı kenar uzunluklarının birbirine eşit olduğuna yönelik önceden oluşturduğu bilgisini yeni duruma uyarlamıştır. Buradan yola çıkarak $|DE| = |CF|$ sonucuna ulaşmıştır. Fakat $|DE| = |CF|$ eşitliğini elde etmek için ADF üçgeni, BCE üçgeni ve paralelkenarın karşılıklı kenarları arasındaki ilişkiyi doğrudan görememiştir. Bu durum Halil'in paralelkenarın kenarlarına yönelik özelikleri etkin olarak kullanamadığının göstergesidir. Sonuç olarak Halil'in sorunun çözümünde açı, üçgen, dörtgen, cebirsel ifadeler ve denklemler kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı, bu kavramları koordineli kullanabildiği fakat paralelkenarın kenarlarına yönelik özelikleri etkin olarak kullanamadığı görülmektedir.

Altıncı soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Halil'in süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Halil'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (H: Halil).

Açıklama: D noktasından $[AB]$'na çizilen dikmenin $[AB]$'nı kestiği nokta H olsun.

C noktasından $[AB]$'na çizilen dikmenin $[AB]$'nı kestiği nokta K olsun.

61H: Buradan bir dikme indirsem, 90 $\{[DH]$'nı çiziyor$\}$.

62H: 90'nın karşısı 6'ysa 30'un karşısı 3'tür.

63H: Buradanda dikme indirdim {$[CK]$'nı çiziyor} 3, 3, $3\sqrt{2}$.

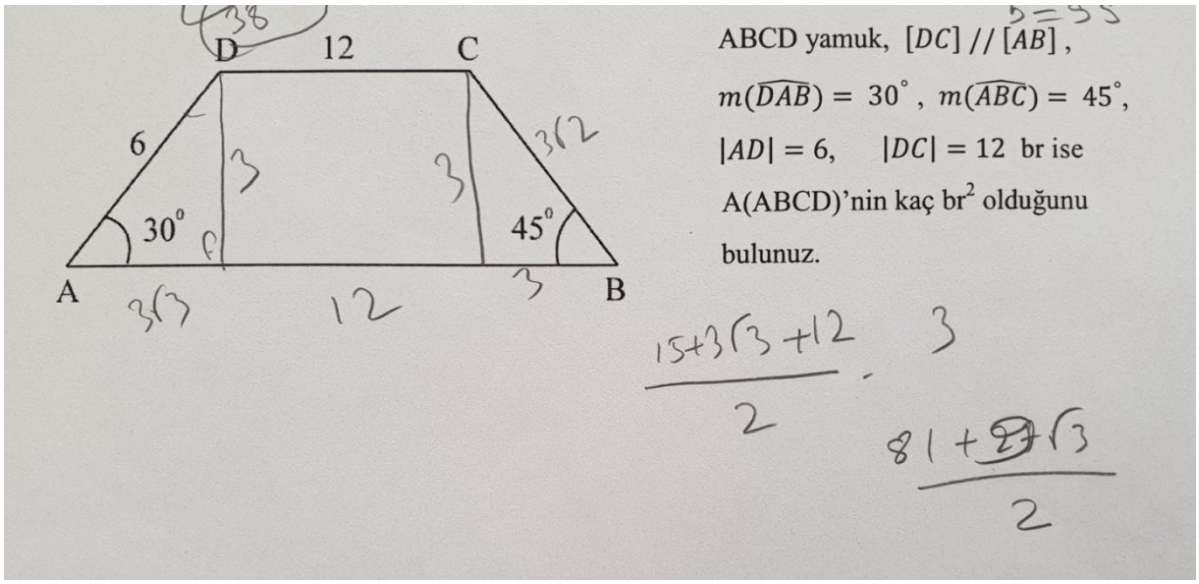
64H: Burası {$(\widehat{ADH})$'nı kastediyor} 60'sa $3\sqrt{3}$'tür {$|AH|$'nu kastediyor}.

65H: Burası da {$|HK|$'nu kastediyor} 12.

66H: Alan formülünden $\frac{15+3\sqrt{3}+12}{2}.3$ burdanda $\frac{81+9\sqrt{3}}{2}$ (Bkz. Şekil 7).

Şekil 7

Halil'in altıncı soruya yönelik çözümü



Halil yamuğun yüksekliğini çiziyor (61H). Yamuğun yüksekliğini herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadan çizmesi onun eylemleri yansıtabildiğinin herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadığının göstergesidir. Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve çizdiği dikmenin uzunluğunu buluyor (62H). C noktasından $[AB]$'na dikme çizerek üçgen oluşturuyor. $|DC|$ ile $|HK|$ arasında ilişki kuruyor ve $|HK|$'nu buluyor. Kurduğu bu ilişki sayesinde üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve CBK üçgeninin kenar uzunluklarını buluyor (63H). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma tekrar uyarlıyor ve $|HK|$'nu buluyor (64H). $|DH|$ ile $|CK|$ arasında ilişki kuruyor ve $|CK|$'nu buluyor (65H). Yamuğun alanını daha önce öğrendiği formülü kullanarak buluyor (66H).

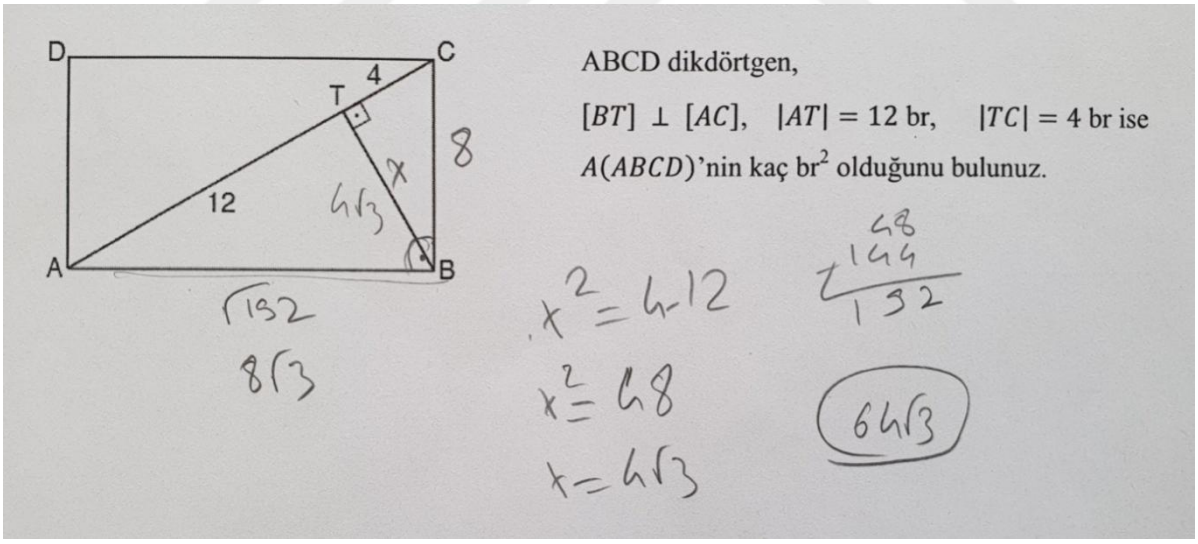
Halil sorunun çözümü için daha önce öğrendiği formülü kullanmaya odaklandığından $|AB|$'nu ve yamuğun yüksekliğini bulmaya yönelik bir yaklaşım sergilemiştir. Bunun için yamuğun C ve D noktalarından $[AB]$'na dik çizmiştir. Bu dikleri çizerken üçgen şemasını işe koşmuştur. Çünkü çizdiği dikme ile bir dik üçgen oluşturmayı amaçlamış ve bu dik üçgeni kullanarak çizdiği dikmenin uzunluğunu bulabileceğini fark etmiştir. Dikme çizerken, yamuk

ve üçgene yönelik bilgilerini bir arada düşünmüş ve yamuğun yüksekliği ile dik üçgenin kenarını ilişkilendirmiştir. Sonra üçgen şemasını işe koşarak yamuğun alan formülünü kullanabilmek için gerekli olan verileri elde etmiştir. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat yamuğun alanının, yamuğun içinde oluşan dikdörtgenin alanı ile iki dik üçgenin alanları toplamına eşit olduğunu fark edememiştir. Yamuğun alanı kavramı ile dikdörtgenin ve üçgenin alanı kavramlarını koordineli kullanarak formüle ihtiyaç duymadan sonuca ulaşabilirdi. Sonuç olarak Halil'in sorunun çözümünde üçgen ve dikdörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordine ettiği, yamuğun alanını bulmak için üçgenin ve dikdörtgenin alanı kavramlarından yararlanmak yerine daha önce öğrendiği formülü kullandığı görülmektedir.

Yedinci soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Halil'in süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Halil'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 8'de sunulmuştur (H: Halil).

Şekil 8

Halil'in yedinci soruya yönelik çözümü



71H: Şurası dik, dikdörtgen olduğu için 90.

72H: Öklid yapacağız, burası {$[BT]$'nı kastediyor} x dediğimizde

$x^2 = 4.12$, $x^2 = 48$, $x = 4\sqrt{3}$ gelir.

73H: Burası {$[BT]$'nı kastediyor} $4\sqrt{3}$ 'se burası da {$[BC]$'nı kastediyor} 8 dir. $\sqrt{192}$ 'ymiş burası da {$|AB|$'nu kastediyor}. Buda $8\sqrt{3}$ dür.

74H: Çarptığımızda $64\sqrt{3}$.

Halil dikdörtgende açıya yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor (71H). Önce cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $|BT|$'nu sembolle temsil ediyor (72H). Sonra ise denklemlere ve üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini koordine ederek yeni duruma uyarlıyor ve $|BT|$'nu buluyor (72H). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini tekrar işe koşuyor ve $|BC|$ ile $|AB|$'nu buluyor (73H). Formül kullanarak dikdörtgenin alanını hesaplıyor (74H).

Halil dikdörtgenin alanını hesaplamada formül kullanabilmek için dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmaya odaklanmıştır. ($\hat{B}$) ile ($\hat{T}$) arasında ilişki kurmuş ve bu kurduğu ilişki sayesinde üçgen şemasını işe koşarak $|BT|$'nu bulmuştur. Daha sonra cebirsel ifadeler, denklemler ve üçgene yönelik şemalarını işe koşmuştur. Cebirsel ifadeler, denklemler ve üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartarak koordine etmiş ve dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmuştur. Son olarak dikdörtgenin alan formülünü kullanarak istenilen alanı bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat dikdörtgenin köşegeninin, dikdörtgenin alanını iki eş parçaya ayırdığını fark edememiştir. Halil bu durumu fark etmiş olsaydı, bir tane üçgenin alanını hesaplar ve bulduğu sonucun iki katını alarak istenilen sonucu elde edebilirdi. Böylece dikdörtgenin alan formülünü kullanmaya ihtiyaç duymazdı. Sorunun çözümünde üçgen, cebirsel ifadeler, denklemler ve dikdörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak koordineli kullanmıştır. Sonuç olarak Halil'in dikdörtgenin alanını, üçgenin alanına kapsülleyemediği için dikdörtgenin alan formülünü kullandığı görülmektedir.

Sekizinci soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Halil'in süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Halil'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (H: Halil).

81H: Bir dikdörtgen çizeyim.

82H: Köşegen uzunluğu $20\sqrt{2}$ 'ymiş, $20\sqrt{2}$ olan kare şeklinde fayans. Şu $20\sqrt{2}$ ymiş.

83H: Bu banyonun uzun kenarı, burası 20, kısa kenarı, buraya 10 tane fayans döşenecekmiş.

84H: Köşegenin uzunluğu buraya x dersek, $x\sqrt{2}$ olduğundan, burası 20 olur. Yani bir fayansın bir kenar uzunluğu, 20'ymiş.

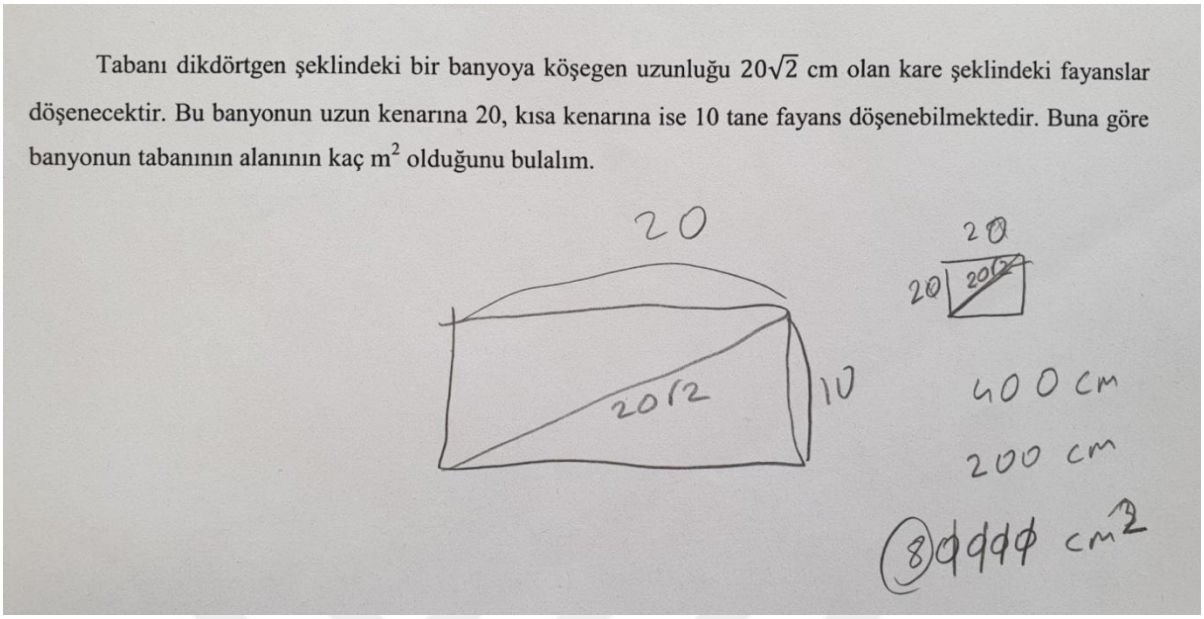
85H: Buraya 20 tane döşeyeceğimiz için, 400 cm, burası ise 200 cm,

86H: çarptığımızda 80000 cm^2.

87H: Bunu da metrekareye çevirmek için 4 tane sıfır atacağız, yani 8 m^2 (Bkz. Şekil 9).

Şekil 9

Halil'in sekizinci soruya yönelik çözümü



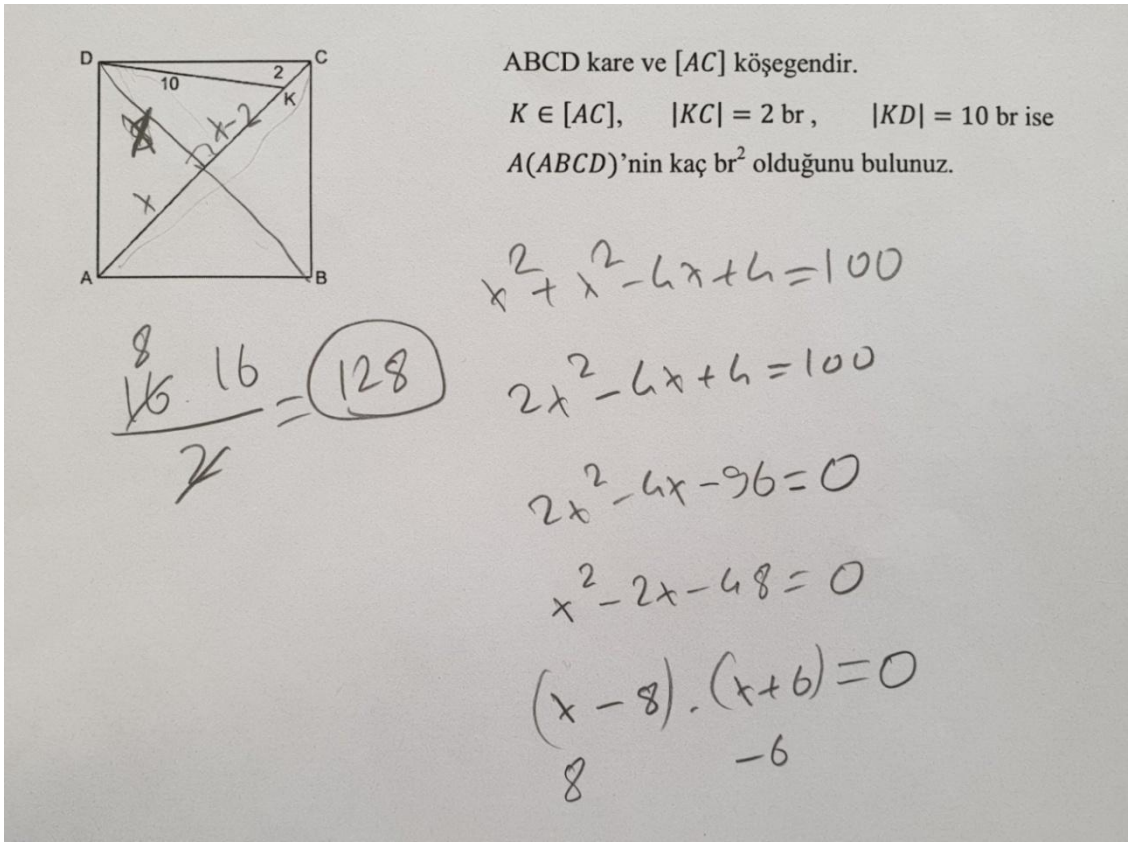
Halil banyoyu dikdörtgen çizerek modelliyor (81H). Fayansları kare çizerek modelliyor (82H). Soruda verilenleri çizdiği dikdörtgen üzerinde gösteriyor (83H). Cebirsel ifadeler ve kareye yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini koordine ederek yeni duruma uyarlıyor ve karenin bir kenar uzunluğunu buluyor (84H). Karenin bir kenar uzunluğu ile dikdörtgenin kısa ve uzun kenarına yerleştirilebilecek kare sayısını koordine ederek dikdörtgenin kısa ve uzun kenar uzunluklarını buluyor (85H). Dikdörtgenin alan formülünü kullanıyor ve dikdörtgenin alanını cm^2 olarak hesaplıyor (86H). Ölçülere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve bulduğu sonucu m^2 birimine çeviriyor (87H).

Halil dikdörtgenin alanını hesaplamada önceden öğrendiği formülü kullanabilmek için dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmaya odaklanmıştır. Cebirsel ifadeler ve kareye yönelik şemalarını işe koşmuş ve karenin bir kenar uzunluğunu bulmuştur. Dikdörtgenin ve karenin kenar uzunlukları arasında ilişki kurmuş ve böylece dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmuştur. Dikdörtgenin alanı ve alan ölçülerine yönelik bilgilerini kapsülden çıkartmış, bu bilgileri koordine ederek yeni duruma uyarlamış ve sonuca ulaşmıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat dikdörtgenin alanının, bir tane karenin alanı ile dikdörtgenin içine yerleştirilebilecek kare sayısının çarpımına eşit olduğunu fark edememiştir. Sorunun çözümünde, cebirsel ifadeler, alan ölçüleri, kare ve dikdörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak koordine etmiştir. Sonuç olarak Halil'in sorunun çözümünde, dikdörtgenin alanını, karenin alanına kapsüllemek yerine dikdörtgenin alan formülünü kullandığı görülmektedir.

Görüşme formunun dokuzuncu sorusu "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Halil'in süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Halil'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 10'da sunulmuştur (H: Halil).

Şekil 10

Halil'in dokuzuncu soruya yönelik çözümü



Açıklama: Karenin köşegenlerinin kesim noktası O olsun.

91H: Burdan dikme indirsem {$[BD]$'nı çiziyor}.

92H: x , x, burası da $(x-2)$ olur {$|AO|$'nu, $|DO|$'nu ve $|OK|$'nu sembolle temsil ediyor}.

93H: Burada pisagor uygulayacağım {DOK üçgenin çalışıyor}.

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 = 100$$

{burada yazdığı denklemi çözüyor}

$$x^2 - 2x - 48 = 0$$

Buda $(x-8).(x+6) = 0$ ya 8 olabilir yada -6. Kenar uzunluğu -6 olamayacağına göre x, 8'miş.

94H: Burası 8'se, tamamı 16 olur. $\frac{16.16}{2} = 128$ çıkar.

Halil kareye yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin köşegenini çiziyor (91H). Herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadan karenin köşegenini çizmesi, onun karenin temel elemanlarına yönelik eylemleri yansıtabildiğinin göstergesidir. Cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin köşegen uzunluğunu cebirsel olarak temsil ediyor (92H). Denklemlere ve üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin köşegen uzunluğunu buluyor (93H). Karenin alan formülünü kullanıyor ve istenilen sonucu buluyor (94H).

Halil sorunun çözümü için karenin temel elemanını yorumlamış ve köşegen çizmeye karar vermiştir. Köşegeni çizdikten sonra üçgen şemasını işe koşmuş ve bir dik üçgen oluştuğunu fark etmiştir. Bu dik üçgeni kullanarak karenin köşegen uzunluğuna ulaşmayı planlamıştır. Bunun için üçgen ve denklemler şemasına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartmış ve karenin köşegen uzunluğunu bulmuştur. Karenin alan formülünü kullanarak istenilen sonucu bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat karenin alanının, karenin içinde oluşan üçgensel bölgelerin alanları toplamına eşit olduğunu fark edememiştir. Sonuç olarak Halil'in sorunun çözümünde üçgen, denklemler ve dörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordineli kullandığı fakat karenin alanını, üçgenin alanına kapsülleyemediği için karenin alan formülünü kullandığı görülmektedir.

4.1.2. Damla'nın Oluşan Bilgilerinin Analizi

Birinci soru "çokgen kavramını açıklayarak işlemler yapar" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çokgen kavramını açıklamaya yönelik olan bu soruda, Damla'nın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Damla'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (D: Damla).

11D: Karenin bütün kenarları birbirine eş. Düzgün beşgen olduğu içinde onlarda eş olur, şu kenarı çakışık {karenin ve beşgenin ortak kenarları arasında ilişki kuruyor}.

12D: Burası {($\widehat{KAB}$)'nı kastediyor} 90, beşgenin bir iç açısı 108, çıkarınca burası {($\widehat{EAK}$)'nı kastediyor} 18 kalıyor.

13D: Şu köşegen olmuş 45, 45 {$m(\widehat{AKB})$'nü ve $m(\widehat{BKF})$'nü yazıyor}.

14D: Buraya {($\widehat{AKN}$)'nı kastediyor} 180'den 45 çıkarınca 135 kalıyor.

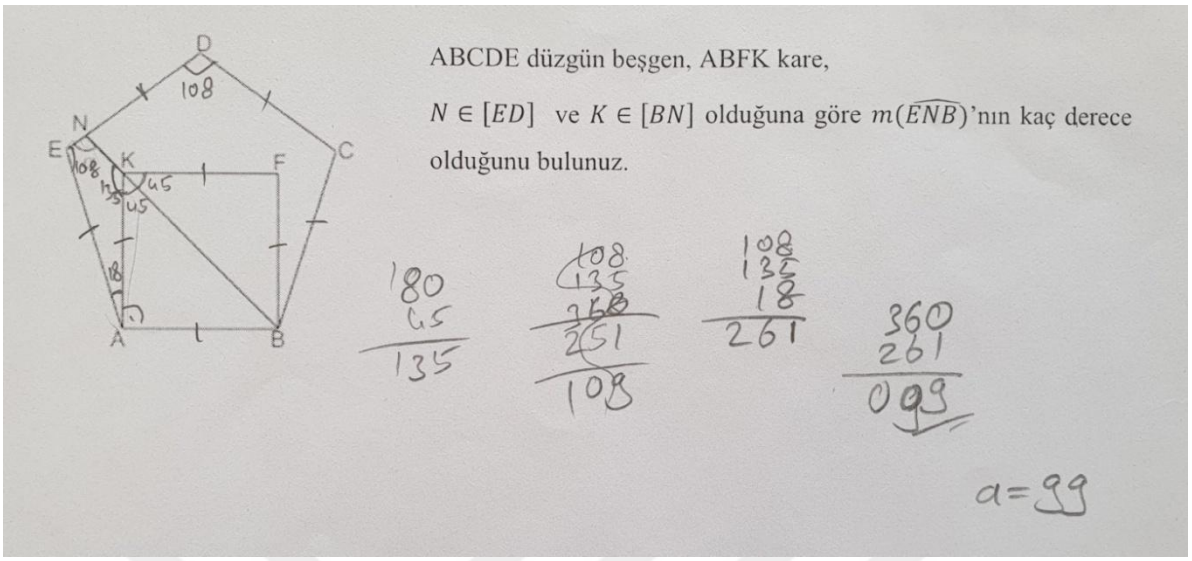
15D: Şurası {($\hat{E}$)'nı kastediyor} zaten 108'di.

16D: Hepsini toplayıp 360'tan çıkartacağız çünkü bu bir dörtgen {AENK dörtgenini kastediyor}.

{Burada $108 + 135 + 18$ işlemini yapıyor} 261, 60'dan 261'i çıkardım 99 (Bkz. Şekil 11).

Şekil 11

Damla'nın birinci soruya yönelik çözümü



Damla önceden oluşturduğu kare ve beşgene yönelik bilgilerini koordine ederek karenin ve beşgenin kenarları arasında ilişki kuruyor (11D). Kare ve beşgene yönelik bilgilerini tekrar koordine ederek karenin ve beşgenin açıları arasında ilişki kuruyor. Böylece $m(\widehat{EAK})$'nü buluyor (12D). Kareye yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $m(\widehat{AKB})$ ile $m(\widehat{BKF})$'nü buluyor (13D). Açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $m(\widehat{AKN})$'nü buluyor (14D). Beşgene yönelik bilgilerini göz önünde bulunduruyor ve $m(\hat{E})$'nü buluyor (15D). Dörtgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve istenilen açının ölçüsünü buluyor (16D).

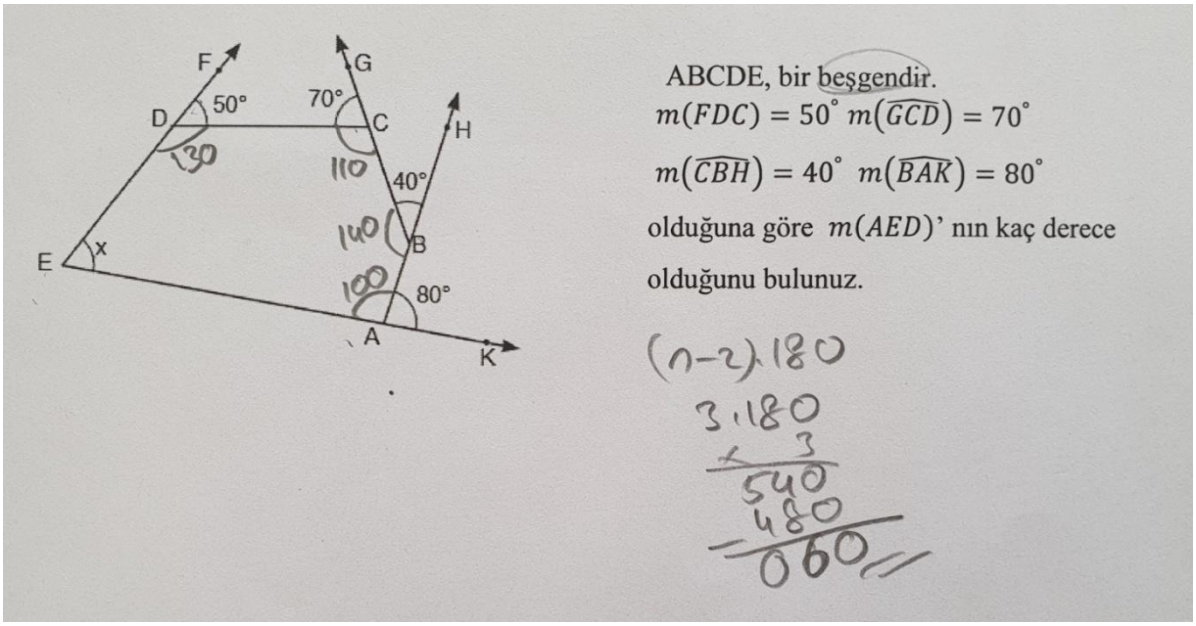
Damla beşgenin ve karenin kenarları arasında ilişki kurmayı planladığından kare ve beşgene yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak uzunlukları aynı olan kenarları tespit etmiştir. Fakat Damla'nın bu yaklaşımının sorunun çözümüne bir katkısı olmamıştır. Daha sonra AENK dörtgenine odaklanmayı planlamıştır. Bunun için AENK dörtgeninin iç açılarını bulmayı hedeflemiştir. Kare ve beşgenin açılarına yönelik bilgilerini koordine ederek $m(\widehat{EAK})$'nü bulmuştur. $[NB]$'nın aynı zamanda karenin köşegeni olduğunu fark etmiştir. Bunu fark eden Damla karenin temel elemanlarına ve açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini koordine ederek $m(\widehat{AKN})$'nü bulmuştur. Son olarak ise AENK dörtgeninin iç açılarını toplamış ve istenilen açıyı bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat ABNE dörtgenine odaklanarak soruyu çözebileceğini fark edememiştir. Bu durum çokgenin kenarları arasında etkili ilişki kuramadığının göstergesidir. Sonuç olarak Damla'nın sorunun çözümünde açı, üçgen, dörtgen, kare ve beşgen

kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordineli kullandığı fakat çokgen kavramını etkin kullanamadığı görülmektedir.

İkinci soru "çokgen kavramını açıklayarak işlemler yapar" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çokgen kavramını açıklamaya yönelik olan bu soruda, Damla'nın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Damla'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 12'de sunulmuştur (D: Damla).

Şekil 12

Damla'nın ikinci soruya yönelik çözümü



21D: Bunlar doğrusal o zaman 180'den 50'yi çıkarırım, burası 130 olur, burası da 110, burası 180'den 40 çıktı 140, burası da 100.

22D: Bu beşgenmiş, beşgenin iç açıları toplamı $(n-2).180$ oluyor. 3.180 yani, oda 540 yapıyor.

23D: Bunları toplayıp çıkaracağım. 480 oluyor, (burada $540-180$ işlemini yapıyor) 60°'ymiş x.

Damla açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve beşgenin iç açı ölçülerini buluyor (21D). Çokgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve beşgenin iç açılar toplamını buluyor (22D). Çokgenin iç açılarını kullanarak istenilen açının ölçüsünü buluyor (23D).

Damla sorunun çözümü için beşgenin iç açılarını kullanmayı planlamıştır. Bunun için açıya yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartmış ve beşgenin iç açılarını bulmuştur. Daha sonra bulduğu bu açıların ölçüleri toplamını, beşgende iç açı toplamı bilgisiyle koordine ederek sonuca ulaşmıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal

yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat çokgenin dış açılarını kullanarak soruyu çözebileceğini fark edememiştir. Bu durum çokgenin açılarını etkili kullanamadığının göstergesidir. Sonuç olarak Damla'nın sorunun çözümünde açı ve beşgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordineli kullandığı, fakat çokgen kavramını etkin kullanamadığı görülmektedir.

Üçüncü soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Damla'nın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Damla'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (D: Damla).

31D: DC, a; BR, b. Şurası da b, burası $(a-b)$, kareymiş bu.

32D: APSRCD şurası 191'miş alanı. Çevresini soruyor bana. O zaman büyük karenin alanından küçük karenin alanını çıkarırım. $a^2-b^2=191$ oluyor.

33D: Çevresini soruyor bana. Çevresi şurası da a, burası $(a-b)$.

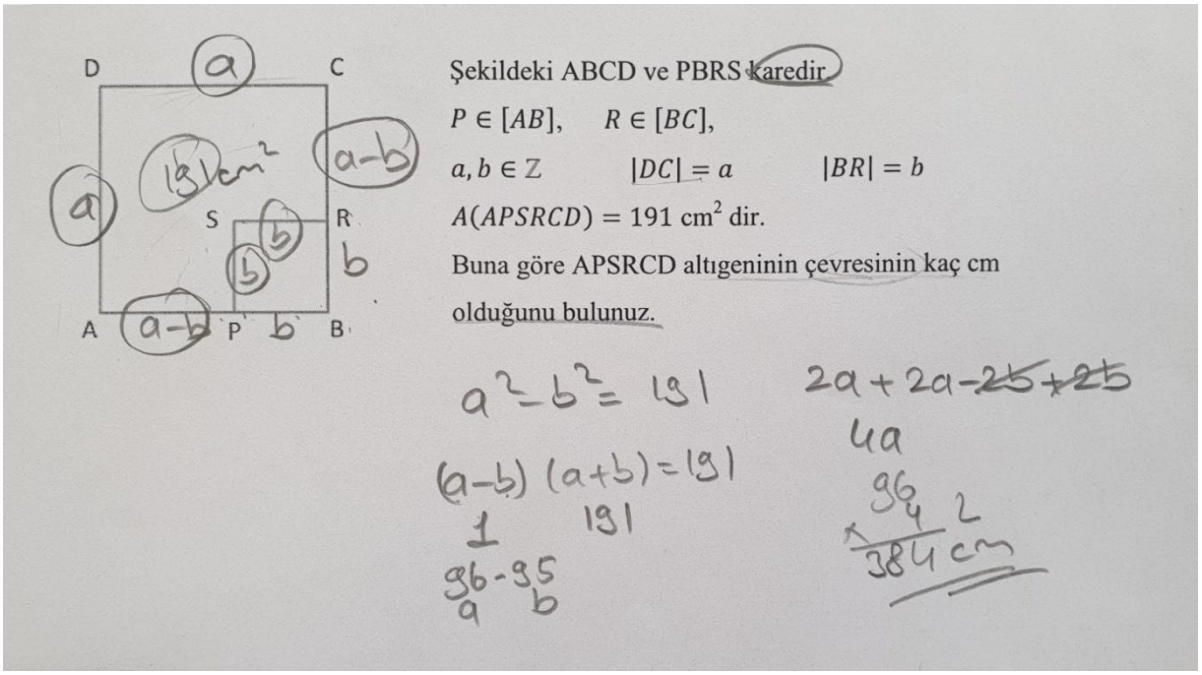
$2a+2a-2b+2b$ olmuş oluyor çevresi. b'ler gidiyor 4a'yı bulmam lazım.

34D: $(a-b)(a+b)=191$ oluyor. O zaman burası 1 olacak burası da 191. Oda kaç oluyor 192'yi 2'ye böleceğim. 96'ya 95. a, 96'ymış b'de 95.

35D: $96x4=384$ (Bkz. Şekil 13).

Şekil 13

Damla'nın üçüncü soruya yönelik çözümü



Damla karenin kenar uzunluklarını cebirsel olarak temsil ediyor (31D). Denklemler ve karenin alanına yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini koordine ederek yeni duruma uyarlıyor ve bir denklem elde ediyor (32D). Cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve altıgenin çevresini cebirsel olarak ifade ediyor (33D). Denklemlere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini koordine ederek yeni duruma uyarlıyor ve karenin kenar uzunluklarını buluyor (34D). Cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve cebirsel olarak ifade ettiği altıgenin çevresinde değişkenin değerini yazarak altıgenin çevresini hesaplıyor (35D).

Damla ABCD ve PBRS karelerinin alanları arasında ilişki kurmuştur. Denklemler şemasını işe koşmuş ve karenin alanları arasında kurduğu ilişki sayesinde bir denklem elde etmiş ve bu denklemi çözerek karelerin kenar uzunluklarını bulmuştur. Cebirsel ifadelere yönelik şemasını işe koşmuş ve altıgenin çevresini cebirsel olarak temsil ettikten sonra altıgenin çevresini hesaplamıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat APSRCD altıgenin kenarları ile PBRS karesinin kenarları arasında ilişki kuramamıştır. Bu yüzden APSRCD altıgeninin çevresini hesaplarken, altıgenin kenar uzunluklarını toplamıştır. $|PS|$ ile $|BR|$ ve $|SR|$ ile $|PB|$ arasında ilişki kurabilseydi, APSRCD altıgeninin çevresinin ABCD karesinin çevresine eşit olduğunu fark edebilirdi. Sonuç olarak Damla'nın sorunun çözümünde karenin alanı, cebirsel ifadeler ve denklemler kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordineli kullandığı fakat dörtgenin kenar özelliklerini etkili kullanamadığı görülmektedir.

Dördüncü soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Damla'nın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Damla'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (A:Araştırmacı, D: Damla).

41D: Paralelkenarmış 2'ye 10 oranı var. Şuralar 2'ye bölünür mü?

A: Orada ne yaptın?

42D: Paralelkenar ya açıları taşıdım {$m(\widehat{FAB})$'nün $m(\widehat{AFE})$'ne ve $m(\widehat{EBA})$'nün $m(\widehat{FEB})$'ne eşit olduğunu fark ediyor}. Belki işe yarar diye {bir müddet sessizce düşünüyor}.

A: Ne geçiyor aklından?

43D: Yani açıortay ya şurdan çeksem mi diye düşünüyorum {AC köşegenini kastediyor}. Ama hiçbir işe yaramaz.

44D: Açıortay, şuraya x desem şimdi {$|FC|$'nu kastediyor}, bu iki açı o zaman burası $(x + 2)$ {$[BC]$'nı kastediyor}. Burası {$|DE|$'nu kastediyor}, x olur mu? Evet, burası da {$|AD|$'nu kastediyor}, $(x + 2)$ o zaman burası da {$|DE|$'nu kastediyor} x.

A: Neden oraya $(x + 2)$ dedin?

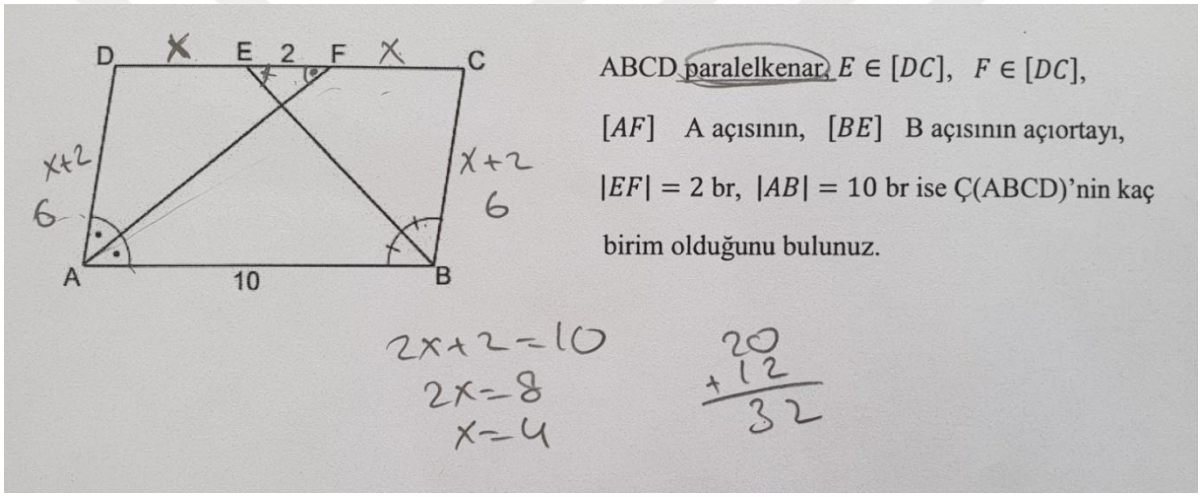
45D: Çünkü paralelkenar ya karşılıklı kenarların uzunluğu eşit. Sonra burası da ikizkenar olduğu için burası x oluyor.

46D: O zaman $2x + 2 = 10$, $2x = 8$, $x = 4$ oluyor.

47D: O zaman çevresini bulabilirim. 10, 10 {toplama işlemi yapıyor} 20, buraları da 6'ymış. $(20 + 12)$'den 32 yapıyor (Bkz. Şekil 14).

Şekil 14

Damla'nın dördüncü soruya yönelik çözümü



Damla üçgende benzerlik konusuna yönelik önceden oluşturduğu bilgileri yeni duruma uyarlamayı düşünüyor. Fakat daha sonra bu yaklaşımdan vazgeçiyor (41D). Açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $m(\widehat{FAB})$'nün $m(\widehat{AFE})$'ne ve $m(\widehat{EBA})$'nün $m(\widehat{FEB})$'ne eşit olduğunu fark ediyor (42D). Paralelkenarın AC köşegenini çizerek önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlamayı planlıyor. Fakat daha sonra bu yaklaşımdan vazgeçiyor (43D). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve ADF üçgeni ile BCE üçgeninin ikizkenar üçgen olduğunu fark ediyor. Aynı zamanda cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve ADF üçgeni ile BCE üçgeninin kenar uzunluklarını cebirsel olarak temsil ediyor. Böylece $|BC|$ ile $|AD|$ arasında ilişki kuruyor ve $|EC| = |CB| = |AD| = |DF|$ olduğunu fark ediyor (44D, 45D). Paralelkenarın karşılıklı kenarları arasında ilişki kuruyor, kurduğu bu ilişki sayesinde denklemlere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve

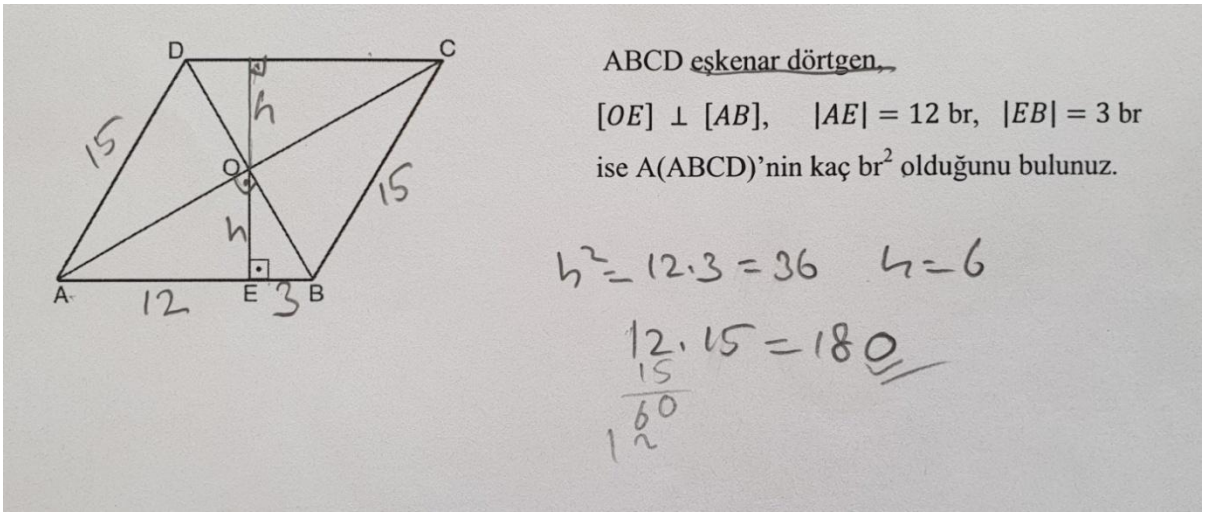
paralelkenarın kenar uzunluklarını buluyor (46D). Paralelkenarın kenar uzunluklarını topluyor ve istenilen sonucu buluyor (47D).

Damla sorunun çözümü için önce farklı yaklaşımlar denemiş fakat bir sonuç elde edememiştir. Daha sonra açılara yönelik şemasını işe koşarak iç ters açıları belirlemiştir. Üçgen, paralelkenar, cebirsel ifadeler ve denklemlere yönelik bilgilerini koordineli kullanarak paralelkenarın çevresini bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. ADF üçgeni ile BCE üçgeni arasında ilişki kurarken, paralelkenarın karşılıklı kenar uzunluklarının birbirine eşit olduğuna yönelik önceden oluşturduğu bilgisini yeni duruma uyarlamıştır. Buradan yola çıkarak $|DE| = |CF|$ sonucuna ulaşmıştır. Fakat $|DE| = |CF|$ eşitliğini elde etmek için ADF üçgeni, BCE üçgeni ve paralelkenarın karşılıklı kenarları arasındaki ilişkiyi doğrudan görememiştir. Bu durum Damla'nın paralelkenarın kenarlarına yönelik özelikleri etkin olarak kullanamadığının göstergesidir. Sonuç olarak Damla'nın sorunun çözümünde açı, üçgen, dörtgen, cebirsel ifadeler ve denklemler kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı, bu kavramları koordineli kullanabildiği fakat paralelkenarın kenarlarına yönelik özelikleri etkin olarak kullanamadığı görülmektedir.

Beşinci soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Damla'nın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Damla'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 15'de sunulmuştur (D: Damla).

Şekil 15

Damla'nın beşinci soruya yönelik çözümü



Açıklama: O noktasından $[CD]$'na çizilen dikmenin $[CD]$'nı kestiği nokta H olsun

51D: Şimdi bunuda burdan dik çekersem {O noktasından $[DC]$'na dik çiziyor}, bana eşkenar dörtgenin alanını soruyor. Alanda, taban x yükseklikti. O yüzden yüksekliği bulmam lazım. Bunu burdan dik çekersem buda dik olur {$[OH]$'nı kastediyor}, paraleller çünkü.

52D: 15'miş buralar {eşkenar dörtgenin kenar uzunluklarını yazıyor}. Dikmi kesişiyorlardı? {köşegenlerin kesişimini kastediyor}.

53D: O zaman öklid kullanacağım. Buraya h dersem $h^2 = 12.3$ oluyor. Oda 36, $h = 6$ çıkıyor. O zaman yükseklik 12 oluyor, hepsinin yüksekliği {$[EH]$'nı kastediyor}, şurası da {$[OH]$'nı kastediyor} h.

54D: 12.15'den 180 yapıyor.

Damla daha önce öğrendiği eşkenar dörtgenin alan formülünü hatırlıyor ve çözüm için plan yapıyor. Bu planı uygulayabilmek için eşkenar dörtgenin yüksekliğini bulmak istiyor. Bu yüzden O noktasından $[DC]$'na dik çiziyor (51D). Yüksekliği herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadan çizmesi onun dörtgenin temel elemanlarına yönelik eylemleri yansıtabildiğinin göstergesidir. Dörtgenin temel elemanlarına yönelik bilgilerini göz önünde bulunduruyor ve eşkenar dörtgenin kenar uzunluğunu yazıyor. Aynı zamanda $m(\hat{O})$'nün 90° olduğunu fark ediyor (52D). $m(\hat{O})$'nün 90° olduğunu herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadan fark etmesi onun dörtgenin temel elemanlarına yönelik eylemleri yansıtabildiğinin göstergesidir. Üçgen ve denklemlere yönelik bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $|OE|$'nu buluyor. Bu uzunluk sayesinde ise eşkenar dörtgenin yüksekliğini buluyor (53D). Eşkenar dörtgenin alan formülünü kullanıyor ve istenilen alanı buluyor (54D).

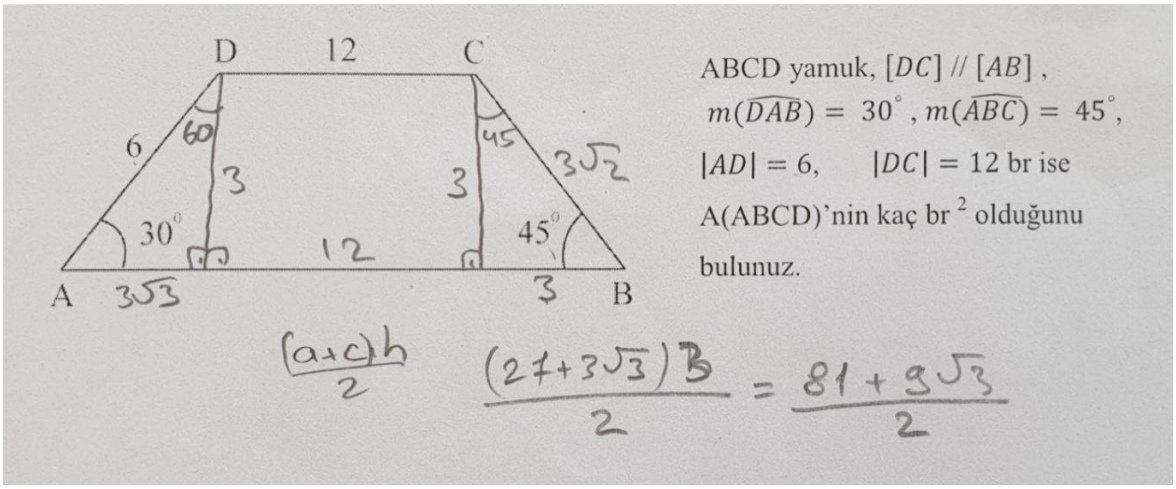
Damla sorunun çözümünde, daha önce öğrendiği formülü kullanmaya odaklandığından, çözüm için eşkenar dörtgenin yüksekliğini bulmaya yönelik bir yaklaşım izlemiştir. Eşkenar dörtgenin yüksekliği için O noktasından $[DC]$'na dik çizmiş ve çizdiği bu dik ile $|OE|$ arasında ilişki kurmuştur. Dörtgene, üçgene ve denklemlere yönelik şemalarını işe koşmuş ve kapsülden çıkardığı bilgilerini koordine ederek $|OE|$'nu bulmuştur. $|OE|$'nu kullanarak, eşkenar dörtgenin yüksekliğinin uzunluğunu bulmuş ve eşkenar dörtgenin alan formülünü kullanarak istenilen alanı bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat üçgen şemasını işe koşarak eşkenar dörtgenin alanını hesaplayabilirdi. Bunun için AOB üçgeninin alanını hesaplaması, eşkenar dörtgenin köşegenlerinin dörtgen içinde dört tane eş üçgen oluşturduğunu fark etmesi ve elde ettiği üçgenin alanını dört ile çarpması gerekiyordu. Böylece eşkenar dörtgenin ve üçgenin alanı kavramlarını koordineli kullanarak formüle ihtiyaç duymadan istenilen alanı bulabilirdi.

Sorunun çözümünde, üçgen, denklemler ve eşkenar dörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini koordineli kullandığı görülmektedir. Sonuç olarak Damla'nın eşkenar dörtgenin alanını, üçgenin alanına kapsülleyemediği için eşkenar dörtgenin alan formülünü kullandığı görülmektedir.

Altıncı soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Damla'nın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Damla'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 16'da sunulmuştur (D: Damla).

Şekil 16

Damla'nın altıncı soruya yönelik çözümü



Açıklama: D noktasından $[AB]$'na çizilen dikmenin $[AB]$'nı kestiği nokta H olsun.
C noktasından $[AB]$'na çizilen dikmenin $[AB]$'nı kestiği nokta K olsun.

61D: Alan, alt taban artı {biraz sessiz kalıyor} çarpı yükseklik bölü 2 {bunu söylerken $\frac{(a+c)h}{2}$ ifadesini yazıyor}.

62D: Buralardan dik ineyim {$[DH]$ ile $[CK]$'nı çiziyor}.

63D: Çünkü özel üçgenler var, biri 45° biri 30°. Burası {$(\widehat{ADH})$'nı kastediyor} 60. 90'nın karşısı $2a$ yani 6'ysa a'da 3'tür. 30'un karşısı 3, 60'ın karşısı $3\sqrt{3}$.

64D: Burası {$|HK|$'nu kastediyor} direk 12, dik indiğimiz için. Yükseklikler aynı, burası da 3.

65D: Bu ikizkenar üçgen {CKB üçgenini kastediyor} olduğu için burası da 3 {$|BK|$'nu kastediyor}, burası da $3\sqrt{2}$.

66D: Bize alanı soruyor. $\frac{(27+3\sqrt{3}).3}{2}$ buradan $\frac{81+9\sqrt{3}}{2}$ olur.

Damla yamuğun alan formülünü kullanmayı planlıyor (61D). Yamuğun yüksekliğini çiziyor (62D). Yamuğun yüksekliğini herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadan çizmesi onun eylemleri yansıtabildiğinin herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadığının göstergesidir. Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve ADH üçgeninin kenar uzunluklarını buluyor (63D). $|DC|$ ile $|HK|$ arasında ve $|DH|$ ile $|CK|$ arasında ilişki kuruyor ve $|HK|$ ile $|CK|$ 'nu buluyor (64D). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve CBK üçgeninin kenar uzunluklarını buluyor (65D). Yamuğun alanını, formül kullanarak buluyor (66D).

Damla sorunun çözümü için önceden öğrendiği formülü kullanmaya odaklandığından $|AB|$'nı ve yamuğun yüksekliğini bulmaya yönelik bir yaklaşım sergilemiştir. Bunun için yamuğun C ve D noktalarından $[AB]$'na dik indirmiştir. Bu dikleri çizerken üçgen şemasını işe koşmuştur. Çünkü çizdiği dikme ile bir dik üçgen oluştuğunu ve bu dik üçgeni kullanarak çizdiği dikmenin uzunluğunu bulabileceğini fark etmiştir. Dikme çizerken, yamuk ve üçgene yönelik bilgilerini bir arada düşünmüş ve yamuğun yüksekliği ile dik üçgenin kenarını ilişkilendirmiştir. Sonra üçgen şemasını işe koşarak yamuğun alan formülünü kullanabilmek için gerekli olan verileri elde etmiştir. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat yamuğun alanının, yamuğun içinde oluşan dikdörtgenin alanı ile iki dik üçgenin alanları toplamına eşit olduğunu fark edememiştir. Damla yamuğun alanı kavramı ile dikdörtgenin ve üçgenin alanı kavramlarını koordineli kullanarak formüle ihtiyaç duymadan sonuca ulaşabilirdi. Sonuç olarak sorunun çözümünde üçgen ve dörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordine ettiği, yamuğun alanını bulmak için üçgenin ve dikdörtgenin alanı kavramlarından yararlanmak yerine formül kullandığı görülmektedir.

Yedinci soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Damla'nın nesne düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Damla'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (D: Damla).

71D: Şurası dik öklid kullanılacak büyük ihtimalle $h^2 = p.k$ öklidten {ABC üçgeni üzerinde çalışıyor}.

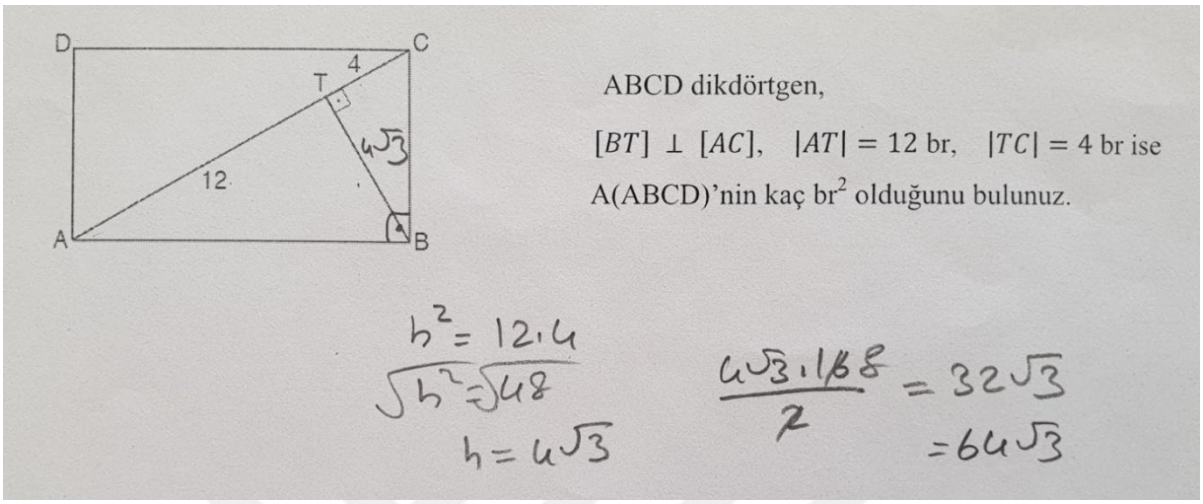
{Burada $h^2 = 12.4$ denklemini yazıyor ve çözüyor} $48 = h^2$ kök içine alınca $h = 4\sqrt{3}$.

72D: Buranın alanı ile buranın alanı birbirine eş {ADC üçgeni ile ABC üçgeninin alanları arasında ilişki kuruyor}. O yüzden direk buranın alanını bulursam yeterli {ABC üçgeninin

alanını kastediyor}. $\frac{4\sqrt{3}.16}{2}$ sadeleştirdim $32\sqrt{3}$ bir üçgenin alanı. Bunu da 2 ile çarpıp $64\sqrt{3}$ (Bkz. Şekil 17).

Şekil 17

Damla'nın yedinci soruya yönelik çözümü



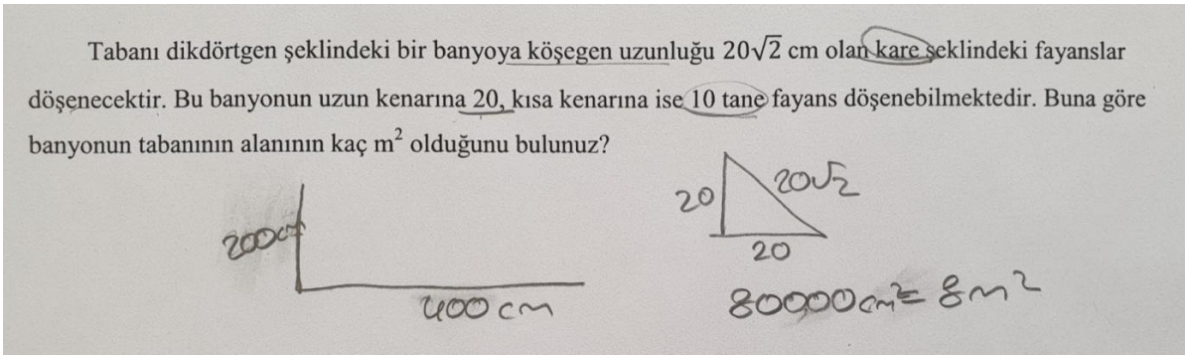
Damla denklemlere ve üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini koordine ederek yeni duruma uyarlıyor ve $|BT|$ 'nu buluyor (71D). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve istenilen sonucu buluyor (72D).

Damla $(\hat{B})$ ile $(\hat{T})$ arasında ilişki kurmuş ve bu kurduğu ilişki sayesinde üçgen şemasını işe koşarak $|BT|$'nu bulmuştur. Dikdörtgenin köşegeninin, dikdörtgenin alanını iki eş parçaya ayırdığını fark etmiştir. Dolayısıyla önceden öğrendiği dikdörtgenin alan formülünü kullanmayı planlamadığından dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmaya ihtiyaç duymamıştır. Bir tane üçgenin alanını hesaplamış ve bulduğu sonucun iki katını alarak istenilen sonucu elde etmiştir. Yani dikdörtgenin alanını üçgenin alanına kapsüllemiştir. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Sorunun çözümünde üçgen, denklemler ve dikdörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini koordineli kullanmıştır. Sonuç olarak Damla'nın dikdörtgenin alanını, üçgenin alanına kapsülleyebildiği görülmektedir.

Sekizinci soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Damla'nın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Damla'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 18'de sunulmuştur (D: Damla).

Şekil 18

Damla'nın sekizinci soruya yönelik çözümü



81D: Önce karenin kenarını bulacağım. Köşegense şurası $20\sqrt{2}$, o zaman burası 20 ve 20 dir. Karenin bir kenarı 20'ymiş.

82D: 10 taneyse burası 200 oluyor, o zaman burası da 400 cm {dikdörtgenin kenar uzunluklarını buluyor}. Buna göre banyonun taban alanı kaç m^2'dir.

83D: 4 kere 2, 8 {burada $200x400$ işlemini yapıyor ve sonucu $80000\ cm^2$ buluyor}.

84D: Bunu da metreye çevireceğim. Metreye çevirirken 2 sıfır atıyoruz. Kare ama 2, 2'den {sıfırları siliyor} 8 m^2 oluyor.

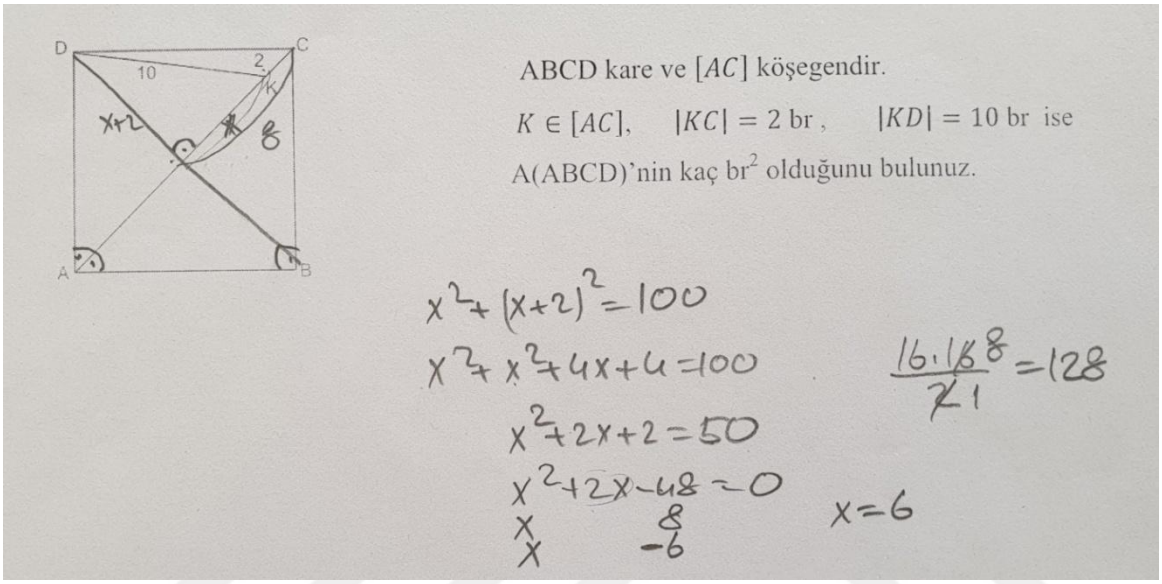
Damla kareye yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin bir kenar uzunluğunu buluyor (81D). Karenin bir kenar uzunluğu ile dikdörtgenin kısa ve uzun kenarına yerleştirilebilecek kare sayısını koordine ederek dikdörtgenin kısa ve uzun kenar uzunluklarını buluyor (82D). Dikdörtgenin alan formülünü kullanıyor ve dikdörtgenin alanını cm^2 olarak hesaplıyor (83D). Ölçülere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve bulduğu sonucun birimini m^2'ye çeviriyor (84D).

Damla dikdörtgenin alanını hesaplamada önceden öğrendiği formülü kullanabilmek için dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmaya odaklanmıştır. Kareye yönelik şemasını işe koşmuş ve karenin bir kenar uzunluğunu bulmuştur. Dikdörtgenin ve karenin kenar uzunlukları arasında ilişki kurmuş ve böylece dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmuştur. Dikdörtgenin alanı ve alan ölçülerine yönelik bilgilerini kapsülden çıkartmış, bu bilgileri koordine ederek yeni duruma uyarlamış ve sonuca ulaşmıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat dikdörtgenin alanının, bir tane karenin alanı ile dikdörtgenin içine yerleştirilebilecek kare sayısının çarpımına eşit olduğunu fark edememiştir. Sorunun çözümünde alan ölçüleri, kare ve dikdörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak koordine etmiştir. Sonuç olarak Damla'nın sorunun çözümünde, dikdörtgenin alanını, karenin alanına kapsüllemek yerine dikdörtgenin alan formülünü kullandığı görülmektedir.

Dokuzuncu soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Damla'nın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Damla'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 19'da sunulmuştur (A: Araştırmacı, D: Damla).

Şekil 19

Damla'nın dokuzuncu soruya yönelik çözümü



Açıklama: Köşegenlerin kesim noktası O olsun

91D: Kareymiş, AC köşegen, o zaman eşit ayırır, açıortay olur {($\hat{A}$) üzerinde işlem yapıyor}.

92D: Köşegen mi çeksem {[BD]'nı çiziyor}, köşegenler dik kesişiyor.

{Burada öğrenci sessizce düşünüyor.}

A: Ne bulmak istiyorsun?

93D: Kenar bulmam lazım yâda bir tane köşegeninin uzunluğunu bulmam lazım. Buraya x diyeceğim {|OK|'nu sembolle temsil ediyor} buraya {|OD|'nu kastediyor} $x + 2$ köşegenler birbirine eşit,

94D: sonra pisagor teoremi uygulayacağım {DOK üçgeninde pisagor teoremini uyguluyor}.

$$x^2 + (x + 2)^2 = 100$$

$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 100$ her iki tarafı 2'ye böleyim daha rahat olsun.

$x^2 + 2x + 2 = 50$ olmuş olur. Burdan x'i bulmam lazım.

$x^2 + 2x - 48 = 0$ sonra çarpanlara ayırma yapacağız. 6 kere 8 direk, ortanın artı olması için 6'ya eksi derim. Burdan da $x = 6$ olur, çünkü uzunluk negatif olamaz. x, 6 oluncada şu kısım 8 olur {|OC|'nu kastediyor}, bi köşegenin uzunluğu da 16 olur.

95D: $\frac{16.16}{2}$ 'miydi formül.

A: Neyi buluyorsun şimdi?

96D: Alanını, köşegenlerinin karesi bölü 2, 128.

97D: $8\sqrt{2}$.$8\sqrt{2}$, 64'ün 2 katı 128.

Damla karenin köşegenin, ($\hat{A}$)'nı iki eşit açıya ayırdığını yorumluyor (91D). Fakat bu bilgiyi daha sonra kullanmıyor. Daha sonra karenin diğer köşegenini çiziyor (92D). Herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadan karenin köşegenini çizmesi onun karenin temel elemanlarına yönelik eylemleri yansıtabildiğinin göstergesidir. Karenin temel elemanlarına yönelik önceden oluşturduğu bilgileri yeni duruma uyarlıyor ve ($\hat{O}$)'nın 90° olduğunu fark ediyor (92D). Cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin köşegen uzunluğunu cebirsel olarak temsil ediyor (93D). Denklemler ve üçgene yönelik bilgilerini koordine ederek yeni duruma uyarlıyor ve karenin köşegen uzunluğunu buluyor (94D). Karenin alan formülünü kullanıyor ve istenilen sonucu buluyor (95D, 96D). Karenin kenar uzunluğunu buluyor ve başka bir alan formülü ile istenen sonucu tekrar buluyor (97D).

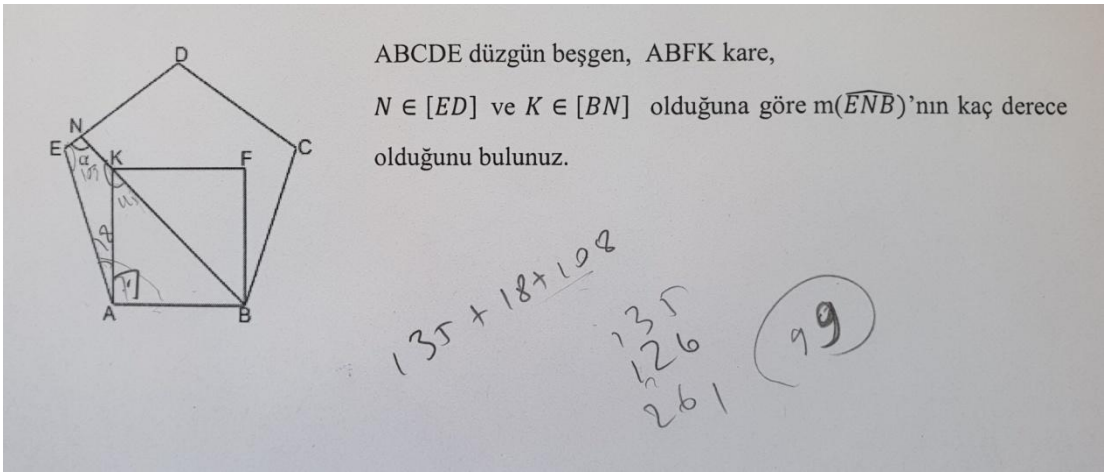
Damla sorunun çözümü için karenin temel elemanını yorumlamış ve köşegen çizmeye karar vermiştir. Köşegeni çizdikten sonra üçgen şemasını işe koşmuş ve bir dik üçgen oluştuğunu fark etmiştir. Bu dik üçgeni kullanarak karenin köşegen uzunluğunu bulmayı planlamıştır. Bunun için üçgen ve denklemler şemasına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartmış ve karenin köşegen uzunluğunu bulmuştur. Karenin alan formülünü kullanarak istenilen sonucu bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat karenin alanının, karenin içinde oluşan üçgensel bölgelerin alanları toplamına eşit olduğunu fark edememiştir. Ayrıca ODK üçgeninin özel üçgen olduğunu fark edememiş ve üçgenin kenar uzunluklarını bulmak için elde ettiği denklemi çözme gereği duymuştur. Sonuç olarak Damla'nın sorunun çözümünde üçgen, denklemler ve kare kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordineli kullandığı fakat karenin alanını, üçgenin alanına kapsülleyemediği için karenin alan formülünü kullandığı görülmektedir.

4.1.3. Furkan'ın Oluşan Bilgilerinin Analizi

Birinci soru "çokgen kavramını açıklayarak işlemler yapar" kazanımına yöneliktir. Çokgen kavramını açıklamaya yönelik olan bu soruda, Furkan'ın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Furkan'ın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 20'de sunulmuştur (F: Furkan).

Şekil 20

Furkan'ın birinci soruya yönelik çözümü



11F: Şurası {$[NB]$'nı kastediyor} kareyi ikiye bölüyor galiba. Şurası {($\widehat{KAB}$)'nı kastediyor} 90,

12F: 108 açısıydı {$m(\hat{A})$'nü kastediyor}, 18 {$m(\widehat{EAK})$'nü kastediyor}.

13F: Şurası da {($\hat{E}$)'nı kastediyor} 108.

14F: O zaman şurası {($\widehat{AKB}$)'nı kastediyor} 45 olur,

15F: şurası 45'se şurası {($\widehat{NKA}$)'nı kastediyor} 135'tir.

16F: $135 + 18 + 108$ topluyoruz. Sonra 540'dan çıkartacağız herhalde, 360'dan çıkartacağız. Çünkü 4 'ya 4 köşesi var. İç açıları toplamı 360 olması lazım.

{Burada $135 + 18 + 108$ işlemini yapıyor}, 261. 360'dan çıkardığımızda 99 olur.

Furkan, $[NB]$'nın karenin köşegeni olduğunu fark ediyor ve karenin açılarına yönelik bilgilerini göz önünde bulunduruyor (11F). Kare ve beşgen bilgisini koordine ederek karenin ve beşgenin açıları arasında ilişki kuruyor. Böylece $m(\widehat{EAK})$'nü buluyor (12F). Beşgene yönelik bilgilerini göz önünde bulunduruyor ve $m(\hat{E})$'nü buluyor (13F). Daha önce $[NB]$'nın karenin köşegeni olduğunu fark ettiğinden kareye yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $m(\widehat{AKB})$'nü buluyor (14F). Açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $m(\widehat{AKN})$'nü buluyor (15F). Dörtgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve istenilen açının ölçüsünü buluyor (16F).

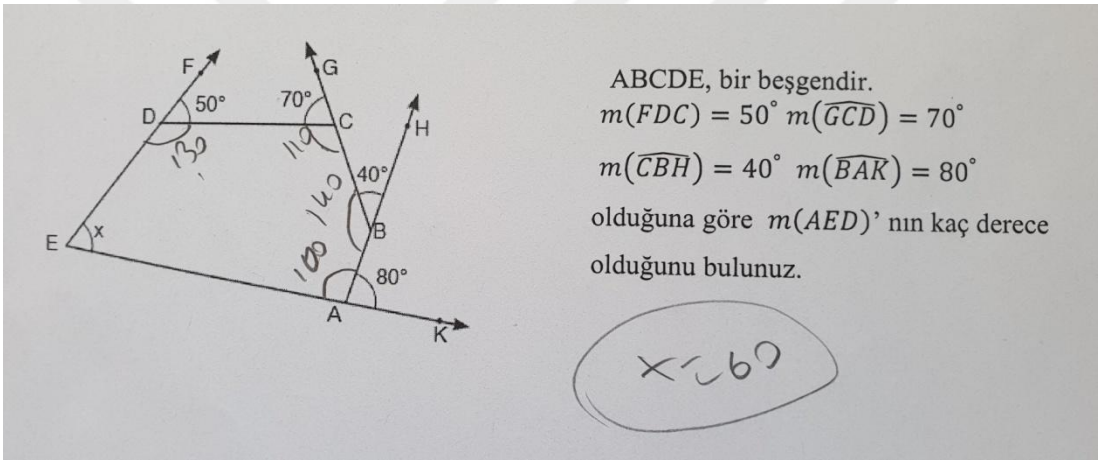
Furkan sorunun çözümü için AKNE dörtgeninin iç açılarını kullanmayı planlamıştır. Karenin ve beşgenin açılarına yönelik bilgilerini koordine ederek $m(\widehat{EAK})$'nü bulmuştur. $[NB]$'nın aynı zamanda karenin köşegeni olduğunu fark etmiştir. Bunu fark eden Furkan karenin temel elemanlarına ve açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini koordine ederek $m(\widehat{AKN})$ 'nü bulmuştur. Beşgende açıya yönelik bilgilerini kullanarak $m(\widehat{BAE})$ ve

$m(\widehat{AEN})$'nü bulmuştur. Son olarak ise AKNE dörtgeninin iç açılarını toplamış ve istenilen açıyı bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat ABNE dörtgenine odaklanarak soruyu çözebileceğini fark edememiştir. Bu durum çokgenin kenarları arasında etkili ilişki kuramadığının göstergesidir. Sonuç olarak Furkan'ın sorunun çözümünde açı, üçgen, dörtgen, kare ve beşgen kavramlarına yönelik bilgilerini koordineli kullandığı fakat çokgen kavramını etkin kullanamadığı görülmektedir.

İkinci soru "çokgen kavramını açıklayarak işlemler yapar" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çokgen kavramını açıklamaya yönelik olan bu soruda, Furkan'ın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Furkan'ın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 21'de sunulmuştur (F: Furkan).

Şekil 21

Furkan'ın ikinci soruya yönelik çözümü



21F: Şurası 40'sa bize burayı sormuş, 140, şurası 110, şurası 130, şurası da 100.

22F: Bu sefer hepsinin toplamı 540 olacak, çünkü beş köşesi var.

23F: (burada iç açıları sesli bir şekilde topluyor) 480. 540'dan çıkardığımızda $x = 60$.

Furkan açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve beşgenin iç açı ölçülerini buluyor (21F). Beşgene yönelik bilgilerini kullanıyor (22F). Beşgenin iç açılarını kullanarak istenilen açının ölçüsünü buluyor (23F).

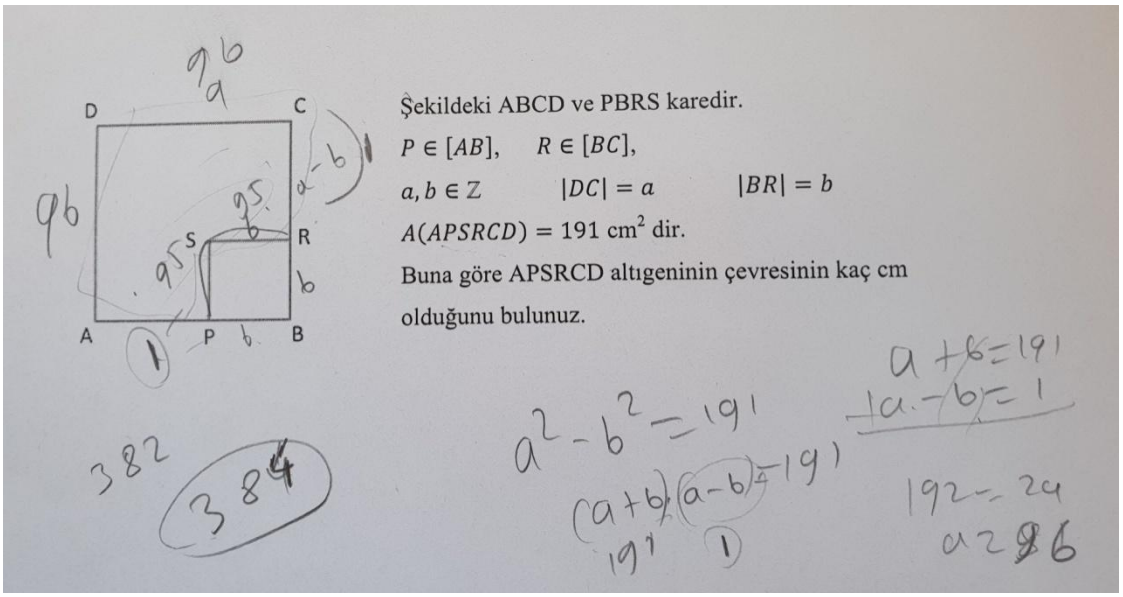
Furkan sorunun çözümü için beşgenin iç açılarını kullanmayı planlamıştır. Bunun için açıya yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartmış ve beşgenin iç açılarını bulmuştur. Daha sonra bulduğu bu açıların ölçüleri toplamını, beşgende iç açı toplamı bilgisiyle koordine ederek sonuca ulaşmıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat çokgenin dış açılarını kullanarak soruyu çözebileceğini fark edememiştir. Bu durum çokgenin açılarını etkili kullanamadığının göstergesidir. Sonuç

olarak Furkan'ın sorunun çözümünde açı kavramına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı fakat çokgen kavramını etkin kullanamadığı görülmektedir.

Üçüncü soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Furkan'ın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Furkan'ın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 22'de sunulmuştur (F: Furkan).

Şekil 22

Furkan'ın üçüncü soruya yönelik çözümü



31F: {Burada karelerin kenar uzunluklarını harfle temsil ediyor.}

32F: $a^2 - b^2 = 191$ miş. Buda $(a + b).(a - b) = 191$, $(a - b)$, 1 gelir.

Burası da $(a + b)$, 191 gelir.

{Burada denklemleri taraf tarafa topluyor.} Taraf tarafa toplarım. Bunlar gider.

$192 = 2a$ olur. $a = 96$ olur. Demekki 96'ysa b'de 95 olur.

33F: Bize ne soruyo? APSRCD atıgeninin çevresi. Yani şu şeyin çevresini soruyor. Burası 96, burası 1'di. Şurası 95, şurası 95, şurası 96, şurası da 1. 2 tane 96, 2 tane 95.

{burada altıgenin kenar uzunluklarını topluyor} 384.

Furkan cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin kenar uzunluklarını cebirsel olarak temsil ediyor (31F). Denklemlere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin kenar uzunluklarını buluyor (32F). Altıgenin kenar uzunluklarını topluyor ve istenilen sonucu buluyor (33F).

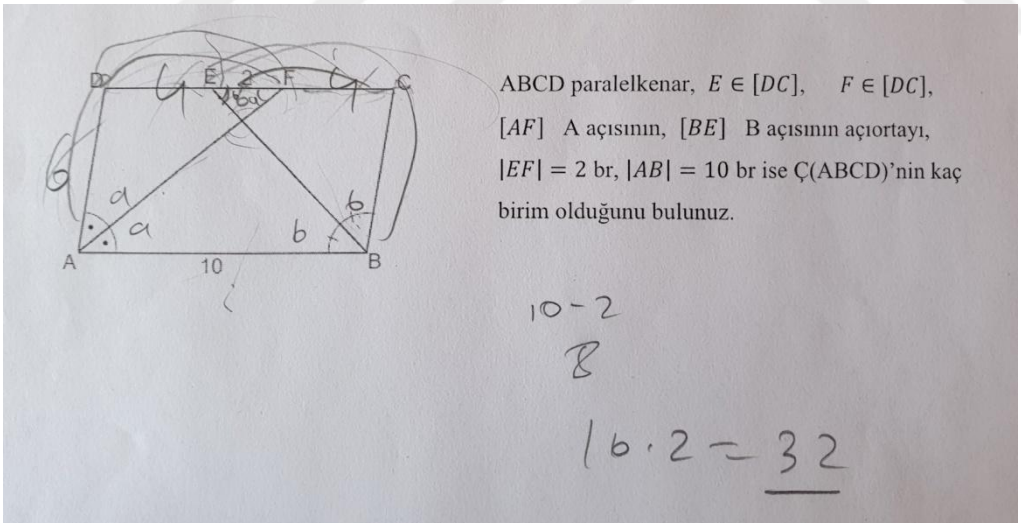
Furkan, ABCD ve PBRS karelerinin alanları arasında ilişki kurmuştur. Denklemler şemasını işe koşmuş ve karelerin alanları arasında kurduğu ilişki sayesinde bir denklem elde

etmiş ve bu denklemi çözerek karelerin kenar uzunluklarını bulmuştur. Daha sonra altıgenin kenar uzunluklarını toplamıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat APSRCD altıgenin kenarları ile PBRS karesinin kenarları arasında ilişki kuramamıştır. Bu yüzden APSRCD altıgeninin çevresini hesaplarken, altıgenin kenar uzunluklarını toplamıştır. $|PS|$ ile $|BR|$ ve $|SR|$ ile $|PB|$ arasında ilişki kurabilseydi, APSRCD altıgeninin çevresinin ABCD karesinin çevresine eşit olduğunu fark edebilirdi. Sonuç olarak Furkan'ın sorunun çözümünde karenin alanı, cebirsel ifadeler ve denklemler kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordineli kullandığı, fakat dörtgenin kenar özelliklerini etkili kullanamadığı görülmektedir.

Dördüncü soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Furkan nesne düzeyinde davranış sergilemektedir. Furkan'ın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 23'de sunulmuştur (A: Araştırmacı, F: Furkan).

Şekil 23

Furkan'ın dördüncü soruya yönelik çözümü



41F: a, a, b, b dedim {$(\hat{A})$ ile $(\hat{B})$'nı sembolle temsil ediyor}.

42F: $2a + 2b$, 180'miş.

43F: Burası b, burası da a, bu açılarda birbirine eşittir {$(\widehat{BEC})$'nı ve $(\widehat{AFE})$'nı sembolle temsil ediyor}.

A: Neden eşit dedin bu açılara?

44F: z varya {iç ters açıları kastediyor}.

45F: Benzerlik yapabilirim ama işime yaramaz.

46F: Burası b, burası da b ikizkenar oluyor {ECB üçgeninden bahsediyor}. Burası da ikizkenar {FDA üçgeninden bahsediyor}.
47F: İkizkenarsa bu ikisi eşit olur {$|DE|$ ile $|FC|$'nu kastediyor}.
A: Neden eşit olur?
48F: Burası da ikizkenar burası da ikizkenar, ikiside eşit. 2 çıkarıp 2'ye bölsem ikiside eşit olur. Çünkü bunla bu aynı, bunla da bu aynı {$|EC| = |CB| = |AD| = |DF|$ olduğunu fark ediyor}. $10 - 2$, 8. 2'ye bölüyorum 4, 4 {$|DE|$ ile $|FC|$'nu buluyor}.
49F: O zaman burası 6 ise burası da 6 oluyor {$|AD|$ ile $|DF|$'nu kastediyor}. Burası 10, 16 {kenar uzunluklarını topluyor}, 2 ile çarparsam 32.

Furkan cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve ($\hat{A}$) ile ($\hat{B}$)'nı sembolle temsil ediyor (41F). Denklemlere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartıyor ve paralelkenar bilgisi ile koordine ederek bir denklem elde ediyor (42F). Fakat bu denklemi daha sonra çözüm için kullanmıyor. Açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve ($\widehat{BEC}$) ile ($\widehat{AFE}$)'nı sembolle temsil ediyor (43F, 44F). Üçgen bilgisini kapsülden çıkarmayı düşünüyor fakat bu düşüncesinin bir işe yaramayacağını fark ederek vazgeçiyor (45F). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve ADF üçgeni ile BCE üçgeninin ikizkenar olduğunu fark ediyor (46F). ADF üçgeni ile BCE üçgeninin kenar uzunlukları arasında ilişki kuruyor ve $|DE|$'nun $|FC|$'na eşit olduğunu belirtiyor (47F). Bu eşitliği $|EC|$'nun $|CB|$'na, $|AD|$'nun ise $|DF|$'na eşit olduğunu fark ederek kuruyor (48F). $|DE|$'nun $|FC|$'na eşit olduğuna yönelik oluşturduğu bilgisi ile paralelkenarın kenar özelliklerine yönelik önceden oluşturduğu bilgisini birlikte düşünüyor ve $|DE|$ ile $|FC|$'nu buluyor (48F). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve paralelkenarın kısa kenar uzunluğunu buluyor (49F). Paralelkenarın kenar uzunluklarını topluyor ve istenilen sonucu buluyor (49F).

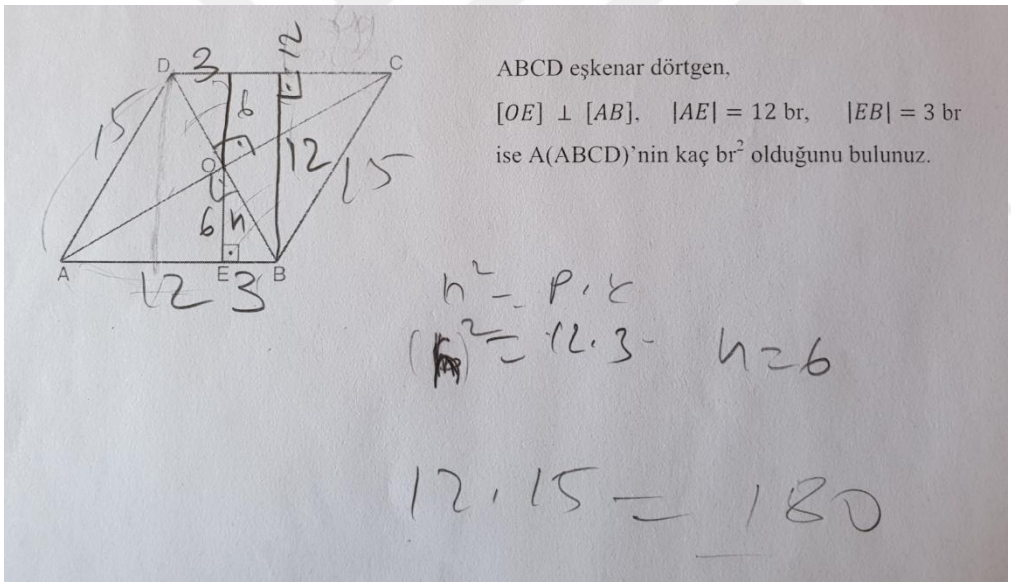
Furkan çözüme cebirsel ifadeler şemasına yönelik bilgilerini işe koşmakla başlamıştır. Böylece eşit açıları aynı sembolle temsil etmiştir. Sorunun çözümüne denklemlere yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak devam etmiş fakat buradan bir sonuç elde edemediğinden vazgeçmiştir. Cebirsel ifadeler ve açılara yönelik bilgilerini koordine ederek iç ters açıları aynı sembolle temsil etmiştir. Üçgen bilgisini işe koşarak farklı bir yaklaşım denemiş fakat buradan da bir sonuç elde edemediğinden vazgeçmiştir. Daha sonra üçgen şemasını tekrar işe koşmuştur. Üçgen ve paralelkenar bilgilerini koordineli kullanarak paralelkenarın çevresini bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır.

$|DE| = |CF|$ olduğunu doğrudan fark etmiştir. Çünkü ADF üçgeni, BCE üçgeni ve paralelkenarın karşılıklı kenarları arasındaki ilişkiyi doğrudan görebilmiştir. Bu durum Furkan'ın paralelkenarın kenarlarına yönelik özelikleri etkin olarak kullanabildiğinin göstergesidir. Sonuç olarak Furkan'ın sorunun çözümünde açı, üçgen, paralelkenar ve cebirsel ifadelere yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı, bu kavramları koordine edebildiği ve paralelkenarın kenarlarına yönelik özelikleri etkin olarak kullanabildiği görülmektedir.

Beşinci soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Furkan'ın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Furkan'ın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 24'te sunulmuştur (F: Furkan).

Şekil 24

Furkan'ın beşinci soruya yönelik çözümü



Açıklama: Öğrencinin O noktasından $[DC]$'sına çizdiği dik doğru parçasının $[DC]$'yi kestiği nokta F olsun. B noktasından $[DC]$'sına çizdiği dik doğru parçasının $[DC]$'yi kestiği nokta H olsun.

51F: $h^2 = p.k$ var. Eşkenar dörtgenin köşegenleri kesişince 90 derece oluyordu, buralar o zaman dik oluyor.

52F: O zaman öklid yapabilirim, $h^2 = p.k$ 'dan 12.3, 36, $h = 6$ {AOB üçgeninde uyguluyor}.

53F: Bu eşkenar dörtgen olduğundan buraları da {kenar uzunluklarını kastediyor} 15 olur o zaman.

54F: Bize ABCD'nin alanını soruyor, dik indirip çarpacağım kural öyleydi.

55F: {B köşesinden $[DC]$'na dik çiziyor.}

56F: Şöyle bişey çekeyim {O noktasından $[DC]$'na dik çiziyor}. Buda aynı değilmidir, burası 3'se burası da 12 olur, burası da 6 olur o zaman {üçgende eşlik kullanarak O noktasından $[DC]$'na çizdiği dikin uzunluğunu buluyor}.

57F: Dik 12 oluyor.

58F: 12.15'den 180 oluyor.

Furkan dörtgenin temel elemanlarından olan köşegen bilgisini göz önünde bulunduruyor ve $(\hat{O})$'nın 90° olduğunu fark ediyor (51F). $(\hat{O})$'nın 90° olduğunu herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadan fark etmesi onun dörtgenin temel elemanlarına yönelik eylemleri yansıtabildiğinin göstergesidir. Üçgen ve denklemlere yönelik bilgilerini yeni duruma uyarlıyor (52F). Dörtgene yönelik bilgilerini kullanıyor ve dörtgenin kenar uzunluğunu yazıyor (53F). Daha sonra bu bilgiyi sorunun çözümünde kullanmıyor. Eşkenar dörtgenin alan formülünü hatırlıyor ve çözüm için bir plan yapıyor (54F). Bu planı uygulayabilmek için eşkenar dörtgenin yüksekliğini çiziyor (55F). Yüksekliği herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadan çizmesi onun dörtgenin temel elemanlarına yönelik eylemleri yansıtabildiğinin göstergesidir. Yüksekliği bulabilmek için O noktasından $[DC]$'na dik çiziyor. Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $|OF|$'nu buluyor (56F). $|OF|$ ile $|OE|$'nun toplamı ile $|BH|$'nu ilişkilendirerek $|BH|$'nu buluyor (57F). Eşkenar dörtgenin alan formülünü kullanıyor ve istenilen alanı buluyor (58F).

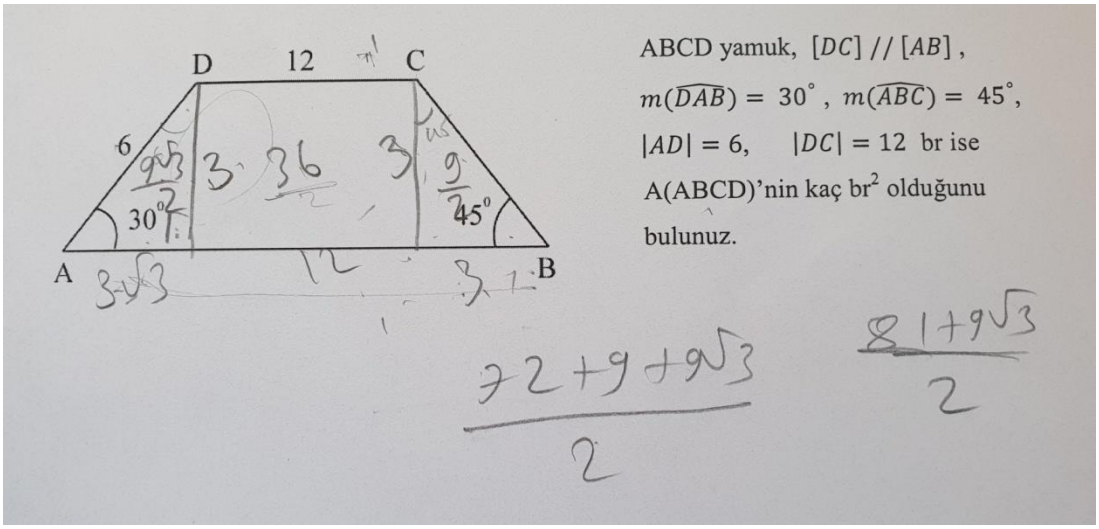
Furkan dörtgene, üçgene ve denklemlere yönelik şemalarını işe koşmuş ve kapsülden çıkardığı bilgilerini koordine ederek $|OE|$'nu bulmuştur. Alanı bulmak için eşkenar dörtgenin yüksekliğini bulma ihtiyacı duymuştur. Bunun için $[OF]$'nı çizmiştir. Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlamış $|OF|$'nu bulmuştur. Fakat $|EF|$'nun eşkenar dörtgenin yüksekliği olarak kullanmak yerine $|EF|$ ile $|BH|$'nu ilişkilendirerek $|BH|$'nu bulmuştur. Eşkenar dörtgenin alan formülünü kullanarak istenilen alanı bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat üçgen şemasını işe koşarak eşkenar dörtgenin alanını hesaplayabilirdi. Bunun için AOB üçgeninin alanını hesaplaması, eşkenar dörtgenin köşegenlerinin dörtgen içinde dört tane eş üçgen oluşturduğunu fark etmesi ve elde ettiği üçgenin alanını dört ile çarpması gerekiyordu. Böylece eşkenar dörtgenin ve üçgenin alanı kavramlarını koordineli kullanarak formüle ihtiyaç duymadan istenilen alanı bulabilirdi. Sorunun çözümünde üçgen, denklemler ve eşkenar dörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini koordineli kullandığı görülmektedir. Sonuç

olarak Furkan'ın eşkenar dörtgenin alanını, üçgenin alanına kapsülleyemediği için eşkenar dörtgenin alan formülünü kullandığı görülmektedir.

Altıncı soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Furkan'ın nesne düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Furkan'ın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 25'de sunulmuştur (F: Furkan).

Şekil 25

Furkan'ın altıncı soruya yönelik çözümü



Açıklama: D noktasından $[AB]$'na çizilen dikmenin $[AB]$'nı kestiği nokta H olsun.
C noktasından $[AB]$'na çizilen dikmenin $[AB]$'nı kestiği nokta K olsun.

61F: Burda ne yaparım. Şöyle dik indirebilirim{$[DH]$'nı çiziyor}.

62F: Şurası 90'nın karşısı 6'ysa, 30'un karşısı 3'tür,

63F: {Burada, $[CK]$'nı çiziyor}burası da {$[CK]$'nı kastediyor} o zaman 3'tür,

64F: burası {$[HK]$'nı kastediyor} 12.

65F: 45, 45'den {CKB üçgeninden bahsediyor} burası da {$|KB|$'nu kastediyor} 3.

66F: Bize ne diyor alan ABCD' yi bulun. Burası {$|DH|$'nu kastediyor} o zaman 3'se 60'ın karşısından $3\sqrt{3}$.

67F: Bunları toplayıp 2'ye bölüp yükseklikle çarpıyorduk herhalde.

68F: Bunu direk şurdan yapabilirim aslında, bunun alanını bulup 2'ye bölüp, şunla şunu.

Burası $\frac{9}{2}$ gelir, burası da $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ gelir, burası da 36 gelir, hepsinin alanı,

$\frac{72+9+9\sqrt{3}}{2}$ bu da $\frac{81+9\sqrt{3}}{2}$ yapar.

Furkan yamuğun yüksekliğini çiziyor (61F). Yamuğun yüksekliğini herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadan çizmesi onun eylemleri yansıtabildiğinin herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadığının göstergesidir. Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve çizdiği dikmenin uzunluğunu buluyor (62F). C noktasından $[AB]$'na dikme çizerek üçgen oluşturuyor. $|DH|$ ile $|CK|$ arasında ilişki kuruyor ve $|CK|$'nu buluyor (63F). $|DC|$ ile $|HK|$ arasında ilişki kuruyor ve $|HK|$'nu buluyor (64F). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $|KB|$'nu buluyor (65F). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma tekrar uyarlıyor ve $|AH|$'nu buluyor (66F). Yamuğun alan formülünü hatırlıyor fakat bu formülü kullanmıyor (67F). Üçgenin ve dikdörtgenin alanına yönelik önceden öğrendiği bilgilerini kapsülden çıkartıyor, koordine ediyor, yeni duruma uyarlıyor ve böylece yamuğun alanını hesaplıyor (68F).

Furkan yamuğun C ve D noktalarından $[AB]$'na dik çizmiştir. Bu dikleri çizerken üçgen şemasını işe koşmuştur. Çünkü çizdiği dikme ile bir dik üçgen oluşturmayı amaçlamış ve bu dik üçgeni kullanarak çizdiği dikmenin uzunluğunu bulabileceğini fark etmiştir. Dikme çizerken, yamuk ve üçgene yönelik bilgilerini bir arada düşünmüş ve yamuğun yüksekliği ile dik üçgenin kenarını ilişkilendirmiştir. Daha sonra üçgen şemasını işe koşarak ihtiyaç duyduğu uzunlukları elde etmiştir. Yamuğun alanını bulmak için önceden öğrendiği formülü kullanmak yerine, üçgenin ve dikdörtgenin alanına yönelik önceden öğrendiği bilgilerini koordine etmiş ve istenilen sonuca ulaşmıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Yamuğun alanının, yamuğun içinde oluşan dikdörtgenin alanı ile iki tane üçgenin alanları toplamına eşit olduğunu fark ederek yamuğun alanını, üçgenin ve dikdörtgenin alanına kapsüllemiştir. Sonuç olarak Furkan'ın sorunun çözümünde üçgen ve dikdörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordine ettiği, yamuğun alanını bulmak için yamuğun alan formülünü kullanmak yerine üçgenin ve dikdörtgenin alanı kavramlarından yararlandığı görülmektedir.

Yedinci soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Furkan'ın nesne düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Furkan'ın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (F: Furkan).

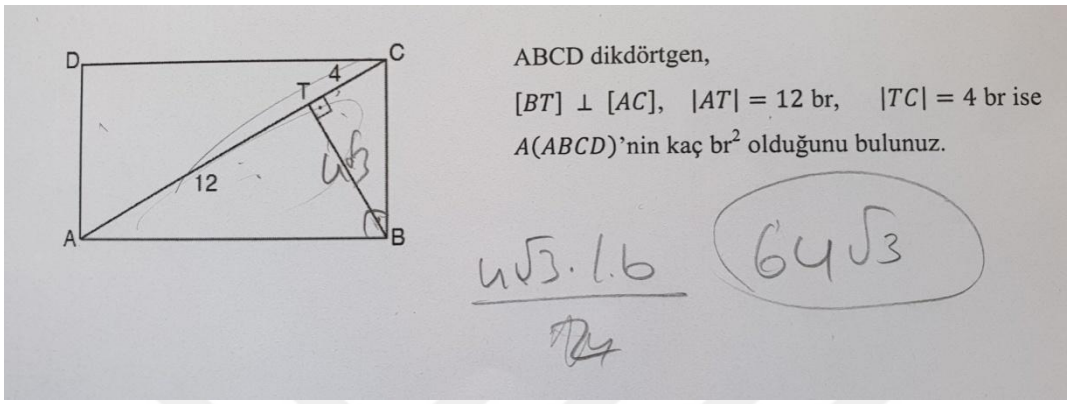
71F: Burdan burası diktir $\{(\hat{B})$'nı kastediyor$\}$.

72F: Dikten dik inmiş $12.4 = 48$, o zaman burası $\{|BT|$'nu kastediyor$\}$ $4\sqrt{3}$'tür, çünkü öklid.

73F: Alan ABCD'nin kaç br olduğunu bulun diyor. Ben direk bunun alanını bulup 2 ile çarparsam $\frac{4\sqrt{3}.16}{2}$. Aslında direk çarparsam 2'ye bölmeme de gerek kalmaz. Çarpımı da $64\sqrt{3}$ gelir (Bkz. Şekil 26).

Şekil 26

Furkan'ın yedinci soruya yönelik çözümü



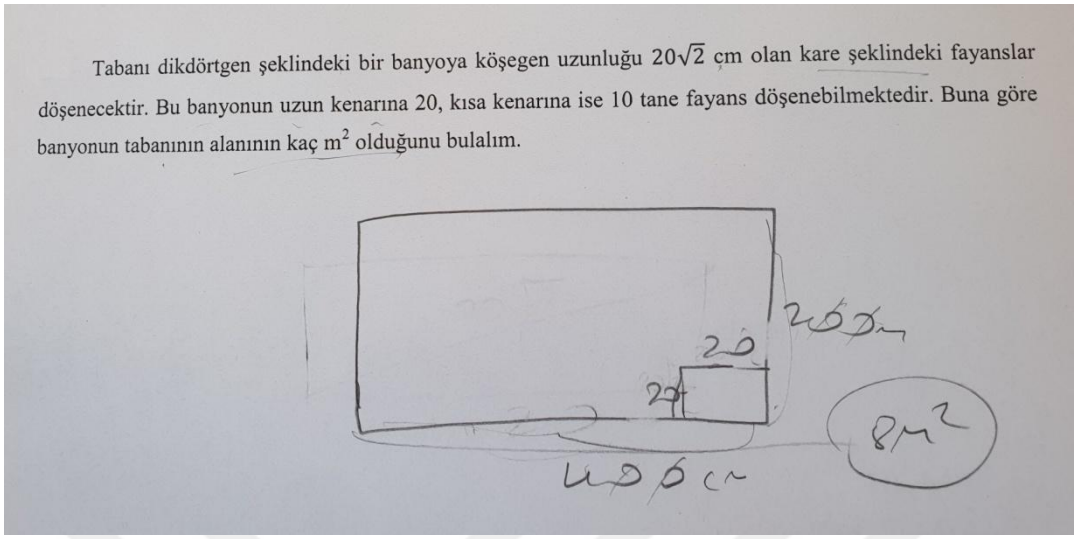
Furkan dikdörtgende açıya yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $m(\hat{B})$'nün 90° olduğunu fark ediyor (71F). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $|BT|$'nu buluyor (72F). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini tekrar ise koşuyor ve ABC üçgeninin alanından yola çıkarak dikdörtgenin alanını hesaplıyor (73F).

Furkan $(\hat{B})$ ile $(\hat{T})$ arasında ilişki kurmuş ve bu kurduğu ilişki sayesinde üçgen şemasını işe koşarak $|BT|$'nu bulmuştur. Dikdörtgenin köşegeninin, dikdörtgenin alanını iki eş parçaya ayırdığını fark etmiştir. Dolayısıyla önceden öğrendiği dikdörtgenin alan formülünü kullanmayı planlamadığından dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmaya ihtiyaç duymamıştır. Bir tane üçgenin alanını hesaplamış ve bulduğu sonucun iki katını alarak istenilen sonucu elde etmiştir. Yani dikdörtgenin alanını üçgenin alanına kapsüllemiştir. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Sorunun çözümünde üçgen ve dikdörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini koordineli kullanmıştır. Sonuç olarak Furkan'nın dikdörtgenin alanını, üçgenin alanına kapsülleyebildiği görülmektedir.

Sekizinci soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Furkan'ın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Furkan'ın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 27'de sunulmuştur (A:Araştırmacı, F: Furkan).

Şekil 27

Furkan'ın sekizinci soruya yönelik çözümü



81F: Bu banyo {dikdörtgen çiziyor},

82F: kare şeklinde 20, 20 {karenin bir kenar uzunluğunu kastediyor} döşenecek.

83F: Burada 20 tane varsa, uzun kenar 20.20'den 400'dür {kenar uzunluğu buluyor}. Buraya da 10 tane demiş 10.20'den 200 {kenar uzunluğu buluyor}.

A: Bu uzunluklar ne?

84F: Santim, bunu metreye çevir diyor. Çünkü metrekare olarak bul diyor. Metreye çevirdim {burada sıfırların üzerini çiziyor}.

85F: $4x2$'den 8 galiba.

Furkan banyoyu dikdörtgen çizerek modelliyor (81F). Fayansları kare çizerek modelliyor (82F). Kareye yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin bir kenar uzunluğunu buluyor (82F). Karenin bir kenar uzunluğu ile dikdörtgenin kısa ve uzun kenarına yerleştirilebilecek kare sayısını koordine ederek dikdörtgenin kısa ve uzun kenar uzunluğunu buluyor (83F). Ölçülere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve dikdörtgenin kenar uzunluklarını metre birimine çeviriyor (84F). Dikdörtgenin alan formülü ile dikdörtgenin alanını hesaplıyor (85F).

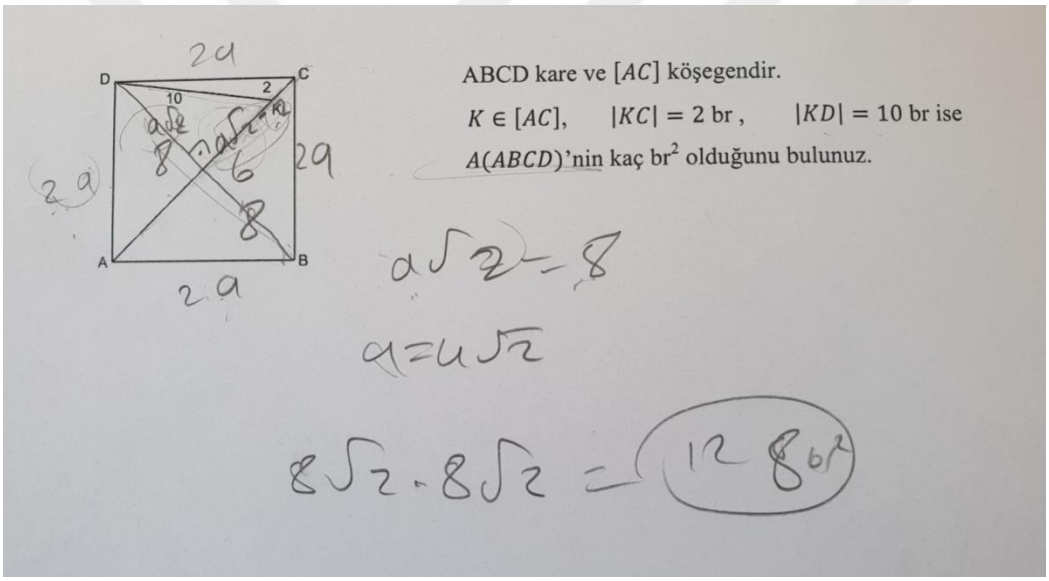
Furkan dikdörtgenin alanını hesaplamada önceden öğrendiği formülü kullanabilmek için dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmaya odaklanmıştır. Kareye yönelik şemasını işe koşmuş ve karenin bir kenar uzunluğunu bulmuştur. Dikdörtgenin ve karenin kenar uzunlukları arasında ilişki kurarak dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmuştur. Uzunluk ölçülerine yönelik bilgilerini kapsülden çıkartmış ve böylece dikdörtgenin kenar uzunluklarının birimini değiştirmiştir. Dikdörtgenin alan formülünü kullanarak sonuca ulaşmıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat

dikdörtgenin alanının, bir tane karenin alanı ile dikdörtgenin içine yerleştirilebilecek kare sayısının çarpımına eşit olduğunu fark edememiştir. Sorunun çözümünde, uzunluk ölçüleri, kare ve dikdörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak koordine etmiştir. Sonuç olarak Furkan'ın sorunun çözümünde, dikdörtgenin alanını, karenin alanına kapsüllemek yerine dikdörtgenin alan formülünü kullandığı görülmektedir.

Dokuzuncu soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Furkan'ın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Furkan'ın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 28'de sunulmuştur (F: Furkan).

Şekil 28

Furkan'ın dokuzuncu soruya yönelik çözümü



91F: Ne düşünebilirim? Mesela a, a desem. Dikte dedemiş hiç bişey dememiş. Buralar {karenin kenar uzunluklarını kastediyor} a, a olabilir, yani ben öyle dedim.

92F: Şurası {$|AC|$'nu kastediyor} $a\sqrt{2}$ olur ama işime yaramaz.

93F: Köşegen çeksem işime yarar mı bilmiyorum {burada karenin köşegenini çiziyor}. Şurası dik oldu {$(\hat{O})$'nı kastediyor}.

94F: Burası {karenin bir kenar uzunluğunu kastediyor} a ise, şurası {$|OD|$'nu kastediyor} $\frac{a\sqrt{2}}{2}$'dir. Ben $2a$ diyeyim tam çıksın diye şuralara {karenin kenar uzunluğunu kastediyor} $2a$ dedim. Şurası {$|DB|$'nu kastediyor} o zaman $2a\sqrt{2}$ olur toplamı. Sonra burası da {$|DO|$'nu kastediyor} $a\sqrt{2}$ olur. O zaman şurası da {$|OC|$'nu kastediyor} $a\sqrt{2}$ oluyordu toplamı. Bu {$|OK|$'nu kastediyor} $a\sqrt{2} - 2$ 'dir.

95F: Burası 6,8,10 gelir bence. Çünkü bişeyin 2 fazlası 6, 8, 10 gelir. Ben öyle düşündüm. $a\sqrt{2}-2$ bir sayı ise bir sayının iki eksiği bunu sağlayan 6, 8, 10 var. Öyle düşünürüm. $a\sqrt{2}=8$ olur. a'da $4\sqrt{2}$ olur.

96F: Bütün karenin alanını sormuş. $2a$ demiştim. $8\sqrt{2}.8\sqrt{2}$'den buda 128 gelir.

Furkan cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin kenar uzunluğunu sembolle temsil ediyor (91F). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin köşegen uzunluğunu sembolle temsil ediyor (92F). Kareye yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin köşegenini çiziyor. Aynı zamanda $m(\hat{O})$'nü buluyor (93F). Herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadan karenin köşegenini çizmesi, onun karenin temel elemanlarına yönelik eylemleri yansıtabildiğinin göstergesidir. Cebirsel ifadeler ve üçgene yönelik bilgilerini koordine ederek yeni duruma uyarlıyor ve $|OD|$ ile $|OK|$'nu buluyor (94F). Cebirsel ifadeler ve üçgene yönelik bilgilerini tekrar koordine ederek yeni duruma uyarlıyor ve DOK üçgeninin özel üçgen olduğunu fark ederek karenin kenar uzunluğunu buluyor (95F). Karenin alan formülünü kullanıyor ve istenilen sonucu buluyor (96F).

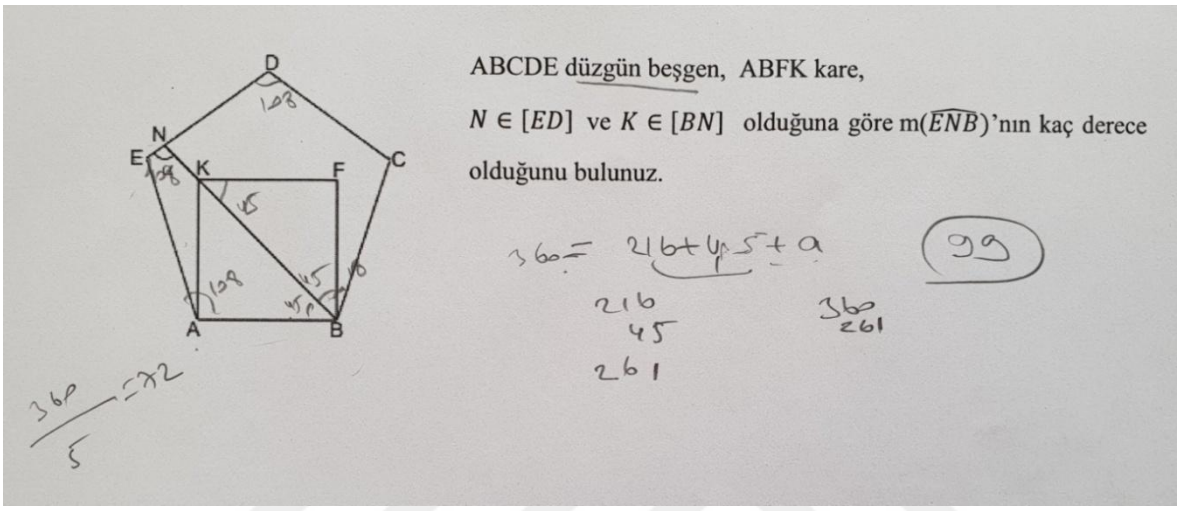
Furkan önce karenin kenar uzunluğu ile köşegen arasında ilişki kurmayı denemiş fakat buradan bir sonuç elde edemeyince vazgeçmiştir. Sorunun çözümü için farklı bir yaklaşım sergileyerek karenin köşegenini çizmeye karar vermiştir. Köşegeni çizdikten sonra üçgen şemasını işe koşmuş ve bir dik üçgen oluştuğunu fark etmiştir. Böylece karenin ve üçgenin kenar uzunluklarını ilişkilendirmiş ve üçgen şemasını işe koşması halinde karenin kenar uzunluğunu bulabileceğini fark etmiştir. Önceden oluşturduğu üçgen ve cebirsel ifadelere yönelik bilgilerini kapsülden çıkartmış ve koordineli kullanarak karenin köşegen uzunluğunu bulmuştur. Köşegen uzunluğundan yola çıkarak denklemler şemasına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartmış ve karenin bir kenar uzunluğunu elde etmiştir. Karenin alan formülünü kullanarak istenilen sonuca ulaşmıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat karenin alanının, karenin içinde oluşan üçgensel bölgelerin alanları toplamına eşit olduğunu fark edememiştir. Sonuç olarak Furkan'ın sorunun çözümünde üçgen, cebirsel ifadeler, denklemler ve kare kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordineli kullandığı fakat karenin alanını, üçgenin alanına kapsülleyemediği için karenin alan formülünü kullandığı görülmektedir.

4.1.4. Büşra'nın Oluşan Bilgilerinin Analizi

Birinci soru "çokgen kavramını açıklayarak işlemler yapar" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çokgen kavramını açıklamaya yönelik olan bu soruda, Büşra'nın nesne düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Büşra'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 29'da sunulmuştur (B: Büşra).

Şekil 29

Büşra'nın birinci soruya yönelik çözümü



11B: Bunun {beşgeni kastediyor} bir iç açısı 108°'dir. Bunun da {kareyi kastediyor} 90 olduğu için şuraya {($\widehat{CBF}$)'nı kastediyor} 18 kaldı. İşime yararmı bilmiyorum.

12B: Karenin köşegeni tam ortadan böler. 45, 45 şeklinde.

13B: Şurası {($\hat{A}$)'nı kastediyor} 108 zaten, şurasıda {($\hat{E}$)'nı kastediyor} 108. Çünkü E açısı ve A açısının 108 olma sebebi düzgün beşgenin iç açıları olmaları.

14B: Bu da bir düzgün olmayan normal dörtgen {ABNE dörtgenini kastediyor} olduğu için iç açıları toplamı 360'a eşit olacak. $360 = 216 + 45 + a$ diyip a'yı bulacağız. 261 burası, 360'dan 261'i çıkarırsak 99 kalır.

Büşra, kare ve beşgene yönelik bilgilerini koordine ederek karenin ve beşgenin açıları arasında ilişki kuruyor. Böylece $m(\widehat{CBF})$'nü buluyor (11B). Kareye yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin köşegen özelliklerini kullanarak $m(\widehat{ABN})$'nü buluyor (12B). Çokgende açıya yönelik bilgilerini yeni duruma tekrar uyarlıyor ve $m(\widehat{BAE})$ ile $m(\widehat{AEN})$'nü buluyor (13B). Dörtgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve dörtgenin iç açılarını kullanarak istenilen açının ölçüsünü buluyor (14B).

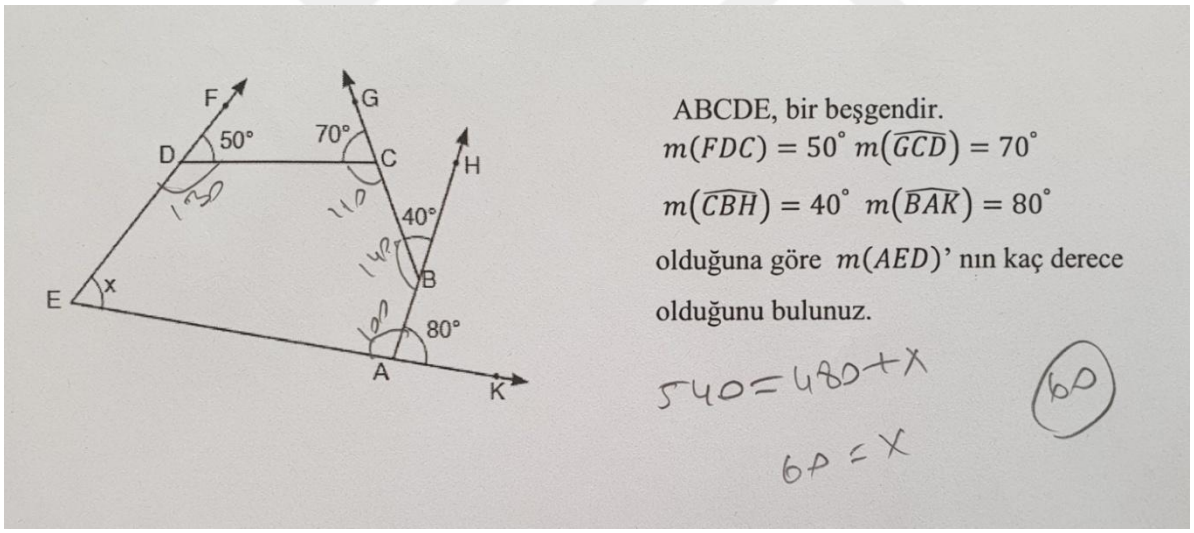
Büşra sorunun çözümü için ABNE dörtgeninin iç açılarını kullanmayı planlamıştır. Çokgende açıya yönelik bilgilerini kullanarak $m(\widehat{BAE})$ ve $m(\widehat{AEN})$'nü bulmuştur. $[NB]$'nın

aynı zamanda karenin köşegeni olduğunu fark etmiştir. Bunu fark eden Büşra, karenin temel elemanlarına ve açılarına yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini koordine ederek $m(\widehat{ABK})$'nü bulmuştur. Son olarak ise ABNE dörtgeninin iç açılarını toplamış ve istenilen açıyı bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. ABNE dörtgenine odaklanarak soruyu çözebileceğini fark etmiştir. Bu durum çokgenin kenarları arasında ilişki kurabildiğinin göstergesidir. Sonuç olarak Büşra'nın sorunun çözümünde dörtgen ve beşgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordineli kullandığı, çokgen kavramını etkin kullanabildiği görülmektedir.

İkinci soru "çokgen kavramını açıklayarak işlemler yapar" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çokgen kavramını açıklamaya yönelik olan bu soruda, Büşra'nın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Büşra'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 30'da sunulmuştur (B: Büşra).

Şekil 30

Büşra'nın ikinci soruya yönelik çözümü



21B: Beşgenmiş. D açısı 130, burası da 110, şurası 140, burasına 100 kalır.

22B: Zaten beşgen olduğu için burası 540 oluyor iç açıları toplamı.

23B: Bunları toplayacak olursak $540 = 480 + x$; $x = 60$ olur.

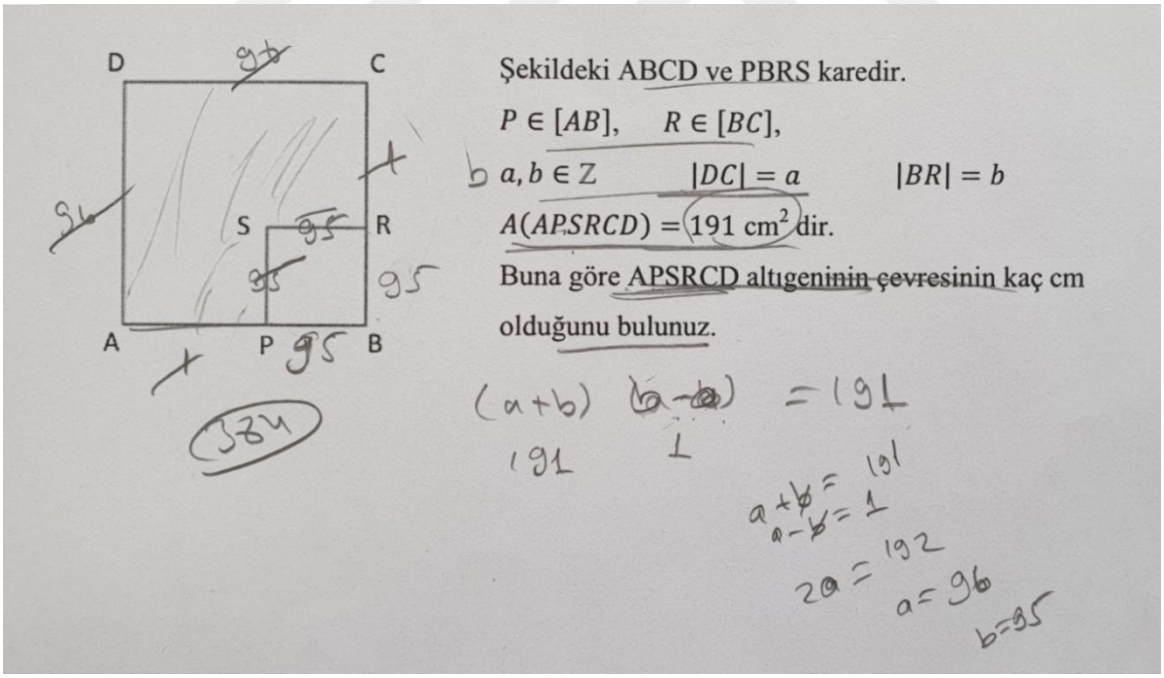
Büşra açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve beşgenin iç açı ölçülerini buluyor (21B). Çokgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve beşgenin iç açılar toplamını buluyor (22B). Denklemlere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve denklemlere ve çokgenin iç açısına yönelik bilgilerini koordine ederek istenilen açının ölçüsünü buluyor (23B).

Büşra sorunun çözümü için beşgenin iç açılarını kullanmayı planlamıştır. Bunun için açıya yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartmış ve beşgenin iç açılarını bulmuştur. Daha sonra bulduğu bu açıların ölçüleri toplamını, denklemlere ve beşgende iç açı toplamına yönelik bilgilerini koordine ederek sonuca ulaşmıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat çokgenin dış açılarını kullanarak soruyu çözebileceğini fark edememiştir. Bu durum çokgenin açılarını etkili kullanamadığının göstergesidir. Sonuç olarak Büşra'nın sorunun çözümünde açı, denklemler ve beşgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordineli kullandığı, fakat çokgen kavramını etkin kullanamadığı görülmektedir.

Üçüncü soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Büşra'nın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Büşra'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 31'de sunulmuştur (B: Büşra).

Şekil 31

Büşra'nın üçüncü soruya yönelik çözümü



31B: İki tane kare vermiş bize ve bu karelerden iki kare farkı yapmış, bu 191'e eşitmiş. Şuranın alanını vermiş iki kare farkından bulabiliriz.

32B: Burası a olsun, büyük karemizde b olsun.

33B: $(a+b)(b-a) = 191$'miş. 1'e 191 olarak ayırırız. $(a+b)$, 191 olur, $(b-a)$, 1 olur. Bunları da iki bilinmeyenli denklem çözümünden götürerek bulacağız.

{Burada sesli bir şekilde denklem çözüyor.} a, 96 olur. b'de 95 olur.

34B:Bunun çevresini sormuş. 95'e 1 deriz, 95 deriz 1 deriz, 96 deriz. Bunları toplayacağız şimdi. 384 olur çevre.

Büşra soruyu nasıl çözebileceğine yönelik plan yapıyor (31B). Cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin kenar uzunluklarını cebirsel olarak temsil ediyor (32B). Denklemlere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin kenar uzunluklarını buluyor (33B). Altıgenin kenar uzunluklarını topluyor ve istenilen sonucu buluyor (34B).

Büşra ABCD ve PBRS karelerinin alanları arasında ilişki kurmuştur. Denklemler şemasını işe koşmuş ve karelerin alanları arasında kurduğu ilişki sayesinde bir denklem elde etmiştir. Bu denklemi çözerek karelerin kenar uzunluklarını bulmuştur. Daha sonra altıgenin kenar uzunluklarını toplamıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat APSRCD altıgenin kenarları ile PBRS karesinin kenarları arasında ilişki kuramamıştır. Bu yüzden APSRCD altıgeninin çevresini hesaplarken, altıgenin kenar uzunluklarını toplamıştır. $|PS|$ ile $|BR|$ ve $|SR|$ ile $|PB|$ arasında ilişki kurabilseydi, APSRCD altıgeninin çevresinin ABCD karesinin çevresine eşit olduğunu fark edebilirdi. Sonuç olarak Büşra'nın sorunun çözümünde karenin alanı, cebirsel ifadeler ve denklemler kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordineli kullandığı, fakat dörtgenin kenar özelliklerini etkili kullanamadığı görülmektedir.

Dördüncü soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Büşra'nın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Büşra'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (B: Büşra).

41B: Burdan bu böyle oluyor. O yüzden şurası eşit burası oluyor {$m(\widehat{FAB})$'nün $m(\widehat{AFE})$'ne ve $m(\widehat{EBA})$'nün $m(\widehat{FEB})$'ne eşit olduğunu fark ediyor}.

42B: Açıları eşit olmuş oluyor. Öyle olunca da 10 birimmiş {bildiklerini tekrarlıyor}. Burası şey desek {$|FC|$'na x diyor}, buraya {$[EC]$'nı kastediyor} $x + 2$ desek, $x + 2$ desek {$[BC]$'nı kastediyor} burası da {$[AD]$'nı kastediyor} $x + 2$ olur. Paralelkenarda paralel olduğu için. Buraya da x kalıyor {$[DE]$'nı kastediyor}.

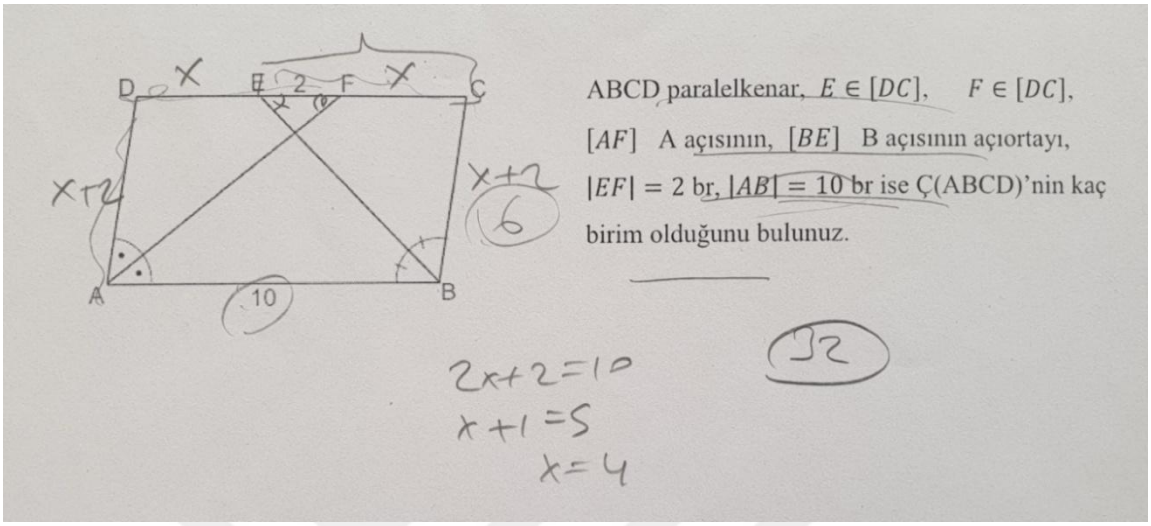
43B: Yani $2x + 2 = 10$

$x + 1 = 5$ karşılıklı 2'ye bölersek, $x = 4$.

44B: Çevrede 32 olur (Bkz. Şekil 32).

Şekil 32

Büşra'nın dördüncü soruya yönelik çözümü



Büşra açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $m(\widehat{FAB})$'nün $m(\widehat{AFE})$'ne ve $m(\widehat{EBA})$'nün $m(\widehat{FEB})$'ne eşit olduğunu fark ediyor (41B). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve ADF üçgeni ile BCE üçgeninin ikizkenar üçgen olduğunu fark ediyor (42B). Aynı zamanda cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve ADF üçgeni ile BCE üçgeninin kenar uzunluklarını cebirsel olarak temsil ediyor (42B). Paralelkenarın karşılıklı kenarları arasında ilişki kuruyor (43B). Kurduğu bu ilişki sonunda denklemlere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve paralelkenarın kenar uzunluklarını buluyor (43B). Paralelkenarın kenar uzunluklarını topluyor ve istenilen sonucu buluyor (44B).

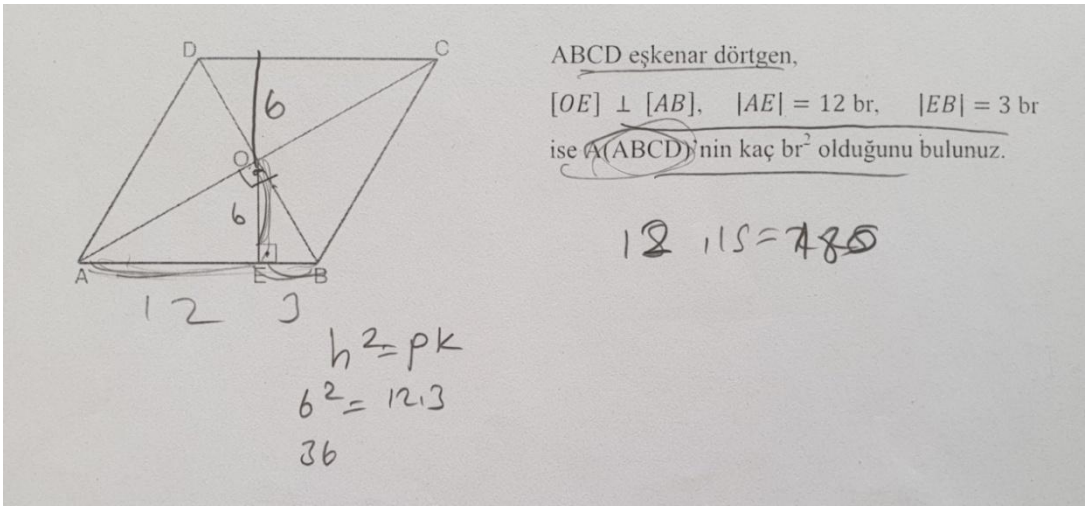
Büşra açılara yönelik şemasını işe koşarak iç ters açıları belirlemiştir. Üçgen, paralelkenar, cebirsel ifadeler ve denklemlere yönelik bilgilerini koordineli kullanarak paralelkenarın çevresini bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. ADF üçgeni ile BCE üçgeni arasında ilişki kurarken, paralelkenarın karşılıklı kenar uzunluklarının birbirine eşit olduğuna yönelik önceden oluşturduğu bilgisini yeni duruma uyarlamıştır. Buradan yola çıkarak $|DE| = |CF|$ sonucuna ulaşmıştır. Fakat $|DE| = |CF|$ eşitliğini elde etmek için ADF üçgeni, BCE üçgeni ve paralelkenarın karşılıklı kenarları arasındaki ilişkiyi doğrudan görememiştir. Bu durum paralelkenarın kenarlarına yönelik özelikleri etkin olarak kullanamadığının göstergesidir. Sonuç olarak Büşra'nın sorunun çözümünde açı, üçgen, paralelkenar, cebirsel ifadeler ve denklemler kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı, bu kavramları koordineli

kullandığı fakat paralelkenarın kenarlarına yönelik özelikleri etkin olarak kullanamadığı görülmektedir.

Beşinci soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Büşra'nın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Büşra'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 33'te sunulmuştur (A: Araştırmacı, B: Büşra).

Şekil 33

Büşra'nın beşinci soruya yönelik çözümü



51B: ABCD eşkenar dörtgenmiş bunlar dik olur. O yüzden öklid kullanabiliriz burada, eşkenar dörtgenin köşegenleri arasında dik açı oluşacağı için.

52B: AE, 12 birimmiş, EB 3 birimmiş o zaman burası 6 birimdir.

A: Orayı nasıl 6 buldun?

53B: Öklidten, $h^2 = p.k$'dan, $6^2 = 12.3$ o yüzden h, 6 çıkar.

54B: Bunlar zaten eş dört üçgene bölecektir. O yüzden buranında {DOC üçgenini kastediyor} yüksekliği 6 çıkar.

55B: Toplamda h ile eşkenar dörtgende h'la kenarı çarparsak 180 olur {eşkenar dörtgenin bir kenar uzunluğu ile yüksekliğinin çarpımından bahsediyor}.

Büşra dörtgenin temel elemanlarından olan köşegen bilgisini göz önünde bulunduruyor ve $(\hat{O})$'nın 90° olduğunu fark ediyor (51B). $(\hat{O})$'nın 90° olduğunu herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadan fark etmesi onun dörtgenin temel elemanlarına yönelik eylemleri yansıtabildiğinin göstergesidir. Üçgen ve denklemlere yönelik bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $|OE|$'nu buluyor (52B, 53B). Eşkenar dörtgenin köşegenine yönelik

bilgilerini göz önünde bulunduruyor ve ODC üçgeninin yüksekliğini buluyor (54B). Eşkenar dörtgenin alanına yönelik formülü kullanıyor ve istenilen alanı buluyor (55B).

Büşra dörtgene, üçgene ve denklemlere yönelik şemalarını işe koşmuş ve kapsülden çıkarttığı bilgilerini koordine ederek $|OE|$'nu bulmuştur. Alanı bulmak için eşkenar dörtgenin yüksekliğinin uzunluğunu bulma ihtiyacı duymuştur. ODC üçgeninin yüksekliğini bulması halinde, eşkenar dörtgenin yüksekliğini de bulabileceğini fark etmiştir. Bu yüzden üçgen ve dörtgenin temel elemanlarına yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlamış ODC üçgeninin yüksekliğini bulmuştur. Daha sonra ODC ve ABO üçgenlerinin yükseklikleri ile eşkenar dörtgenin yüksekliğini ilişkilendirmiştir. Eşkenar dörtgenin alan formülünü kullanarak istenilen alanı bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat üçgen şemasını işe koşarak eşkenar dörtgenin alanını hesaplayabilirdi. Bunun için AOB üçgeninin alanını hesaplaması, eşkenar dörtgenin köşegenlerinin dörtgen içinde dört tane eş üçgen oluşturduğunu fark etmesi ve elde ettiği üçgenin alanını dört ile çarpması gerekiyordu. Böylece eşkenar dörtgenin ve üçgenin alanı kavramlarını koordineli kullanarak formüle ihtiyaç duymadan istenilen alanı bulabilirdi. Sorunun çözümünde, üçgen, denklemler ve eşkenar dörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini koordineli kullandığı görülmektedir. Sonuç olarak Büşra'nın eşkenar dörtgenin alanını, üçgenin alanına kapsülleyemediği için eşkenar dörtgenin alan formülünü kullandığı görülmektedir.

Altıncı soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Büşra'nın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Büşra'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (B: Büşra).

Açıklama: D noktasından $[AB]$'na çizilen dikmenin $[AB]$'nı kestiği nokta H olsun.
C noktasından $[AB]$'na çizilen dikmenin $[AB]$'nı kestiği nokta K olsun.

61B: Böyle paralelkenara tamamlayabiliriz veya 30, 60, 90 üçgeni falan yaparak dikdörtgene çevirebiliriz. Pardon alanını soruyor. 90 , 90 şeklinde dikdörtgene çeviririm.

62B: Bu DC kenarı şuraya {$[HK]$'nı kastediyor} eşit olacağı için 12 olur.

63B: 90, 30, 60 üçgeninde ise 90'nın karşısı 6 ise 30'un karşısı da 3 olur.

64B: Burası da aynı şekilde 3 olur.

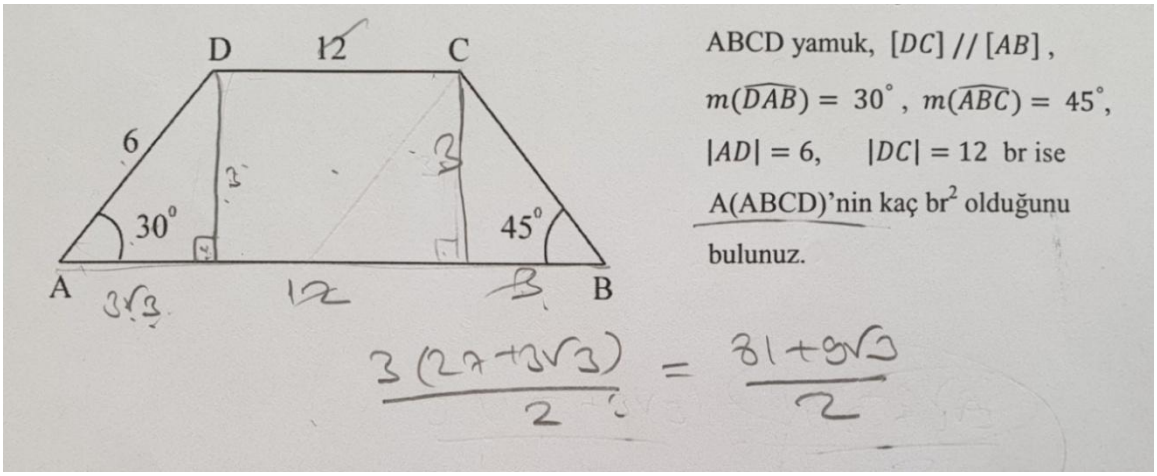
65B: 45, 45, 90 üçgeninde burası da 3 olur.

66B: $3\sqrt{3}$ olur burası da {$[AH]$'nı kastediyor}.

67B: Yamuğun alanı $\frac{3(27+3\sqrt{3})}{2} = \frac{81+9\sqrt{3}}{2}$ olur (Bkz. Şekil 34).

Şekil 34

Büşra'nın altıncı soruya yönelik çözümü



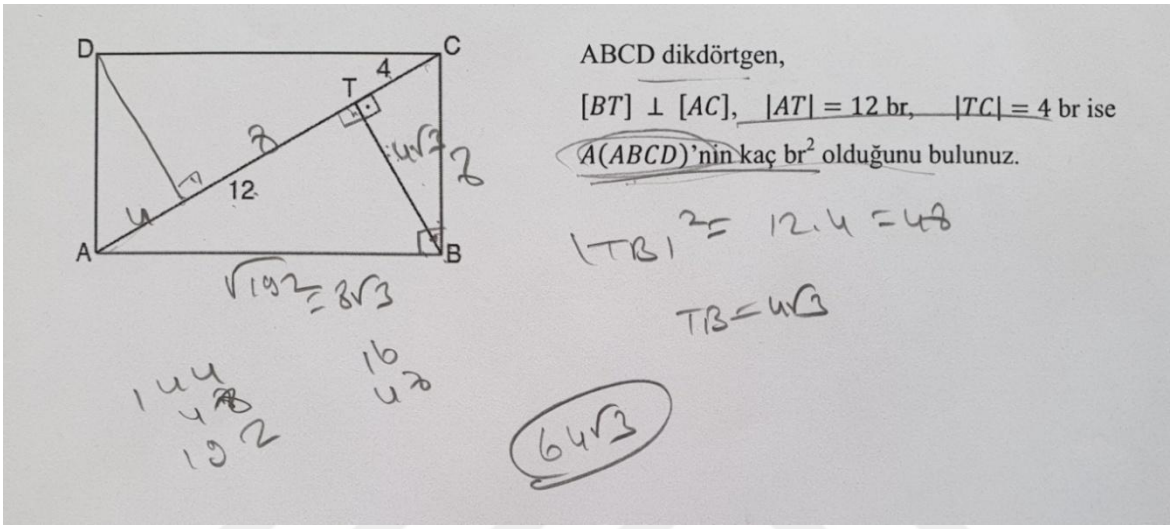
Büşra dikdörtgen oluşturabilmek için D ve C noktalarından $[AB]$'na dikme çiziyor (61B). $|DC|$ ile $|HK|$ arasında ilişki kuruyor ve $|HK|$'nu buluyor (62B). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve çizdiği dikmenin uzunluğunu buluyor (63B). $|DH|$ ile $|CK|$ arasında ilişki kuruyor ve $|CK|$'nu buluyor (64B). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $|KB|$'nu buluyor (65B). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma tekrar uyarlıyor ve $|AH|$'nu buluyor (66B). Yamuğun alanını formül kullanarak buluyor (67B).

Büşra sorunun çözümü için daha önce öğrendiği formülü kullanmaya odaklandığından $|AB|$'nu ve yamuğun yüksekliğini bulmaya yönelik bir yaklaşım sergilemiştir. Bunun için yamuğun C ve D noktalarından $[AB]$'na dik çizmiştir. Bu dikleri çizerken üçgen şemasını işe koşmuştur. Çünkü çizdiği dikme ile bir dik üçgen oluşturmayı amaçlamış ve bu dik üçgeni kullanarak çizdiği dikmenin uzunluğunu bulabileceğini fark etmiştir. Dikme çizerken yamuk ve üçgene yönelik bilgilerini bir arada düşünmüş ve yamuğun yüksekliği ile dik üçgenin kenarını ilişkilendirmiştir. Daha sonra üçgen şemasını işe koşarak yamuğun alan formülünü kullanabilmek için gerekli olan verileri elde etmiştir. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat yamuğun alanının, yamuğun içinde oluşan dikdörtgenin alanı ile iki dik üçgenin alanları toplamına eşit olduğunu fark edememiştir. Yamuğun alanı kavramı ile dikdörtgenin ve üçgenin alanı kavramlarını koordineli kullanarak formüle ihtiyaç duymadan sonuca ulaşabilirdi. Sonuç olarak Büşra'nın sorunun çözümünde üçgen ve dikdörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordine ettiği, yamuğun alanını bulmak için üçgenin ve dikdörtgenin alanı kavramlarından yararlanmak yerine önceden öğrendiği formülü kullandığı görülmektedir.

Yedinci soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Büşra'nın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Büşra'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 35'te sunulmuştur (B: Büşra).

Şekil 35

Büşra'nın yedinci soruya yönelik çözümü



Açıklama: D noktasından $[AC]$'na çizilen dikmenin $[AC]$'nı kestiği nokta H olsun.

71B: Buradan dikdörtgenin dik olduğu için {$(\hat{B})$'nı kastediyor},

72B: öklid yaparız. $12x4$'ten TB'nin kaç santim olduğunu bulabiliriz.

73B:Veya şey yaparız, şöyle indiririz {D noktasından $[AC]$'na dik çiziyor}. Burada bir kural vardı, CTB üçgeniyle bu üçgen {ADH üçgenini kastediyor} eş üçgenler oluyordu. 4 olursa {$|AH|$'nu kastediyor} burası da {$|HT|$'nu kastediyor} 8 olur. İşime yararmı bilmiyorum.

74B: TB'yi bulalım. $|TB|^2 = 12x4 = 48$ o zaman TB'miz $4\sqrt{3}$'dür.

{Burada CBT üçgeninde çalışıyor} 8 olur burası. Zaten 30, 60, 90 üçgeni.

{Burada ATB üçgeninde pisagor teoremini uyguluyor} $\sqrt{192} = 8\sqrt{3}$ çıkar.

75B: Alanı sorduğu için $64\sqrt{3}$ buluruz, 8 ile $8\sqrt{3}$'ü çarparsak.

Büşra dikdörtgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $m(\hat{B})$'nü buluyor (71B). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $|TB|$'nu nasıl bulabileceğini planlıyor (72B). Fakat burada çözüme farklı bir yaklaşım daha getirerek üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve D köşesinden $[AC]$'na dik çizerek ADH dik üçgenini oluşturuyor (73B). Bu sayede BTC ile ADH üçgenlerinin eş üçgen olduğunu fark ediyor ve $|AH|$'nu buluyor. Fakat

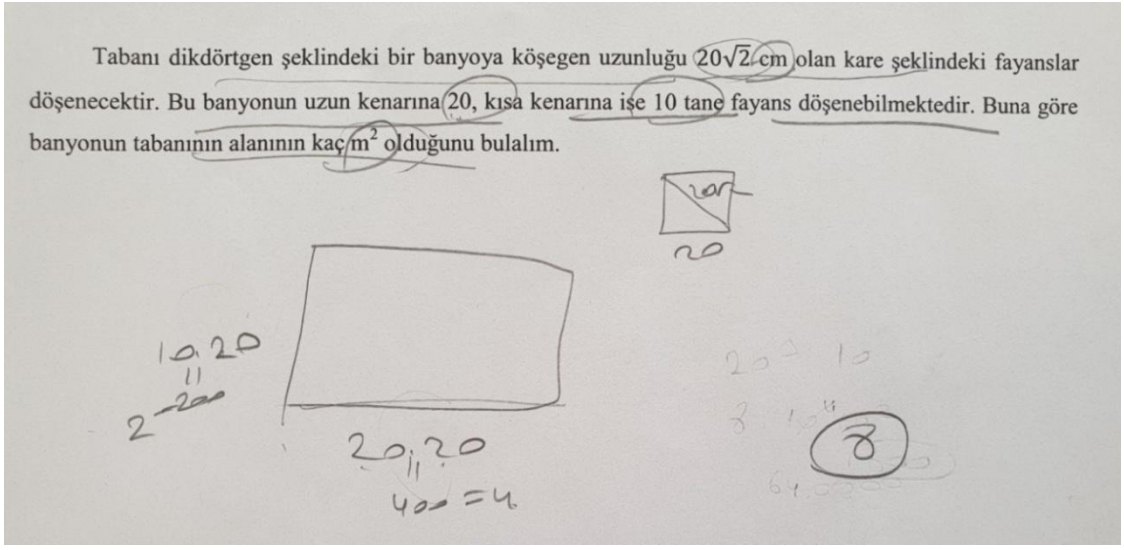
daha sonra elde ettiği bu verileri kullanmıyor. Büşra üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $|TB|$'nu, $|BC|$'nu ve $|AB|$'nu buluyor (74B). Formül kullanarak dikdörtgenin alanını hesaplıyor (75B).

Büşra dikdörtgenin alanını hesaplamada önceden öğrendiği formülü kullanabilmek için dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmaya odaklanmıştır. Bunun için üçgen şemasını işe koşmuş ve üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartarak dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmuştur. Son olarak dikdörtgenin alan formülünü kullanarak istenilen alanı bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat dikdörtgenin köşegeninin, dikdörtgenin alanını iki eş parçaya ayırdığını fark edememiştir. Bu durumu fark etmiş olsaydı, bir tane üçgenin alanını hesaplar ve bulduğu sonucun iki katını alarak istenilen sonucu elde edebilirdi. Böylece dikdörtgenin alan formülünü kullanmaya ihtiyaç duymazdı. Sorunun çözümünde üçgen ve dikdörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak koordineli kullanmıştır. Sonuç olarak Büşra'nın, dikdörtgenin alanını, üçgenin alanına kapsülleyemediği için dikdörtgenin alan formülünü kullandığı görülmektedir.

Sekizinci soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Büşra'nın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Büşra'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 36'da sunulmuştur (B: Büşra).

Şekil 36

Büşra'nın sekizinci soruya yönelik çözümü



81B: $20\sqrt{2}$ ise karenin şeyi, $a,\ a,\ a\sqrt{2}$'den 20 olur karenin bir kenarı.

82B: Direk çarpabiliriz aslında. Uzun kenarı $20x20$ kısa kenarıda $10x20$ olur {dikdörtgenin kısa ve uzun kenar uzunluğunu buluyor}.

83B: Taban alanını sorduğu için kısa kenarla uzun kenarı çarparsak direk cevabı bulabiliriz. Ama bu santimetre iken bize metrekare olarak sormuş. Ama önce metreye çevirsek daha kolay olur gibime geldi şuan. O zaman şöyle yapalım hatta. Burası 200 cm'den 2 metre direk, burası da 400 cm'den 4 m.

84B: $2x4$'den cevap 8'dir.

Büşra cebirsel ifadeler ve kareye yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini koordine ederek yeni duruma uyarlıyor ve karenin bir kenar uzunluğunu buluyor (81B). Karenin bir kenar uzunluğu ile dikdörtgenin kısa ve uzun kenarına yerleştirilebilecek kare sayısını koordine ederek dikdörtgenin kısa ve uzun kenar uzunluklarını buluyor (82B). Uzunluk ölçülerine yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve dikdörtgenin kenar uzunluklarının birimini metreye çeviriyor (83B). Dikdörtgenin alan formülünü kullanarak istenilen alanı hesaplıyor (84B).

Büşra dikdörtgenin alanını hesaplamada önceden öğrendiği formülü kullanabilmek için dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmaya odaklanmıştır. Cebirsel ifadeler ve kareye yönelik şemalarını işe koşmuş ve karenin bir kenar uzunluğunu bulmuştur. Dikdörtgenin ve karenin kenar uzunlukları arasında ilişki kurmuş ve böylece dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmuştur. Dikdörtgenin alanı ve alan ölçülerine yönelik bilgilerini kapsülden çıkartmış, bu bilgileri koordine ederek yeni duruma uyarlamış ve sonuca ulaşmıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat dikdörtgenin alanının, bir tane karenin alanı ile dikdörtgenin içine yerleştirilebilecek kare sayısının çarpımına eşit olduğunu fark edememiştir. Sorunun çözümünde, cebirsel ifadeler, alan ölçüleri, kare ve dikdörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak koordine etmiştir. Sonuç olarak Büşra'nın sorunun çözümünde dikdörtgenin alanını, karenin alanına kapsüllemek yerine dikdörtgenin alan formülünü kullandığı görülmektedir.

Dokuzuncu soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Büşra'nın süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Büşra'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (B: Büşra).

91B: Burası zaten 45, 45 işimize yarar mı bilmiyorum { $m(\widehat{DAC})$ ile $m(\widehat{ACD})$ 'nü kastediyor}.

92B: {Burada D köşesinden $[AC]$'na dik çiziyor.}

93B: Ne yapabiliriz bunu bu şekilde yaparsak. Bura eşittir bura {$|AO| = |DO|$ ifadesini kastediyor} 45, 45'den {AOD üçgeninin açılarını kastediyor}. Sonrasında bu {$[DO]$'nı kastediyor} eşittir OC olur.

94B: {Burada $|OD|$'nu a ile temsil ediyor}, $a\sqrt{2}$ olur burası da {$|AD|$'nu kastediyor}.

95B: Burası da dik olduğu için öklid yaparız. $(a-2)$ olur $|OK|$'da.

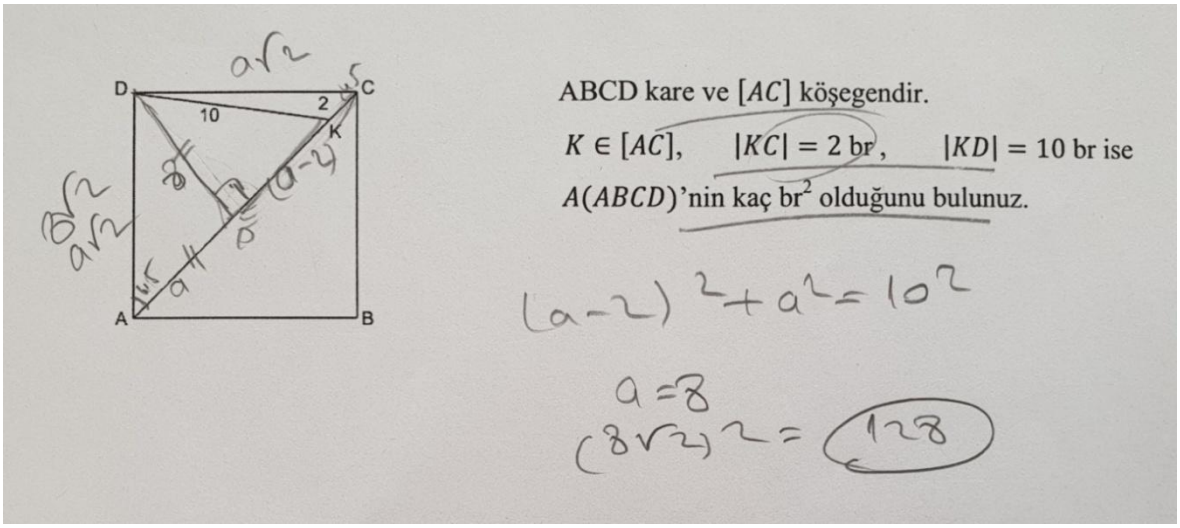
$$(a-2)^2 + a^2 = 10^2$$

96B: 6, 8, 10 üçgeni, $a = 8$ olur. Buradan $8\sqrt{2}$ {karenin bir kenar uzunluğunu kastediyor}.

97B: $8\sqrt{2}$'nin karesinden de 128 olur cevap (Bkz. Şekil 37).

Şekil 37

Büşra'nın dokuzuncu soruya yönelik çözümü



Büşra kareye yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $m(\widehat{DAC})$ ile $m(\widehat{ACD})$'nü buluyor (91B). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve D köşesinden $[AC]$'na dik çiziyor (92B). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $|AO|$'nun $|OD|$'na, $|OD|$'nun ise $|OC|$'na eşit olduğunu fark ediyor (93B). Cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $|OD|$ ile $|OK|$'nu sembolle temsil ediyor (94B). Üçgen ve denklemlere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve bir denklem elde ediyor (95B). Elde ettiği denklemi çözmek yerine ODK üçgeninin özel üçgen olduğunu fark ediyor ve karenin önce köşegen sonra kenar uzunluklarını buluyor (96B). Karenin alan formülünü kullanıyor ve istenen sonucu buluyor (97B).

Büşra sorunun çözümüne başlarken önce karenin temel elemanını yorumlamıştır. Daha sonra üçgen şemasını işe koşmuş ve bir dik üçgen oluşturmak için dikme çizmiştir. Üçgen şemasını tekrar kullanmış ve $|AO| = |OD| = |OD|$ olduğunu fark etmiştir. Daha sonra

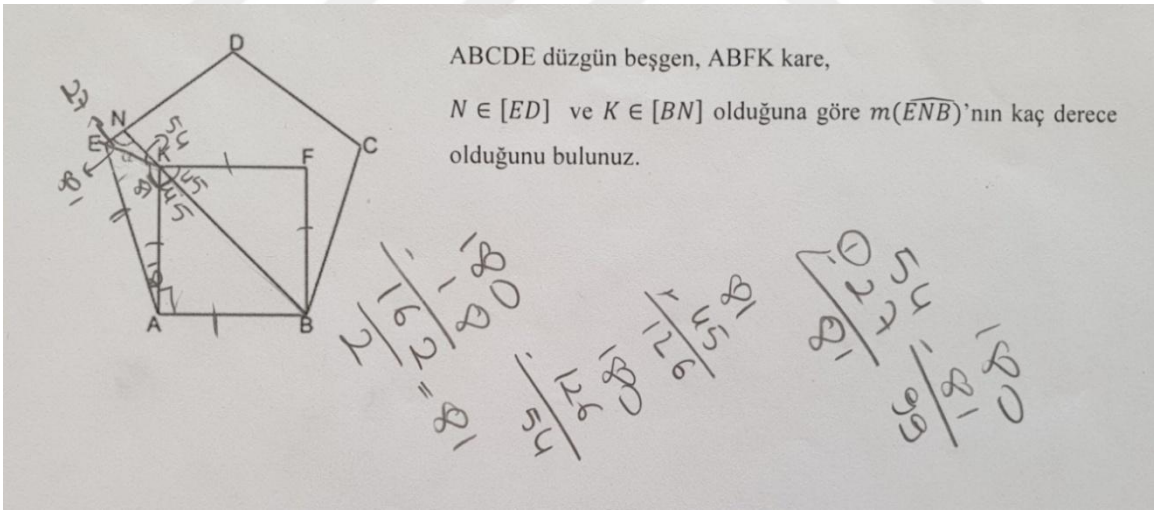
cebirsel ifadeler, denklemler ve üçgen şemalarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak koordine etmiş ve önce ODK üçgeninin sonra karenin kenar uzunluklarını bulmuştur. ODK üçgeninin kenar uzunluğunu bulurken ODK üçgeninin özel üçgen olduğunu fark ettiğinden elde ettiği denklemi çözme gereği duymamıştır. Karenin alan formülünü kullanarak istenilen sonucu bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat karenin alanının, karenin içinde oluşan üçgensel bölgelerin alanları toplamına eşit olduğunu fark edememiştir. Sonuç olarak Büşra'nın sorunun çözümünde üçgen, cebirsel ifadeler, denklemler ve kare kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordineli kullandığı fakat karenin alanını, üçgenin alanına kapsülleyemediği için karenin alan formülünü kullandığı görülmektedir.

4.1.5. Ceren'in Oluşan Bilgilerinin Analizi

Birinci soru "çokgen kavramını açıklayarak işlemler yapar" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çokgen kavramını açıklamaya yönelik olan bu soruda, Ceren'in süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Ceren'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 38'de sunulmuştur (C: Ceren).

Şekil 38

Ceren'in birinci soruya yönelik çözümü



11C: Bunlar eşit {karenin kenar uzunluklarını kastediyor},

12C: şurası {$(\widehat{KAB})$'nı kastediyor} 90, burası beşgen olduğu için 18 kalıyor {$(\widehat{EAK})$'nı buluyor}.

13C: Şöyle birleştiririz {$[EK]$'nı çiziyor}.

14C: Burasıyla burası eşit {$|EA|$ ile $|KA|$'nu kastediyor}.

15C: 180'den 18'i çıkartacağız, bunlar eşit olduğu için 2'ye böleceğiz 81 {EAK üçgeninin açılarını buluyor}. Burası {$(\widehat{AEK})$'nı kastediyor} 81.

16C: Burası 108 olduğu için 108'den 81'i çıkartacağız 27 {$m(\widehat{NEK})$'nü buluyor}.

17C: Şu köşegen {$[BK]$'nı kastediyor} olduğu için burası {$(\widehat{BKA})$'nı kastediyor} 45 olur burası.

18C: 81 şurası {$m(\widehat{AKE})$'nü kastediyor}, 180 olacak {$m(\widehat{BKN})$'nü kastediyor}.

{burada 81+45 işlemini yapıyor} 126.

{burada 180 - 126 işlemini yapıyor} burası 54 {$(\widehat{EKN})$'nı buluyor},

19C: burası {$(\widehat{NEK})$'nı kastediyor} 27, {burada 54+27 işlemini yapıyor} 81 oldu. Burası $(180 - 81)$'den 99.

Ceren karenin kenar özelliklerini göz önünde bulunduruyor (11C). Kare ve beşgene yönelik bilgilerini koordine ederek karenin ve beşgenin açıları arasında ilişki kuruyor. Böylece $m(\widehat{EAK})$'nü buluyor (12C). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $[EK]$'nı çizerek üçgen oluşturuyor (13C). Önceden oluşturduğu kare ve beşgene yönelik bilgilerini koordine ederek karenin ve beşgenin kenarları arasında ilişki kuruyor (14C). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve AEK üçgeninin açılarını buluyor (15C). Üçgen ve beşgenin açılarına yönelik bilgilerini koordine ederek $m(\widehat{NEK})$'nü buluyor (16C). Kareye yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $m(\widehat{AKB})$'nü buluyor (17C). Açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $m(\widehat{EKN})$'nü buluyor (18C). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $m(\widehat{ENB})$'nü buluyor (19C).

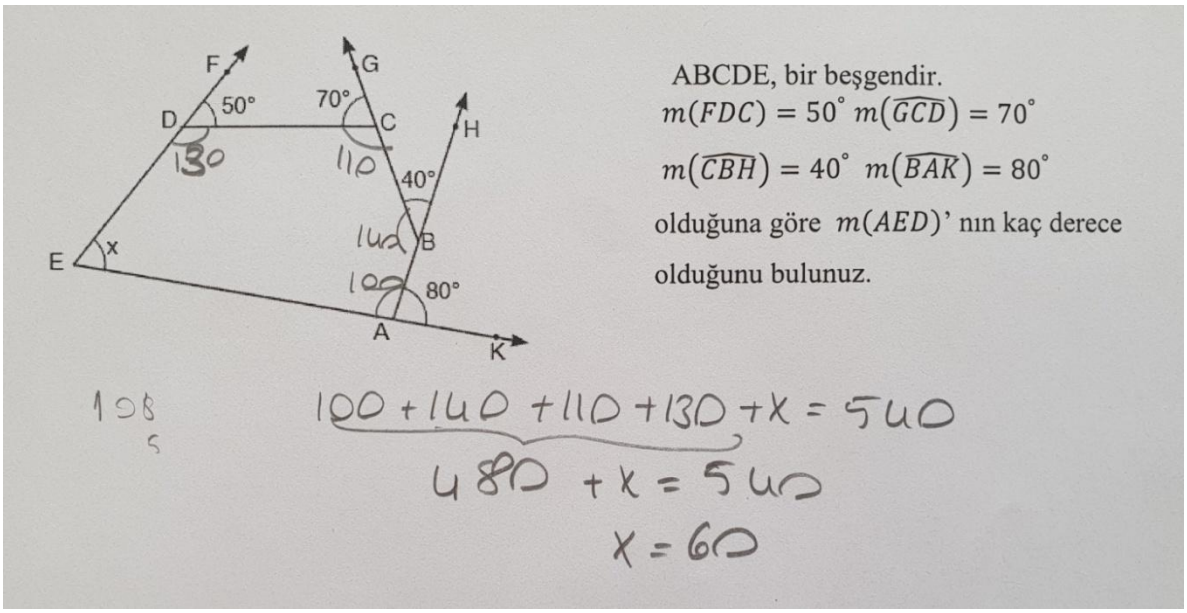
Ceren önce AENK dörtgenine odaklanmayı planlamıştır. Bunun için AENK dörtgeninin açılarını bulmayı hedeflemiştir. Kare ve beşgenin açılarına yönelik bilgilerini koordine ederek $m(\widehat{EAK})$'nü bulmuştur. Daha sonra AENK dörtgenini üçgensel bölgelere ayırmaya yönelik bir yaklaşım izlemiştir. Bunun için üçgen şemasını işe koşarak $[EK]$'nı çizmiştir. Karenin ve beşgenin kenarları arasında kurduğu ilişkiyi üçgen bilgisiyle koordine ederek EAK üçgeninin açılarını bulmuştur. $[NB]$ 'nın aynı zamanda karenin köşegeni olduğunu fark etmiştir. Bunu fark eden Ceren karenin temel elemanlarına ve açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini koordine ederek $m(\widehat{AKN})$'nü bulmuştur. Daha sonra açı, üçgen ve beşgene yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak koordine etmiş ve $m(\widehat{ENB})$'nü bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat ABNE dörtgenine odaklanarak soruyu çözebileceğini fark edememiştir. Bu durum çokgenin kenarları arasında etkili ilişki kuramadığının göstergesidir. Sonuç olarak Ceren'in sorunun çözümünde açı, üçgen, dörtgen, kare ve beşgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden

çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordineli kullandığı fakat çokgen kavramını etkin kullanamadığı görülmektedir.

İkinci soru "çokgen kavramını açıklayarak işlemler yapar" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çokgen kavramını açıklamaya yönelik olan bu soruda, Ceren'in süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Ceren'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 39'da sunulmuştur (C: Ceren).

Şekil 39

Ceren'in ikinci soruya yönelik çözümü



21C: Şurası 130, 110, 140, 100 topladım,

22C: beşgenin iç açı ölçüleri 540'dı galiba.

23C: (Burada $100 + 140 + 110 + 130 + x = 540$ ifadesini yazıyor)

$$480 + x = 540$$

$$x = 60$$

Ceren açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve beşgenin iç açı ölçülerini buluyor (21C). Çokgenin iç açıları toplamına yönelik bilgisini kullanıyor (22C). Denklemlere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor. Böylece denklemlere ve beşgenin iç açılarının toplamına yönelik bilgilerini koordine ederek istenilen açının ölçüsünü buluyor (23C).

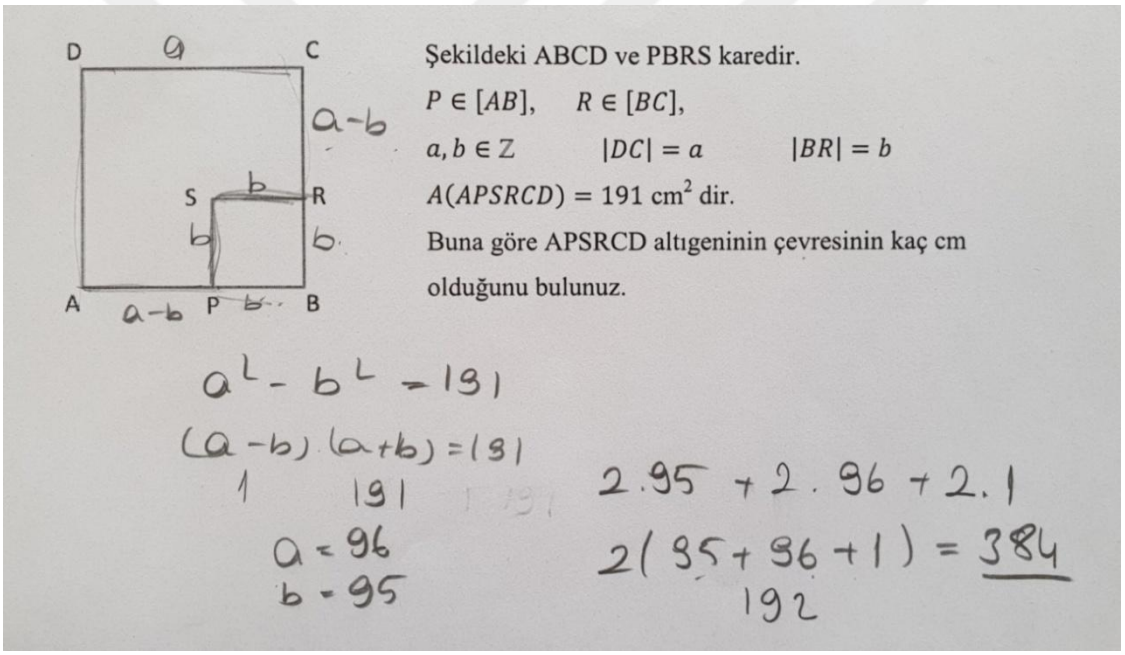
Ceren sorunun çözümü için beşgenin iç açılarını kullanmayı planlamıştır. Bunun için açıya yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartmış ve beşgenin iç açılarını bulmuştur. Daha sonra bulduğu bu açıların ölçüleri toplamını, denklemlere yönelik bilgisini ve beşgende iç açı toplamı bilgisini koordine ederek sonuca ulaşmıştır. Sorunun çözümü için

herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat çokgenin dış açılarını kullanarak soruyu çözebileceğini fark edememiştir. Bu durum çokgenin açılarını etkili kullanamadığının göstergesidir. Sonuç olarak Ceren'in sorunun çözümünde açı kavramına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı fakat çokgen kavramını etkin kullanamadığı görülmektedir.

Üçüncü soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Ceren'in süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Ceren'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 40'da sunulmuştur (C: Ceren).

Şekil 40

Ceren'in üçüncü soruya yönelik çözümü



31C: {Burada uzunlukları sembolle temsil ediyor.}

32C: Şuranın alanı 191'miş. $a^2 - b^2 = 191$

{Burada $(a - b).(a + b) = 191$ ifadesini yazıyor} o zaman 1'e 191 değil mi?

O zaman a, 96 ve b'de 95.

33C: Altıgenin çevresi. $(a - b)$, burası da $(a - b)$. 2 tane b geldi, şurası b burası b {altıgenin kenar uzunluklarını söylüyor.}

2 çarpı 95, 2 tane a geldi, $(a - b)$ geldi 2 tane oda 1 zaten

$2.95 + 2.96 + 2.1$ direk toplarsak 2 parantezine alıp.

{Burada $2.(95 + 96 + 1)$ işlemini yapıyor.} 192 geldi buradan 2 ile çarparsam 384.

Ceren cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin kenar uzunluklarını cebirsel olarak temsil ediyor (31C). Denklemlere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin kenar uzunluklarını buluyor (32C). Cebirsel ifadeler ile çokgenin çevresine yönelik bilgilerini koordine ediyor ve altıgenin kenar uzunluklarını topluyor (33C).

Ceren, ABCD ve PBRS karelerinin alanları arasında ilişki kurmuştur. Denklemler şemasını işe koşmuş ve karelerin alanları arasında kurduğu ilişki sayesinde bir denklem elde etmiş ve bu denklemi çözerek karelerin kenar uzunluklarını bulmuştur. Son olarak cebirsel ifadeler ile çokgenin çevresine yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak koordine etmiş ve istenilen sonuca ulaşmıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat APSRCD altıgenin kenarları ile PBRS karesinin kenarları arasında ilişki kuramamıştır. Bu yüzden APSRCD altıgeninin çevresini hesaplarken, altıgenin kenar uzunluklarını toplamıştır. $|PS|$ ile $|BR|$ ve $|SR|$ ile $|PB|$ arasında ilişki kurabilseydi, APSRCD altıgeninin çevresinin ABCD karesinin çevresine eşit olduğunu fark edebilirdi. Sonuç olarak Ceren'in sorunun çözümünde karenin alanı, cebirsel ifadeler ve denklemler kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordineli kullandığı fakat dörtgenin kenar özelliklerini etkili kullanamadığı görülmektedir.

Dördüncü soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Ceren'in süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Ceren'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (C: Ceren).

41C: Z kuralından bunlarda şöyle diye düşündüm { $m(\widehat{FAB})$ 'nün $m(\widehat{AFE})$ 'ne ve $m(\widehat{EBA})$'nün $m(\widehat{FEB})$'ne eşit olduğunu keşfediyor}.

42C: Aslında bunlar benzer üçgenler. Oranı da 1'e 5 diye düşündüm.

{biraz sessizce düşünüyor.}

43C: Şurası şu üçgende ikizkenar bunlar {ECB üçgeninden bahsediyor}, şöyle, şu üçgende de bunlar ikizkenar {ADF üçgeninden bahsediyor}.

44C: Bunlara {$[BC]$'nı kastediyor} x diyeyim, burası da {$[CE]$'nı kastediyor} x, o zaman şurası da {$[AD]$'nı kastediyor} x olması lazım ve şuranın da {$[DF]$'nı kastediyor} x olması lazım.

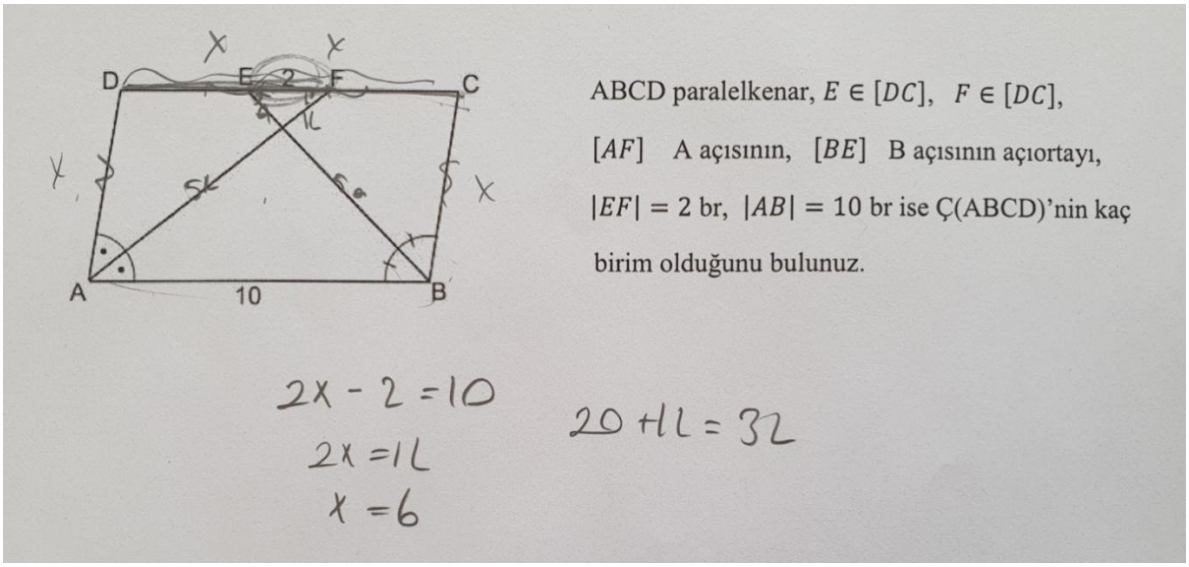
45C: Yani aslında şurası $\{[DF]$'nı kastediyor$\}$ artı şurası $\{[EC]$'nı kastediyor$\}$, yani 2'yi 2 defa sayıyoruz diye düşündüm.

$$2x - 2 = 10$$
$$2x = 12$$
$$x = 6 \text{ olur.}$$

46C: Çevreside $20 + 12$'den 32 (Bkz. Şekil 41).

Şekil 41

Ceren'in dördüncü soruya yönelik çözümü



Ceren açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $m(\widehat{FAB})$'nün $m(\widehat{AFE})$'ne ve $m(\widehat{EBA})$'nün $m(\widehat{FEB})$'ne eşit olduğunu fark ediyor (41C). Üçgende benzerliğe yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlamayı düşünüyor fakat bu yaklaşımdan vazgeçiyor (42C). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve ADF üçgeni ile BCE üçgeninin ikizkenar üçgen olduğunu fark ediyor (43C). Aynı zamanda cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve ADF üçgeni ile BCE üçgeninin kenar uzunluklarını cebirsel olarak temsil ediyor (44C). $|BC|$ ile $|AD|$ arasında ilişki kuruyor ve $|EC| = |CB| = |AD| = |DF|$ olduğunu fark ediyor. Paralelkenarın karşılıklı kenarları arasında ilişki kuruyor, kurduğu bu ilişki ile denklemlere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini koordine ederek yeni duruma uyarlıyor ve paralelkenarın kenar uzunluklarını buluyor (45C). Paralelkenarın kenar uzunluklarını topluyor ve istenilen sonucu buluyor (46C).

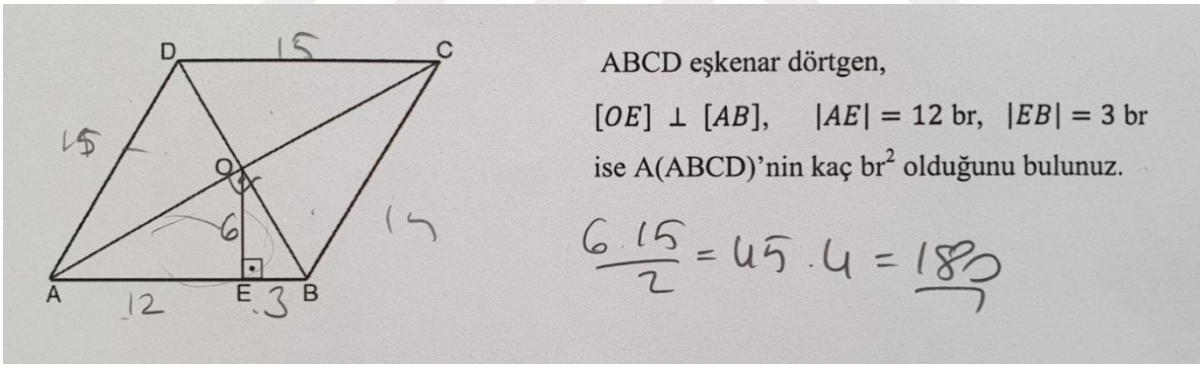
Ceren açılara yönelik şemasını işe koşarak iç ters açıları belirlemiştir. Üçgen, paralelkenar, cebirsel ifadeler ve denklemlere yönelik bilgilerini koordineli kullanarak paralelkenarın çevresini bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç

duymamıştır. ADF üçgeni ile BCE üçgeni arasında ilişki kurarken, paralelkenarın karşılıklı kenar uzunluklarının birbirine eşit olduğuna yönelik önceden oluşturduğu bilgisini yeni duruma uyarlamıştır. Buradan yola çıkarak $|DF| = |CE|$ sonucuna ulaşmıştır. Fakat $|DE| = |CF|$ eşitliğini elde etmek için ADF üçgeni, BCE üçgeni ve paralelkenarın karşılıklı kenarları arasındaki ilişkiyi doğrudan görememiştir. Bu durum paralelkenarın kenarlarına yönelik özelikleri etkin olarak kullanamadığının göstergesidir. Sonuç olarak Ceren'in sorunun çözümünde açı, üçgen, paralelkenar, cebirsel ifadeler ve denklemler kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı, bu kavramları koordineli kullandığı fakat paralelkenarın kenarlarına yönelik özelikleri etkin olarak kullanamadığı görülmektedir.

Beşinci soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Ceren'in nesne düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Ceren'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 42'de sunulmuştur (A: Araştırmacı, C: Ceren).

Şekil 42

Ceren'in beşinci soruya yönelik çözümü



51C: Eşkenar dörtgenin köşegenleri dik kesişiyordu.

52C: Burası 6 {öklid teoremini uyguluyor}.

{Burada biraz sesizce düşünüyor}

A: Sonra ne düşünüyorsun?

53C: Sonra direk şey yaparım diye düşündüm. Bu üçgenin alanını 4'le çarparsam.

{Burada $\frac{6.15}{2}$ işlemini yapıyor ve sonucu 180 buluyor.}

Ceren dörtgenin temel elemanlarından olan köşegen bilgisini göz önünde bulunduruyor ve $m(\hat{O})$'nün 90° olduğunu fark ediyor (51C). $m(\hat{O})$'nün 90° olduğunu herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadan fark etmesi onun dörtgenin temel elemanlarına yönelik eylemleri yansıtabildiğinin göstergesidir. Üçgene yönelik önceden oluşturduğu

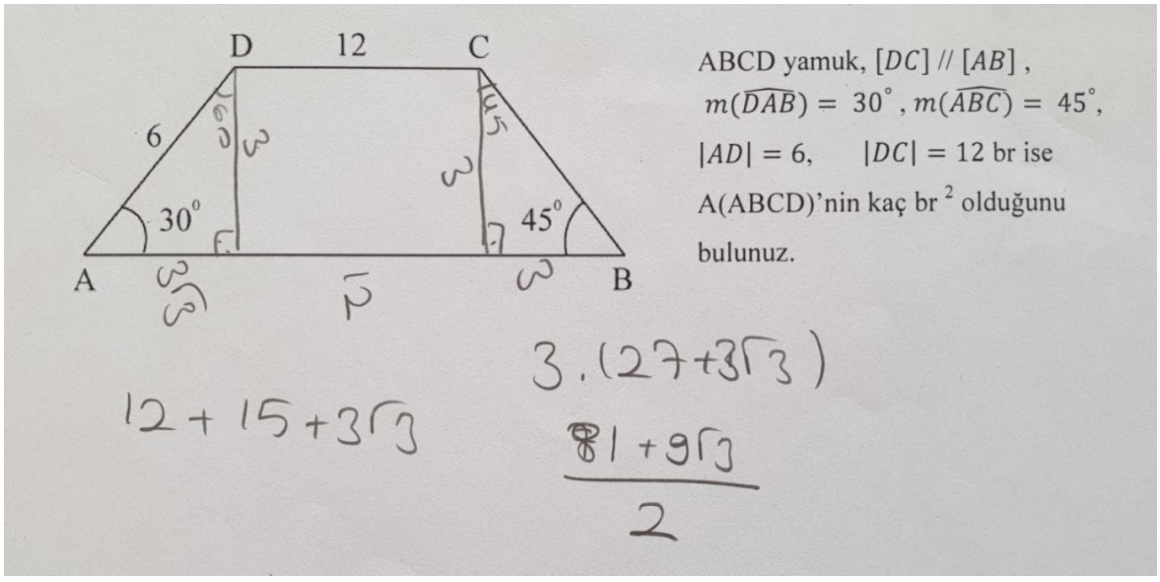
bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $|OE|$'nu buluyor (52C). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma tekrar uyarlıyor ve AOB üçgeninin alanını kullanarak eşkenar dörtgenin alanını buluyor (53C).

Ceren dörtgene ve üçgene yönelik şemalarını işe koşmuş ve kapsülden çıkarttığı bilgilerini koordine ederek $|OE|$'nu bulmuştur. Eşkenar dörtgenin alanını bulmak için üçgen şemasını işe koşmuştur. Eşkenar dörtgenin alanının, eşkenar dörtgen içinde oluşan üçgensel bölgelerin alanları toplamına eşit olduğunu fark ederek eşkenar dörtgenin alanını, üçgenin alanına kapsüllemiştir. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Sonuç olarak Ceren'in sorunun çözümünde üçgen ve dörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordine ettiği, eşkenar dörtgenin alanını, üçgenin alanına kapsülleyebildiği görülmektedir.

Altıncı soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Ceren'in süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Ceren'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 43'te sunulmuştur (A: Araştırmacı, C: Ceren).

Şekil 43

Ceren'in altıncı soruya yönelik çözümü



Açıklama: D noktasından $[AB]$'na çizilen dikmenin $[AB]$'nı kestiği nokta H olsun.

C noktasından $[AB]$'na çizilen dikmenin $[AB]$'nı kestiği nokta K olsun.

61C: Dik indiririz {$[DH]$'nı çiziyor},

62C: burası {$[DH]$'nı kastediyor} 3.

A: Neden 3 dedin oraya?

63C: 90'nın karşısı 6, 30'ın karşısı 3.

64C: Burdan da dik ineriz {$[CK]$'nı çiziyor}. Burası {$[CK]$'nı kastediyor} 45,

65C: burası {$[HK]$'nı kastediyor} 12 oluyor. Mantıken dik 3'se burası da 3'tür {$|DH|$ ile $|CK|$ arasında ilişki kuruyor}.

66C: Burası 3'se burası da 3 {$|CK|$ ile $|KB|$'nu kastediyor}. 60'tı {$(\widehat{ADH})$'nı kastediyor} burası $3\sqrt{3}$ {$|AH|$'nu buluyor}.

67C: Alanı da 3 çarpı DC artı AB yapacağız. $12 + 15 + 3\sqrt{3}$.

Buradan, $3.(27 + 3\sqrt{3})$, $\frac{81+9\sqrt{3}}{2}$.

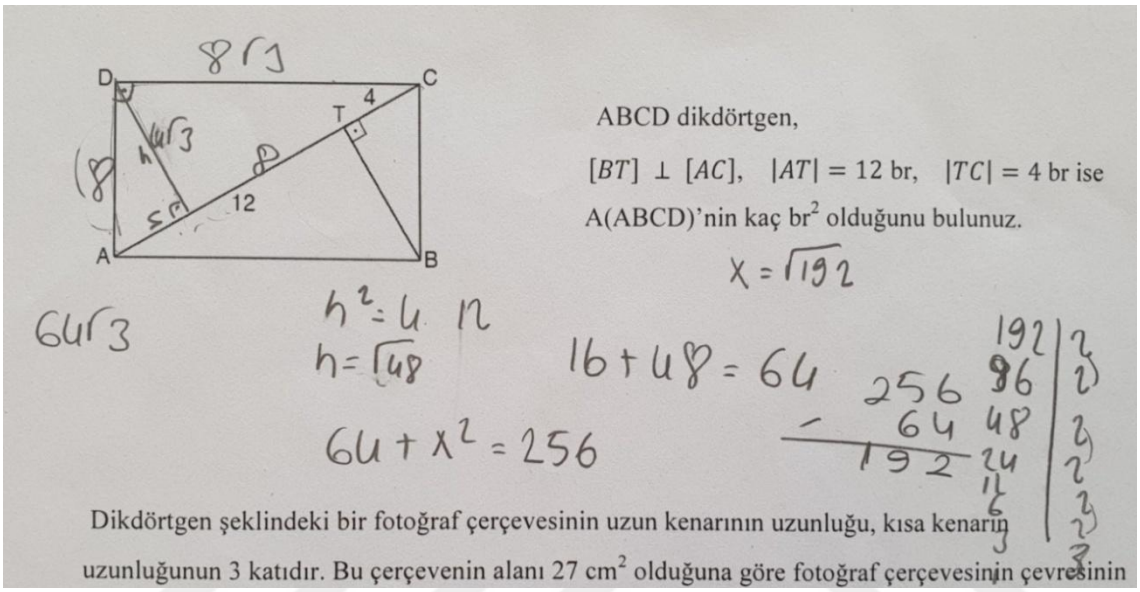
Ceren yamuğun yüksekliğini çiziyor (61C). Yamuğun yüksekliğini herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadan çizmesi onun eylemleri yansıtabildiğinin göstergesidir. Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve ADH üçgeninin kenar uzunluklarını buluyor (62C, 63C). C noktasından $[AB]$'na tekrar dik çiziyor ve aynı zamanda üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor (64C). $|DC|$ ile $|HK|$ arasında ve $|DH|$ ile $|CK|$ arasında ilişki kuruyor. Böylece $|HK|$ ile $|CK|$'nu buluyor (65C). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve CBK üçgeni ile ADH üçgeninin kenar uzunluklarını buluyor (66C). Yamuğun alanını formül kullanarak buluyor (67C).

Ceren yamuğun C ve D noktalarından $[AB]$'na dik indirmiş ve bu dikleri çizerken üçgen şemasını işe koşmuştur. Çünkü çizdiği dikme ile bir dik üçgen oluştuğunu ve bu dik üçgeni kullanarak, çizdiği dikmenin ve $[AB]$'nın uzunluğunu bulabileceğini fark etmiştir. Dikme çizerken, yamuk ve üçgene yönelik bilgilerini bir arada düşünmüş ve yamuğun yüksekliği ile dik üçgenin kenarını ilişkilendirmiştir. Sonra üçgen şemasını işe koşarak yamuğun alan formülünü kullanabilmek için gerekli olan verileri elde etmiştir. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat yamuğun alanının, yamuğun içinde oluşan, dikdörtgenin alanı ile iki dik üçgenin alanları toplamına eşit olduğunu fark edememiştir. Yamuğun alanı kavramı ile dikdörtgenin ve üçgenin alanı kavramlarını koordineli kullanarak formüle ihtiyaç duymadan sonuca ulaşabilirdi. Sonuç olarak Ceren'in sorunun çözümünde üçgen ve dörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordine ettiği, yamuğun alanını bulmak için üçgenin ve dikdörtgenin alanı kavramlarından yararlanmak yerine formül kullandığı görülmektedir.

Yedinci soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Ceren'in süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Ceren'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 44'te sunulmuştur (A:Araştırmacı, C: Ceren).

Şekil 44

Ceren'in yedinci soruya yönelik çözümü



Açıklama: D noktasından $[AC]$'na çizilen dikmenin $[AC]$'nı kestiği nokta H olsun.

71C: Buradan dik indiririz {$[DH]$'nı çiziyor}, burası 4 {$|AH|$'nu kastediyor}.

A: Neden 4'tür orası.

72C: Bunlar eş üçgenler oluyor {DHA üçgeni ile BTC üçgenini kastediyor}.

73C: Şurası dik {$(\widehat{H})$'nı kastediyor}. Buranın karesi, burası çarpı buraya eşit {DAC üçgeninde öklid teoremini uyguluyor}. Buraya {$|DH|$'nu kastediyor} h dersek $h^2 = 4.12$

$h = \sqrt{48}$ olur.

74C: Burası $4\sqrt{3}$ burası 4 burada hipotenüsü bulacağız {DHA üçgeninden pisagor teoremi uyguluyor}.

$4^2 + (4\sqrt{3})^2$, $16 + 48$ buradan 64 geliyor. Buranın karesi 64 burası 8 {$|AD|$'nu buluyor}.

75C: Burası da {$[AD]$'nı kastediyor} 8^2 artı buranın {$[DC]$'nı kastediyor} karesi x^2 derim buranın {$[AC]$'nı kastediyor} karesine eşit olacak, $(12 + 4)$'ten 16^2 {ADC üçgeninde pisagor teoremi uyguluyor}.

$64 + x^2 = 256$, $x = \sqrt{192}$, 192'yi çarpanlarına ayırsak $8\sqrt{3}$.

76C: Alanda $8.8\sqrt{3}$'ten $64\sqrt{3}$.

Ceren üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve D köşesinden $[AC]$'na dik çiziyor. Bu sayede BTC ile ADH üçgenlerinin eş üçgen olduğunu fark ediyor ve $|AH|$'nu buluyor (71C, 72C). Cebirsel ifadeler, denklemler ve üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $|DH|$'nu buluyor (73C). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $|AD|$'nu buluyor (74C). Denklemler ve üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve $|DC|$'nu buluyor (75C). Formül kullanarak dikdörtgenin alanını hesaplıyor (76C).

Ceren dikdörtgenin alanını hesaplamada, önceden öğrendiği formülü kullanabilmek için dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmaya odaklanmıştır. Bunun için cebirsel ifadeler, denklemler ve üçgene yönelik şemalarını işe koşmuştur. Cebirsel ifadeler, denklemler ve üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartarak koordine etmiş ve dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmuştur. Son olarak dikdörtgenin alan formülünü kullanarak istenilen alanı bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat dikdörtgenin köşegeninin, dikdörtgenin alanını iki eş parçaya ayırdığını fark edememiştir. Bu durumu fark etmiş olsaydı, bir tane üçgenin alanını hesaplar ve bulduğu sonucun iki katını alarak istenilen sonucu elde edebilirdi. Böylece dikdörtgenin alan formülünü kullanmaya ihtiyaç duymazdı. Sorunun çözümünde üçgen, cebirsel ifadeler, denklemler ve dikdörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak koordineli kullanmıştır. Sonuç olarak Ceren'in dikdörtgenin alanını, üçgenin alanına kapsülleyemediği için dikdörtgenin alan formülünü kullandığı görülmektedir.

Sekizinci soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Ceren'in süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Ceren'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (C: Ceren).

81C: Bir tane dikdörtgen varmış {dikdörtgen çiziyor},

82C: bunlar $20\sqrt{2}$ ise köşegeni, karelerle çevrilcekmiş kenarları 20, 20.

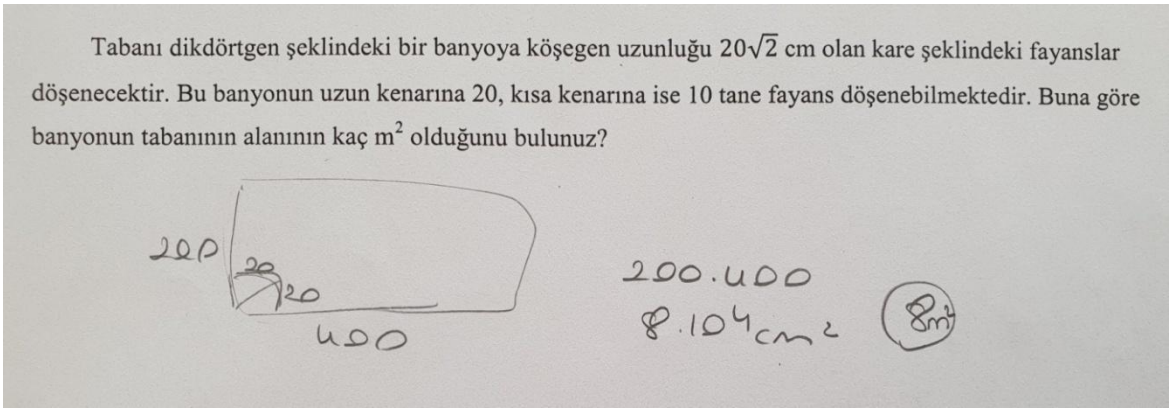
83C: Kısa kenarı 10 tane döşeniyormuş $20x10$'dan 200. Uzun kenarı $20x20$'den 400 yaptı.

84C: Banyonun tabanının alanı $200x400,\ 8.10^4 cm^2$.

85C: Metrekare yapmak içinde 1000 bölmemiz lazım, yok, 4 sıfır atmamız gerekiyor, 8 (Bkz. Şekil 45).

Şekil 45

Ceren'in sekizinci soruya yönelik çözümü



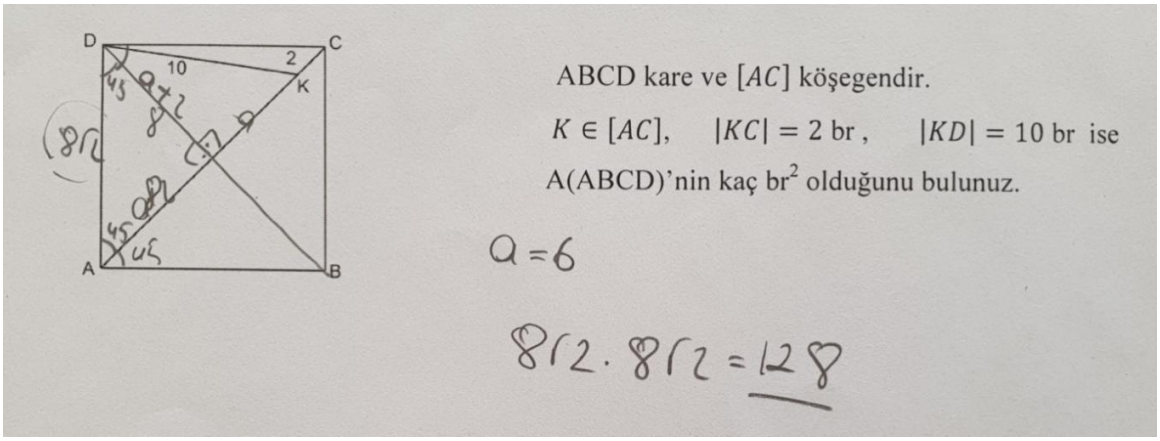
Ceren banyoyu dikdörtgen çizerek modelliyor (81C). Kareye yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin bir kenar uzunluğunu buluyor (82C). Karenin bir kenar uzunluğu ile dikdörtgenin kısa ve uzun kenarlarına yerleştirilebilecek kare sayısını koordine ederek dikdörtgenin kısa ve uzun kenar uzunluklarını buluyor (83C). Dikdörtgenin alan formülü ile dikdörtgenin alanını, cm^2 biriminde hesaplıyor (84C). Ölçülere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve bulduğu sonucun birimini m^2'ye çeviriyor (85C).

Ceren dikdörtgenin alanını hesaplamada önceden öğrendiği formülü kullanabilmek için dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmaya odaklanmıştır. Kareye yönelik şemasını işe koşmuş ve karenin bir kenar uzunluğunu bulmuştur. Dikdörtgenin ve karenin kenar uzunlukları arasında ilişki kurmuş ve böylece dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmuştur. Dikdörtgenin alanı ve alan ölçülerine yönelik bilgilerini kapsülden çıkartmış, bu bilgileri koordine ederek yeni duruma uyarlamış ve sonuca ulaşmıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat dikdörtgenin alanının, bir tane karenin alanı ile dikdörtgenin içine yerleştirilebilecek kare sayısının çarpımına eşit olduğunu fark edememiştir. Sorunun çözümünde alan ölçüleri, kare ve dikdörtgen kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak koordine etmiştir. Sonuç olarak Ceren'in sorunun çözümünde dikdörtgenin alanını, karenin alanına kapsüllemek yerine dikdörtgenin alan formülünü kullandığı görülmektedir.

Dokuzuncu soru "özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problem çözmeye yönelik olan bu soruda, Ceren'in süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Ceren'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 46'da sunulmuştur (A: Araştırmacı, C: Ceren).

Şekil 46

Ceren'in dokuzuncu soruya yönelik çözümü



Açıklama: Köşegenlerin kesim noktası O olsun

91C: Köşegeni mi tamamlayacağız burada, şöyle çeksek {$[DB]$'nı çiziyor}.

92C: Burası a ise burası $a+2$ oldu, burası da $a+2$ {$|OK|$'nu, $|DO|$'nu ve $|OA|$'nu kastediyor}.

93C: Buradan 6,8,10 gelecek herhalde {DOK üçgenin kenar uzunluklarını bir özel üçgenin kenar uzunlukları ile ilişkilendiriyor}. $a = 6$.

94C: Burası 8, 8 burası $8\sqrt{2}$ olacak {DOA üçgeninin kenar uzunluklarını buluyor}.

A: Neden $8\sqrt{2}$ dedin oraya.

95C: Bu köşegen açıortay oluyor 45, 45.

96C: Alanı da $(8\sqrt{2}.8\sqrt{2})$' den 128.

Ceren karenin köşegenine yönelik bilgilerini kullanıyor ve $[DB]$'nı çiziyor (91C). Karenin köşegenini herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadan çizmesi onun karenin temel elemanlarına yönelik eylemleri yansıtabildiğinin göstergesidir. Cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgileri yeni duruma uyarlıyor ve DOK üçgeninin kenar uzunluklarını cebirsel olarak temsil ediyor (92C). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve üçgenin kenar uzunluklarını buluyor (93C). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve karenin bir kenar uzunluğunu buluyor (94C, 95C). Karenin alan formülünü kullanarak karenin alanını hesaplıyor (96C).

Ceren karenin temel elemanını yorumlamış ve köşegen çizmeye karar vermiştir. Köşegeni çizdikten sonra üçgen şemasını işe koşmuş ve bir dik üçgen oluştuğunu fark etmiştir. Aynı zamanda karenin köşegeni ile üçgenin kenar uzunluğunu ilişkilendirmiş ve üçgen şemasını işe koşması halinde karenin köşegen uzunluğunu bulabileceğini fark etmiştir. Sonra üçgen şemasına yönelik bilgilerini tekrar kapsülden çıkartmış ve karenin kenar

uzunluğunu bulmuştur. Karenin alan formülünü kullanarak istenilen sonucu bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat karenin alanının, karenin içinde oluşan üçgensel bölgelerin alanları toplamına eşit olduğunu fark edememiştir. Sonuç olarak Ceren'in sorunun çözümünde üçgen ve kare kavramlarına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordineli kullandığı fakat karenin alanını, üçgenin alanına kapsülleyemediği için karenin alan formülünü kullandığı görülmektedir.

Araştırmanın birinci alt problemine yönelik öğrencilerle yapılan yarı yapılandırılmış görüşme verilerinin analizi sonucu, öğrencilerde tespit edilen bilişsel yapılar Tablo 4'te özetlenmiştir.

Tablo 4

Birinci alt probleme yönelik öğrencilerde tespit edilen bilişsel yapılar

	Halil	Damla	Furkan	Büşra	Ceren
1. soru	Nesne	Süreç	Süreç	Nesne	Süreç
2. soru	Süreç	Süreç	Süreç	Süreç	Süreç
3. soru	Süreç	Süreç	Süreç	Süreç	Süreç
4. soru	Süreç	Süreç	Nesne	Süreç	Süreç
5. soru	-	Süreç	Süreç	Süreç	Nesne
6. soru	Süreç	Süreç	Nesne	Süreç	Süreç
7. soru	Süreç	Nesne	Nesne	Süreç	Süreç
8. soru	Süreç	Süreç	Süreç	Süreç	Süreç
9. soru	Süreç	Süreç	Süreç	Süreç	Süreç

4.2. İkinci alt probleme yönelik bulgular

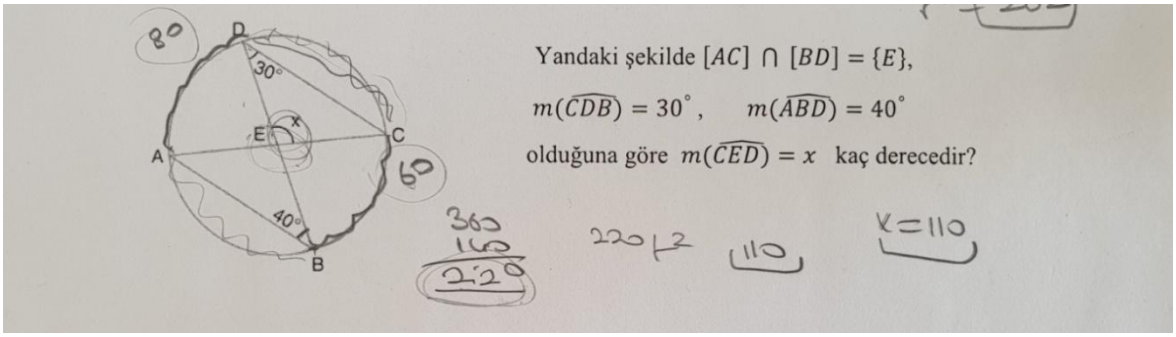
Bu başlık altında, çember ve daire konularına yönelik hazırlanan yarı yapılandırılmış görüşme formu aracılığıyla elde edilen bulgulara ve bu bulguların yorumlarına yer verilmiştir.

4.2.1. Gülay'ın Oluşan Bilgilerinin Analizi

Birinci soru "bir çemberde merkez, çevre, iç, dış ve teğet-kiriş açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapar" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çemberde açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapmaya yönelik olan bu soruda, Gülay süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Gülay'ın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 47'de sunulmuştur (A: Araştırmacı, G: Gülay).

Şekil 47

Gülay'ın birinci soruya yönelik çözümü



11G: Burada 40 çevre açı oluyor. Burası {AD yayının ölçüsünü kastediyor} 2 katı oluyor, 80. Burası da 30 çevre açı, burası da {BC yayının ölçüsünü kastediyor} 60 oluyor.

12G: Bu totalde 360 olması gerekiyor. 360'dan da 140 yapıyor bunların toplamını çıkarıyorum.

A: Hangi ikisini topladın.

13G: 80 ile 60 ı topladım, 220 kalıyor.

14G: Burası da formülden oluyor. Yani şu üstte kalan 2 tane şey yay diyoruz bunlara, yayların toplamının yarısı bu x'i veriyor. Ben de bu geri kalan 2 yayların toplamını 360'dan çıkartarak 220 buldum. Bunun da yarısından, bunu 110 buldum.

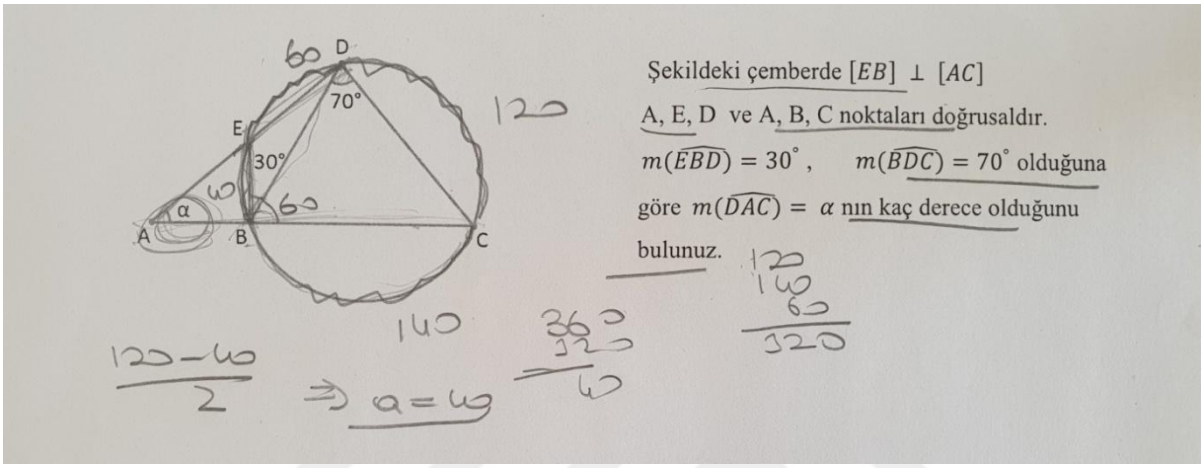
Gülay ($\widehat{ABD}$)'nın ve ($\widehat{BDC}$)'nın çevre açı olduğunu fark ediyor ve çemberde açıya yönelik önceden oluşturduğu bilgileri kullanıyor ve çevre açıların gördüğü yayların ölçülerini buluyor (11G). Çemberin bütünü ile çevre açıların gördüğü yayları ilişkilendiriyor ve AB yayının ölçüsü ile CD yayının ölçüsünün toplamını buluyor (12G, 13G). Çemberde iç açıyı bulmaya yönelik formülü kullanarak istenilen açının ölçüsünü buluyor (14G).

Gülay sorunun çözümü için önceden öğrendiği formülü kullanmaya odaklandığından, AB ve DC yaylarının ölçüleri toplamını bulmaya yönelik bir yaklaşım sergilemiştir. Bunun için önce ölçüsü verilen çevre açıların gördüğü yayların ölçüsünü bulmuş, daha sonra çemberi bütün olarak düşünerek AB ve DC yaylarının ölçüleri toplamını bulmuştur. Daha sonra çemberde iç açıyı bulmaya yönelik formülü kullanarak istenilen açının ölçüsünü bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat ($\widehat{ABD}$) ile ($\widehat{ACD}$)'nın aynı yayı gördüğünü, dolayısıyla ölçülerinin aynı olduğunu fark edememiştir. Bu durumu fark etmiş olsaydı CDE üçgeninin iç açılar toplamını kullanarak istenilen açıyı bulabilirdi. Sonuç olarak Gülay'ın çemberin açısını, üçgenin açısına kapsülleyemediği için çemberde iç açı formülünü kullandığı görülmektedir.

İkinci soru "bir çemberde merkez, çevre, iç, dış ve teğet-kiriş açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapar" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çemberde açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapmaya yönelik olan bu soruda, Gülay süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Gülay'ın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 48'de sunulmuştur (G: Gülay).

Şekil 48

Gülay'ın ikinci soruya yönelik çözümü



21G: Burası {($\widehat{EBC}$)'nı kastediyor} sanırım 90, EB neye dikti, AC'ye dikti değil mi, burası {($\widehat{EBC}$)'nı kastediyor} 90 olacak, o zaman buraya {($\widehat{DBC}$)'nı kastediyor} 60 kalır, çünkü öyle oluyor.

22G: Burası {($\widehat{EBD}$)'nı kastediyor} 30'sa, yine burada çevre açı yapıyorum burası {ED yayını kastediyor} 60 oluyor. Burada yine çevre açı oluyor {($\widehat{BDC}$)'nı kastediyor}, şuraya kadar burası da {BC yayını kastediyor} 140 oluyor. Burası da {($\widehat{DBC}$)'nı kastediyor} 60'tan, yine çevre açı burası da 120 {DC yayını kastediyor} oluyor.

23G: Buraya kaç kalıyor? {EB yayının ölçüsünü kastediyor}, şurada bir parçamız kaldı {EB yayını kastediyor}. 360'dan bunların toplamını {ED yayının, DC yayının ve CB yayının ölçüleri toplamını kastediyor} çıkaracağım. Buraya kalan yayın {EB yayını kastediyor} ölçüsünü bulacağım. 120, 140, 60 {yayların ölçülerini söylüyor}, 320 {yayların ölçüleri toplamını buluyor} çıkardım 40 kaldı burası da {EB yayının ölçüsünü kastediyor}.

24G: Burada yine formül uygulayacağım, bunun {($\widehat{DAC}$)'nı kastediyor} açısını bulmam için, şuradan bu kesmiş şey {DC ve EB yaylarını kastediyor} çemberi. Şuradan şu yayın {DC yayını kastediyor} uzunluğundan bunun {EB yayını kastediyor} uzunluğunu çıkararak ikiye bölersem, bunun {($\widehat{DAC}$)'nı kastediyor} açısını bulurum. (120 – 40) bölü 2'den de a'da 40 çıkıyor.

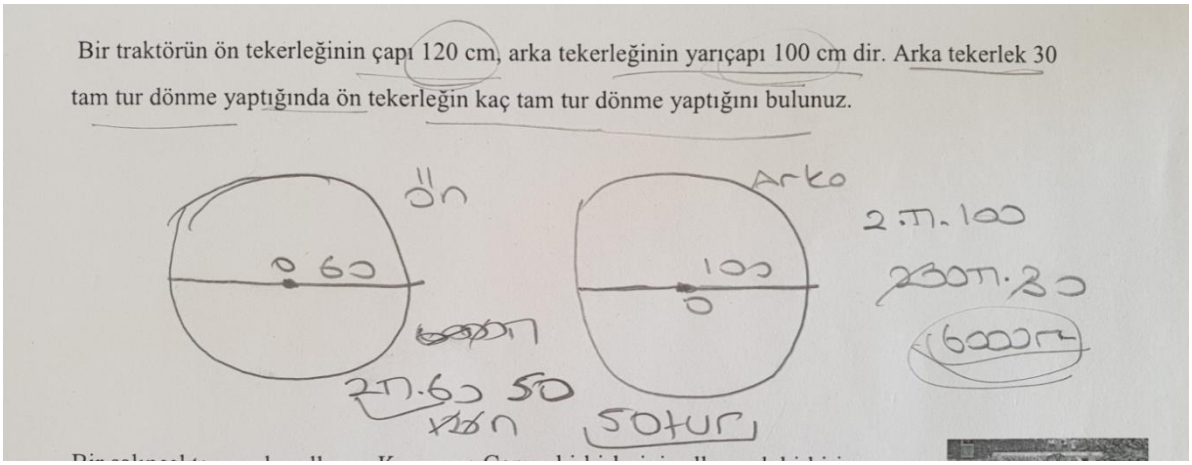
Gülay açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kullanarak $m(\widehat{DBC})$'nü buluyor (21G). $(\widehat{BDC})$'nın, $(\widehat{CBD})$'nın ve $(\widehat{DBE})$'nın çevre açı olduğunu fark ediyor ve çemberde açıya yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kullanarak, çevre açıların gördüğü yayların ölçülerini buluyor (22G). Çemberin bütünü ile çevre açıların gördüğü yayları ilişkilendiriyor ve EB yayının ölçüsünü buluyor (23G). Çemberde dış açıyı bulmaya yönelik formülü kullanarak istenilen açının ölçüsünü buluyor (24G).

Gülay sorunun çözümünde önceden öğrendiği formülü kullanmaya odaklandığından DC ve EB yaylarının ölçülerini bulmaya yönelik bir yaklaşım sergilemiştir. Önce ölçüsü verilen çevre açıların gördüğü yayların ölçüsünü bulmuş, bu yay ölçülerini toplamış ve daha sonra çemberi bütün olarak değerlendirerek EB yayının ölçüsünü bulmuştur. Daha sonra çemberde dış açıyı bulmaya yönelik önceden öğrendiği formülü kullanarak istenilen açının ölçüsünü bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat üçgen şemasını işe koşarak önce m$(\hat{C})$'nü, buradan yola çıkarak çemberde açı ve üçgen bilgisini koordine ederek $m(\widehat{ADB})$'nü bulabilirdi. Daha sonra ABD üçgenini kullanarak istenilen açının ölçüsüne ulaşabilirdi. Sonuç olarak Gülay'ın çemberin açısını, üçgenin açısına kapsülleyemediği için çemberde dış açı formülünü kullandığı görülmektedir.

Üçüncü soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Dairenin çevre bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda, Gülay süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Gülay'ın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 49'da sunulmuştur (A:Araştırmacı, G: Gülay).

Şekil 49

Gülay'ın üçüncü soruya yönelik çözümü



31G: Burada ön tekerlek ne kadar gidiyorsa arka tekerlek de o kadar gidecek, oradan yapacağız.

32G: Ön tekerleğinin çapı 120'ymiş. Şimdi şurada çizeyim {ön tekerlek için model çiziyor}, çapı 120 ise şurası merkez olsun, yarıçapı 60 olur. Arka tekerleğin yarıçapı 100'müş {arka tekerlek için model çiziyor}, bunun yarıçapı 100'müş.

33G: Ben burada çevre yapacağım direk. Çünkü çevre çarpı dönme sayısı bana şey verecek, ne kadar ilerlediğini verecek. Arka tekerlek 30 tam tur dönme yaptığından, $2.\pi.r$'den yapıyorum bunun çevresini, r'si bunun 100, totalde 200π oldu çevresi {arka tekerleği kastediyor}.

34G: 200π, bu 30 tam tur dönsün, totalde 6000π yapıyor.

A: 6000π nedir?

35G: Bunun ne kadar gittiği yol {arka tekerleği kastediyor}. 6000π gidiyorsa bu da 6000π gidecek.

36G: Ön tekerlek ne kadar giderse arkada o kadar gider. $2.\pi.r$ yaptım, totalde 120π oldu.

37G: Bunu böleyim, 50 tur gidecek.

Gülay ön tekerleğin aldığı yol ile arka tekerleğin aldığı yol arasında ilişki kuruyor (31G). Daha sonra soruda verilenleri model üzerinde gösteriyor (32G). Arka tekerleğin aldığı yolu bulmak istiyor. Bunun için önce arka tekerleğin çevresini hesaplıyor (33G). Arka tekerleğin çevresi ile dönme sayısını birlikte düşünerek arka tekerleğin aldığı yolu buluyor (34G). İlk başta kurduğu arka ve ön tekerleğin aldığı yol arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurarak ön tekerleğin aldığı yolu buluyor (35G). Daha sonra ön tekerleğin çevresini hesaplıyor (36G). Ön tekerleğin çevresi ile aldığı yol arasında ilişki kuruyor. Ön tekerleğin aldığı yolu ön tekerleğin çevresine bölerek ön tekerleğin kaç tur döndüğünü buluyor (37G).

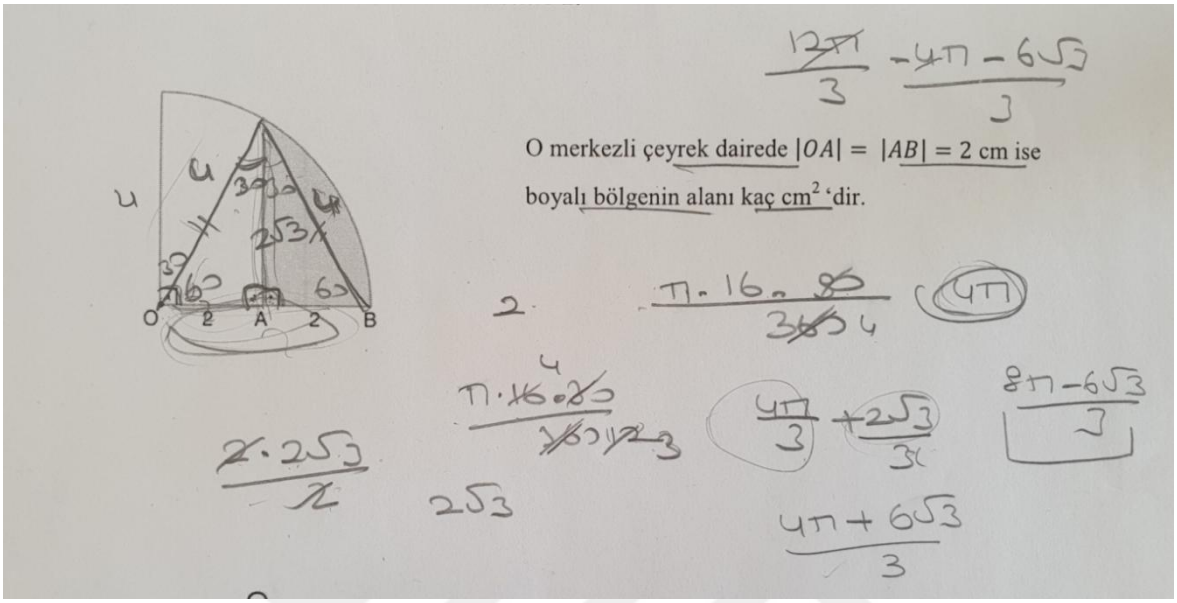
Gülay sorunun çözümünde dairenin çevresini hesaplamaya yönelik formülü kullanmaya odaklanmıştır. Arka tekerleğin çevresini hesaplamış ve bulduğu sonucu dönme sayısıyla çarparak arka tekerleğin dolayısıyla ön tekerleğin aldığı yolu bulmuştur. Ön tekerleğin çevresini hesaplamış ve ön tekerleğin aldığı yolu çevresine bölerek ön tekerleğin kaç tur döndüğünü bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat oran-orantı şemasını işe koşarak ön tekerleğin kaç tur döndüğünü bulabilirdi. Bunun için tekerleklerin yarıçapı ile dönme sayıları arasındaki ters ilişkiyi fark etmesi gerekiyordu. Böylece dairenin çevresini hesaplamaya yönelik formüle ihtiyaç duymadan dönme sayısını bulabilirdi. Sonuç olarak Gülay'ın dairenin çevresini, oran-orantı kavramına kapsülleyemediği için dairenin çevresi formülünü kullandığı görülmektedir.

Beşinci soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Dairenin alan bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda, Gülay süreç

düzeyinde davranış sergilemektedir. Gülay'ın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 50'de sunulmuştur (G: Gülay).

Şekil 50

Gülay'ın beşinci soruya yönelik çözümü



51G: Totalde bunun yarıçapı 4, burası da 4 olur, burası da 90 olur yine. Buradan tamamının alanını {çeyrek çemberin alanını kastediyor} bulup şunların {boyalı olmayan kısımdan bahsediyor} alanını çıkartacağım.

52G: Burası zaten 90'sa, burası 2 ise burası 30 oluyor. Burası 60 oluyor.

A: 30 dereceyi nasıl buldun.

53G: Burayı üçgenden yaptım. 90'ın karşısı 4'se, 30'un karşısı 2 olur, 60'ın karşısı $2\sqrt{3}$ olur.

54G: Buradan şey yapacağım alan yapacağım, $\pi.r^2$ oluyor alanı. Bunun r'si 4 değil mi, 16 çarpı 90 {çeyrek dairenin açısını kastediyor}, burada da 360'ı bölüyorum {çeyrek dairenin alanını hesaplıyor}.

55G: Buradan da bunun alanını bulacağım. Buda yine $\pi.r^2.30$ yaptım, 360, bu 12 oluyor. Sadeleştireyim bunları $\frac{4\pi}{3}$ oluyor {30°'lik daire diliminin alanını hesaplıyor}.

56G: Bunun da şey alanını bulayım. $\frac{2\ x\ 2\sqrt{3}}{2}$ yaptım, $2\sqrt{3}$ oluyor sanırım {dik üçgenin alanını hesaplıyor}. Taban çarpı yükseklik bölü ikiden böyle oldu.

57G: Bunu {$\frac{4\pi}{3}$ kastediyor} da toplayacağım $2\sqrt{3}$'le {beyaz bölgenin alanını buluyor}. 3'le çarpayım {$\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$ ifadesini kastediyor} $4\pi + 6\sqrt{3}$ olsun.

58G: Bununda tamamının alanı 4π'ydi {çeyrek daireden bahsediyor}, totalde 12π oluyor, 3'le genişletiyorum bunu da {4π'yi $\frac{12\pi}{3}$'e dönüştürüyor}, çıkarıyorum bunları $\frac{12\pi-4\pi-6\sqrt{3}}{3}$ oluyor. Çıkartayım $\frac{8\pi-6\sqrt{3}}{3}$ oluyor.

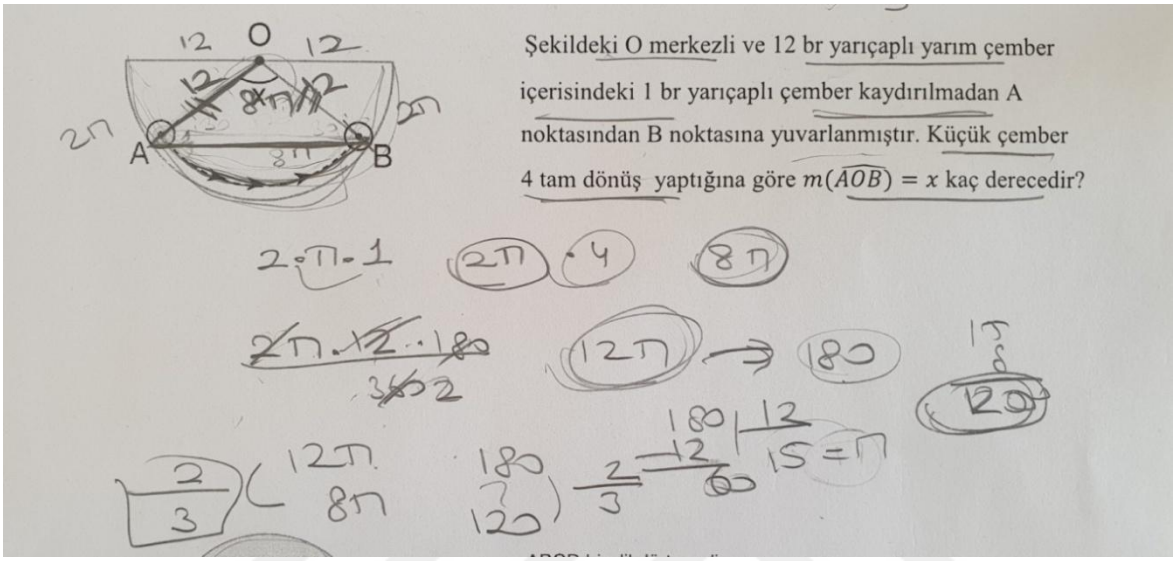
Gülay dairenin yarıçapını çizerek daire dilimi oluşturuyor. Yarıçap çizerken alanı hesaplanabilecek bölgelerin oluşmasına dikkat etmektedir. Üçgen, daire dilimi ve yarıçapa yönelik bilgileri arasında koordinasyon sağlıyor. Bu koordinasyon sayesinde bir dik üçgen ve daire dilimi oluşturuyor. Çünkü oluşan bölgelerin alanları ile istenilen alan arasında ilişki kurmayı planlıyor (51G). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartarak dik üçgenin, açılarını ve kenar uzunluklarını buluyor (52G, 53G). Önceden öğrendiği daire diliminin alanını hesaplamaya yönelik formülü kullanarak çeyrek dairenin alanını hesaplıyor (54G). Daire diliminin alanını hesaplamaya yönelik formülü kullanıyor ve 30°'lik daire diliminin alanını hesaplıyor (55G). Bu sefer üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve dik üçgenin alanını hesaplıyor (56G). Merkez açısı 30° olan daire diliminin alanını ve dik üçgenin alanını bir arada düşünerek boyalı olmayan bölgenin alanını hesaplıyor (57G). Çeyrek daire, boyalı olmayan bölge ve boyalı bölge arasında koordinasyon sağlıyor ve istenilen bölgenin alanını buluyor (58G).

Gülay daire ve üçgen bilgilerini koordine ederek boyalı olmayan bölgeyi, alanı hesaplanabilir bölgelere ayırmayı planlamıştır. Bu düşüncesini uygulamak için dairenin yarıçapını çizmiştir. Yarıçapı çizerken yarıçapın bir dik üçgenin kenarı olmasını sağlamıştır. Daire diliminin alanını bulmaya yönelik formülü ve üçgenin alan formülünü kullanarak boyalı olmayan kısmın alanını hesaplamıştır. Çeyrek dairenin alanı ile boyalı olmayan kısmın alanını bir arada düşünerek boyalı kısmın alanını bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat oran-orantı şemasını işe koşarak boyalı bölgenin alanını hesaplayabilirdi. Bunun için daire diliminin merkez açısı ile tam açı arasında ilişki kurması ve bu ilişkiden yola çıkarak dairenin alanı ile daire diliminin alanı arasında ilişki kurması gerekiyordu. Dairenin alanı kavramıyla orantı kavramını koordineli kullanarak merkez açısı 60° olan daire diliminin alanını bulabilir ve elde ettiği sonuçtan dik üçgenin alanını çıkartarak sonuca ulaşabilirdi. Sorunun çözümünde üçgen, cebirsel ifadeler ve dairenin alanına yönelik bilgilerini koordine ettiği görülmektedir. Sonuç olarak Gülay'ın dairenin alanını, oran-orantı kavramına kapsülleyemediği için daire diliminin alanına yönelik formülü kullandığı görülmektedir.

Altıncı soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çemberin çevre bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda, Gülay eylem düzeyinde davranış sergilemektedir. Gülay'ın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 51'de sunulmuştur (A: Araştırmacı, G: Gülay).

Şekil 51

Gülay'ın altıncı soruya yönelik çözümü



61G: Bunun çevresini bulacağım ben bu küçüğün. $2.\pi.r$ yani 2π oluyor.

62G: Bu kaydırılmadan A noktasından B noktasına yuvarlanıyor {küçük çemberden bahsediyor}. Küçük çember 4 tam tur dönüş yaptığına göre, turla çarpacağım 8π olacak {küçük çemberin aldığı yolu hesapladı}. Bu şuradan şuraya 8π gitmiş.

63G: O zaman burası da 8π oluyor {AB yayının uzunluğundan bahsediyor}.

64G: Buradan nasıl bulacağım. Burası yine yarıçap olmuyor mu? {OB doğru parçasından bahsediyor} 12 oluyor. Bunların ikisi {$[OA]$ ile $[OB]$'nı kastediyor} eşit oluyor o zaman. Şurdan üçgen mi çizsem acaba {OAB üçgeninden bahsediyor}.

A: Üçgen çizmen ne işe yarayacak.

65G: Açı bulmaya çalışacağım oradan. 120, 30, 30 bulsam {açıları tahmin etmeye çalışıyor}. Burası 12 dedik. 8π, buraya kadar bence doğru. Burası da 8π olması gerekiyor. Bunlar da yarıçap {yaptığı işlemleri tekrarlıyor}

A: Peki şurayı güzel buldun, AB yayının uzunluğunu 8π. Peki, buradan büyük çemberle, 8π uzunluğundaki yayı ilişkilendirilemez misin?

66G: Bunun çevresini de bulayım {O merkezli çemberden bahsediyor}. $2.\pi.12$, ama bunun yarısını da böleceğim, çarpı 180 bölü 360 yapayım, 12π oluyor {O merkezli yarım çemberin çevresini hesaplıyor}.

67G: O zaman oran-orantı yapayım ben. 12π, 180 ise 8π kaçtır olacak. Bunu yapmak için ben 3'e bölüyorum. Üçte ikisi oluyor bunun. Açının da 3'te 2'sini alırım, 120 olur.

Gülay küçük çemberin çevresini hesaplıyor (61G). Küçük çemberin çevresi ile dönme sayısı arasında ilişki kuruyor ve küçük çemberin aldığı yolu buluyor (62G). Aynı zamanda küçük çemberin aldığı yolu göz önünde bulundurarak A ve B noktaları arasındaki mesafeyi yorumluyor (63G). Önceden oluşturduğu üçgen bilgisini kullanmayı düşünerek çözüme yönelik yanlış bir yaklaşım sergiliyor (64G, 65G). Araştırmacı Gülay'ın sorunun bağlamından uzaklaşmasını engellemek için üçgen çizerek ne yapacağını soruyor. Araştırmacı, Gülay'ın sorunun çözümü için hala bir plan yapamadığını görüyor. Bu yüzden araştırmacı, Gülay'a AB yayının uzunluğu ile büyük çemberin çevresi arasında ilişki kurmasına yönelik dışsal ipucu veriyor. O merkezli yarım çember yayının uzunluğunu hesaplıyor (66G). Gülay oran-orantı, çemberde açı ve çemberin çevresi kavramlarını koordineli kullanarak istenilen sonuca ulaşıyor (67G).

Gülay sorunun çözümüne küçük çemberin çevresi ile dönme sayısı arasında ilişki kurarak başlamış olup sonraki aşamada ise sorunun çözümünde yanlış bir yaklaşım sergilemiştir. Çünkü AB yayının uzunluğu ile büyük çemberin çevresi arasında ilişki kurmayı düşünememiştir. Araştırmacının dışsal ipucu ile küçük çemberin aldığı yol ile O merkezli çemberin çevresi arasında ilişki kurmuştur. Bu ilişkiyi kurarken önceden oluşturduğu orantı kavramına yönelik bilgilerini kapsülden çıkartmış ve istenilen sonuca ulaşmıştır. AB yayı, bu yayın gördüğü merkez açı, tam açı ve çemberin çevresi arasında koordinasyon sağlayamamıştır. Çünkü sadece ($\widehat{AOB}$)'na odaklandığından sınırlı alanda sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Sonuç olarak Gülay'ın istenilen açının ölçüsünü bulurken yay parçasının uzunluğunu veren formülü kullanmak yerine oran-orantı şemasını işe koşmuş olsa da yay parçasının uzunluğu ile çemberin çevresi arasında koordinasyon sağlayabilmek için dışsal ipucuna ihtiyaç duyduğu görülmektedir.

Yedinci soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Dairenin alan bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda, Gülay süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Gülay'ın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (G: Gülay).

71G: Burası 2 olur, burası da 2 olur {çeyrek dairelerin yarıçaplarını kastediyor}, burası {dikdörtgenin uzun kenarlarından bahsediyor} 4 olur o zaman.

72G: Direk ben şunun {yarım daireyi kastediyor} alanını bulayım. Bunun {yarım daireyi kastediyor} yine yarıçapı 2 oluyor. $\pi.4.180$ oluyor, 360'a böldüm, 2π oluyor bunun alanı {yarım dairenin alanını hesaplıyor}.

73G: Buradan da dikdörtgenin alanı ne oluyor, 4.2'den 8 oluyor.

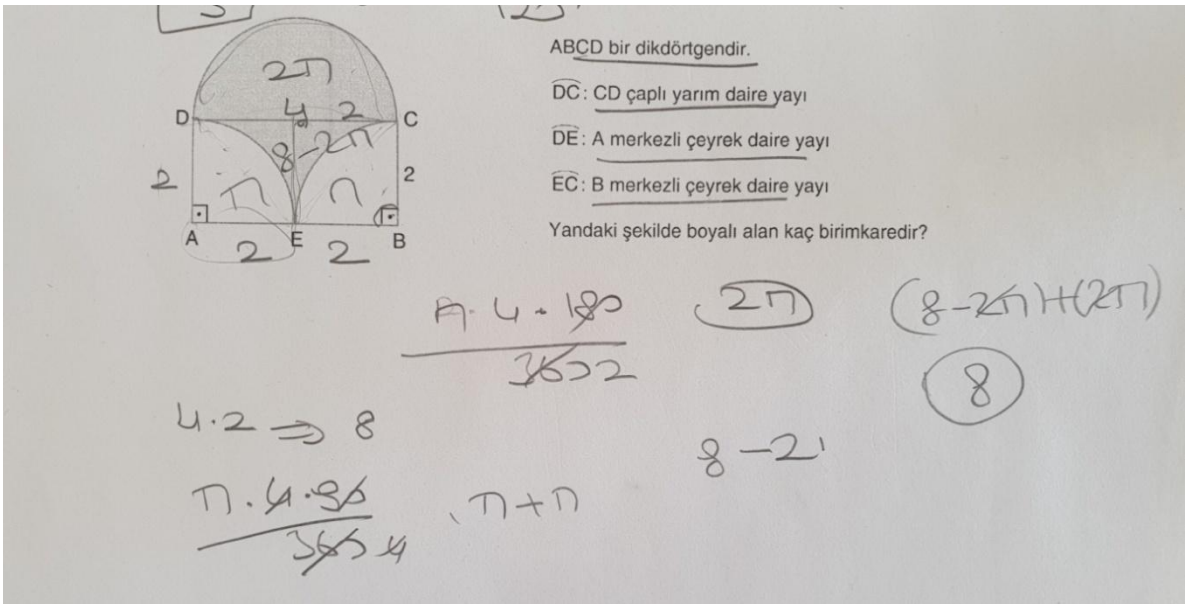
74G: Bunun da alanını bulayım, $\pi.r^2$ değil mi, 4, 90 bölü 360 dan π olur {çeyrek dairenin alanını hesaplıyor}. Bunun da alanı π çıkacak çünkü yarıçapları aynı, şu 90 derecelerde aynı. $\pi + \pi$ den 2π olur şunların alanı {çeyrek dairelerin alanlarını topluyor}.

75G: Burası da 8 çıkmıştı {dikdörtgenin alanını kastediyor}, $8 - 2\pi$ olur şurası {dikdörtgenin içindeki boyalı alanı hesaplıyor}.

76G: $8 - 2\pi$ ile 2π'yi toplarsam 8 çıkar (Bkz. Şekil 52).

Şekil 52

Gülay'ın yedinci soruya yönelik çözümü



Gülay dikdörtgen ve çembere yönelik bilgilerini bir arada düşünerek dikdörtgenin kenar uzunluklarını buluyor (71G). Dikdörtgenin uzun kenarının aynı zamanda yarım çemberin çapı olduğunu fark ediyor. Yarım çemberin alanını, daire diliminin alanını hesaplamaya yönelik formülü kullanarak buluyor (72G). Dikdörtgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve dikdörtgenin alanını hesaplıyor (73G). Çeyrek dairenin alanını, daire diliminin alanını hesaplamaya yönelik formülü kullanarak buluyor. Aynı zamanda A ve B merkezli çeyrek dairelerin eş olduğunu fark ediyor (74G). Dikdörtgenin ve dairenin alanı kavramlarını koordineli kullanarak dikdörtgenin içindeki boyalı alanı hesaplıyor (75G). Elde ettiği bu sonuç ile yarım dairenin alanını topluyor ve istenilen sonucu buluyor (76G).

Gülay sorunun çözümü için dikdörtgen şamasını işe koşması gerektiğini fark ettiğinden dikdörtgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartmıştır. Dikdörtgen ve daireye yönelik bilgilerini koordine ederek önce dikdörtgenin kenar

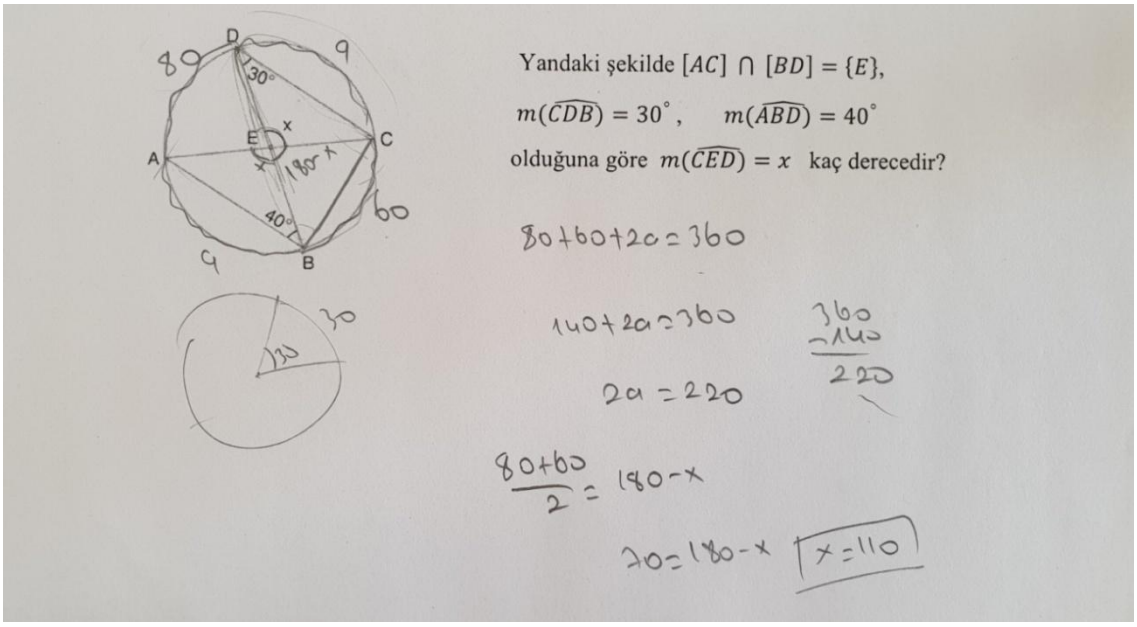
uzunluklarını bulmuş sonra dikdörtgen içindeki boyalı kısmın alanını hesaplamış ve elde ettiği sonuca yarım dairenin alanını ekleyerek istenilen sonucu bulmuştur. Daire dilimlerinin alanlarını hesaplarken, daire diliminin alanını veren formülü kullanmıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat sorunun çözümünde A ve B merkezli çeyrek dairelerin eş olduğunu fark etmiş olsa da üstteki yarım dairenin alanının, A ve B merkezli çeyrek dairelerin alanları toplamına eşit olduğunu fark edememiştir. Dolayısıyla Gülay şekildeki boyalı bölgenin alanının, dikdörtgenin alanına eşit olduğunu görememiştir. Bu durum yarım dairenin alanı ile çeyrek dairelerin alanları arasında ilişki kuramadığının göstergesidir. Sorunun çözümü için boyalı kısımlara odaklandığı için boyalı kısımların alanlarını ayrı ayrı bulmuş ve bulduğu alanları toplamıştır. Sonuç olarak Gülay, yarım dairenin alanı ile çeyrek dairelerin alanları arasında ilişki kurabilseydi, dairenin alanı yerine dikdörtgenin alanınından yararlanarak sonuca ulaşabilirdi.

4.2.2. Merve'nin Oluşan Bilgilerinin Analizi

Birinci soru "bir çemberde merkez, çevre, iç, dış ve teğet-kiriş açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapar" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çemberde açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapmaya yönelik olan bu soruda, Merve eylem düzeyinde davranış sergilemektedir. Merve'nin bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 53'de sunulmuştur (A: Araştırmacı, M: Merve).

Şekil 53

Merve'nin birinci soruya yönelik çözümü



11M: Burası {($\widehat{D}$)'nı kastediyor} 30° ise şu yayın {BC yayını kastediyor} uzunluğu 60 oluyor. Burası 40 {($\widehat{B}$}'nı kastediyor} ise burası {AD yayını kastediyor} 80 olur. Burası {($\widehat{DEC}$)'nı kastediyor} x ise burası da {($\widehat{AEB}$)'nı kastediyor} x'tir.

12M: Bu yayların {AB ve CD yaylarını kastediyor} uzunlukları eşit oluyor o zaman.

A: Neden eşit oluyor.

13M: Çünkü ikisi de x'e bakıyor. Buralara a dersek $80 + 60 + 2a = 360$ olur. Ama o zaman yanlış yaptım.

A: Neden yanlış yaptığını düşünüyorsun?

14M: Çünkü ortada değil yani çemberin tam merkezinde olmadığı için onu direk öyle alamam.

A: Nasıl bişey düşünüyorsun şu an?

15M: Buralara şey çeksem {$[BC]$'sını çiziyor} olur mu acaba. Ama ne işime yarayacak. {Biraz düşündükten sonra} çözemedim.

A: Açılar arasında ilişki kurmayı denesen.

16M: $\frac{80+60}{2} = 180 - x$ oluyor. $70 = 180 - x$ ise x, 110 çıkması lazım.

Merve ($\widehat{ABD}$)'nın ve ($\widehat{BDC}$)'nın çevre açı olduğunu fark ediyor ve çemberde açıya yönelik önceden oluşturduğu kavramları kullanıyor ve çevre açıların gördüğü yayların ölçülerini buluyor (11M). E noktasını çemberin merkezi zannederek yay ölçüleri arasında yanlış bir ilişki kuruyor. Fakat E noktasının çemberin merkezi olmadığını fark ediyor ve bu yanlış düşüncesinden vazgeçiyor (12M, 13M, 14M). Daha sonra $[BC]$'sını çiziyor fakat buradan sonuca ulaşamıyor (15M). Sorunun çözümü için hala bir plan yapamadığını gören araştırmacı, Merve'ye açılar arasında ilişki kurmasına yönelik bir dışsal ipucu veriyor. Çemberde iç açıyı bulmaya yönelik formülü kullanarak istenilen açının ölçüsünü buluyor (16M). Bu esnada açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor.

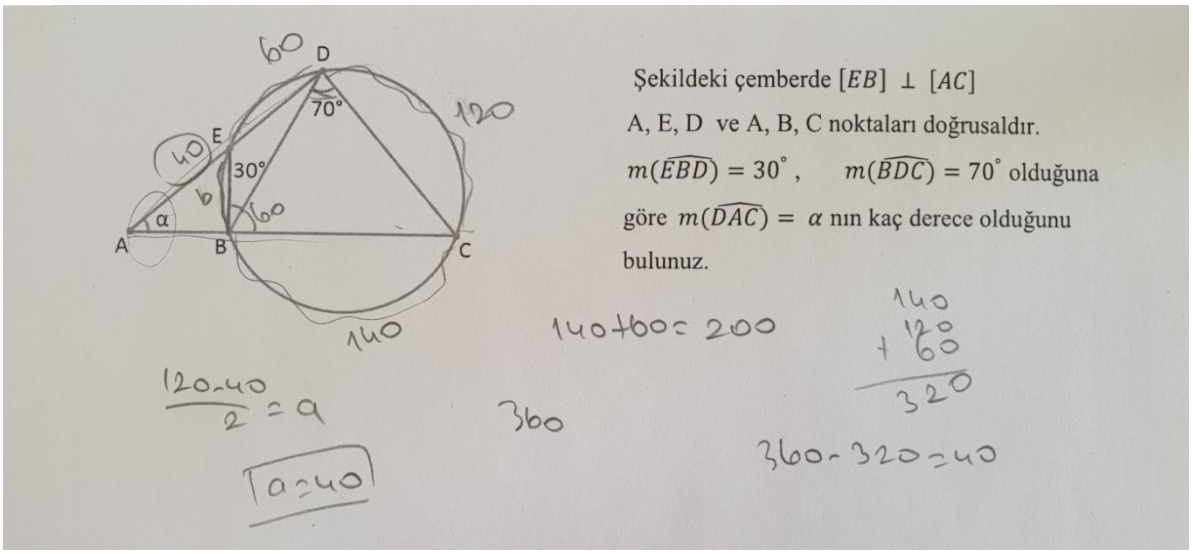
Merve önce ölçüsü verilen çevre açıların gördüğü yayların ölçüsünü bulmuştur. Daha sonra çözüme yönelik doğru bir yaklaşım sergileyememiştir. Araştırmacının yönlendirmesi ile daha önce öğrendiği çemberde iç açıyı bulmaya yönelik formülü kullanarak istenilen açının ölçüsünü bulmuştur. Çemberde iç açıyı bulmaya yönelik formüle hâkim olduğu görülse de bu formülün hangi durumlarda kullanılacağını bilmemektedir. Dışarıdan bir yönlendirme ile bu formülü kullanabilmektedir. Bu durum eylemleri içselleştiremediğinin göstergesidir. ($\widehat{ABD}$) ile ($\widehat{ACD}$)'nın aynı yayı gördüğünü, dolayısıyla ölçülerinin aynı olduğunu fark edememiştir. Bu durumu fark etmiş olsaydı CDE üçgeninin iç açılar toplamını kullanarak sonuca

ulaşabilirdi. Sonuç olarak Merve'nin çemberin açısını, üçgenin açısına kapsülleyemediği, dışsal yardım ile çemberde iç açı formülünü kullandığı görülmektedir.

İkinci soru "bir çemberde merkez, çevre, iç, dış ve teğet-kiriş açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapar" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çemberde açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapmaya yönelik olan bu soruda, Merve süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Merve'nin bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 54'te sunulmuştur (M: Merve).

Şekil 54

Merve'nin ikinci soruya yönelik çözümü



21M: Burası {($\widehat{BDC}$)'nı kastediyor} 70 ise burası da {BC yayını kastediyor} 140 olur. Burası {($\widehat{EBD}$)'nı kastediyor} 30'sa burası da {ED yayını kastediyor} 60 olur.

22M: Buraya {BE yayını kast ediyor} b desek buraya {CD yayını kastediyor} c desek şuraya kadar, $(c-b)$'nin 2'ye bölümü buradaki açıyı {($\widehat{CAD}$)'nı kastediyor} vermesi gerekiyor.

23M: EB, AC'ye dikse, 60° {$m(\widehat{DBC})$'nü kastediyor} olur.

24M: Burası 60 olduğu için şu yayın {CD yayını kastediyor} uzunluğu 120 olur.

25M: 60, 120, 140 { yayların ölçülerini söylüyor} topladığımızda 320 yapar. Buraya b demiştik, 360'tan 320'yi çıkardığımızda b, 40 olur.

26M: $\frac{120-40}{2}$ 'de α'yı verir. α'da 40 olur.

Merve ($\widehat{BDC}$)'nın ve ($\widehat{DBE}$)'nın çevre açı olduğunu fark ediyor ve çemberde açıya yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kullanarak, çevre açıların gördüğü yayların ölçülerini buluyor (21M). Çemberde dış açıyı bulmaya yönelik formülü sorunun çözümünde nasıl kullanacağını planlıyor (22M). Açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgileri yeni duruma uyarlıyor ve $m(\widehat{DBC})$'nü buluyor (23M). ($\widehat{DBC}$)'nın çevre açı olduğunu fark ediyor ve

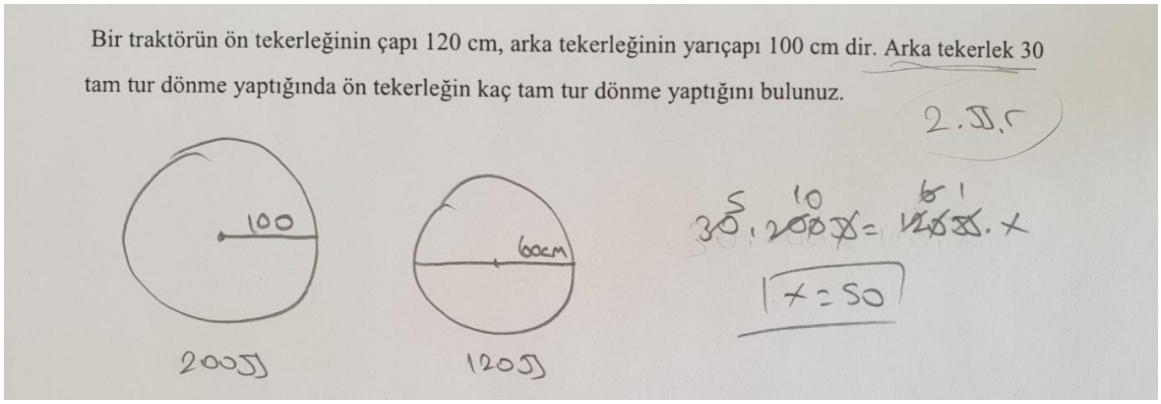
çemberde açıya yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kullanarak, CD yayının ölçüsünü buluyor (24M). Çemberin bütünü ile çevre açıların gördüğü yayları ilişkilendiriyor ve EB yayının ölçüsünü buluyor (25M). Çemberde dış açıyı bulmaya yönelik formülü kullanarak istenilen açının ölçüsünü buluyor (26M).

Merve sorunun çözümünde önceden öğrendiği formülü kullanmaya odaklandığından DC ve EB yaylarının ölçülerini bulmaya yönelik bir yaklaşım sergilemiştir. Önce ölçüsü verilen çevre açıların gördüğü yayların ölçüsünü bulmuş, bu yay ölçülerini toplamış ve daha sonra çemberi bütün olarak değerlendirerek EB yayının ölçüsünü bulmuştur. Daha sonra çemberde dış açıyı bulmaya yönelik önceden öğrendiği formülü kullanarak istenilen açının ölçüsünü bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat üçgen şemasını işe koşarak $m(\hat{C})$'nü, buradan yola çıkarak çemberde açı ve üçgen bilgilerini koordine ederek $m(\widehat{ADB})$'nü bulabilirdi. Daha sonra ABD üçgenini kullanarak istenilen açının ölçüsüne ulaşabilirdi. Sonuç olarak Merve'nin çemberin açısını, üçgenin açısına kapsülleyemediği için çemberde dış açı formülünü kullandığı görülmektedir.

Üçüncü soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Dairenin çevre bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda, Merve süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Merve'nin bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 55'de sunulmuştur (M: Merve).

Şekil 55

Merve'nin üçüncü soruya yönelik çözümü



31M: Çevreden yapmamız lazım. Çevrenin formülü $2\pi r$'ydi. Büyük tekerleğin çevresi 200π olur, küçük tekerleğinde 120π olur.

32M: İkisi de aynı yolu alacak.

33M: 30.200π desek,

34M: bu da 120π çarpı dönme sayısına x desek,

35M: birbirine eşit olması gerekiyor. Çünkü aynı yolu alacak ikisi de.

{Burada elde ettiği $30.200\pi = 120\pi.x$ denklemi sesli olarak çözüyor.} x buradan 50 çıkıyor.

Merve çemberin çevresini hesaplamaya yönelik formülü kullanarak ön ve arka tekerleğin çevresini hesaplıyor (31M). Ön tekerleğin aldığı yol ile arka tekerleğin aldığı yol arasında ilişki kuruyor (32M). Arka tekerleğin çevresi ile dönme sayısını birlikte düşünerek arka tekerleğin aldığı yolu buluyor (33M). Ön tekerleğin dönme sayısını sembolle temsil ediyor ve ön tekerleğin çevresi ile dönme sayısını koordine ederek ön tekerleğin aldığı yolu cebirsel olarak ifade ediyor (34M). Arka ve ön tekerleğin aldığı yol arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurarak denklem elde ediyor ve denklemi çözerek ön tekerleğin dönme sayısını buluyor (35M).

Merve sorunun çözümünde dairenin çevresini hesaplamaya yönelik formülü kullanmaya odaklanmıştır. Ön ve arka tekerleklerin çevrelerini hesaplamıştır. Daha sonra arka tekerleğin çevresini, dönme sayısıyla çarparak arka tekerleğin aldığı yolu bulmuştur. Ön tekerleğin aldığı yolu ise cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlayarak bulmuştur. Denklem bilgisini yeni duruma uyarlayarak arka ve ön tekerleğin aldığı yolları birbirine eşitlemiş ve istenilen sonuca ulaşmıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat oran-orantı şemasını işe koşarak ön tekerleğin kaç tur döndüğünü bulabilirdi. Bunun için tekerleklerin yarıçapı ile dönme sayıları arasındaki ters ilişkiyi fark etmesi gerekiyordu. Böylece dairenin çevresini hesaplamaya yönelik formüle ihtiyaç duymadan dönme sayısını bulabilirdi. Sorunun çözümünde dairenin çevresi, cebirsel ifadeler ve denklemler kavramlarına yönelik bilgilerini yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordine ettiği görülmektedir. Sonuç olarak Merve'nin dairenin çevresini, oran-orantı kavramına kapsülleyemediği için dairenin çevresi formülünü kullandığı görülmektedir.

Dördüncü soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Dairenin çevre bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda, Merve süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Merve'nin bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (A:Araştırmacı, M: Merve).

41M: 60° geriye çekmiş, 60° ileriye gitmiş. Yine aynı yere gelmez mi? Anlayamadım tam.

A: Bir daha oku istersen soruyu.

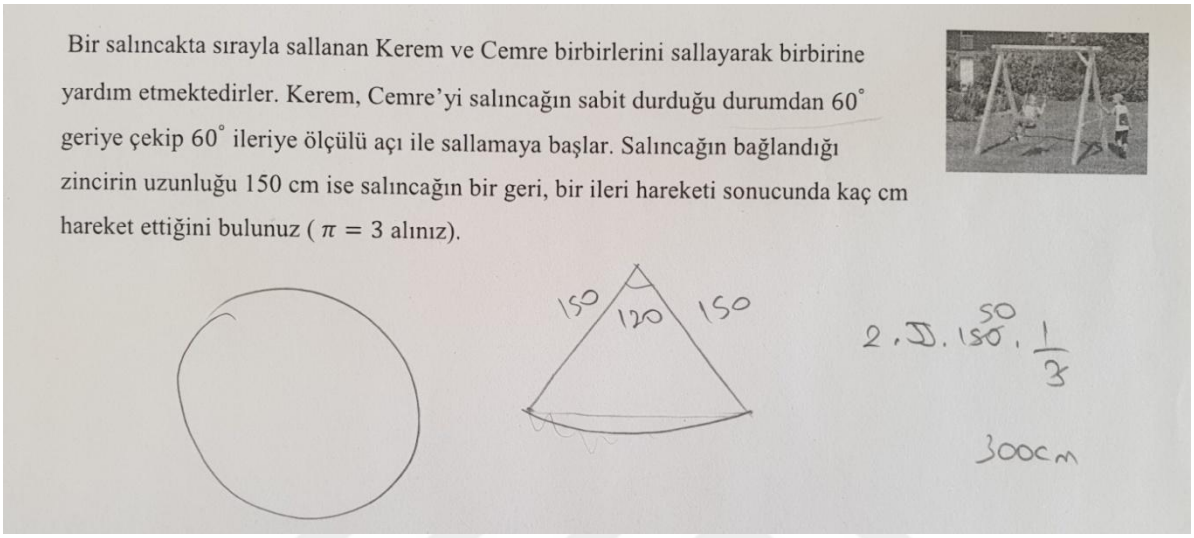
42M: {Soruyu sessizce tekrar okuyor.} Çember yapayım direk. 60 geriye çekmiş 60 ileriye ölçülü açı ile sallamaya başlamış o zaman 120° hareket etmiş. Benim aklıma o geldi.

43M: 120° ise bunun yarıçapı 150 santimetreymiş, bunu bir çember olarak düşünürsek bu yayın uzunluğunu mu istiyor? Ben öyle anladım.

44M: Yayın uzunluğunu nasıl buluruz, $2\pi r.\frac{\alpha}{360}$ mıydı? 120, 360'ın üçte biri oluyor. $2.\pi.150.\frac{1}{3}$ yaptık. Buradan 100π çıkıyor, π'yi 3 aldığımızda da 300 cm oluyor. Burada aslında formül kullandım. Formül doğrumu onu da hatırlamıyorum aslında (Bkz. Şekil 56).

Şekil 56

Merve'nin dördüncü soruya yönelik çözümü



Merve ilk başta soruyu anlayamamakta ve ne yapacağına karar verememektedir (41M). Araştırmacının soruyu tekrar okumasını istemesi üzerine, salıncağın hareketini yay parçası modeli ile temsil ediyor ve salıncağın hareketi sonucu oluşan açıyı belirliyor (42M). Salıncağın bağlandığı zincirin uzunluğunun, yay parçası modelinin yarıçapı olduğunu yorumluyor (43M). Yay parçasının uzunluğunu hesaplamaya yönelik formülü kullanarak 120°'lik yay parçasının uzunluğunu hesaplıyor (44M). Bu esnada cebirsel ifadelere yönelik bilgilerini kapsülden çıkartıyor.

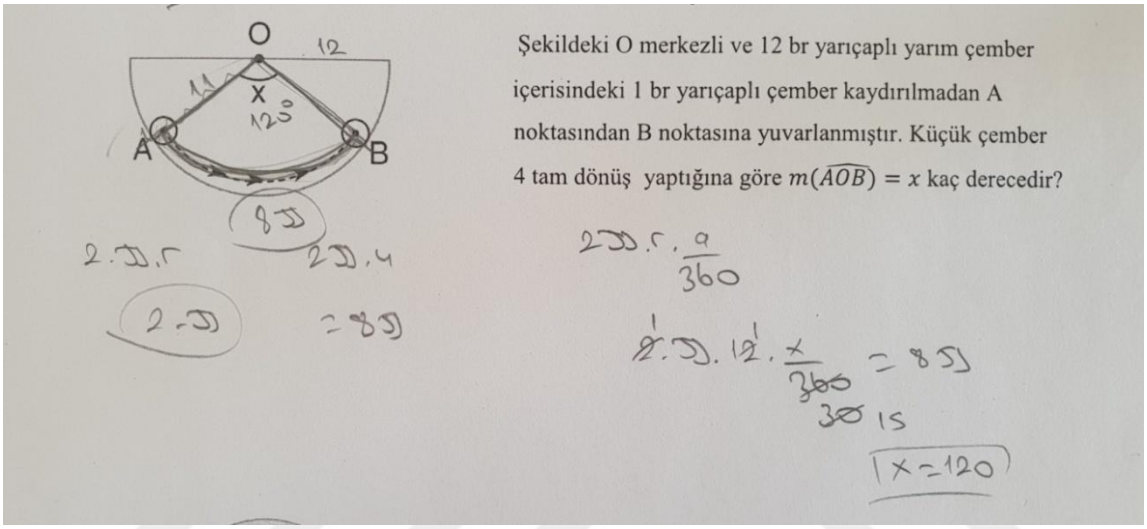
Merve salıncağın zincirinin bağlandığı noktanın bir dairenin merkezi, salıncağın zincirinin dairenin yarıçapı olduğunu ve salıncağın hareket etmesi ile bir yay parçası oluştuğunu yorumlayabilmiştir. Bu durum herhangi bir dışsal ipucu olmadan çemberin çevresi kavramına yönelik eylemleri yansıtabildiğinin göstergesidir. Yay parçasının uzunluğunu bulmaya yönelik formülü kullanarak yay parçasının uzunluğunu hesaplamıştır. Bu esnada cebirsel ifadelere yönelik şemasını işe koşarak yeni duruma uyarlamıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat oran-orantı şemasını işe koşarak, yay parçasını gören merkez açı ile tam açı arasındaki ilişkiden yola çıkarak dairenin çevresi ile yay parçası uzunluğu arasında ilişki kurabilir ve istenilen yay uzunluğunu bulabilirdi. Sorunun çözümünde dairenin çevresi ve cebirsel ifadeler kavramlarına yönelik bilgilerini yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordine ettiği görülmektedir. Sonuç olarak Merve'nin

dairenin çevresini, oran-orantı kavramına kapsülleyemediği için yay parçasının uzunluğunu veren formülü kullandığı görülmektedir.

Altıncı soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çemberin çevre bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda Merve süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Merve'nin bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 57'de sunulmuştur (M:Merve).

Şekil 57

Merve'nin altıncı soruya yönelik çözümü



61M: Yarıçap 12'ymiş. Küçük çemberin çevresini bulup 4'le çarpacağım. Aldığı yolu bulmak için. $2.\pi.r$'den 2π oluyor küçük çemberin çevresi.

62M: 4 tam tur yaptığından 8π oluyor.

63M: 8π'de AB yayının uzunluğu olmuş oluyor.

64M: Burası {çemberin yarıçapını kastediyor} 12'ymiş. x açısını bulurum.

$2.\pi.r.\frac{\alpha}{360}$'dan 8π'ye eşit olması lazım. $\{2.\pi.12.\frac{x}{360} = 8\pi$ denklemini sesli olarak çözüyor$\}$ x, buradan 120° çıkıyor.

Merve küçük çemberin çevresini hesaplıyor (61M). Küçük çemberin çevresi ile dönme sayısı arasında ilişki kuruyor ve küçük çemberin aldığı yolu buluyor (62M). Küçük çemberin aldığı yolu göz önünde bulunduruyor ve AB yayının uzunluğunu yorumluyor (63M). AB yayının uzunluğu ile O merkezli çemberin çevresi arasında ilişki kuruyor. Yay parçasının uzunluğunu veren formülü kullanarak sonuca ulaşıyor (64M).

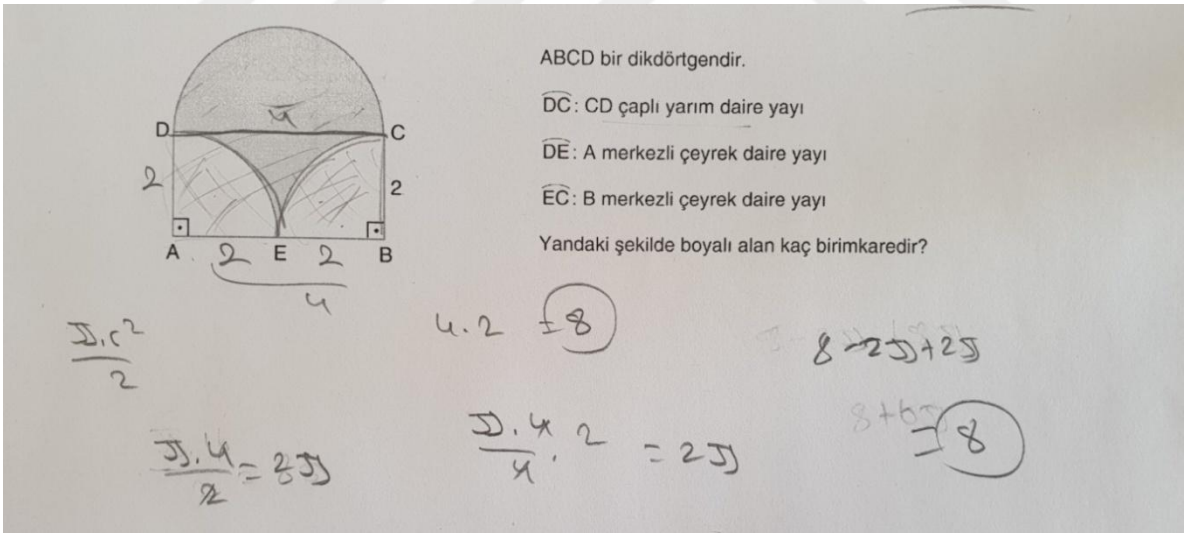
Merve sorunun çözümüne küçük çemberin çevresi ile dönme sayısı arasında ilişki kurarak başlamıştır. Önce küçük çemberin aldığı yol ile AB yayının uzunluğu arasında daha sonra ise AB yayının uzunluğu ile O merkezli çemberin çevresi arasında koordinasyon

sağlamış ve istenilen açının ölçüsünü bulmuştur. İstenilen sonuca ulaşırken yay parçasının uzunluğunu veren formülü kullanmıştır. Herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadan AB yayının uzunluğu ile O merkezli çemberin çevresi arasında koordinasyon sağlayabilmesi onun çemberin çevresine yönelik eylemleri yansıtabildiğinin göstergesidir. Cebirsel ifadeler, denklemler ve dairenin çevresine yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarlamıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat oran-orantı şemasını işe koşarak, yay parçasının uzunluğu ile O merkezli çemberin çevresi arasında ilişki kurabilir, bu ilişkiden yola çıkarak yay parçasını gören merkez açı ile tam açı arasında ilişki kurabilir ve istenilen açının ölçüsünü bulabilirdi. Sonuç olarak Merve'nin çemberin çevresini, oran-orantı kavramına kapsülleyemediği için yay parçasının uzunluğunu veren formülü kullandığı görülmektedir.

Yedinci soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Dairenin alan bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda, Merve süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Merve'nin bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 58'de sunulmuştur (A:Araştırmacı, M: Merve).

Şekil 58

Merve'nin yedinci soruya yönelik çözümü



71M: Burası {$[BC]$'nı kastediyor} 2 ise çeyrekmiş, burası da {$[EB]$'nı kastediyor} 2 olur. Bu {$[DA]$'nı kastediyor} karşısı olduğu için bu {$[BC]$'nı kastediyor} 2 ise bu da {$[DA]$'nı kastediyor} 2 olur.

72M: DC'nin uzunluğu çapmış 4 oluyor.

73M: Yukarıdaki yarım dairenin alanı $\frac{\pi r^2}{2}$ 'den 2π çıkıyor.

74M: Şimdi dikdörtgenin alanını bulup bu 2 çeyrek daireyi çıkardığımızda da şu alanı {dikdörtgen içindeki boyalı alanı kastediyor} elde ediyoruz.
75M: Burası $4.2 = 8$ oluyor. Dikdörtgenin alanı 8.
76M: Dairelerin alanları $\pi.r^2$ 'den 4π. 4'e bölmemiz lazım çünkü çeyrekmiş bölü 4 çarpı 2 dedim. Çünkü eşit 2 tane var.
77M: Bu da 2π çıkıyor. $8 - 2\pi$ oluyor buradaki şeklin alanı {dikdörtgen içindeki boyalı alanı kastediyor}.
78M: $8 - 2\pi + 2\pi = 8$ oluyor.

Merve dikdörtgen ve çembere yönelik bilgilerini bir arada düşünerek dikdörtgenin kenar uzunluklarını buluyor (71M). Dikdörtgenin uzun kenarının, aynı zamanda yarım çemberin çapı olduğunu fark ediyor (72M). Yarım çemberin alanını buluyor (73M). Bu esnada cebirsel ifadelere yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarlıyor. Dikdörtgenin içindeki boyalı bölgenin alanını nasıl bulacağını planlıyor (74M). Dikdörtgene yönelik önceden oluşturduğu bilgileri yeni duruma uyarlıyor ve dikdörtgenin alanını hesaplıyor (75M). Çeyrek dairenin alanını hesaplıyor. Aynı zamanda A ve B merkezli çeyrek dairelerin eş olduğunu fark ediyor (76M). Bu esnada cebirsel ifadelere yönelik bilgilerini de kapsülden çıkartarak dairenin alanı kavramıyla koordineli kullanıyor. Dikdörtgenin ve dairenin alanı kavramlarını koordineli kullanarak dikdörtgenin içindeki boyalı kısmı hesaplıyor (77M). Dikdörtgenin içindeki boyalı alan ile yarım dairenin alanını topluyor (78M).

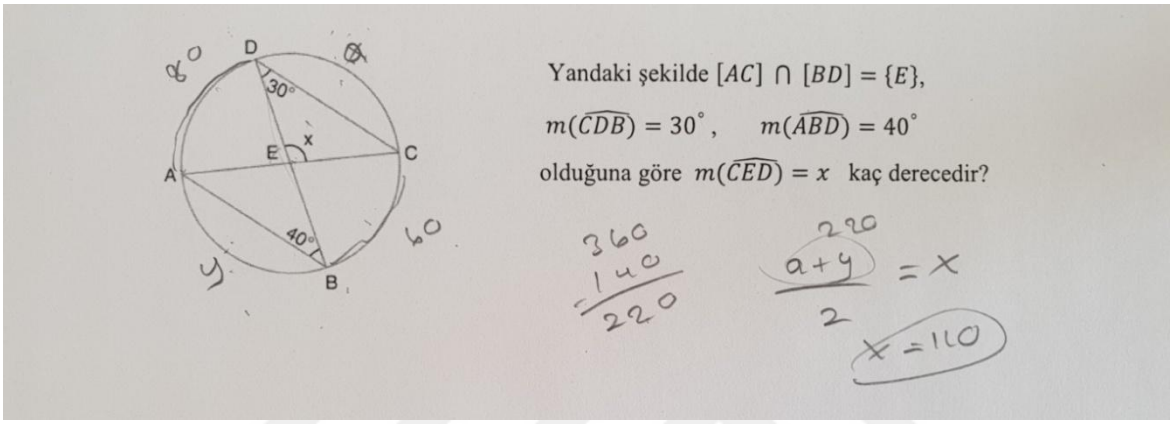
Merve sorunun çözümü için dikdörtgen şamasını işe koşması gerektiğini fark ettiğinden dikdörtgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartmıştır. Dikdörtgen ve daireye yönelik bilgilerini koordine ederek önce dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmuş sonra dikdörtgen içindeki boyalı kısmın alanını hesaplamış ve elde ettiği sonuca yarım dairenin alanını ekleyerek istenilen sonucu bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat sorunun çözümünde A ve B merkezli çeyrek dairelerin eş olduğunu fark etmiş olsa da, üstteki yarım dairenin alanının, A ve B merkezli çeyrek dairelerin alanları toplamına eşit olduğunu fark edememiştir. Dolayısıyla şekildeki boyalı bölgenin alanının, dikdörtgenin alanına eşit olduğunu görememiştir. Bu durum yarım dairenin alanı ile çeyrek dairelerin alanları arasında ilişki kuramadığının göstergesidir. Sorunun çözümü için boyalı kısımlara odaklandığı için boyalı kısımların alanlarını ayrı ayrı bulmuş ve bulduğu alanları toplamıştır. Merve'nin sorunun çözümünde cebirsel ifadeler, dikdörtgen ve daireye yönelik bilgilerini yeni duruma uyarladığı ve bu bilgilerini koordine ettiği görülmektedir.

4.2.3. Nazlı'nın Oluşan Bilgilerinin Analizi

Birinci soru "bir çemberde merkez, çevre, iç, dış ve teğet-kiriş açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapar" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çemberde açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapmaya yönelik olan bu soruda, Nazlı süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Nazlı'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 59'da sunulmuştur (A: Araştırmacı, N: Nazlı).

Şekil 59

Nazlı'nın birinci soruya yönelik çözümü



11N: Bu çevre açı {($\widehat{ABD}$)'nı kastediyor} 2 katı oluyor gördüğü yayın, 80 olur. Burası {BC yayını kastediyor} 60 olur. Formülü vardı.

A: Ne formülü?

12N: İç açılar. Şuraya {DC yayını kastediyor} a diyelim, y {AB yayını kastediyor} diyelim toplamı 140, 360'tan çıkartalım 220 kalıyor.

13N: $\frac{a+y}{2}$, x'i verecek bize. $a + y$'yi zaten 220 bulduk. x'te buradan 110 olur.

Nazlı ($\widehat{ABD}$)'nın ve ($\widehat{BDC}$)'nın çevre açı olduğunu fark ediyor ve çemberde açıya yönelik önceden oluşturduğu kavramları kullanarak, çevre açıların gördüğü yayların ölçülerini buluyor (11N). Çemberin bütünü ile çevre açıların gördüğü yayları ilişkilendiriyor ve AB yayının ölçüsü ile CD yayının ölçüsü toplamını buluyor (12N). Çemberde iç açıyı bulmaya yönelik formülü kullanarak istenilen açının ölçüsünü buluyor (13N).

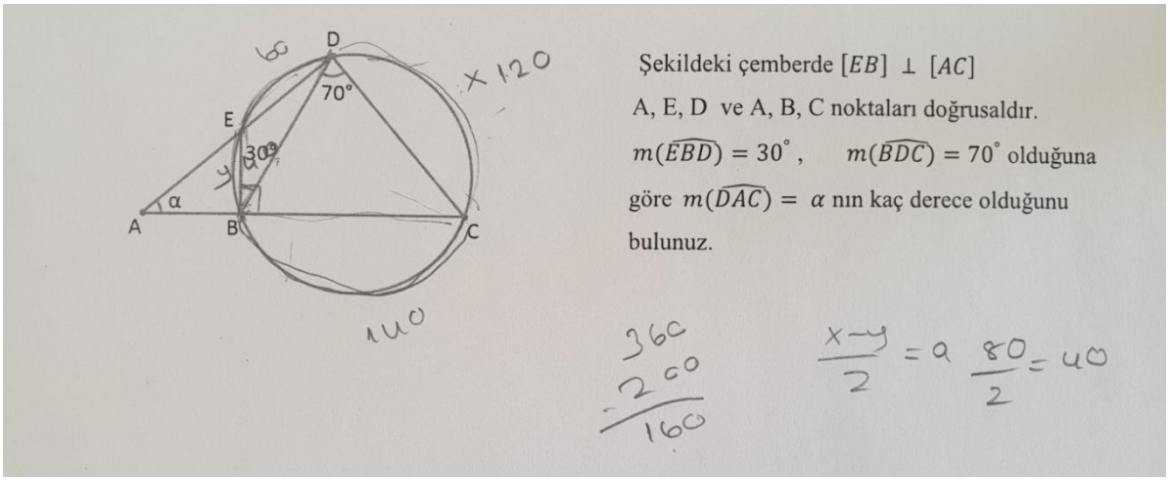
Nazlı sorunun çözümü için önceden öğrendiği formülü kullanmaya odaklandığından AB ve DC yaylarının ölçüleri toplamını bulmaya yönelik bir yaklaşım sergilemiştir. Bunun için önce ölçüsü verilen çevre açıların gördüğü yayların ölçüsünü bulmuş, daha sonra çemberi bütün olarak düşünerek AB ve DC yaylarının ölçüleri toplamını bulmuştur. Daha sonra çemberde iç açıyı bulmaya yönelik formülü kullanarak istenilen açının ölçüsünü bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat ($\widehat{ABD}$) ile

($\widehat{ACD}$)'nın aynı yayı gördüğünü, dolayısıyla ölçülerinin aynı olduğunu fark edememiştir. Bu durumu fark etmiş olsaydı CDE üçgeninin iç açılar toplamını kullanarak istenilen açıyı bulabilirdi. Sonuç olarak Nazlı'nın çemberin açısını, üçgenin açısına kapsülleyemediği için çemberde iç açı formülünü kullandığı görülmektedir.

İkinci soru "bir çemberde merkez, çevre, iç, dış ve teğet-kiriş açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapar" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çemberde açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapmaya yönelik olan bu soruda, Nazlı süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Nazlı'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 60'da sunulmuştur (N: Nazlı).

Şekil 60

Nazlı'nın ikinci soruya yönelik çözümü



21N: Yine çevre açı {($\widehat{EBD}$)'nı kastediyor} sanırım bu 60 olmazmı, burası {BC yayını kastediyor} 140 olur.

22N: Yine formülden dış açı formülünden x {DC yayının ölçüsünü kastediyor}, y (EB yayının ölçüsünü kastediyor} dedim 140, 60 {yayların ölçülerini söylüyor ve bunları topluyor} 360'tan 200'ü çıkartacağım 160,

23N: $\frac{x-y}{2}$, a'yı verecek bize, fakat $x + y$ var elimde.

24N: {Soruyu tekrar okuyor} EB dik AC'ye, şurası dik, 90. 180 {EDC yayının ölçüsünü kastediyor} olur.

25N: Şu 60'la {ED yayının ölçüsünü kastediyor} beraber ikisinin {ED ve DC yaylarının ölçülerini kastediyor} toplamı. Buraya {DC yayının ölçüsünü kastediyor} 120 kalır. Burası da {EB yayının ölçüsünü kastediyor} o zaman 40 olacak, 160 {x+y ifadesini kastediyor} bulmuştuk.

26N: $\frac{120-40}{2}$ 'den a, 40 olur.

Nazlı ($\widehat{BDC}$)'nın ve ($\widehat{DBE}$)'nın çevre açı olduğunu fark ediyor ve çemberde açıya yönelik önceden oluşturduğu bilgileri kullanarak, çevre açıların gördüğü yayların ölçülerini buluyor (21N). Çemberin bütünü ile çevre açıların gördüğü yayları ilişkilendiriyor ve DC yayı ile EB yayının ölçüleri toplamını buluyor (22N). Çemberde dış açıyı bulmaya yönelik formülü kullanmayı planlıyor. Fakat bu formülü kullanabilmek için DC yayı ile EB yayının ölçüleri farkına yönelik veriye ihtiyaç duyarken elinde DC yayı ile EB yayının ölçüleri toplamına yönelik veri olduğunu görüyor (23N). ($\widehat{EBC}$)'nın çevre açı olduğunu fark ediyor ve çemberde açıya yönelik önceden oluşturduğu bilgileri kullanarak, EDC yayının ölçüsünü buluyor (24N). Çemberde dış açıyı bulmaya yönelik formülü kullanabilmek için gerekli olan verileri elde ediyor (25N). Çemberde dış açıyı bulmaya yönelik formülü kullanarak istenilen açının ölçüsünü buluyor (26N).

Nazlı sorunun çözümünde formül kullanmaya odaklandığından DC yayı ile EB yayının ölçülerini bulmaya yönelik bir yaklaşım sergilemiştir. Önce ölçüsü verilen çevre açıların gördüğü yayların ölçüsünü bulmuş, daha sonra çemberi bütün olarak düşünerek AB yayı ile DC yayının ölçüleri toplamını bulmuştur. Daha sonra çemberde dış açıyı bulmaya yönelik önceden öğrendiği formülü hatırladığında aslında AB yayı ile DC yayının ölçüleri farkını bulması gerektiğini fark etmiştir. Elde ettiği veriler arasında koordinasyon sağlayarak ihtiyaç duyduğu yayların ölçülerini bulmuştur. Daha sonra çemberde dış açıyı bulmaya yönelik formülü kullanarak istenilen açının ölçüsünü bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat üçgen şemasını işe koşarak m($\hat{C}$)'nü, buradan yola çıkarak çemberde açı ve üçgen bilgisini koordine ederek $m(\widehat{ADB})$ 'nü bulabilirdi. Daha sonra ABD üçgenini kullanarak istenilen açının ölçüsüne ulaşabilirdi. Sonuç olarak Nazlı'nın çemberin açısını, üçgenin açısına kapsülleyemediği için çemberde dış açı formülünü kullandığı görülmektedir.

Üçüncü soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Dairenin çevre bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda, Nazlı süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Nazlı'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (A:Araştırmacı, N: Nazlı).

31N: Çapı 120 ise yarıçapı 60'dır. 100 yarıçap, çevresini buluruz, π'yi vermemiş.

{Burada $2.\pi.100.30$ ifadesini yazıyor.}

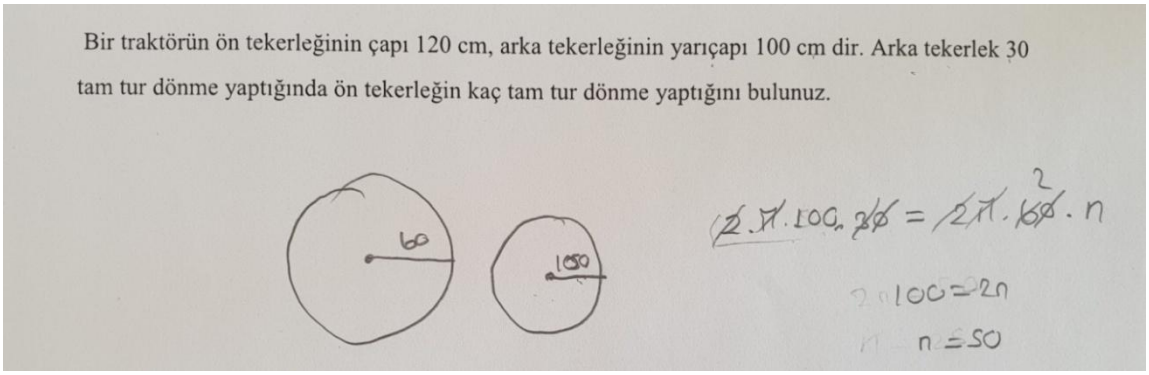
A: Bu bulduğun ne?

32N: Çevresini buldum, o çevre ile birlikte bu kaç tur döndüğünde, bunun kaç tur döndüğünü, yani çemberin aldığı yol.

33N: {Burada $2.\pi.100.30 = 2.\pi.60.n$ denklemini yazıyor.} Bunlar gidiyor zaten $2n = 100$ ise n, 50 olur (Bkz. Şekil 61).

Şekil 61

Nazlı'nın üçüncü soruya yönelik çözümü



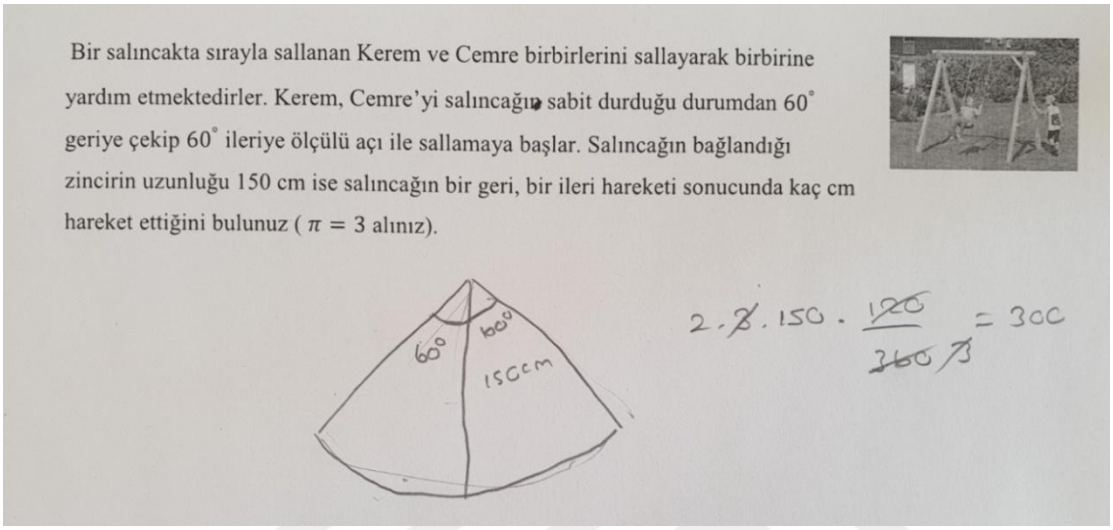
Nazlı arka tekerleğin çevresini hesaplıyor ve tekerleğin çevresi ile dönme sayısını koordine ederek arka tekerleğin aldığı yolu buluyor (31N, 32N). Ön tekerleğin dönme sayısını sembolle temsil ediyor ve ön tekerleğin çevresi ile dönme sayısını koordine ederek ön tekerleğin aldığı yolu cebirsel olarak ifade ediyor. Arka ve ön tekerleğin aldığı yol arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurarak denklem elde ediyor (33N). Denklemi çözerek ön tekerleğin dönme sayısını buluyor (33N).

Nazlı sorunun çözümünde dairenin çevresini hesaplamaya yönelik formülü kullanmaya odaklanmıştır. Ön ve arka tekerleklerin çevrelerini hesaplamıştır. Arka tekerleğin çevresini, dönme sayısıyla çarparak arka tekerleğin aldığı yolu bulmuştur. Ön tekerleğin aldığı yolu ise cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgileri yeni duruma uyarlayarak bulmuştur. Daha sonra ise denklemlere yönelik bilgilerini yeni duruma uyarlayarak arka ve ön tekerleğin aldığı yolları birbirine eşitlemiş ve istenilen sonuca ulaşmıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat oran-orantı şemasını işe koşarak ön tekerleğin kaç tur döndüğünü bulabilirdi. Bunun için tekerleklerin yarıçapı ile dönme sayıları arasındaki ters ilişkiyi fark etmesi gerekiyordu. Böylece çemberin çevresini hesaplamaya yönelik formüle ihtiyaç duymadan dönme sayısını bulabilirdi. Sorunun çözümünde dairenin çevresi, cebirsel ifadeler ve denklemler kavramlarına yönelik bilgilerini yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordine ettiği görülmektedir. Sonuç olarak Nazlı'nın dairenin çevresini, oran-orantı kavramına kapsülleyemediği için dairenin çevresi formülünü kullandığı görülmektedir.

Dördüncü soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Dairenin çevre bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda, Nazlı süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Nazlı'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 62'de sunulmuştur (N: Nazlı).

Şekil 62

Nazlı'nın dördüncü soruya yönelik çözümü



41N: Şöyle salıncağın uzunluğu var 150 cm {yarıçapı kastediyor}.

42N: 60° geriye çekilip 60°,

43N: yayı soruyor aslında.

44N: Çevresini alıp, daire diliminin çevresi $2.3.150.\frac{a}{360}$ yapacağım.

{Burada $2.3.150.\frac{150}{360}$ işlemini yapıyor ve sonucu 300 buluyor.}

Nazlı salıncağın bağlandığı zincirin uzunluğunun, yay parçası modelinin yarıçapı olduğunu yorumluyor (41N). Salıncağın hareketi ile oluşan açıyı belirliyor (42N). Yay parçasının uzunluğunu bulması gerektiğini fark ediyor (43N). Yay parçasının uzunluğunu hesaplamaya yönelik formülü kullanarak 120°'lik yay parçasının uzunluğunu hesaplıyor (44N). Bu esnada cebirsel ifadelere yönelik bilgilerini kapsülden çıkartıyor.

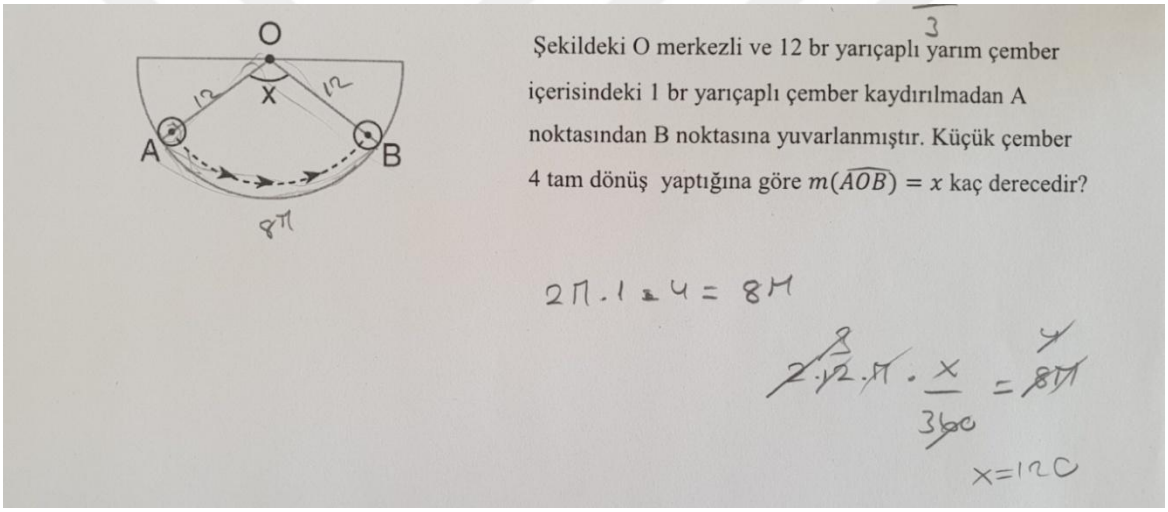
Nazlı salıncağın zincirinin bağlandığı noktanın bir dairenin merkezi, salıncağın zincirinin dairenin yarıçapı olduğunu ve salıncağın hareket etmesi ile bir yay parçası oluştuğunu yorumlayabilmiştir. Bu durum herhangi bir dışsal ipucu olmadan çemberin çevresi kavramına yönelik eylemleri yansıtabildiğinin göstergesidir. Yay parçasının uzunluğunu bulmaya yönelik formülü kullanarak yay parçasının uzunluğunu hesaplamıştır. Bu esnada cebirsel ifadelere yönelik şemasını işe koşarak yeni duruma uyarlamıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat oran-orantı şemasını işe koşarak,

yay parçasını gören merkez açı ile tam açı arasındaki ilişkiden yola çıkarak dairenin çevresi ile yay parçası uzunluğu arasında ilişki kurabilir ve istenilen yay uzunluğunu bulabilirdi. Sorunun çözümünde dairenin çevresi ve cebirsel ifadeler kavramlarına yönelik bilgilerini yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordine ettiği görülmektedir. Sonuç olarak Nazlı'nın dairenin çevresini, oran-orantı kavramına kapsülleyemediği için yay parçasının uzunluğunu veren formülü kullandığı görülmektedir.

Altıncı soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çemberin çevre bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda Nazlı süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Nazlı'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 63'te sunulmuştur (N: Nazlı).

Şekil 63

Nazlı'nın altıncı soruya yönelik çözümü



61N: 12 yarıçap, bu küçük çemberi 4 tam dönüş yaptırıp şu {AB yayını kastediyor} yayın uzunluğunu bulabiliriz aslında, ordanda yine açıya ulaşabiliriz.

62N: Çevresini bulacağım {küçük çemberden bahsediyor}, $2.\pi.1 = 2\pi$ oluyor $2\pi r$'den.

63N: 4 tam tur dönmüş, buradan 8π oluyor.

64N: Burada daire diliminin çevresini bulacağım {O merkezli x°'lik merkez açının gördüğü yay uzunluğunu kastediyor}.

{Burada $2.12.\pi.\frac{x}{360} = 8\pi$ denklemini çözüyor}, 120 olur.

Nazlı sorunun çözümü için plan yapıyor (61N). Küçük çemberin çevresini hesaplıyor (62N). Küçük çemberin çevresi ile dönme sayısı arasında ilişki kuruyor ve küçük çemberin aldığı yolu buluyor (63N). Aynı zamanda küçük çemberin aldığı yolu göz önünde bulundurarak AB yayının uzunluğunu yorumluyor. AB yayının uzunluğu ile büyük çemberin

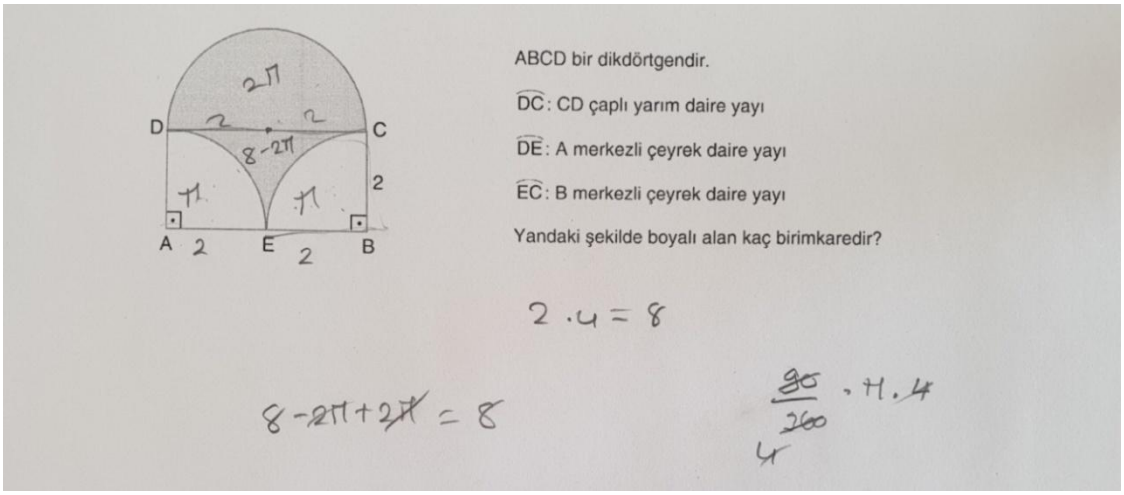
çevresi arasında ilişki kuruyor ve yay parçasının uzunluğunu veren formülü kullanarak istenilen açıyı buluyor (64N).

Nazlı sorunun çözümüne küçük çemberin çevresi ile dönme sayısı arasında ilişki kurarak başlamıştır. Önce küçük çemberin aldığı yol ile AB yayının uzunluğu arasında daha sonra ise AB yayının uzunluğu ile O merkezli çemberin çevresi arasında koordinasyon sağlamış ve istenilen açının ölçüsünü bulmuştur. İstenilen sonuca ulaşırken yay parçasının uzunluğunu veren formülü kullanmıştır. Herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadan AB yayının uzunluğu ile O merkezli çemberin çevresi arasında koordinasyon sağlayabilmesi onun çemberin çevresine yönelik eylemleri yansıtabildiğinin göstergesidir. Cebirsel ifadeler, denklemler ve dairenin çevresine yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarlamıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat oran-orantı şemasını işe koşarak, yay parçasının uzunluğu ile O merkezli çemberin çevresi arasında ilişki kurabilir, bu ilişkiden yola çıkarak yay parçasını gören merkez açı ile tam açı arasında ilişki kurabilir ve istenilen açının ölçüsünü bulabilirdi. Sonuç olarak Nazlı'nın çemberin çevresini, oran-orantı kavramına kapsülleyemediği için yay parçasının uzunluğunu veren formülü kullandığı görülmektedir.

Yedinci soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Dairenin alan bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda, Nazlı süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Nazlı'nın bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 64'te sunulmuştur (A:Araştırmacı, N: Nazlı).

Şekil 64

Nazlı'nın yedinci soruya yönelik çözümü



71N: Yarıçapları {çeyrek daireleri kastediyor} 2 oluyor {burada dikdörtgenin kenar uzunluklarını buluyor}, yani şurası da aslında yarım çember, buradan {çeyrek dairelerden bahsediyor} çıkarıp buraya koymuş gibi aslında.

72N: Dikdörtgenin tamamından şu ikisini {çeyrek dairelerden bahsediyor} çıkaracağım bunu {dikdörtgen içindeki boyalı bölgeden bahsediyor} bulacağım.

73N: Bu ikisinin {çeyrek dairelerden bahsediyor} toplamı zaten bu {yarım daireden bahsediyor}.

74N: Dikdörtgenin alanı 2.4'ten 8.

75N: Bunun {çeyrek daireden bahsediyor} alanı $\frac{90}{360}.\pi.4$'ten π geldi bir tanesi. Şunlar π.

76N: Burası {dikdörtgen içindeki boyalı bölgeden bahsediyor} $8-2\pi$ oluyor o zaman.

77N: Burası da {yarım daireden bahsediyor} zaten 2π bulduk.

A: Nerden buldun?

78N: Ben ikisinin {çeyrek dairelerden bahsediyor} toplamına eşit diye düşündüm.

79N: Sonra hepsini topladığımızda 2π'ler gidiyor, 8 çıkıyor.

Nazlı dikdörtgen ve çembere yönelik bilgilerini bir arada düşünerek dikdörtgenin kenar uzunluklarını buluyor (71N). Çeyrek daireler ile yarım daire arasında ilişki kurduğuna yönelik bir izlenim veriyor (71N). Dikdörtgenin içindeki boyalı kısmın alanı nasıl bulacağını planlıyor (72N). Yarım dairenin alanı ile A ve B merkezli çeyrek dairelerin alanları arasında ilişki kuruyor (73N). Dikdörtgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartıyor ve dikdörtgenin alanını hesaplıyor (74N). Çeyrek dairenin alanını hesaplıyor. Aynı zamanda A ve B merkezli çeyrek dairelerin eş olduğunu fark ediyor (75N). Dikdörtgenin alanı ve dairenin alanı kavramlarını koordine ederek dikdörtgenin içindeki boyalı kısmın alanını hesaplıyor (76N). Yarım dairenin alanı ile A ve B merkezli çeyrek dairelerin alanları arasında ilişki kuruyor ve yarım dairenin alanını buluyor (77N, 78N). Dikdörtgenin içindeki boyalı alan ile yarım dairenin alanını topluyor ve istenilen sonucu buluyor (79N).

Nazlı sorunun çözümü için dikdörtgen şamasını işe koşması gerektiğini fark ettiğinden dikdörtgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartmıştır. Dikdörtgen ve daireye yönelik bilgilerini koordine ederek önce dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmuş sonra dikdörtgen içindeki boyalı kısmın alanını hesaplamış ve elde ettiği sonuca yarım dairenin alanını ekleyerek istenilen sonucu bulmuştur. Daire dilimlerinin alanlarını hesaplarken, daire diliminin alanını veren formülü kullanmıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat sorunun çözümünde A ve B merkezli çeyrek dairelerin eş olduğunu fark etmiş olsa da, üstteki yarım dairenin alanının, A ve B merkezli çeyrek dairelerin alanları toplamına eşit olduğunu fark edememiştir. Hâlbuki ilk başta yarım dairenin alanı ile çeyrek dairelerin alanları arasında ilişki kurabildiğine yönelik bir izlenim vermiştir. Fakat çözümün ilerleyen kısmında boyalı kısmın alanlarını ayrı ayrı

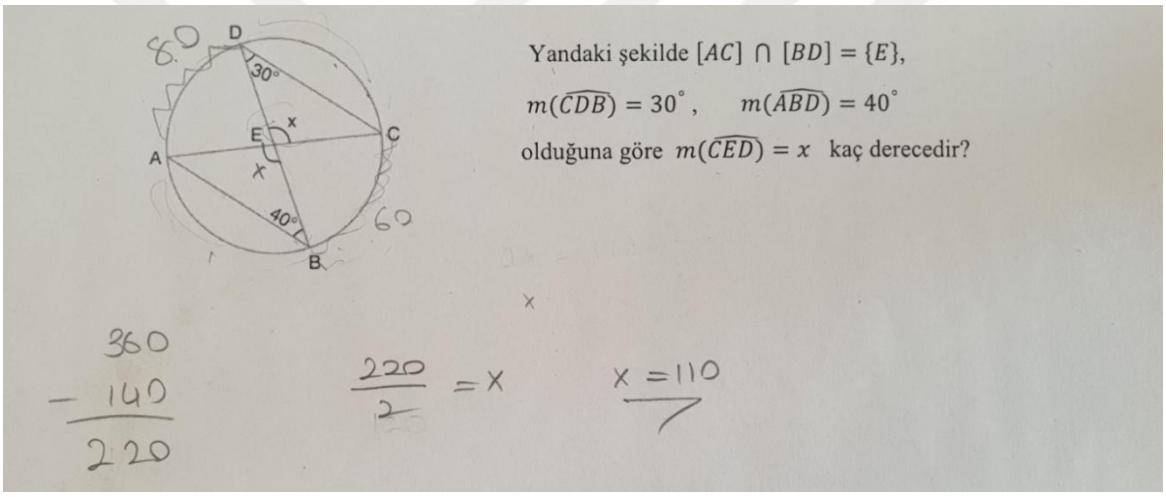
bulduğu ve bulduğu alanları topladığı görülmektedir. Dolayısıyla şekildeki boyalı kısmın alanının, dikdörtgenin alanına eşit olduğunu görememiştir. Nazlı'nın sorunun çözümünde dikdörtgen ve daireye yönelik bilgilerini yeni duruma uyarladığı ve bu bilgilerini koordine ettiği görülmektedir.

4.2.4. Pelin'in Oluşan Bilgilerinin Analizi

Birinci soru "bir çemberde merkez, çevre, iç, dış ve teğet-kiriş açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapar" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çemberde açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapmaya yönelik olan bu soruda, Pelin süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Pelin'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 65'te sunulmuştur (A: Araştırmacı, P: Pelin).

Şekil 65

Pelin'in birinci soruya yönelik çözümü



11P: Buraya {BC yayını kastediyor} 60 desem şuraya {AD yayını kastediyor} 80 olur.

12P: {Burada $360 - 140 = 220$ işlemini yapıyor} geri kalanına bakıyorum 220.

{Biraz sessizce düşünüyor.}

A: Neyin geri kalanını buldun?

13P: Şu bulduğumuz açının şuraları bulmaya çalıştım. Burası {AB yayı ile DC yayının ölçüleri toplamından bahsediyor} 220 yapıyor toplamı. Nerden gidebilirim ki? Merkez değil ikisi kesişiyor.

14P: Şey diye bir kural vardı. Bu ikisinin toplamı bölü 2, x'i veriyordu. Toplamı zaten buldum. $\frac{220}{2}$, x'te 110 çıkıyor.

Pelin ($\widehat{ABD}$)'nın ve ($\widehat{BDC}$)'nın çevre açı olduğunu fark ediyor ve çemberde açıya yönelik önceden oluşturduğu kavramları kullanarak çevre açıların gördüğü yayların ölçülerini buluyor (11P). Çemberin bütünü ile çevre açıların gördüğü yayları ilişkilendiriyor ve AB

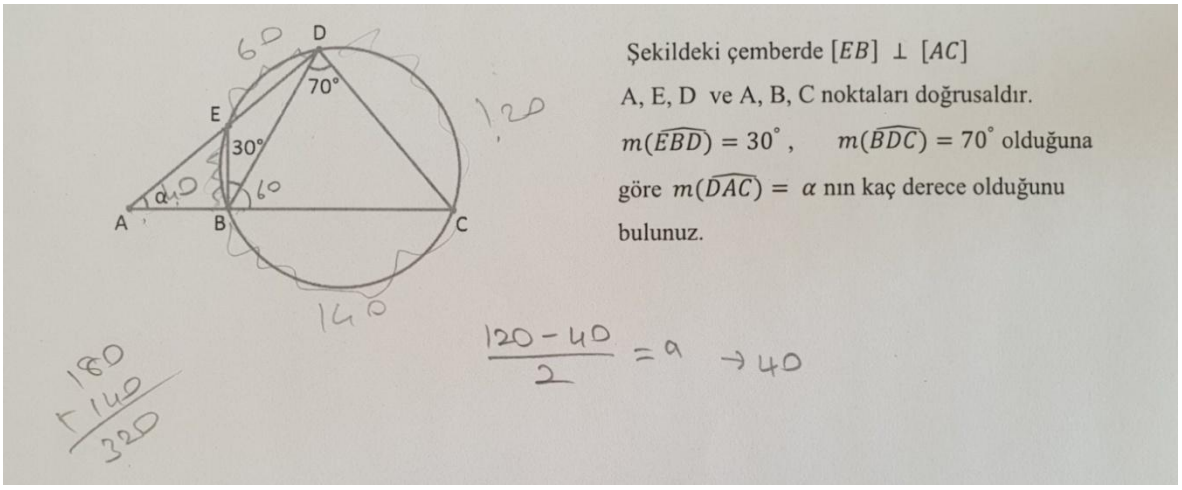
yayının ölçüsü ile CD yayının ölçüsünün toplamını buluyor (12P, 13P). Çemberde iç açıyı bulmaya yönelik formülü kullanarak istenilen açının ölçüsünü buluyor (14P).

Pelin sorunun çözümü için önceden öğrendiği formülü kullanmaya odaklandığından AB ve DC yaylarının ölçüleri toplamını bulmaya yönelik bir yaklaşım sergilemiştir. Bunun için önce ölçüsü verilen çevre açıların gördüğü yayların ölçüsünü bulmuş, daha sonra çemberi bütün olarak düşünerek AB ve DC yaylarının ölçüleri toplamını bulmuştur. Daha sonra çemberde iç açıyı bulmaya yönelik formülü kullanarak istenilen açının ölçüsünü bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat ($\widehat{ABD}$) ile ($\widehat{ACD}$)'nın aynı yayı gördüğünü, dolayısıyla ölçülerinin aynı olduğunu fark edememiştir. Bu durumu fark etmiş olsaydı CDE üçgeninin iç açılar toplamını kullanarak istenilen açının ölçüsünü bulabilirdi. Sonuç olarak Pelin'in çemberin açısını, üçgenin açısına kapsülleyemediği için çemberde iç açı formülünü kullandığı görülmektedir.

İkinci soru "bir çemberde merkez, çevre, iç, dış ve teğet-kiriş açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapar" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çemberde açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapmaya yönelik olan bu soruda, Pelin süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Pelin'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 66'da sunulmuştur (P: Pelin).

Şekil 66

Pelin'in ikinci soruya yönelik çözümü



21P: Burası {($\widehat{DBC}$)'nı kastediyor} 60.

22P: Buraya {DC yayını kastediyor} 120 dersem şunun {($\widehat{DBC}$)'nı kastediyor} iki katı. Buraya {BC yayını kastediyor} 140 dersem şuraya {ED yayını kastediyor} 60 kalıyor.

23P: Buradan 60, 120, 180, şuraya da {EB yayını kastediyor} 40 kalıyor.

24P: Bu ikisinin {DC yayı ile BE yayını kastediyor} farkının yarıya bölünmesi buydu öyle hatırlıyorum. $\frac{120-40}{2} = a$ buradan da $\frac{80}{2}$, 40.

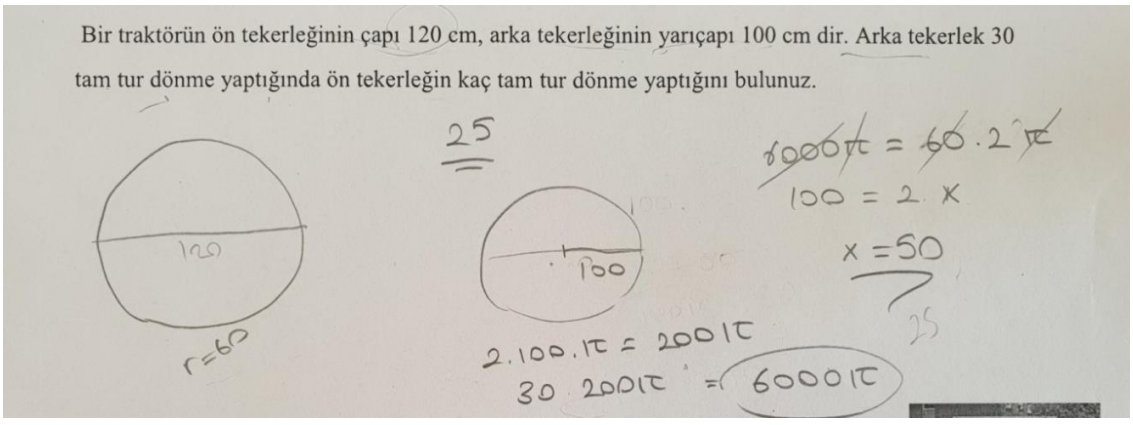
Pelin açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kullanarak $m(\widehat{DBC})$'nü buluyor (21P). $(\widehat{BDC})$'nın, $(\widehat{CBD})$'nın ve $(\widehat{DBE})$'nın çevre açı olduğunu fark ediyor ve çemberde açıya yönelik önceden oluşturduğu bilgileri kullanarak çevre açıların gördüğü yayların ölçülerini buluyor (22P). Çemberin bütünü ile çevre açıların gördüğü yayları ilişkilendiriyor ve EB yayının ölçüsünü buluyor (23P). Çemberde dış açıyı bulmaya yönelik formülü kullanarak istenilen açının ölçüsünü buluyor (24P).

Pelin sorunun çözümünde önceden öğrendiği formülü kullanmaya odaklandığından DC yayı ile EB yayının ölçülerini bulmaya yönelik bir yaklaşım sergilemiştir. Önce ölçüsü verilen çevre açıların gördüğü yayların ölçüsünü bulmuş, bu yay ölçülerini toplamış ve daha sonra çemberi bütün olarak değerlendirerek EB yayının ölçüsünü bulmuştur. Daha sonra çemberde dış açıyı bulmaya yönelik formülü kullanarak istenilen açının ölçüsünü bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat üçgen şemasını işe koşarak m$(\hat{C})$'nü, buradan yola çıkarak çemberde açı ve üçgen bilgisini koordine ederek $m(\widehat{ADB})$'nü bulabilirdi. Daha sonra ABD üçgenini kullanarak istenilen açının ölçüsüne ulaşabilirdi. Sonuç olarak Pelin'in çemberin açısını, üçgenin açısına kapsülleyemediği için çemberde dış açı formülünü kullandığı görülmektedir.

Üçüncü soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Dairenin çevre bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda, Pelin süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Pelin'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 67'de sunulmuştur (P: Pelin).

Şekil 67

Pelin'in üçüncü soruya yönelik çözümü



31P: {Burada $2.100.\pi = 200\pi$ işlemini yapıyor} 200π bir tane turu. Bundan 30 tur yapmış 6000π gittiği yol {arka tekerlekten bahsediyor}.

32P: {Burada $6000\pi = 60.2.\pi.x$ denklemini yazıyor ve denklemi çözüyor} 50 buldum.

Pelin arka tekerleğin çevresini hesaplıyor ve tekerleğin çevresi ile dönme sayısını koordine ederek arka tekerleğin aldığı yolu buluyor (31P). Ön tekerleğin dönme sayısını sembolle temsil ediyor ve ön tekerleğin çevresi ile dönme sayısını koordine ederek ön tekerleğin aldığı yolu cebirsel olarak ifade ediyor. Arka ve ön tekerleğin aldığı yol arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurarak denklem elde ediyor ve denklemi çözerek ön tekerleğin dönme sayısını buluyor (32P).

Pelin sorunun çözümünde dairenin çevresini hesaplamaya yönelik formülü kullanmaya odaklanmıştır. Bunun için arka ve ön tekerleklerin çevrelerini hesaplamıştır. Arka tekerleğin çevresini, dönme sayısıyla çarparak arka tekerleğin aldığı yolu bulmuştur. Ön tekerleğin aldığı yolu ise cebirsel ifadelere yönelik önceden oluşturduğu bilgileri yeni duruma uyarlayarak bulmuştur. Önceden oluşturduğu denklemlere yönelik bilgisini yeni duruma uyarlayarak arka ve ön tekerleğin aldığı yolları birbirine eşitlemiş ve istenilen sonuca ulaşmıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat oran-orantı şemasını işe koşarak ön tekerleğin kaç tur döndüğünü bulabilirdi. Bunun için tekerleklerin yarıçapı ile dönme sayıları arasındaki ters ilişkiyi fark etmesi gerekiyordu. Böylece çemberin çevresini hesaplamaya yönelik formüle ihtiyaç duymadan dönme sayısını bulabilirdi. Sorunun çözümünde dairenin çevresi, cebirsel ifadeler ve denklemler kavramlarına yönelik bilgilerini yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordine ettiği görülmektedir. Sonuç olarak Pelin'in dairenin çevresini, oran-orantı kavramına kapsülleyemediği için dairenin çevresi formülünü kullandığı görülmektedir.

Dördüncü soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Dairenin çevre bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda, Pelin süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Pelin'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (P: Pelin).

41P: Bu daire dilimi yapacak {salincağın hareketini kastediyor}, 150 yarıçapı.

42P: Buradan çevresini bulacağım. $150.2.\pi = 300\pi$ çevresi.

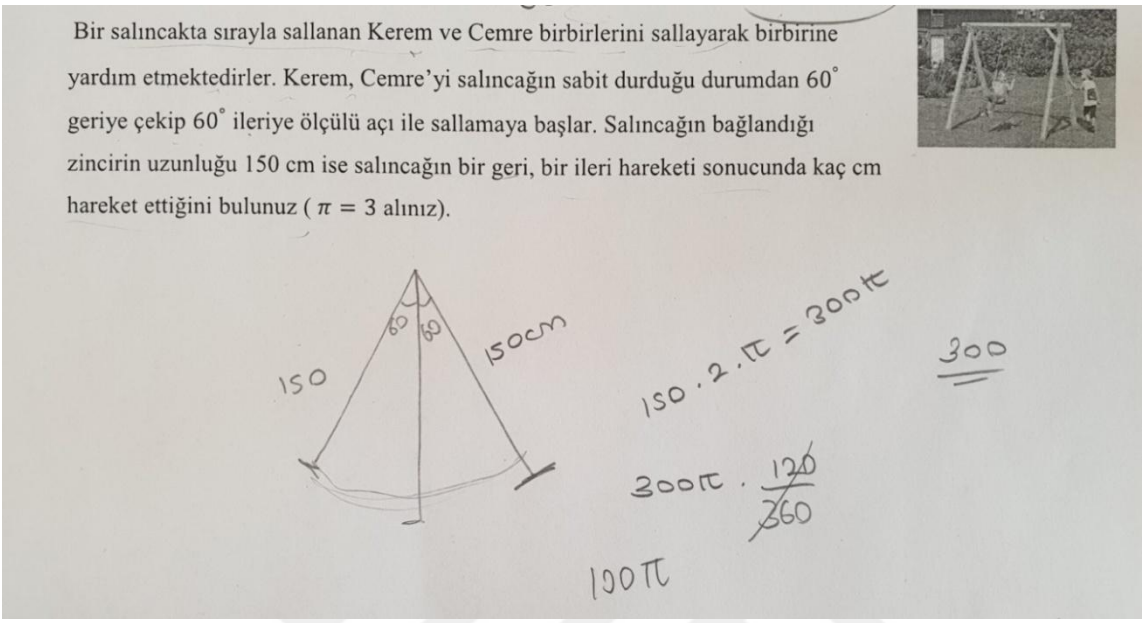
$$300\pi.\frac{120}{360} = 100\pi.$$ π'yi 3 alın demiş 300 (Bkz. Şekil 68).

Pelin salıncağın hareketini yay parçası modeli ile temsil ediyor. Salıncağın hareketi ile oluşan açıyı belirliyor (41P). Salıncağın bağlandığı zincirin uzunluğunun, yay parçası

modelinin yarıçapı olduğunu yorumluyor (41P). Yay parçasının uzunluğunu hesaplamaya yönelik formülü kullanarak yay parçasının uzunluğunu hesaplıyor (42P).

Şekil 68

Pelin'in dördüncü soruya yönelik çözümü



Pelin salıncağın zincirinin bağlandığı noktanın bir dairenin merkezi, salıncağın zincirinin dairenin yarıçapı olduğunu ve salıncağın hareket etmesi ile bir yay parçası oluştuğunu yorumlayabilmiştir. Bu durum herhangi bir dışsal ipucu olmadan dairenin çevresi kavramına yönelik eylemleri yansıtabildiğinin göstergesidir. Yay parçasının uzunluğunu bulmaya yönelik formülü kullanarak yay parçasının uzunluğunu hesaplamıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat oran-orantı şemasını işe koşarak, yay parçasını gören merkez açı ile tam açı arasındaki ilişkiden yola çıkarak dairenin çevresi ile yay parçası uzunluğu arasında ilişki kurabilir ve istenilen yay uzunluğunu bulabilirdi. Sonuç olarak Pelin'in dairenin çevresini, oran-orantı kavramına kapsülleyemediği için yay parçasının uzunluğunu veren formülü kullandığı görülmektedir.

Beşinci soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Dairenin alan bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda, Pelin süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Pelin'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (P: Pelin).

51P: Buradan şuraya yarıçap çeksem 4 olur {bir dik üçgen oluşturuyor}.

52P: Burası 30, 60, 90 var, burası 30, burası 60 oluyor {dik üçgenin kenarları ile açıları arasında ilişki kuruyor}.

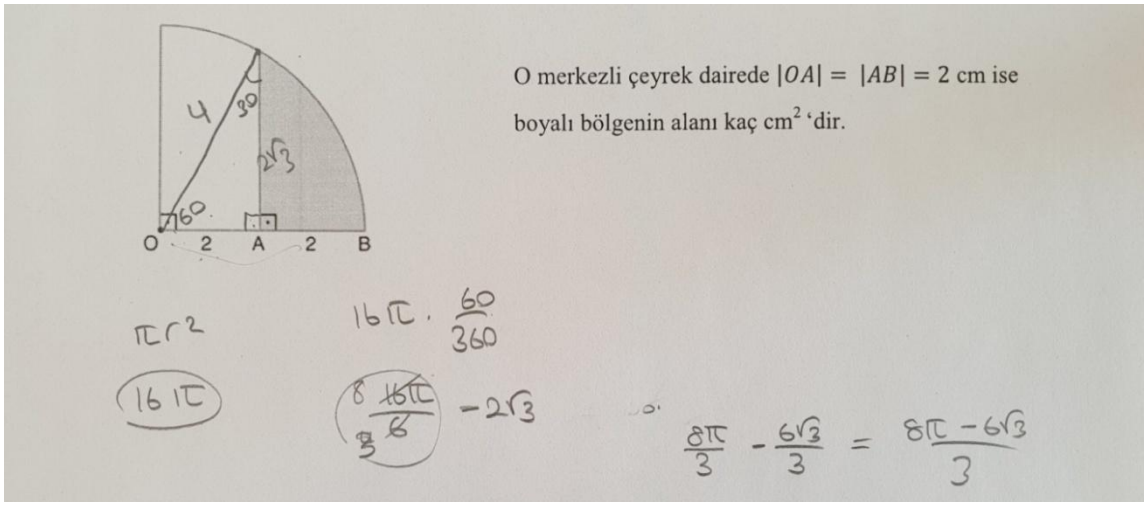
53P: Dairenin toplam alanı πr^2'den 16π. Burası 60°, $16\pi.\frac{60}{360} = \frac{16\pi}{6}$ çıkıyor {60°'lik daire diliminin alanını hesaplıyor}.

54P: Bundan {$\frac{16\pi}{6}$'yı kastediyor} üçgenin alanını çıkartacağım. Bu da $\frac{2.2\sqrt{3}}{2}$'den $2\sqrt{3}$ {dik üçgenin alanını hesaplıyor}.

55P: {Burada $\frac{16\pi}{6} - 2\sqrt{3}$ işlemini yapıyor ve sonucu $\frac{8\pi-6\sqrt{3}}{3}$ buluyor.} Bu da boyalı bölge oluyor (Bkz. Şekil 69).

Şekil 69

Pelin'in beşinci soruya yönelik çözümü



Pelin dairenin yarıçapını çizerek daire dilimi oluşturuyor. Yarıçap çizerken alanı hesaplanabilecek bölgelerin oluşmasına dikkat etmektedir. Bu yüzden üçgen, daire dilimi ve yarıçapa yönelik bilgileri arasında koordinasyon sağlıyor. Bu koordinasyon sayesinde bir dik üçgen oluşturuyor (51P). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartarak dik üçgenin açılarını ve kenar uzunluğunu buluyor (52P). Daire diliminin alanını hesaplamaya yönelik formülü kullanarak merkez açısı 60° olan daire diliminin alanını hesaplıyor (53P). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve dik üçgenin alanını hesaplıyor (54P). Merkez açısı 60° olan daire diliminin alanını ve dik üçgenin alanını bir arada düşünerek boyalı bölgenin alanını buluyor (55P).

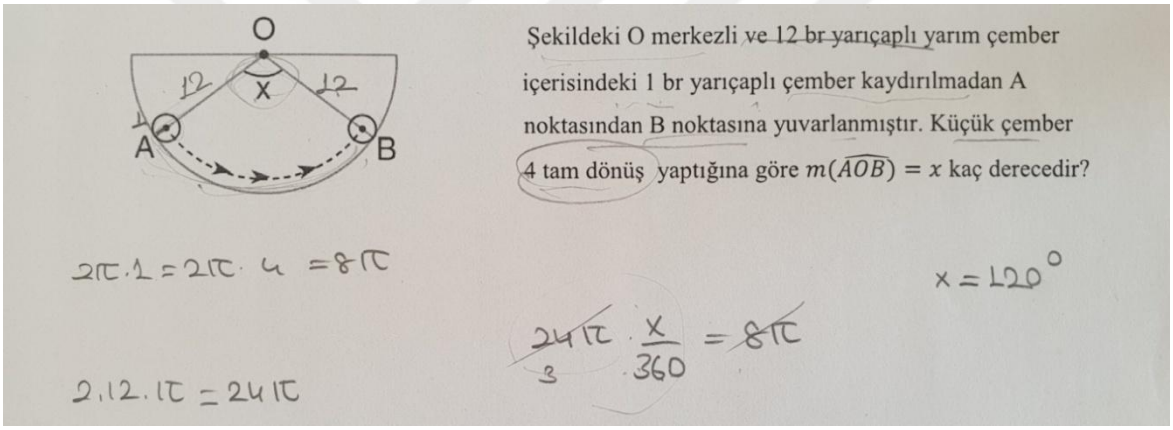
Pelin daire ve üçgene yönelik bilgilerini koordine ederek boyalı olmayan bölgeyi, alanı hesaplanabilir bölgelere ayırmayı planlamıştır. Bu düşüncesini uygulamak için dairenin yarıçapını çizmiştir. Yarıçapın bir dik üçgenin kenarı olmasını sağlamıştır. Daire diliminin alanını bulmaya yönelik formülü ve üçgenin alan formülünü kullanarak boyalı kısmın alanını hesaplamıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat oran-orantı şemasını işe koşarak boyalı bölgenin alanını hesaplayabilirdi. Bunun için daire

diliminin merkez açısı ile tam açı arasında ilişki kurması ve bu ilişkiden yola çıkarak dairenin alanı ile daire diliminin alanı arasında ilişki kurması gerekiyordu. Dairenin alanı kavramıyla orantı kavramını koordineli kullanarak merkez açısı 60° olan daire diliminin alanını bulabilir ve elde ettiği sonuçtan dik üçgenin alanını çıkartarak sonuca ulaşabilirdi. Sorunun çözümünde üçgen, cebirsel ifadeler ve dairenin alanına yönelik bilgilerini koordine ettiği görülmektedir. Sonuç olarak Pelin'in dairenin alanını, oran-orantı kavramına kapsülleyemediği için daire diliminin alanına yönelik formülü kullandığı görülmektedir.

Altıncı soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çemberin çevre bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda Pelin süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Pelin'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 70'de sunulmuştur (P: Pelin).

Şekil 70

Pelin'in altıncı soruya yönelik çözümü



61P: Bunun bir tam turu $2.\pi.1$'den 2π {küçük çemberin çevresini hesaplıyor},

62P: 4 yaptıysa 8π gitmiş {küçük çemberin aldığı yolu hesaplıyor}.

63P: Bu çemberin {O merkezli çemberi kastediyor} çevresi $2.12\pi = 24\pi$.

64P: $24\pi.\frac{x}{360} = 8\pi$ olur {x°'lik yay parçasının uzunluğu ile küçük çemberin aldığı yol arasında ilişki kuruyor}. Buradan 120 oluyor.

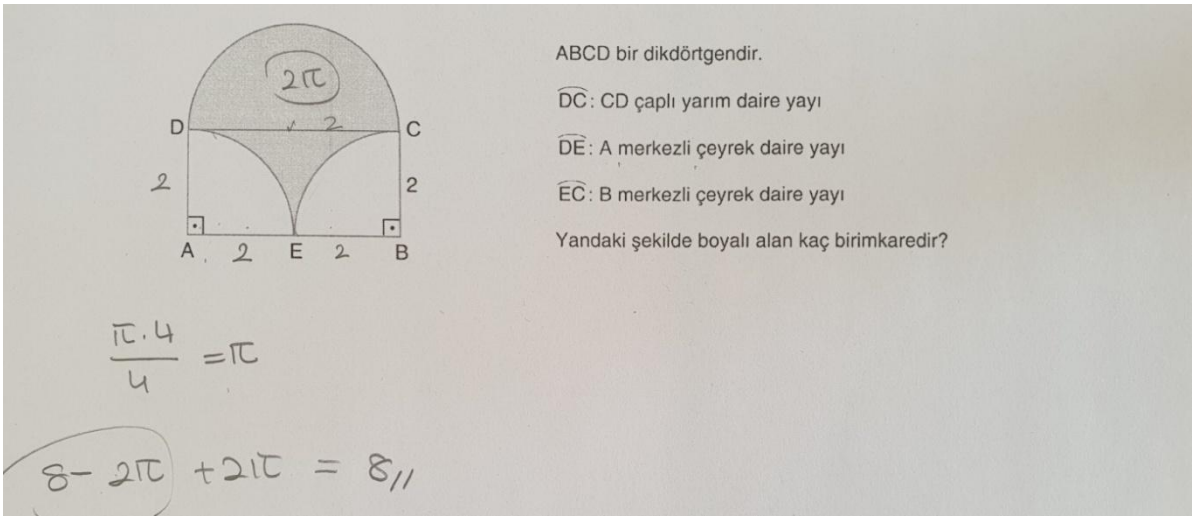
Pelin küçük çemberin çevresini hesaplıyor (61P). Küçük çemberin çevresi ile dönme sayısı arasında ilişki kuruyor ve küçük çemberin aldığı yolu buluyor (62P). Aynı zamanda küçük çemberin aldığı yolu göz önünde bulundurarak AB yayının uzunluğunu yorumluyor. O merkezli çemberin çevresini hesaplıyor (63P). AB yayının uzunluğu ile büyük çemberin çevresi arasında ilişki kuruyor ve yay parçasının uzunluğunu veren formülü kullanarak istenilen açıyı buluyor (64P).

Pelin sorunun çözümüne küçük çemberin çevresi ile dönme sayısı arasında ilişki kurarak başlamıştır. Önce küçük çemberin aldığı yol ile AB yayının uzunluğu arasında daha sonra ise AB yayının uzunluğu ile O merkezli çemberin çevresi arasında koordinasyon sağlamış ve istenilen açının ölçüsünü bulmuştur. İstenilen sonuca ulaşırken yay parçasının uzunluğunu veren formülü kullanmıştır. Herhangi bir dışsal ipucuna ihtiyaç duymadan AB yayının uzunluğu ile O merkezli çemberin çevresi arasında koordinasyon sağlayabilmesi onun çemberin çevresine yönelik eylemleri yansıtabildiğinin göstergesidir. Cebirsel ifadeler, denklemler ve dairenin çevresine yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarlamıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat oran-orantı şemasını işe koşarak yay parçasının uzunluğu ile O merkezli çemberin çevresi arasında ilişki kurabilir, bu ilişkiden yola çıkarak yay parçasını gören merkez açı ile tam açı arasında ilişki kurabilir ve istenilen açının ölçüsünü bulabilirdi. Sonuç olarak Pelin'in çemberin çevresini, oran-orantı kavramına kapsülleyemediği için yay parçasının uzunluğunu veren formülü kullandığı görülmektedir.

Yedinci soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" kazanımına yöneliktir. Dairenin alan bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda, Pelin süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Pelin'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 71'de sunulmuştur (P: Pelin).

Şekil 71

Pelin'in yedinci soruya yönelik çözümü



71P: Şurası 2 olacak {çeyrek çemberin yarıçapını yazıyor}.

72P: Bunun $\frac{1}{4}$'ünü bulacağım, $\frac{\pi.4}{4} = \pi$ {çeyrek dairenin alanını hesaplıyor} bundan 2 tane var 2π.

73P: Dikdörtgenin alanı 2.4'ten 8.

74P: $8-2\pi$ şu üçgene benzeyen kısım {dikdörtgen içindeki boyalı kısmı kastediyor}.
75P: Şu yarım daireninde yarıçapı 2, tamamı 4π , yarısıda 2π yapıyor {yarım dairenin alanını hesaplıyor}.
76P: Bununla bunu toplayacağım $\{8-2\pi+2\pi$ işlemini yapıyor}. Buradan 8 geliyor.

Pelin dikdörtgen ve çembere yönelik bilgilerini bir arada düşünerek dikdörtgenin kenar uzunluklarını buluyor (71P). Çeyrek dairenin alanını oran-orantı şemasını işe koşarak buluyor (72P). A ve B merkezli çeyrek dairelerin eş olduğunu fark ediyor ve çeyrek dairelerin toplam alanını buluyor (72P). Dikdörtgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve dikdörtgenin alanını hesaplıyor (73P). Dikdörtgenin ve dairenin alanı kavramlarını koordine ederek dikdörtgenin içindeki boyalı kısmın alanını hesaplıyor (74P). Dikdörtgenin uzun kenarının aynı zamanda yarım çemberin çapı olduğunu fark ediyor ve yarım dairenin alanını, oran-orantı şemasını işe koşarak hesaplıyor (75P). Dikdörtgenin içindeki boyalı kısmın alanı ile yarım dairenin alanını topluyor ve sonuca ulaşıyor (76P).

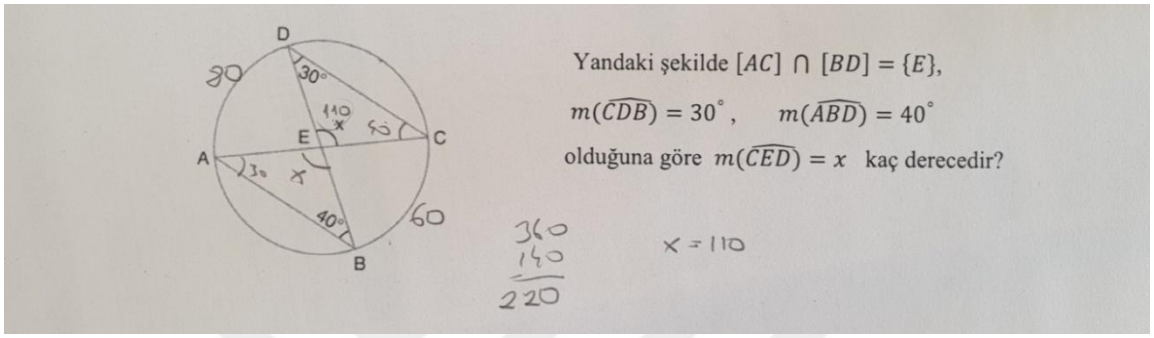
Pelin sorunun çözümü için dikdörtgen şamasını işe koşması gerektiğini fark ettiğinden dikdörtgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartmıştır. Dikdörtgen ve daireye yönelik bilgilerini koordine ederek önce dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmuş sonra dikdörtgen içindeki boyalı kısmın alanını hesaplamış ve elde ettiği sonuca yarım dairenin alanını ekleyerek istenilen sonucu bulmuştur. Daire dilimlerinin alanlarını hesaplarken oran-orantıya yönelik bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarlamıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat sorunun çözümünde A ve B merkezli çeyrek dairelerin eş olduğunu fark etmiş olsa da, üstteki yarım dairenin alanının, A ve B merkezli çeyrek dairelerin alanları toplamına eşit olduğunu fark edememiştir. Dolayısıyla şekildeki boyalı bölgenin alanının, dikdörtgenin alanına eşit olduğunu görememiştir. Bu durum yarım dairenin alanı ile çeyrek dairelerin alanları arasında ilişki kuramadığının göstergesidir. Sorunun çözümü için boyalı kısımlara odaklandığı için boyalı kısımların alanlarını ayrı ayrı bulmuş ve bulduğu alanları toplamıştır. Daire dilimlerinin alanlarını hesaplarken, daire diliminin alanını veren formülü kullanmak yerine oran-orantı şemasını işe koşmuş olsa da yarım dairenin alanı ile çeyrek dairelerin alanları arasında ilişki kuramamıştır. Eğer Pelin yarım dairenin alanı ile çeyrek dairelerin alanları arasında ilişki kurabilseydi, daire dilimlerinin alanlarını hesaplamasına gerek kalmayacaktı.

4.2.5. Taner'in Oluşan Bilgilerinin Analizi

Birinci soru "bir çemberde merkez, çevre, iç, dış ve teğet-kiriş açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapar" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çemberde açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapmaya yönelik olan bu soruda, Taner nesne düzeyinde davranış sergilemektedir. Taner'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 72'de sunulmuştur (T: Taner).

Şekil 72

Taner'in birinci soruya yönelik çözümü



11T: Burada çevre açıdan bu yayın açısı 2 katından 60 {BC yayını buluyor} burası da 80 {AD yayını buluyor} oluyor. Burası da x {$(\widehat{AEB})$'nı kastediyor} burası merkez değil {E noktasını kastediyor}.

{Burada biraz sessizce düşünüyor.}

12T: Bu ikisi {AD ve BC yaylarını ölçüleri toplamını kastediyor} 140'sa buralar da {AB ve DC yaylarını ölçüleri toplamını kastediyor} 140 ama 360'dan çıkarınca 140 değilde 220 {AB yayı ile DC yayının ölçüleri toplamını buluyor}.

13T: Hımm tamam. Burası {AD yayını kastediyor} 80'se burası {$(\widehat{ACD})$'nı kastediyor} 40 olur aynı yayı gördüğü için.

14T: Buraya iç açılar 180'den 110 kalır , $x = 110$ {DEC üçgeninde iç açıları topluyor}.

Taner $(\widehat{ABD})$'nın ve $(\widehat{BDC})$'nın çevre açı olduğunu fark ediyor ve çemberde açıya yönelik önceden oluşturduğu kavramları kullanarak, çevre açıların gördüğü yayların ölçülerini buluyor (11T). Çemberin bütünü ile çevre açıların gördüğü yayları ilişkilendiriyor ve AB yayının ölçüsü ile CD yayının ölçüsü toplamını buluyor (12T). Aynı yayı gören çevre açılar arasında ilişki kuruyor ve $m(\widehat{ABD})$ ile $m(\widehat{ACD})$'nün aynı olduğunu fark ediyor (13T). Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve istenilen açının ölçüsünü buluyor (14T).

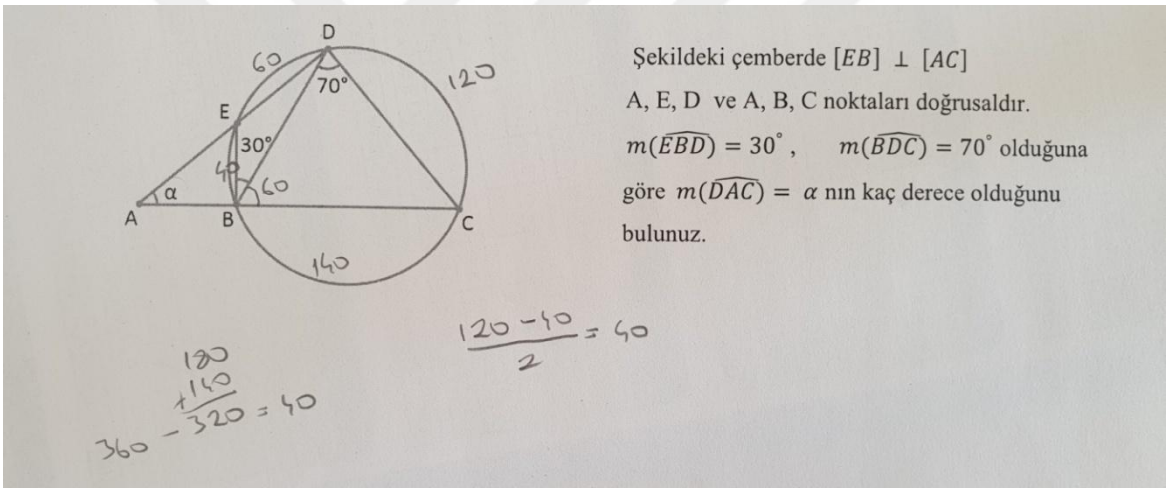
Taner önce ölçüsü verilen çevre açıların gördüğü yayların ölçüsünü bulmuş, daha sonra çemberi bütün olarak düşünerek AB ve DC yaylarının ölçüleri toplamını bulmuştur.

Fakat bu veriyi daha sonra kullanmamıştır. ($\widehat{ABD}$) ile ($\widehat{ACD}$)'nın aynı yayı gördüğünü dolayısıyla ölçülerinin aynı olduğunu fark etmiştir. Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlamış ve CDE üçgeninin iç açılar toplamını kullanarak istenilen açının ölçüsünü bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Sonuç olarak Taner'in çemberin açısını, üçgenin açısına kapsülleyebildiği görülmektedir.

İkinci soru "bir çemberde merkez, çevre, iç, dış ve teğet-kiriş açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapar" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çemberde açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapmaya yönelik olan bu soruda, Taner süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Taner'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 73'te sunulmuştur (T: Taner).

Şekil 73

Taner'in ikinci soruya yönelik çözümü



21T: BE, AC'ye dikmiş. Buraya {($\widehat{DBC}$)'nı kastediyor} 60 kalır.

22T: Burası çevre açıdan burası {ED yayını kastediyor} 60. Burada çevre açıdan 140, BC yayı. Burası da {DC yayını kastediyor} 120.

23T: Bir tek şurası {EB yayını kastediyor} kaldı bilmediğimiz. Üçünü {ED yayı, DC yayı ve BC yayını kastediyor} toplayınca 320. 360'dan çıkartınca 40 kaldı. Burası {EB yayını kastediyor} 40.

24T: Şu açıyı {($\widehat{CAD}$)'nı kastediyor} bulmak için şöyle doğrularda $(120 - 40)$ yapıp 2'ye böldüğümüzde 40 çıkıyor.

Taner açılara yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kullanarak $m(\widehat{DBC})$'nü buluyor (21T). ($\widehat{BDC}$)'nın, ($\widehat{CBD}$)'nın ve ($\widehat{DBE}$)'nın çevre açı olduğunu fark ediyor ve çemberde açıya yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kullanarak çevre açıların gördüğü yayların

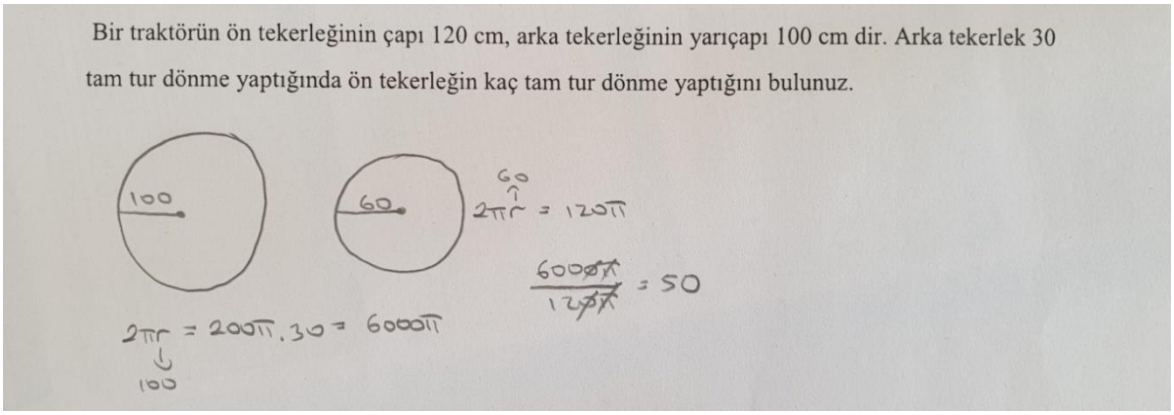
ölçülerini buluyor (22T). Çemberin bütünü ile çevre açıların gördüğü yayları ilişkilendiriyor ve EB yayının ölçüsünü buluyor (23T). Çemberde dış açıyı bulmaya yönelik formülü kullanarak istenilen açının ölçüsünü buluyor (24T).

Taner sorunun çözümünde önceden öğrendiği formülü kullanmaya odaklandığından DC yayı ile EB yayının ölçülerini bulmaya yönelik bir yaklaşım sergilemiştir. Önce ölçüsü verilen çevre açıların gördüğü yayların ölçüsünü bulmuş, bu yay ölçülerini toplamış ve daha sonra çemberi bütün olarak değerlendirerek EB yayının ölçüsünü bulmuştur. Daha sonra çemberde dış açıyı bulmaya yönelik formülü kullanarak istenilen açının ölçüsünü bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat üçgen şemasını işe koşarak m$(\hat{C})$'nü, buradan yola çıkarak çemberde açı ve üçgene yönelik bilgilerini koordine ederek $m(\widehat{ADB})$'nü bulabilirdi. Daha sonra ABD üçgenini kullanarak istenilen açının ölçüsüne ulaşabilirdi. Sonuç olarak Taner'in çemberin açısını, üçgenin açısına kapsülleyemediği için çemberde dış açı formülünü kullandığı görülmektedir.

Üçüncü soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Dairenin çevre bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda, Taner süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Taner'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 74'te sunulmuştur (A:Araştırmacı, T: Taner).

Şekil 74

Taner'in üçüncü soruya yönelik çözümü



31T: Bir traktörün ön tekerleği, bunu çizeyim. Çapı 120 cm o zaman yarıçapı 60 cm. Arka tekerleğin yarıçapı 100, çapı 200 olur. Arka tekerlek, bu tekerlek çemberin çevresi $2\pi r$'den 200π çevresi.

32T: 30 tam tur dönme yaptığında 6000π.

33T: Bunun çevresi $2.\pi.r$'den 120π {ön tekerleği kastediyor}.

34T: Kaç tam tur dönme yaptığında, bu kadar, 6000π'yi 120π'ye bölersek 50.

A: Niye 120π'ye böldün.

35T: Bu o kadar döndüğünde o ne kadar dönmüş, onu bulmak için.

A: 6000π ile 120π arasında nasıl bir ilişki kurdun.

36T: Bu böyle bir düzlemde 6000π kadar ilerlemiş oluyor, bu da 6000π kadar ilerlerse, ne kadar çevresine oranla.

Taner soruda verilenleri model üzerinde gösteriyor ve arka tekerleğin çevresini hesaplıyor (31T). Arka tekerleğin çevresi ile dönme sayısını birlikte düşünerek arka tekerleğin aldığı yolu buluyor (32T). Ön tekerleğin çevresini hesaplıyor (33T). Arka tekerleğin aldığı yolu ön tekerleğin çevresine bölerek ön tekerleğin kaç tur döndüğünü buluyor (34T). Ön tekerleğin dönme sayısını hesaplarken arka ve ön tekerleğin aldığı yol arasında ilişki kuruyor (35T, 36T).

Taner sorunun çözümünde dairenin çevresini hesaplamaya yönelik formülü kullanmaya odaklanmıştır. Bunun için arka tekerleğin çevresini hesaplamış ve bulduğu sonucu dönme sayısıyla çarparak arka tekerleğin dolayısıyla ön tekerleğin aldığı yolu bulmuştur. Ön tekerleğin çevresini hesaplamış ve ön tekerleğin aldığı yolu çevresine bölerek ön tekerleğin kaç tur döndüğünü bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat oran-orantı şemasını işe koşarak ön tekerleğin kaç tur döndüğünü bulabilirdi. Bunun için tekerleklerin yarıçapı ile dönme sayıları arasındaki ters ilişkiyi fark etmesi gerekiyordu. Böylece çemberin çevresini hesaplamaya yönelik formüle ihtiyaç duymadan dönme sayısını bulabilirdi. Sonuç olarak Taner'in dairenin çevresini, oran-orantı kavramına kapsülleyemediği için dairenin çevresi formülünü kullandığı görülmektedir.

Dördüncü soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Dairenin çevre bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda, Taner nesne düzeyinde davranış sergilemektedir. Taner'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (T: Taner).

41T: Salıncak böyle bir hareket yapıyor şöyle {çizim yapıyor}. Burası üst kısım olsa bu da sabit durduğundaki çizgisi olsa.

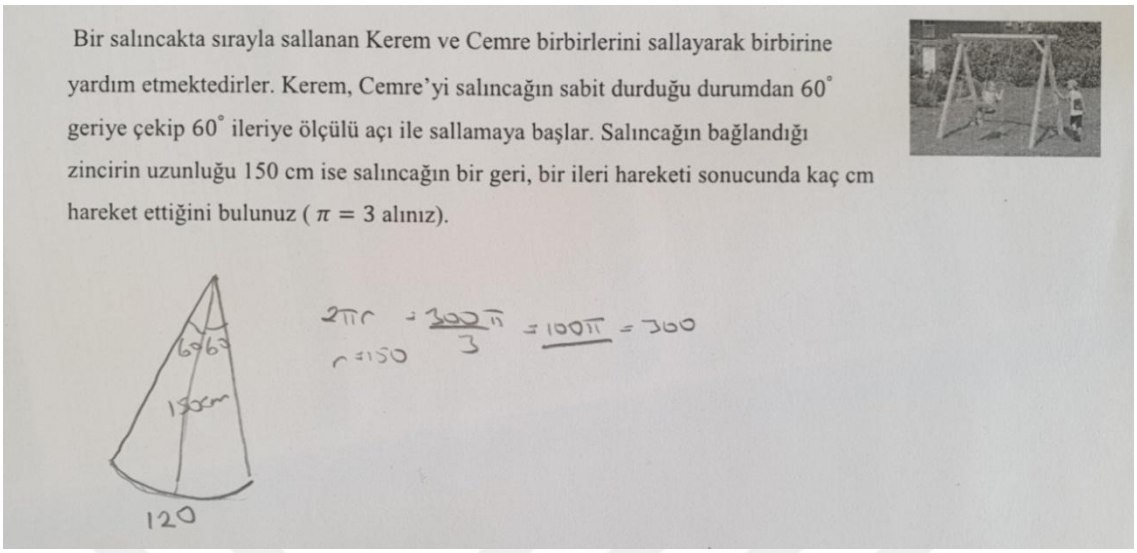
42T: 60 geriye geliyor 60 ileriye gidiyor. Burasını merkez kabul ettiğimizde burası 120 oluyor.

43T: Şurası yarıçap 150 santimetreymiş.

44T: Buranın {yay parçasını kastediyor} uzunluğunu soruyor sanırım. Toplam çevreyi buluruz önce. $2\pi r$'den 300π çevresi. 120° yani 360'ın 3'te1'i. O zaman bunu da 3'e bölersek 100π. 300 olur (Bkz. Şekil 75).

Şekil 75

Taner'in dördüncü soruya yönelik çözümü



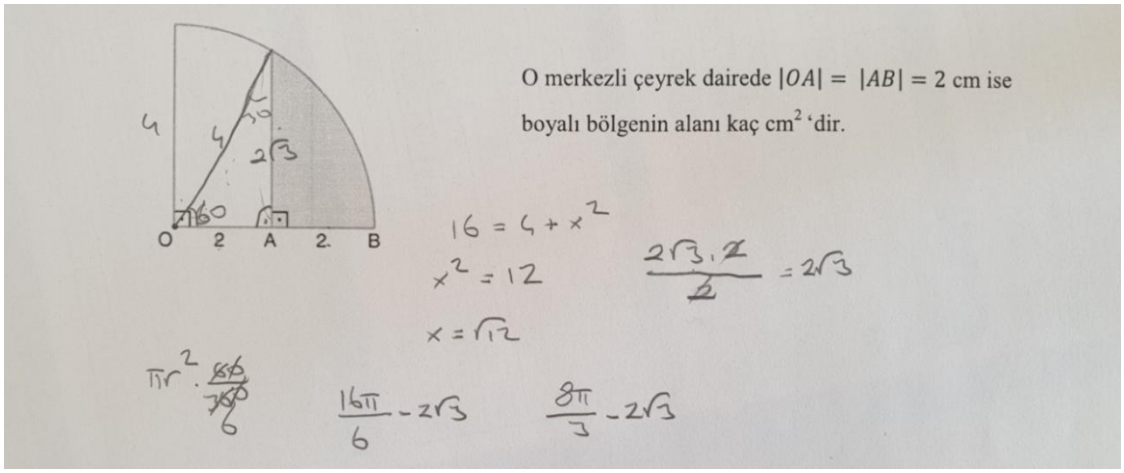
Taner salıncağın hareketini yay parçası modeli ile temsil ediyor (41T). Salıncağın hareketi ile oluşan açıyı belirliyor (42T). Salıncağın bağlandığı zincirin uzunluğunun, yay parçası modelinin yarıçapı olduğunu yorumluyor (43T). Önceden oluşturduğu oran-orantı kavramına yönelik bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve yay parçasının uzunluğunu hesaplıyor (44T). Bu esnada cebirsel ifadelere yönelik bilgilerini de kapsülden çıkartıyor.

Taner salıncağın zincirinin bağlandığı noktanın bir dairenin merkezi, salıncağın zincirinin dairenin yarıçapı olduğunu ve salıncağın hareket etmesi ile bir yay parçası oluştuğunu yorumlayabilmiştir. Bu durum herhangi bir dışsal ipucu olmadan dairenin çevresi kavramına yönelik eylemleri yansıtabildiğinin göstergesidir. Yay parçasının uzunluğunu hesaplarken oran-orantı şemasını işe koşmuştur. Yay parçasını gören merkez açı ile tam açı arasında ilişki kurmuş ve bu ilişkiden yola çıkarak dairenin çevresi ile yay parçası uzunluğu arasında ilişki kurmuş ve istenilen yay uzunluğunu bulmuştur. Böylece yay parçasının uzunluğunu hesaplamaya yönelik formüle ihtiyaç duymadan istenilen sonuca ulaşmıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Sorunun çözümünde dairenin çevresi, cebirsel ifadeler ve oran-orantıya yönelik kavramları yeni duruma uyarladığı ve bu kavramları koordine ettiği görülmektedir. Sonuç olarak Taner dairenin çevresini, oran-orantı kavramına kapsülleyebilmiştir.

Beşinci soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Dairenin alan bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda, Taner süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Taner'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 76'da sunulmuştur (T: Taner).

Şekil 76

Taner'in beşinci soruya yönelik çözümü



51T: Yarıçap 4 oluyor burası da 4. Şöyle yaptığımızda {yarıçap çiziyor} burada yarıçap olduğu için burası da 4.

52T: Burası {$(\hat{A})$'nı kastediyor} 90°. Burada şuranın uzunluğunu bulmak için pisagordan $16 = 4 + x^2$, 4'ü karşıya atınca $x = \sqrt{12}$ yani $2\sqrt{3}$ olur burası.

53T: Üçgenin alanını bulursak {burada $\frac{2\sqrt{3}.2}{2}$ işlemini yapıyor} $2\sqrt{3}$ oluyor.

{Biraz sessizce bekliyor}

54T: Şu açıyı bilsem aslında daire diliminin alanından. 30, 60 90 mı var? Burası 30 olsa, böyle sanki doğrulama yapsam $\cos 60$, $\frac{1}{2}$'ydi. Tamam, doğru oldu.

55T: Buradan daire diliminin alanı $\pi r^2 . \frac{60}{360}$ 'dan {burada gerekli işlemleri yapıyor ve sonucu $\frac{16\pi}{3}$ buluyor}.

56T: Bu daire diliminin alanından $2\sqrt{3}$ olan üçgenin alanını çıkardığımızda burası kalıyor.

{Burada önce $\frac{16\pi}{3} - 2\sqrt{3}$ ifadesini yazıyor sonra düzenleyerek $\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$ ifadesini yazıyor}.

Taner dairenin yarıçapını çiziyor (51T). Yarıçap çizerken alanı hesaplanabilecek bölgelerin oluşmasına dikkat ediyor. Bu yüzden üçgen, daire dilimi ve yarıçapa yönelik bilgileri arasında koordinasyon sağlıyor. Bu koordinasyon sayesinde bir dik üçgen oluşturuyor. Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartarak dik üçgenin kenar uzunluğunu buluyor (52T). Üçgenin kenar uzunluğunu bulurken cebirsel ifadeler ve üçgene yönelik bilgilerini koordine ediyor. Üçgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve dik üçgenin alanını hesaplıyor (53T). Üçgenin kenarları ile açıları arasında ilişki kurarak üçgenin açılarını buluyor (54T). Bu esnada trigonometri bilgisini kapsülden çıkartıyor ve bulduğu açıların doğruluğunu kontrol ediyor. Daire diliminin alanını

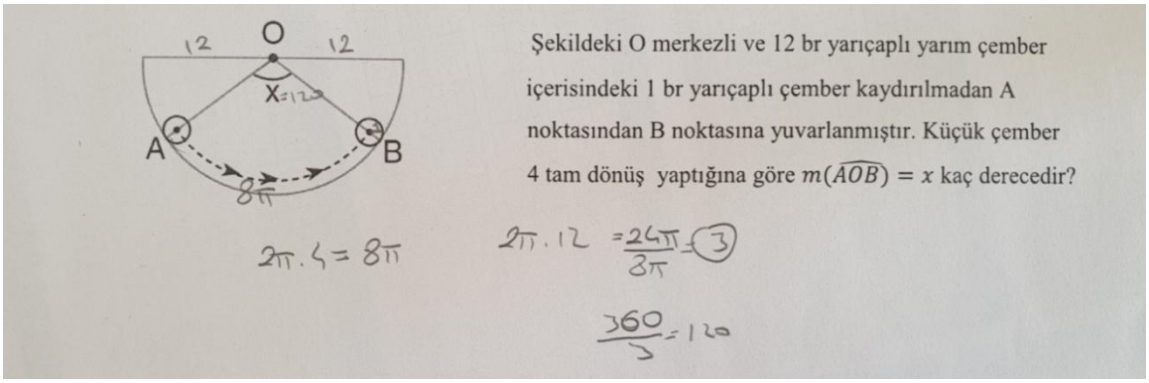
hesaplamaya yönelik formülü kullanarak merkez açısı 30° olan daire diliminin alanını hesaplıyor (55T). Merkez açısı 30° olan daire diliminin alanını ve dik üçgenin alanını bir arada düşünerek istenilen sonucu buluyor (56T).

Taner daire ve üçgene yönelik bilgilerini koordine ederek boyalı olmayan bölgeyi, alanı hesaplanabilir bölgelere ayırmayı planlamıştır. Bu düşüncesini uygulamak için dairenin yarıçapını çizmiştir. Yarıçapın dik üçgenin kenarı olmasını sağlamıştır. Daha sonra daire diliminin alanına yönelik formülü ve üçgenin alan formülünü kullanarak boyalı kısmın alanını hesaplamıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat oran-orantı şemasını işe koşarak boyalı bölgenin alanını hesaplayabilirdi. Bunun için daire diliminin merkez açısı ile tam açı arasında ilişki kurması ve bu ilişkiden yola çıkarak dairenin alanı ile daire diliminin alanı arasında ilişki kurması gerekiyordu. Dairenin alanı kavramıyla orantı kavramını koordineli kullanarak merkez açısı 60° olan daire diliminin alanını bulabilir ve elde ettiği sonuçtan dik üçgenin alanını çıkartarak sonuca ulaşabilirdi. Sorunun çözümünde üçgen, cebirsel ifadeler, denklemler ve dairenin alanına yönelik bilgilerini koordine ettiği görülmektedir. Sonuç olarak Taner'in dairenin alanını, oran-orantı kavramına kapsülleyemediği için daire diliminin alanına yönelik formülü kullandığı görülmektedir.

Altıncı soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Çemberin çevre bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda Taner nesne düzeyinde davranış sergilemektedir. Taner'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı Şekil 77'de sunulmuştur (A:Araştırmacı, T: Taner).

Şekil 77

Taner'in altıncı soruya yönelik çözümü



61T: Yarıçapı 12'miş, buralar 12. Küçük çemberin çevresi 2π oluyor. Yarıçap, 1 olduğu için.

62T: Çarpı 4'ten çünkü 4 kez dönüş yapmış, burası {AB yayını kastediyor} 8π oluyor.

63T: Dairenin çevresi $2.\pi.12$'den 24π.

64T: 8π ise 3'te 1'i oluyor o zaman burası 120 oluyor.

A: Nasıl bir ilişki kurdun.

65T: Tamamının çevresi 24π'ymiş yani bunu 8π'ye bölersek 3 oluyor 3'te 1'i. O zaman açı olarak da 3'te 1'i olması lazım. Çünkü burayı gördüğünden.

Taner küçük çemberin çevresini hesaplıyor (61T). Küçük çemberin çevresi ile dönme sayısı arasında ilişki kuruyor ve küçük çemberin aldığı yolu buluyor (62T). Aynı zamanda küçük çemberin aldığı yolu göz önünde bulundurarak AB yayının uzunluğunu yorumluyor. O merkezli çemberin çevresini hesaplıyor (63T). Oran-orantı şemasını işe koşuyor ve AB yayının uzunluğu ile büyük çemberin çevresi arasında ilişki kuruyor (64T, 65T).

Taner sorunun çözümüne küçük çemberin çevresi ile dönme sayısı arasında ilişki kurarak başlamıştır. Önce küçük çemberin aldığı yol ile AB yayının uzunluğu arasında daha sonra ise AB yayının uzunluğu ile O merkezli çemberin çevresi arasında koordinasyon sağlamış ve istenilen açının ölçüsünü bulmuştur. AB yayının uzunluğu ile O merkezli çemberin çevresi arasında koordinasyon sağlarken yay parçasının uzunluğunu veren formülü kullanmak yerine oran-orantı şemasını işe koşmuştur. Önce AB yayının uzunluğu ile O merkezli çemberin çevresi arasında ilişki kurmuş, bu ilişkiden yola çıkarak AB yayını gören merkez açı ile tam açı arasında ilişki kurmuştur. Oran-orantı ve çemberin çevresine yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini kapsülden çıkartarak yeni duruma uyarlamıştır. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Sonuç olarak Taner'in çemberin çevresini, oran-orantı kavramına kapsülleyebildiği görülmektedir.

Yedinci soru "dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur" (MEB, 2018) kazanımına yöneliktir. Dairenin alan bağıntısını oluşturmaya yönelik olan bu soruda, Taner süreç düzeyinde davranış sergilemektedir. Taner'in bu sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı aşağıda sunulmuştur (T: Taner).

71T: Burası 2 ise burası da 2'dir. Yarıçapsa bunlarda 2. O zaman yarım dairenin çapı 4 olur.

72T: Tüm alanı bulup çeyrek daireleri çıkarırsak. Önce dikdörtgenin alanı 2.4'ten 8 br^2.

73T: Yarım dairenin alanı $\frac{\pi r^2}{2}$ formülünden $\frac{\pi.4}{2}$ 'den 2π.

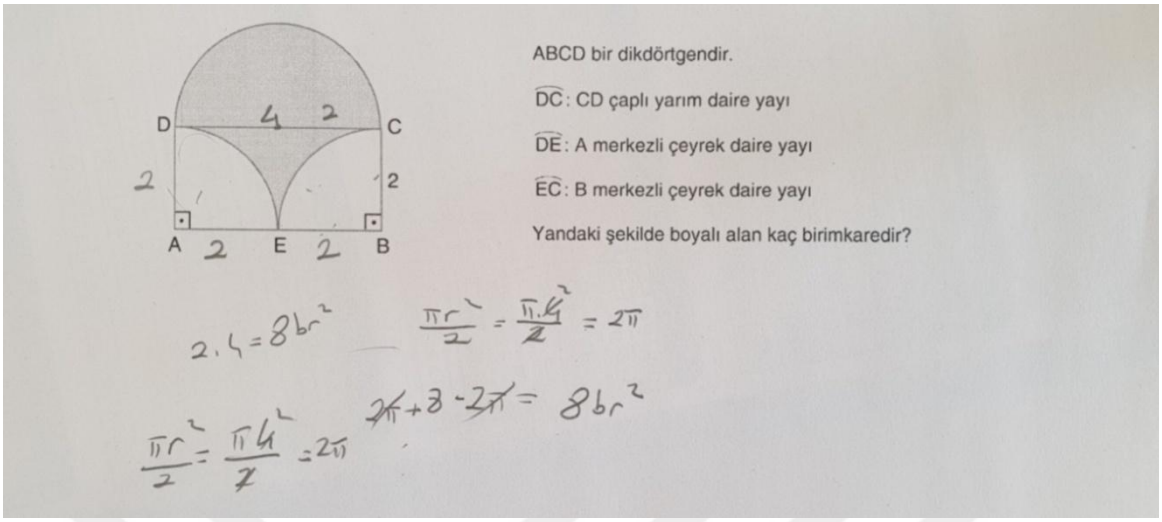
74T: Yani tüm alanın toplamı $2\pi + 8$.

75T: Sonra çeyrek dairelerden çıkarmamız lazım. Bu ikisi aynı zaten {çeyrek daireleri kastediyor} bunu yarım daire gibi düşünebiliriz 2 çeyrek 1 yarım eder. $\frac{\pi r^2}{2}$ 'den aynı çıkıyor zaten yarım dairenin alanıyla aynı çıkıyor {yarım daire ile 2 çeyrek daire arasında koordinasyon sağlıyor}. Yarıçap 2, burası da 2π olur yani bu ikisinin {çeyrek daireleri kastediyor} toplamı direk 2π.

76T: { $2\pi + 8 - 2\pi$ işlemini yapıyor} 8 br^2 (Bkz. Şekil 78).

Şekil 78

Taner'in yedinci soruya yönelik çözümü



Taner dikdörtgen ve çembere yönelik bilgilerini bir arada düşünerek dikdörtgenin kenar uzunluklarını buluyor (71T). Aynı zamanda dikdörtgenin uzun kenarının, yarım çemberin çapı olduğunu fark ediyor. Dikdörtgene yönelik önceden oluşturduğu bilgilerini yeni duruma uyarlıyor ve dikdörtgenin alanını hesaplıyor (72T). Sonra yarım dairenin alanını hesaplıyor (73T). Bu esnada cebirsel ifadelere yönelik bilgilerini de kapsülden çıkartıyor. Dikdörtgenin alanı ile yarım dairenin alanını topluyor ve şeklin alanını buluyor (74T). A ve B merkezli çeyrek dairelerin eş olduğunu ve bu dairelerin alanları toplamının yarım dairenin alanına eşit olduğunu fark ediyor. Yarım dairenin alanını hesaplıyor (75T). A ve B çeyrek dairelerin alanları toplamının yarım dairenin alanına eşit olduğunu fark ediyor (75T). Şeklin alanından, çeyrek dairelerin alanları toplamını çıkararak boyalı kısmın alanını buluyor (76T).

Taner dikdörtgen ve daireye yönelik bilgilerini koordine ederek dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmuştur. Yarım dairenin alanını hesaplamış daha sonra dikdörtgen ve dairenin alanına yönelik bilgilerini koordine ederek tüm şeklin alanını bulmuştur. İki çeyrek daire arasında koordinasyon sağlayarak bunların eş olduğunu ve bu dairelerin alanları toplamını bulmak için aynı yarıçaplı yarım dairenin alanını hesaplamanın yeterli olacağını fark etmiştir. Tüm şeklin alanı ile çeyrek dairelerin alanları arasında koordinasyon sağlayarak istenilen sonucu bulmuştur. Sorunun çözümü için herhangi bir dışsal yardıma ihtiyaç duymamıştır. Fakat sorunun çözümünde A ve B merkezli çeyrek dairelerin eş olduğunu fark etmiş olsa da, üstteki yarım dairenin alanının, A ve B merkezli çeyrek dairelerin alanları toplamına eşit olduğunu fark edememiştir. Dolayısıyla Taner şekildeki boyalı bölgenin alanının, dikdörtgenin alanına eşit olduğunu görememiştir.

Araştırmanın ikinci alt problemine yönelik öğrencilerle yapılan yarı yapılandırılmış görüşme verilerinin analizi sonucu öğrencilerde ortaya çıkarılan bilişsel yapılar Tablo 5'te özetlenmiştir.

Tablo 5

İkinci alt probleme yönelik öğrencilerde tespit edilen bilişsel yapılar

	Gülay	Merve	Nazlı	Pelin	Taner
1. soru	Süreç	Eylem	Süreç	Süreç	Nesne
2. soru	Süreç	Süreç	Süreç	Süreç	Süreç
3. soru	Süreç	Süreç	Süreç	Süreç	Süreç
4. soru	-	Süreç	Süreç	Süreç	Nesne
5. soru	Süreç	-	-	Süreç	Süreç
6. soru	Eylem	Süreç	Süreç	Süreç	Nesne
7. soru	Süreç	Süreç	Süreç	Süreç	Süreç

5. BÖLÜM
SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu kısımda çalışmadan elde edilen sonuçlara, bu sonuçların referans gösterilerek tartışılmasına ve önerilere yer verilmiştir.

5.1. Sonuç

Araştırmanın alt problemleri olan, 10. sınıf öğrencilerinin çokgenler ve dörtgenler konularına yönelik bilgileri APOS teorisine göre hangi düzeydedir? ve 11. sınıf öğrencilerinin çember ve daire konularına yönelik bilgileri APOS teorisine göre hangi düzeydedir? sorularına cevap bulabilmek için her sınıf düzeyinde 5'er öğrenci ile klinik mülakatlar yapılmıştır. Araştırmacı, önce ortaöğretim matematik öğretim programındaki çokgenler, dörtgenler, çember ve daire konularına yönelik kazanımları belirlemiştir. Daha sonra ise araştırmacı Milli Eğitim Bakanlığı tarafından ortaöğretim matematik dersinde kullanılması uygun bulunan ders kitaplarından, belirlediği kazanımlara uygun sorular seçerek yarı yapılandırılmış mülakat soruları hazırlamıştır. Bu mülakat soruları kullanılarak öğrencilerin APOS teorisine göre bilgileri hangi seviyede yapılandırdıkları tespit edilmeye çalışılmıştır.

5.1.1. Birinci Alt Probleme Yönelik Sonuçlar

1. soru çokgen kavramını açıklayarak işlemler yapar kazanımına yönelik bir sorudur. Bu soruda 3 öğrencinin süreç, 2 öğrencinin nesne düzeyinde davranış sergiledikleri görülmektedir. Süreç düzeyinde davranış sergileyen öğrencilerin çokgenin kenarları arasında etkili bir ilişki kuramadıkları görülmektedir.

2. soru çokgen kavramını açıklayarak işlemler yapar kazanımına yönelik bir sorudur. Bu soruda 5 öğrencinin süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Süreç düzeyinde davranış sergileyen öğrencilerin sorunun çözümü için doğru yere odaklanamadıklarından çokgenin iç açılarını topladıkları görülmektedir. Öğrenciler çokgenin dış açılarını kullanmış olsalardı nesne düzeyinde davranış sergilemiş olacaklardı.

3. soru özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer kazanımına yönelik bir sorudur. Bu soruda bütün öğrencilerin süreç düzeyinde davranış sergiledikleri görülmektedir. Süreç düzeyinde davranış sergileyen öğrencilerin dörtgenin kenar özelliklerini etkili kullanamadıkları için çokgenin çevre uzunluğunu bulmak için çokgenin kenar uzunluklarını tek tek topladıkları görülmektedir. Öğrencilerin nesne düzeyinde davranış sergileyebilmeleri için çokgenin kenar uzunlukları ile küçük karenin kenar uzunlukları arasında ilişki kurabilmeleri ve böylece çokgenin çevresinin büyük karenin çevresine eşit olduğunu fark etmiş olmaları gerekiyordu.

4. soru özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer kazanımına yönelik bir sorudur. Bu soruda 4 öğrencinin süreç, 1 öğrencinin nesne düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Süreç düzeyinde davranış sergileyen öğrencilerin paralelkenar üzerinde adım adım işlem yaparak sonuca ulaştığı, nesne düzeyinde davranış sergileyen öğrencinin ise paralelkenarın kenar özelliklerini etkin bir şekilde kullanabildiğinden, paralelkenarın kenarları ve ikizkenar üçgenlerin kenarları arasında doğrudan ilişki kurabildiği görülmektedir.

5. soru özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer kazanımına yönelik bir sorudur. Bu soruda, 3 öğrencinin süreç, 1 öğrencinin nesne düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. 1 öğrenci ise işlem hatası yaptığı için değerlendirmeye alınmamıştır. Süreç düzeyinde davranış sergileyen öğrencilerin eşkenar dörtgenin alanına yönelik formülü kullandıkları, nesne düzeyinde davranış sergileyen öğrencinin ise üçgen şemasını işe koştuğu görülmektedir.

6. soru özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer kazanımına yönelik bir sorudur. Bu soruda 4 öğrencinin süreç, 1 öğrencinin nesne düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Süreç düzeyinde davranış sergileyen öğrencilerin yamuğun alanına yönelik formülü kullandıkları, nesne düzeyinde davranış sergileyen öğrencinin ise üçgen ve dikdörtgenin alanından yararlandığı görülmektedir.

7. soru özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer kazanımına yönelik bir sorudur. Bu soruda 3 öğrencinin süreç, 2 öğrencinin nesne düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Süreç düzeyinde davranış sergileyen öğrencilerin dikdörtgenin alanına yönelik formülü kullandıkları, nesne düzeyinde davranış sergileyen öğrencilerin ise üçgenin alanından yararlandıkları görülmektedir.

8. soru özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer kazanımına yönelik bir sorudur. Bu soruda bütün öğrencilerin süreç düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Süreç düzeyinde davranış gösteren öğrencilerin dikdörtgenin alanına yönelik formülü kullandıkları görülmektedir. Öğrenciler karenin alanını kullanarak dikdörtgenin alanını elde etmiş olsalardı nesne düzeyinde davranış sergilemiş olacaklardı.

9. soru özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer kazanımına yönelik bir sorudur. Bu soruda bütün öğrencilerin süreç düzeyinde davranış sergiledikleri görülmektedir. Süreç düzeyinde davranış gösteren öğrencilerin karenin alanına yönelik formülü kullandıkları görülmektedir. Öğrenciler karenin

alanının, karenin içinde oluşan üçgensel bölgelerin alanları toplamına eşit olduğunu fark etmiş olsalardı nesne düzeyinde davranış sergilemiş olacaklardı.

5.1.2. İkinci Alt Probleme Yönelik Sonuçlar

1. soru bir çemberde merkez, çevre, iç, dış ve teğet-kiriş açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapar kazanımına yönelik bir sorudur. Bu soruda 1 öğrencinin eylem, 3 öğrencinin süreç, 1 öğrencinin nesne düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Eylem düzeyinde davranış sergileyen öğrencinin çemberin yayları arasında ilişki kuramadığı, süreç düzeyinde davranış sergileyen öğrencilerin çemberde açıya yönelik kuralları kullandıkları, nesne düzeyinde davranış sergileyen öğrencinin ise üçgen şemasını işe koştuğu görülmektedir.

2. soru bir çemberde merkez, çevre, iç, dış ve teğet-kiriş açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapar kazanımına yönelik bir sorudur. Bu soruda bütün öğrencilerin süreç düzeyinde davranış sergiledikleri görülmektedir. Bu öğrencilerin çemberde açıya yönelik formülü kullandıkları, üçgen şemasını işe koşarak soruyu çözebileceklerini fark edemedikleri görülmektedir.

3. soru dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur kazanımına yönelik bir sorudur. Bu soruda bütün öğrencilerin süreç düzeyinde davranış sergiledikleri görülmektedir. Bu öğrencilerin çemberin çevresine yönelik formülü kullandıkları, oran-orantı şemasını işe koşarak soruyu çözebileceklerini fark edemedikleri görülmektedir.

4. soru dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur kazanımına yönelik bir sorudur. Bu soruda 1 öğrencinin soruyu çözemediği, 3 öğrencinin süreç, 1 öğrencinin nesne düzeyinde davranış sergiledikleri görülmektedir. Süreç düzeyinde davranış sergileyen öğrencilerin çember yayının uzunluğunu veren formülü kullandıkları, nesne düzeyinde davranış sergileyen öğrencinin ise oran-orantı şemasını işe koştuğu görülmektedir.

5. soru dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur kazanımına yönelik bir sorudur. 2 öğrencinin soruyu çözemediği 3 öğrencinin süreç düzeyinde davranış sergiledikleri görülmektedir. Süreç düzeyinde davranış sergileyen öğrencilerin daha önce öğrendikleri daire diliminin alanını bulmaya yönelik formülü kullandıkları görülmektedir. Bu soruda öğrenciler oran-orantı şemasını işe koşmak yerine daire diliminin alanını bulmaya yönelik formülü kullandıklarından nesne düzeyinde davranış sergileyememişlerdir.

6. soru dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur kazanımına yönelik bir sorudur. Bu soruda 1 öğrencinin eylem, 3 öğrencinin süreç, 1 öğrencinin nesne düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Eylem düzeyinde davranış sergileyen öğrencinin çemberin bütünü ile çemberin yay parçası arasında ilişki kuramadığından dışsal ipucuna ihtiyaç duyduğu, süreç

düzeyinde davranış sergileyen öğrencilerin çemberin yay uzunluğunu veren formülü kullandıkları, nesne düzeyinde davranış sergileyen öğrencinin ise oran-orantı şemasını işe koştuğu görülmektedir.

7. soru dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturur kazanımına yönelik bir sorudur. Bu soruda bütün öğrencilerin süreç düzeyinde davranış sergiledikleri görülmektedir. Bu soruda öğrencilerin daire dilimlerinin alanları arasında ilişki kuramadığı görülmektedir.

5.2. Tartışma

5.2.1. Birinci Alt Probleme Yönelik Tartışma

1. soru ve 2. soruda öğrencilerden çokgen kavramını etkin bir şekilde kullanmaları beklenmektedir. 1. soruda sınırlı sayıda öğrencinin çokgen kavramını etkin bir şekilde kullandığı görülmektedir. 2. soru ise çokgenin dış açılarının ölçüleri verilmesine rağmen bütün öğrencilerin çokgenin iç açılarını bulmaya yöneldiği dolayısıyla çokgen kavramını etkin bir şekilde kullanamadıkları tespit edilmiştir. 3. soruda öğrencilerden altıgenin kenar uzunlukları ile karenin kenar uzunlukları arasında ilişki kurabilmeleri ve altıgenin çevresinin karenin çevresine eşit olduğunu görebilmeleri beklenmektedir. Fakat öğrencilerin hiçbirinin altıgenin kenar uzunlukları ile karenin kenar uzunlukları arasında ilişki kuramadığı, öğrencilerin hepsinin altıgenin çevresini bulmak için altıgenin kenar uzunluklarını topladıkları görülmektedir. 4. soruda öğrencilerden paralelkenarın kenar özelliklerini etkin bir şekilde kullanabilmeleri beklenmektedir. Öğrenciler paralelkenarı bütün olarak değerlendirerek ikizkenar üçgenlerin ve paralelkenarın kenarları arasında doğrudan koordinasyon sağlayabilmeli ve bu sayede $|DE|$ ile $|FC|$ arasında doğrudan ilişki kurabilmelidirler. Fakat sadece bir öğrencinin paralelkenarın kenar özelliklerini etkin bir şekilde kullanabildiği, öğrencilerin büyük çoğunluğunun paralelkenar üzerinde adım adım işlem yaptıkları görülmektedir. Öğrencilerin çokgen kavramına yönelik sorulara verdikleri cevaplar APOS teorisi çerçevesinde incelendiğinde öğrencilerin daha çok süreç düzeyinde davranış sergiledikleri, sınırlı sayıda öğrencinin nesne düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Elde edilen bu sonuç alanyazında yapılan bazı çalışmaların sonuçları ile benzerlik göstermektedir (Fujita ve Jones, 2006; Öksüz ve Başışık, 2019; Akdemir ve Narlı, 2022).

Öksüz ve Başışık (2019) 5. sınıf öğrencileri üzerinde yaptıkları çalışmanın sonunda öğrencilerin çokgenlerin klasik formunu tanımakta zorlanmadıklarını fakat klasik formda olmayan çokgenlere yönelik kavram yanılgılarına sahip olduklarını, döndürülmüş şekilde verilen çokgenlerin özellikleri ile ilgili ve çokgenlerin köşegenlerine yönelik kavram yanılgılarına sahip olduklarını tespit etmişlerdir. Akdemir ve Narlı (2022) ortaokul öğrencileri

üzerinde yaptıkları çalışmanın sonunda öğrencilerin çoğunlukla tam bir çokgen kavramının tanımını yapamadıklarını tespit etmişlerdir. Fujita ve Jones (2006) yaptıkları çalışma sonunda sınıf öğretmeni adaylarının dörtgenler arasındaki hiyerarşik ilişki konusunda yeterli anlayışa sahip olmadıklarını tespit etmişlerdir. Fujita ve Jones (2007) yaptıkları çalışma sonunda 1. yılındaki sınıf öğretmeni adaylarının çoğunun özel dörtgenlerin doğru bir görüntüsünü (yamuk hariç) çizebildiğini ancak çok azının bu dörtgenlerin tanımlarını yapabildiklerini, aynı çalışmada 2. yılındaki sınıf öğretmeni adaylarının çoğunun eşkenar dörtgeni paralelkenar olarak değerlendirmediklerini, dört köşesi bir dairenin çevresi üzerinde olan bir paralelkenar çizmek mümkün müdür? sorusuna çok az öğrencinin bunun dikdörtgen olacağı cevabını verdiklerini tespit etmişlerdir. Pickreign (2007) 40 öğretmen adayıyla yaptığı çalışmanın sonunda 9 kişinin kareleri içeren ve dik açısı olmayan herhangi bir paralelkenarı hariç tutan, doğru olarak kabul edilebilecek bir dikdörtgen tanımını yaptığını, 22 kişinin dikdörtgenin iki kenarının diğer iki kenardan daha uzun olduğunu belirttiklerini ve bu 22 kişinin 16'sının dikdörtgenlerin dik açılara sahip olması gerektiğinden bahsetmediklerini, eşkenar dörtgen kavramına yönelik ise sadece 1 kişinin doğru yanıt verdiğini, 8 kişinin bir eşkenar dörtgenin dört kenarının eşit olması gerektiğini belirtmelerine rağmen kareyi dâhil etmediklerini tespit etmiştir.

5. soruda öğrencilerden eşkenar dörtgenin köşegen özelliklerini tanımaları ve eşkenar dörtgenin köşegen özelliklerine yönelik bilgileriyle üçgenin alanına yönelik bilgilerini koordine ederek eşkenar dörtgenin alanını bulmaları beklenmektedir. 6. soruda öğrencilerden yamuğun içinde üçgensel ve dikdörtgensel bölge oluşturmaları ve oluşturdukları bölgelerin alanlarından yararlanarak yamuğun alanını bulmaları beklenmektedir. 7. soruda öğrencilerden dikdörtgenin köşegen özelliklerini tanımaları ve dikdörtgenin köşegen özelliklerine yönelik bilgileriyle üçgenin alanına yönelik bilgilerini koordine ederek dikdörtgenin alanını bulmaları beklenmektedir. 9. soruda öğrencilerden karenin köşegen özelliklerini tanımaları ve dikdörtgenin köşegen özelliklerine yönelik bilgileriyle üçgenin alanına yönelik bilgilerini koordine ederek karenin alanını bulmaları beklenmektedir. Fakat sınırlı sayıda öğrencinin eşkenar dörtgenin alanı ile üçgenin alanı arasında, yamuğun alanı ile üçgenin ve dikdörtgenin alanı arasında ilişki kurabildiği, öğrencilerin büyük çoğunluğunun eşkenar dörtgenin ve yamuğun alan formüllerini kullandıkları görülmektedir. Öğrencilerin eşkenar dörtgenin, yamuğun, dikdörtgenin, karenin alanına yönelik sorulara verdikleri cevaplar APOS teorisi çerçevesinde incelendiğinde öğrencilerin daha çok süreç düzeyinde davranış sergiledikleri, sınırlı sayıda öğrencinin nesne düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Elde edilen bu

sonuç alanyazında yapılan bazı çalışmaların sonuçları ile benzerlik göstermektedir (Olkun ve diğerleri, 2014; Gürefe, 2018).

Olkun ve diğerleri (2014) yaptıkları çalışmanın sonucunda öğrencilerin standart sorularda formül kullanma eğiliminde olduklarını fakat başka yolları olmadığında farklı çözüm yolları aradıklarını tespit etmişlerdir. Gürefe (2018) yaptığı çalışmanın sonucunda eşkenar dörtgen ve yamuğun alanının hesaplanmasında, öğrencilerin çoğunun üçgen, kare veya dikdörtgenin alanını kullandıklarını ve bu yolu tercih eden öğrencilerin çoğunun verilen şekillerin alan formüllerini bilmediklerini tespit etmiştir.

Bu çalışmada dikdörtgenin alanı ile üçgenin alanı arasında 2 öğrencinin ilişki kurabildiği ve 3 öğrencinin ise dikdörtgenin alan formülünü kullandığı, karenin alanı ile üçgenin alanı arasında ise hiçbir öğrencinin ilişki kuramadığı ve bütün öğrencilerin karenin alan formülünü kullandığı tespit edilmiştir. Bu durumun ortaya çıkmasına, bilgilerin ezberlenmesinin, kavramsal öğrenmenin gerçekleşmemesinin neden olduğu söylenebilir. Gürefe (2018) yaptığı çalışmanın sonucunda öğrencilerin dikdörtgene yönelik alan problemlerinde genellikle formül kullandıklarını tespit etmiştir. Baturo ve Nason (1996) öğretmen adayları üzerine yaptıkları çalışma sonunda öğrencilerin çok azının üçgen ile dikdörtgen arasındaki ilişkiyi anlamlandırabildiklerini, öğrencilerin çoğunun üçgenin alanı ile onu çevreleyen dikdörtgenin alanı arasında ilişki kuramadıklarını, üçgenin alanını hesaplama formülünün bu öğrenciler için bir anlamının olmadığını ve niçin 2'ye bölünmesi gerektiğini açıklayamadıklarını tespit etmişlerdir. Huang ve Witz (2013) 4. sınıf öğrencileri üzerinde yaptıkları çalışma sonunda üçgenin ve paralelkenarın alanının bulunması istenen sorularda öğrencilerin çoğunluğunun formül kullandıklarını tespit etmişlerdir. Geleneksel uygulamada öğretmenler temel şekillerin alan ölçümüne ilişkin formülleri öğretme eğilimindedirler ve öğretmenler formüllerin uygulanmasının etkinliği üzerinde durur lar (Huang ve Witz, 2011). Fakat alan öğretiminde öğrencilere ilgili formülleri vermek ve sadece çeşitli çokgenlerin alanlarını hesaplatmak yeterli olmadığından, öğrencilerin alan kavramına yönelik anlayışları geliştirilmelidir (Manizade ve Mason, 2014). Alan öğretiminde öğrenciler çeşitli parçalara ayırma yöntemleriyle tanıştırılmalı, kendi varyasyonlarını bulmaları desteklenmeli, esnek düşünme, daha fazla anlayış ve ezberlenmiş alan formüllerine daha az güvenme teşvik edilmelidir (Vincent ve Stacey, 2009).

8. soruda öğrencilerden dikdörtgenin içine yerleştirilebilecek kare sayısı ile dikdörtgenin alanı arasında ilişki kurmaları beklenmektedir. Fakat hiçbir öğrencinin dikdörtgenin alanı ile karenin alanı arasında ilişki kuramadığı ve öğrencilerin hepsinin dikdörtgenin alanını veren formülü kullandıkları görülmektedir. Zacharos (2006) yaptığı

çalışmada alan ölçme araçlarının kullanımı ve alanı karelere bölme konusunda eğitim alan öğrencilerin, geleneksel eğitim alan öğrencilere göre alanları ölçmeye yönelik sorularda farklı stratejiler kullanmada daha başarılı olduklarını, öğrencilerin dikdörtgenin alanını doğru bir şekilde hesaplamak için formül kullandıklarını fakat öğrencilerin (özellikle kontrol grubu öğrencilerinin) elde ettikleri sayısal sonucun ne anlama geldiğini bilmediklerini tespit etmiştir. Kamii ve Kysh (2006) yaptıkları çalışmanın sonucunda 4. sınıftan 8. sınıfa kadar çoğu öğrenci için karenin alan birimi olmadığını, normal 8. sınıf matematik derslerindeki öğrencilerin yarısından azı için karenin alan birimi olduğunu, fakat ileri matematik derslerindeki 8. ve 9. sınıf öğrencileri için karenin alan birimi olduğunu, 8. sınıf öğrencileri için karenin yer kaplama özelliği olmadığını tespit etmişlerdir.

5.2.2. İkinci Alt Probleme Yönelik Tartışma

1. ve 2. sorularda öğrencilerden istenilen açıları bulmak için üçgende açıya yönelik bilgilerini kullanmaları beklenmektedir. Fakat sınırlı sayıda öğrencinin çemberin açısı ile üçgenin açısı arasında ilişki kurabildiği, öğrencilerin büyük çoğunluğunun çemberin iç ve dış açısını veren formülleri kullandıkları görülmektedir. 3. soruda öğrencilerden dairelerin yarıçapları arasında ilişki kurmaları ve böylece dairenin çevresini hesaplamadan istenilen sonuca ulaşmaları beklenmektedir. Fakat öğrencilerin hiçbirinin dairelerin yarıçapları arasında ilişki kuramadığı görülmektedir. Yay parçasıyla ilgili 4. ve 6. soruda öğrencilerden oran-orantı bilgilerini işe koşmaları beklenmektedir. Fakat sınırlı sayıda öğrencinin çemberin bütünü ile yay parçasının uzunluğu arasında koordinasyon sağlarken oran-orantı şemasını işe koştuğu, öğrencilerin büyük çoğunluğunun yay parçasının uzunluğunu veren formülü kullandıkları görülmektedir. Daire diliminin alanının hesaplanması istenen 5. soruda öğrencilerden daire dilimi oluşturmaları ve bu daire diliminin alanını hesaplamak için oran-orantı bilgilerini kullanmaları beklenmektedir. Fakat öğrencilerin hiçbirinin daire diliminin alanını hesaplarken oran-orantı şemasını işe koşmadığı, öğrencilerin büyük çoğunluğunun daire diliminin alanını veren formülü kullandıkları görülmektedir. 7. soruda öğrencilerden şekli bütün olarak değerlendirmeleri ve çeyrek dairelerin alanları ile yarım dairenin alanı arasında ilişki kurmaları ve böylece dairenin alanını hesaplamadan istenilen sonuca ulaşmaları beklenmektedir. Fakat öğrencilerin hiçbirinin çeyrek dairelerin alanları ile yarım dairenin alanı arasında ilişki kuramadıkları görülmektedir. Dolayısıyla öğrencilerin hepsinin daire dilimlerinin alanlarını hesaplama yoluna başvurdukları görülmektedir. Öğrencilerin çemberde açı, çemberin çevresi, çember parçasının uzunluğu, dairenin alanı, daire diliminin alanı kavramlarına yönelik sorulara verdikleri cevaplar APOS teorisi çerçevesinde incelendiğinde öğrencilerin daha çok süreç düzeyinde davranış sergiledikleri,

sınırlı sayıda öğrencinin nesne düzeyinde davranış sergilediği görülmektedir. Elde edilen bu sonuç alanyazında yapılan bazı çalışmaların sonuçları ile benzerlik göstermektedir (Özsoy ve Kemankaşlı, 2004; Bekdemir, 2012; Gerez-Cantimer ve Şengül, 2017)

Bekdemir (2012) sınıf öğretmeni adayları üzerinde çember ve daire alt öğrenme alanına yönelik yapmış olduğu çalışmanın sonunda, öğrencilerin işlem bilgisine yönelik başarı seviyelerinin, kavram bilgisine yönelik başarı seviyelerinden daha iyi olduğunu, formüllerin nasıl elde edildiğini bilmemelerine rağmen işlemsel ifadelerde kullanabildiklerini, genelleme ve soyutlama becerilerinin yetersiz olduğunu tespit etmiştir. Özsoy ve Kemankaşlı (2004) ortaöğretim öğrencileri üzerine yaptıkları çalışmanın sonunda, öğrencilerin çemberde açı kavramları arasında bağlantı kuramadıklarını, sorularda çember içinde verilen üçgensel ve dörtgensel bölgelerde açı kavramlarına yönelik bazı özellikleri uygulamada zorlandıklarını tespit etmişlerdir. Gerez-Cantimer ve Şengül (2017) yaptıkları çalışma sonunda 7. sınıf öğrencilerinin yarısına yakınının çemberin doğru tanımını bilmediklerini, öğrencilerin çoğunun merkez, yarıçap ve çap tanımlarını doğru yapamadıklarını, öğrencilerin yarısından fazlasının merkez açı ve çevre açı kavramlarını doğru tanımlayamadıklarını, 8. sınıf öğrencilerinin çok az bir kısmının çember tanımını doğru yapabildiklerini, öğrencilerin büyük çoğunluğunun merkez, yarıçap ve çap kavramlarını doğru tanımlayabildiklerini, öğrencilerin çoğunun merkez açı, çevre açı kavramlarını yanlış açıkladıklarını tespit etmişlerdir.

Yapılan bu çalışmada ise öğrencilerin çembere yönelik formülleri kullanabildikleri fakat çember ve daireye yönelik kavramları matematiğin diğer kavramlarıyla ilişkilendiremedikleri ve geçişler yapamadıkları görülmektedir. Öğrenciler çember ve daire kavramlarını nesnelleştiremedikleri için bu durumun ortaya çıktığı, öğrencilerin çemberin çevresi ile yay uzunluğu arasında, dairenin alanı ile daire diliminin alanı arasında nasıl bir ilişki olduğunu bilmedikleri için formülleri kullanma eğiliminde oldukları söylenebilir. Öğrencilerin formül kullanma eğilimleri, öğrencilerin çember ve daireye yönelik kavramsal öğrenme gerçekleştirmelerinden ziyade çember ve dairenin özelliklerini ezberlemelerinden kaynaklanmış olabilir. Kavramsal öğrenmenin tam olarak gerçekleşmemesi, öğrencilerin çember ve daire kavramlarını diğer kavramlarla ilişkilendirebilmelerini zorlaştırmış dolayısıyla öğrenciler çember ve daireye yönelik kavramlar üzerinde ezberledikleri formüller aracılığı ile eylemler gerçekleştirmişlerdir. Yani öğrenciler çember ve daire kavramlarını farklı kavramlara kapsülleyememişlerdir.

Stacey ve Vincent (2009) yaptığı çalışmada ortaokul matematik dersinde dairenin alan formülünün ezberlenmesi yerine dairenin alan formülünün didaktik öğretimine yönelik birtakım önerilerde bulunmaktadır. O'Dell ve diğerleri (2016) 8. sınıf öğrencileriyle yaptıkları

çalışma sonunda öğrencilerin önce dairenin alan formülünü açıklayamadıklarını fakat bir takım görevlerden sonra (kare yarıçapın alanı ile dairenin alanını karşılaştırma, dairenin alanını üçgene dönüştürerek bulma) dairenin alan formülü için bir gerekçe üretebildiklerini ve bu görevlerin öğrencilerin dairenin alanını bulma konusunda daha anlamlı bir kavrayış geliştirdiğini tespit etmişlerdir. Dolayısıyla öğretimde doğrudan formül vermek yerine, çember parçası uzunluğu ile çemberin çevresi, daire dilimi ile dairenin alanı arasındaki ilişki üzerinde durulması, çember ve daire kavramlarının daha anlamlı öğrenilmesini sağlayabilecektir. Bu şekilde öğrencilerin çember ve daire kavramlarını kapsülleyebilmeleri ve öğrencilerin APOS teorisine göre çember ve daire kavramlarını matematiksel bir nesneye dönüştürmeleri sağlanabilir. Öğrencilerin alan ölçümü konu bilgisinin zayıf doğası, öğrencilerinin matematiksel kavram ve süreçlere ilişkin bütünleşik ve anlamlı anlayışlar geliştirmelerine yardımcı olma yeteneklerini oldukça sınırlayacağından (Baturo ve Nason, 1996) alan öğretiminde işlemsel bilgiden ziyade kavramsal bilginin geliştirilerek kavramların matematiksel nesneye dönüştürülmesi oldukça önem arz etmektedir.

Yapılan çalışma sonunda, sınırlı sayıda öğrencinin çokgen, dörtgen, çember ve daire kavramlarına yönelik problemlerin çözümünde nesne düzeyinde davranış sergilediği, öğrencilerin büyük çoğunluğunun süreç düzeyinde davranış sergiledikleri görülmektedir. APOS teorisine göre kavramsal öğrenmenin göstergesi bireyin nesne düzeyinde davranış sergilemesidir. Elde edilen verilere göre çokgen, dörtgen, çember ve daire kavramlarına yönelik geleneksel yaklaşımla yapılan öğretimin yeterli olmadığı, öğrencilerin bu kavramlara yönelik problemlerin çözümlerine kural odaklı yaklaştıkları görülmektedir. Nitekim Milli Eğitim Bakanlığı tarafından 2024 yılında yayımlanan ortaokul matematik öğretim programında:

- dörtgenlerin alan öğretiminde kural öğretiminden vazgeçilerek dörtgenlerin alanlarını, daha önce öğrenilmiş alanlara parçalamayı gerektiren etkinliklere yer verildiği,
- çemberin yay parçasının uzunluğunun öğretiminde kural öğretiminden vazgeçilerek çemberin çevresi ile yay uzunluğu arasındaki ilişkiyi keşfetmeye yönelik etkinliklere yer verildiği,
- daire diliminin alanının hesaplanması öğretiminde kural öğretiminden vazgeçilerek dairenin alanı ile daire diliminin alanı arasındaki ilişkiyi keşfetmeye yönelik etkinliklere yer verildiği,

görülmektedir.

5.3. Öneriler

Araştırmada 10. sınıf öğrencilerinin çokgen ve dörtgen, 11. sınıf öğrencilerinin ise çember ve daire kavramlarına ilişkin oluşan bilgileri APOS teorisi çerçevesinde incelenmiştir. Buna istinaden araştırma sonuçları ve ilgili alanyazın incelenerek gelecek çalışmalara ışık tutması bakımından aşağıdaki önerilerin yapılması uygun bulunmuştur.

Öğretmen yetiştiren kurumlara yönelik öneriler:

- Öğretmen yetiştiren kurumlarda derslerde bilgi oluşturma modellerine yer verilebilir.
- Öğretmenlere APOS teorisinin düzeylerini tanıtan ve eğitimde nasıl kullanılacağına yönelik öğretmen bilişim ağında video yayınlanabilir.

İleriki araştırmalara yönelik öneriler:

- Farklı sınıf düzeyleri ve farklı matematik konularında benzer çalışmalar yapılmasının eğitimcilere önemli katkısı olabilir. Özellikle öğrencilerin zorlandığı trigonometri, limit, türev konularına yönelik benzer çalışmalar yapılabilir.
- Üstün yetenekli öğrencilere yönelik benzer çalışmalar yapılarak matematik öğretiminin ne kadar amacına ulaştığı araştırılabilir.
- Gerçekçi matematik eğitimi gibi farklı öğretim yöntemlerinin matematiksel kavramların öğretiminde ne kadar etkili olduğu APOS teorisi çerçevesinde değerlendirilebilir.
- Geogebra gibi matematik yazılımlarının matematiksel kavramların öğretiminde ne kadar etkili olduğu APOS teorisi çerçevesinde değerlendirilebilir.
- Farklı ülkelerde yapılan APOS teorisine yönelik çalışmalar ile ülkemizde yapılan çalışmalar karşılaştırılarak bu çalışmaların benzerlik ve farklılıkları araştırılabilir.

KAYNAKÇA

Açan, H. (2015). *8. sınıf öğrencilerinin dönüşüm geometrisinde bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi].YÖK Tez Merkezi.

Açıl, E. (2015). *Ortaokul 3. sınıf öğrencilerin denklem kavramına yönelik soyutlama süreçlerinin incelenmesi: APOS teorisi* [Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.

Ağaçdiken, F. (2021). *5. sınıf öğrencilerinin alan kavramını dinamik matematik yazılımı destekli öğretim ortamında oluşturma süreçleri: Dikdörtgen durumu* [Yüksek lisans tezi, Onkoduz Mayıs Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.

Akdemir, M. ve Narlı, S. (2022). Ortaokul öğrencilerinin çokgenler konusundaki algılarının incelenmesi. *Uluslararası Karamanoğlu Mehmetbey Eğitim Araştırmaları Dergisi*, *4*(1), 74-92.

Alkan, H. ve Bukova - Güzel, E. (2005). Öğretmen adaylarında matematiksel düşünmenin gelişimi. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *25*(3), 221-236.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubunsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. https://www.math.kent.edu/~edd/publications.html 'den alınmıştır.

Batır, O. (2022). *APOS teorisinin maksimum minimum problemlerini anlamada bir çerçeve olarak kullanılmasının başarı ve tutuma etkisi* [Doktora tezi, Balıkesir Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 843-908.

Baturo, A., & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(3), 235–268.

Bekdemir, M. (2012). Öğretmen adaylarının çember ve daire konularında kavram ve işlem bilgilerinin değerlendirilmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *43*, 83 - 95.

Bodker, S. (1997). Computers in mediated human activity. *Mind, Culture, and Activity*, *4*(3), 149 - 158.

Borji, V., Alamolhodaei, H., & Radmehr, F. (2018). Application of the APOS-ACE theory to improve students' graphical understanding of derivative. *Eurasıa Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(7), 2947 – 2967.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23*(3), 247-285.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç-Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2016). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (20. baskı). Pegem Akademi.

Cai, J., & Ding, M. (2017). On mathematical understanding: perspectives of experienced Chinese mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20,* 5-29.

Chimhande, T., Naidoo, A., & Stols, G. (2017). An analysis of grade 11 learners' levels of understanding of functions in terms of APOS theory. *Africa Education Review, 14,* 1-19.

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., John, D. S., Tolias, G., & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule?. *The Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 345 - 364.

Clements, D. H. (1998). Geometric and spatial thinking in young children. https://eric.ed.gov/?id=ED436232 'dan alınmıştır (Erıc number: ED436232).

Clements, D. C., & Battista, M. (1986). Geometry and geometric measurement. *The Arithmetic Teacher, 33*(6), 29-32.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192.

Cook T. D., & Campbell D. T. (1979). *Quasi-experimentation: Design and analysis issues for field settings*. Houghton Mifflin.

Creswell, J. W. (2013). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches*. Sage Publications.

Çepni, S. (2018). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş.* Celepler Matbaacılık.

Çetin, İ. (2009). *Students' understanding of limit concept: An APOS perspective* [Doctoral dissertation, Middle East Technical University]. YÖK Tez Merkezi.

Çetin, İ. ve Dubinsky, E. (2017). Reflective abstraction in computational thinking. *Journal of Mathematical Behavior,47*(1), 70-80.

deMarrais, K. (2004). Qualitative interwiev studies: Learning through experience. In K. deMarrais &S. D. Lapan (eds.), *Foundations for research:Methods of ınquiry in education and the social sciences* (pp. 51 - 68). Lawrence Erlbaum Assocıates

Deniz, Ö. (2014). *8. sınıf öğrencilerinin gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımı altında eğitim kavramını oluşturma süreçlerinin APOS teorik çerçevesinde incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Anadolu Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.

Dienes, Z. P. (1963). On the learning of mathematics. *The Arithmetic Teacher, 10*(3), 115–126.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Eds.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25 - 41). Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Eds.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95 - 126). Kluwer Academic Publishing.

Dubinsky, E., & Lewin, P. (1986). Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness. *The Journal of Mathematical Behavior,5*(1), 55–92.

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Eds.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 273 - 280). Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M. A., &Brown, A. (2005). Some historical ıssues and paradoxes regarding the concept of ınfınıty: An APOS-based analysıs: Part 1. *Educational Studies in Mathematics, 58*(3), 335-359.

Durmuş, S. ve Karakırık, E. (2006). Virtual manipulatives in mathematics education: A theoretical framework. *Turkish Online Journal of Educational Technology-TOJET, 5*(1), 117-123.

Franklin, C. S., Cody, P. A., &Ballan, M. (2010). Reliability and validity in qualitative research. In B. A. Thyer (Eds.), *The handbook of social work research methods* (pp. 355 – 375). Sage Publications.

Fujita, T., & Jones, K. (2006). Primary trainee teachers' understanding of basic geometrical figures in Scotland. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th conference of the ınternational group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3). Prague: Charles University. https://eric.ed.gov/?id=ED496933 'dan alınmıştır (Erıc Number: ED496933).

Fujita, T., &Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education, 9,* 3-20.

Gerez-Cantimer, G. ve Şengül, S. (2017). Ortaokul 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin çember konusundaki kavram yanılgıları ve hataları. *Gazi Eğitim Bilimleri Dergisi, 3*(1), 17-27.

Gutiérrez, A. (2013). Geometry. In P. Andrews & T. Rowland (Eds.), *MasterClass in mathematics education: International perspectives on teaching and learning* (pp. 151-164). Bloomsbury Publishing.

Guba, E. G. (1981). Erıc / Ectj annual review paper: Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Educational Communication and Technology (Ectj)*,*29*(2), 75 - 91.

Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1989). *Fourth generation evaluation*. Sage Publications.

Gürefe, N. (2018). Ortaokul öğrencilerinin alan ölçüm problemlerinde kullandıkları stratejilerin belirlenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *33*(2), 417-438.

Hampton, J. A. (2003). Abstraction and context in concept representation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*,*358*, 1251-1259.

Han, H. (2007). *Middle school students' quadrilateral learning: A comparison study* [Doctoral dissertation, University of Minnesota]. ProQuest Dissertations & Theses Global.

Hasan, H., & Kazlauskas, A. (2013). Activity theory: Who is doing what, why and how. In H. Hasan (Eds.), *Being practical with theory: A window into business research* (pp. 9 - 14). Wollongong.

Hassan, I., &Mitchelmore, M. (2006). The role of abstraction in learning about rates of change. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen &M. Chinnappan (Eds.), *Identities cultures and learning spaces: Proceedings of the 29th annual conference of the mathematics education research group of Australasia* (pp. 278-285). Canberra, Australia: MERGA

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *40*, 71-90.

Hazar, D. (2021). *Üç boyutlu hologram destekli öğrenmede lineer cebir kavramlarının oluşturulma sürecinin incelenmesi* [Doktora tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.

Hershkowitz, R., Schwarz, B., Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32* (2), 195-222.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. In J. Hiebert (Eds.), *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis* (pp. 1 - 27). Lawrence Erlbaum.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding.

In D. A. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 65-97). Macmillan Publishing.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *The Mathematics Teacher, 74*(1), 11-18.

Huang, H. M. E., & Witz, K. G. (2011). Developing children's conceptual understanding of area measurement: A curriculum and teaching experiment. *Learning and İnstruction, 21*(1), 1-13.

Huang, H. M. E. & Witz, K. G. (2013). Children's conceptions of area measurement and their strategies for solving area measurement problems. *Journal of Curriculum and Teaching, 2*(1), 10–26.

Jones, K. (2000). Teacher knowledge and professional development in geometry. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 20*(3), 109-114.

Kamii, C., & Kysh, J. (2006). The difficulty of "length×width": Is a square the unit of measurement? *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(2), 105-115.

Kemp, A., & Vidakovic, D. (2023). Students' understanding and development of the definition of circle in taxicab and euclidean geometries: An APOS perspective with schema interaction. *Educational Studies in Mathematics, 112*(3), 567-588.

Kidron, I., & Dreyfus, T. (2008). Abstraction in context, combining constructions, justification and enlightenment. In M. Goos, R. Brown & K. Makar (Eds.), *Proceedings of the 31st annual conference of the mathematics education research group of australasia* (pp. 303-309). Australia: The University of Queensland.

Koçyiğit-Gürbüz, M. (2018). *Yedinci sınıf öğrencilerinin etkinlik temelli öğrenme yaklaşımı altında oran-orantı kavramlarını oluşturma süreçlerinin incelenmesi: APOS teorisi* [Yüksek lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.

Kuutti, K. (1996). Activity theory as a potential framework for human-computer interaction research. In B. A. Nardi (Eds.), *Context and consciousness: Activity theory and human computer ınteraction* (pp. 17 - 44). MIT Press

LeCompte, M. D., & Goetz, J. P. (1982). Problems of reliability and validity in ethnographic research. *Review of Educational Research, 52*(1), 31-60.

Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Sage Publications.

Lindquist, M. M., & Clements, D. H. (2001). Geometry must be vital. *Teaching Children Mathematics, 7*(7), 409-415.

Liu, P. H. (2003). Connecting research to teaching: Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching? *The Mathematics Teacher, 96*(6), 416-421.

Manizade, A. G., & Mason, M. M. (2014). Developing the area of a trapezoid. *The Mathematics Teacher, 107*(7), 508-514.

Merriam, S. B. (2009). *Qualitative research: A guide to design and implementation*. Jossey-Bass A wiley imprint.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook.* Sage Publications.

Milli Eğitim Bakanlığı. (2018). *Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı.*

Milli Eğitim Bakanlığı. (2020). *TIMSS 2019 Türkiye ön raporu.* https://timss.meb.gov.tr/www/raporlar/icerik/3 'den alınmıştır.

Milli Eğitim Bakanlığı. (2022). *Pisa 2022 Türkiye rapor.* https://pisa.meb.gov.tr/www/raporlar/icerik/5 'den alınmıştır.

Milli Eğitim Bakanlığı. (2024). *Ortaokul matematik dersi öğretim programı.*

Mitchelmore, M., & White, P. (2007). Abstraction in mathematics learning. *Mathematics Education Research Journal, 19*, 1-9.

McCafferty, S. G., Roebuck, R. F., & Wayland, R. P. (2001). Activity theory and the incidental learning of second-language vocabulary. *Language Awareness*, *10*(4), 289-294.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers.* Kluwer Academıc Publıshers.

Ocakbaşı, E. N. (2019). *Gerçekçi matematik eğitimi temelli öğrenme ortamında 8. Sınıf öğrencilerinin karekök kavramını oluşturma süreçleri* [Yüksek lisans tezi, Onkoduz Mayıs Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.

O'Dell, J. R., Rupnow, T. J., Cullen, C. J., Barrett, J. E., Clements, D. H., Sarama, J., & Van Dine, D. W. (2016). Developing an understanding of children's justifications for the circle area formula. In M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil & J. A. Eli (Eds.), *Proceedings of the 38th annual meeting of the north american chapter of the ınternational group for the psychology of mathematics education* (pp. 235 – 242). Tucson: The University of Arizona.

Ohlsson, S., & Lehtinen, E. (1997). Abstraction and the acquisition of complex ideas. *International Journal of Educational Research*, *27*(1), 37-48.

Olkun, S., Çelebi, Ö., Fidan, E., Engin, Ö. ve Gökgün, C. (2014). Birim kare ve alan formülünün Türk öğrenciler için anlamı. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *29*(1), 180-195.

Özmantar, M. F., & Monaghan, J. (2007). A dialectical approach to the formation of mathematical abstractions. *Mathematics Education Research Journal, 19*(2), 89-112.

Öksüz, R. (2018). *5. sınıf öğrencilerinin kesir kavramını oluşturma süreçlerinin APOS teorik çerçevesinde incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.

Öksüz, C. ve Başışık, H. (2019). 5. sınıf öğrencilerinin çokgenler ve dörtgenler konularında sahip oldukları kavram yanılgılarının belirlenmesi. *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 20*, 413-430.

Özsoy, N. ve Kemankaşlı, N. (2004). Ortaöğretim öğrencilerinin çember konusundaki temel hataları ve kavram yanılgıları. *TOJET: The Turkish Online Journal of Educational Technology, 3*(4), 140-147.

Parraguez, M., & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and İts Applications, 432*(8), 2112-2124.

Parzysz, B. (1991). Representation of space and students' conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics, 22*(6), 575-593.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods: Integrating theory and practice.* Sage Publications.

Paschos, T., & Farmaki, V. (2006). The reflective abstraction in the construction of the concept of the definite integral: A case study. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of ınternacional group for the psychology of mathematics education* (vol. 4). Prague: Charles University.

Piaget, J. (2001). *Studies in reflecting abstraction* (R. L. Campbell, Eds. & Trans.). Psychology Press.

Pickreign, J. (2007). Rectangles and rhombi: How well do preservice teachers know them?. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, 1*, 1-7.

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics, 9*(3), 7-11.

Punch, K. F. (2005). *Introduction to social research: Quantitative and qualitative approaches.* Sage Publications.

Ravitch, S. M., & Carl, N. M. (2016). *Qualitative research: Bridging the conceptual, theoretical, and methodological*. Sage Publications.

Reed, B. (2007). *The effects of studying the history of the concept of function on student understanding of the concept* [Doctoral dissertation, Kent State University]. ProQuest Dissertations & Theses Global.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 100-120.

Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Eds.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-71). Lawrence Erlbaum Associates.

Schwarz, B., Dreyfus, T., & Hershkowitz, R. (2009). The nested epistemic actions model for abstraction in context. In B. Schwarz, T. Dreyfus & R. Hershkowitz (Eds.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 11 - 41). Routledge.

Schwarz, B., Hershkowitz, R., & Dreyfus, T. (2001). Emerging knowledge structures in and with algebra. In J. Novotná (Eds.), *Proceedings of the 2nd conference of european research in mathematics education* (pp. 81-91). Prague: Charles University.

Selden, A., & Selden, J. (1992). Research perspectives on conceptions of function: Summary and overview. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (MAA notes and series 25). Mathematical Association of America.

Sherard, W. H. (1981). Why is geometry a basic skill? *The Mathematics Teacher*, *74*(1), 19-60.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *10*(3), 24-41.

Sierpinska, A. (1994). *Understandings in mathematics*. Falmer Press.

Skemp, R. R. (2012). *The psychology of learning mathematics: Expanded American edition.* Routledge.

Stacey, K., & Vincent, J. (2009). Finding the area of a circle: Didactic explanations in school mathematics. *The Australian Mathematics Teacher*, *65*(3), 6-9.

Stewart, C. J. (1991). *Teaching interviewing for career preparation*. Erıc Clearinghouse on Reading and Communication Skills. https://eric.ed.gov/?id=ED334627 'den alınmıştır (Erıc number: ED334627).

Stewart, S. (2008). *Understanding linear algebra concepts through the embodied, symbolic and formal worlds of mathematical thinking* [Doctoral dissertation, The University of Auckland]. The University of Auckland Libraries.

Tall, D. (1999). Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking. In O. Zaslavsky (Eds.), *Proceedings of the 23 rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol 1, pp. 111-118). Haifa: Israel Institute Of Technology.

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. In, *Proceedings of the 28th conference of the ınternational group for the psychology of mathematics education* (vol. 4, pp 281 – 288). Bergen, Norway. https://eric.ed.gov/?q=%22International+Group+for+the+Psychology+of+Mathematics+Education%222004&id=ED489597 'den alınmıştır (Erıc number: ED489597).

Trust, T.E. (2014). *A cultural historical activity theory perspective of teacher learning in the edmodo math subject community* [Doctoral dissertation, Unıversıty of Calıfornıa Santa Barbara]. ProQuest Dissertations & Theses Global.

Tziritas, M. (2011). *APOS theory as a framework to study the conceptual stages of related rates problems* [Master's thesis, Concordia University]. Concordia University Library.

Van Maanen, J. (1979). Reclaiming qualitative methods for organizational research: A preface. *Administrative Science Quarterly*, *24*(4), 520-526.

Van Oers, B. (1998). The fallacy of decontextualization. *Mind, Culture, and Activity*, *5*(2), 135-142.

Vincent, J., & Stacey, K. (2009). Finding the area of a trapezium: Theme and variations. *TheAustralian Mathematics Teacher*, *65*(2), 13-16.

Weller, K., Arnon, I., & Dubinsky, E. (2009). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *9*(1), 5-28.

Wilson, D. C. (2002). *Young children's composition of geometric figures: A learning trajectory* [Doctoral dissertation, The State University]. ProQuest Dissertations & Theses Global.

Yeşildere, S. (2006). *Farklı matematiksel güce sahip ilköğretim 6., 7. ve 8. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi* [Doktora tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2018). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* Seçkin Yayıncılık.

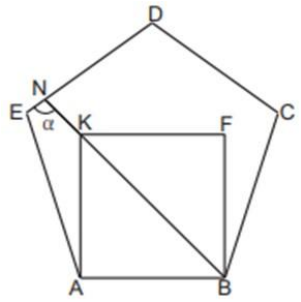
Yin, R. K. (2009). *Case study research, designs and methods.* Sage Publications.

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(3), 224-239.

Ek 1:

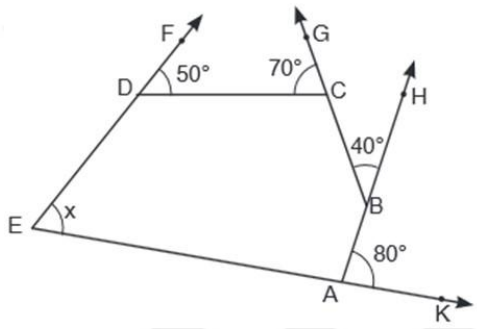
10. SINIF VERİ TOPLAMA ARACI

1)



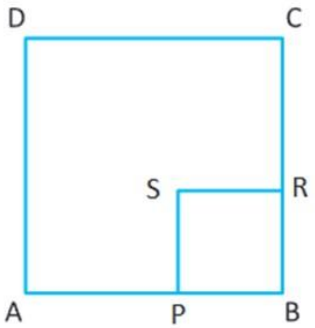
ABCDE düzgün beşgen, ABFK kare,
$N \in [ED]$ ve $K \in [BN]$ olduğuna göre
$m(\widehat{ENB})$'nın kaç derece olduğunu bulunuz.

2)



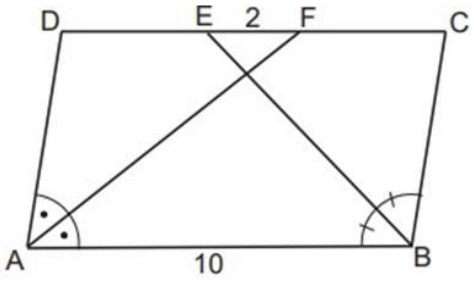
ABCDE, bir beşgendir.
$m(FDC) = 50^\circ$ $m(\widehat{GCD}) = 70^\circ$
$m(\widehat{CBH}) = 40^\circ$ $m(\widehat{BAK}) = 80^\circ$
olduğuna göre $m(AED)$' nın kaç derece olduğunu bulunuz.

3)



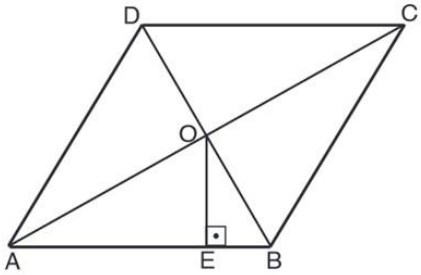
Şekildeki ABCD ve PBRS karedir.
$P \in [AB]$, $R \in [BC]$,
$a, b \in \mathbb{Z}$ $|DC| = a$ $|BR| = b$
$A(APSRCD) = 191$ cm^2 dir.
Buna göre APSRCD altıgeninin çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

4)



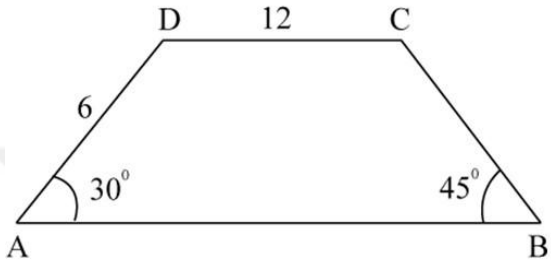
ABCD paralelkenar, $E \in [DC]$,
$F \in [DC]$, $[AF]$ A açısının,
$[BE]$ B açısının açıortayı,
$|EF| = 2$ br, $|AB| = 10$ br ise
Ç(ABCD)'nin kaç birim olduğunu bulunuz.

5)



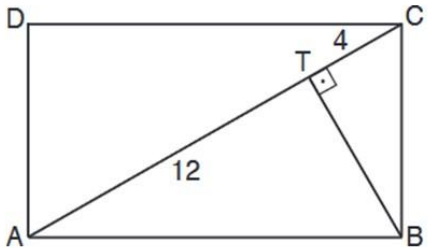
ABCD eşkenar dörtgen,
$[OE] \perp [AB]$, $|AE| = 12$ br, $|EB| = 3$ br
ise A(ABCD)'nin kaç br^2 olduğunu bulunuz.

6)



ABCD yamuk, $[DC] // [AB]$,
$m(\widehat{DAB}) = 30^\circ$, $m(\widehat{ABC}) = 45^\circ$,
$|AD| = 6$, $|DC| = 12$ br ise
A(ABCD)'nin kaç br^2 olduğunu
bulunuz.

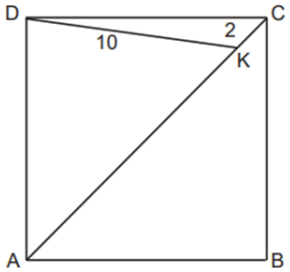
7)



ABCD dikdörtgen,
$[BT] \perp [AC]$, $|AT| = 12$ br,
$|TC| = 4$ br ise
$A(ABCD)$'nin kaç br^2 olduğunu bulunuz.

8) Tabanı dikdörtgen şeklindeki bir banyoya köşegen uzunluğu $20\sqrt{2}$ cm olan kare şeklindeki fayanslar döşenecektir. Bu banyonun uzun kenarına 20, kısa kenarına ise 10 tane fayans döşenebilmektedir. Buna göre banyonun tabanının alanının kaç m^2 olduğunu bulalım.

9)

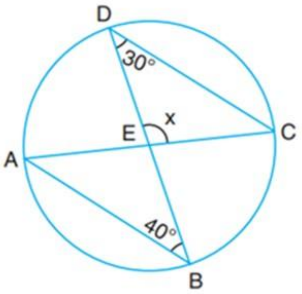


ABCD kare ve $[AC]$ köşegendir.
$K \in [AC]$, $|KC| = 2$ br, $|KD| = 10$ br ise
$A(ABCD)$'nin kaç br^2 olduğunu bulunuz.

Ek 2:

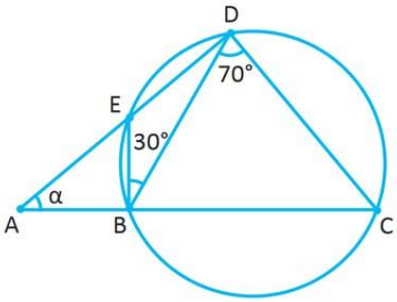
11. SINIF VERİ TOPLAMA ARACI

1)



Yandaki şekilde $[AC] \cap [BD] = \{E\}$,
$m(\widehat{CDB}) = 30^\circ$, $m(\widehat{ABD}) = 40^\circ$
olduğuna göre $m(\widehat{CED}) = x$ kaç derecedir?

2)



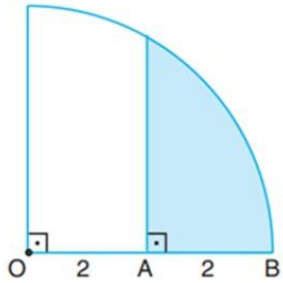
Şekildeki çemberde $[EB] \perp [AC]$
A, E, D ve A, B, C noktaları doğrusaldır.
$m(\widehat{EBD}) = 30^\circ$, $m(\widehat{BDC}) = 70^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{DAC}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

3) Bir traktörün ön tekerleğinin çapı 120 cm, arka tekerleğinin yarıçapı 100 cm'dir. Arka tekerlek 30 tam tur dönme yaptığında ön tekerleğin kaç tam tur dönme yaptığını bulunuz.

4) Bir salıncakta sırayla sallanan Kerem ve Cemre birbirlerini sallayarak birbirine yardım etmektedirler. Kerem, Cemre'yi salıncağın sabit durduğu durumdan 60° geriye çekip 60° ileriye ölçülü açı ile sallamaya başlar. Salıncağın bağlandığı zincirin uzunluğu 150 cm ise salıncağın bir geri, bir ileri hareketi sonucunda kaç cm hareket ettiğini bulunuz ($\pi = 3$ alınız).

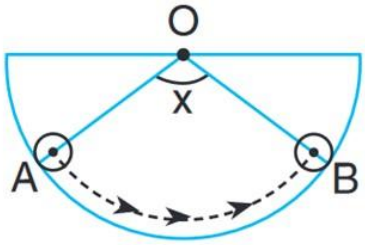


5)



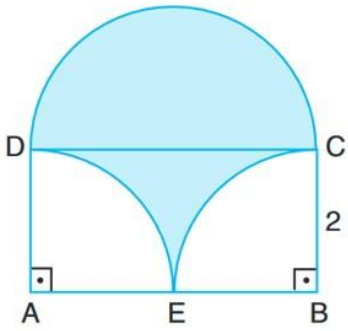
O merkezli çeyrek dairede $|OA| = |AB| = 2$ cm ise boyalı bölgenin alanı kaç cm^2 'dir.

6)



Şekildeki O merkezli ve 12 br yarıçaplı yarım çember içerisindeki 1 br yarıçaplı çember kaydırılmadan A noktasından B noktasına yuvarlanmıştır. Küçük çember 4 tam dönüş yaptığına göre $m(\widehat{AOB}) = x$ kaç derecedir?

7)



ABCD bir dikdörtgendir.

$\overset{\frown}{DC}$: CD çaplı yarım daire yayı

$\overset{\frown}{DE}$: A merkezli çeyrek daire yayı

$\overset{\frown}{EC}$: B merkezli çeyrek daire yayı

Yandaki şekilde boyalı alan kaç birimkaredir?

Ek 3: Araştırma Uygulama İzni

T.C.
[redacted] VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : E-46949512-605.01-72435080 16.03.2023
Konu : Araştırma Uygulama İzni
(Şafak YILDIZ)

[redacted] İLÇE MİLLÎ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi: a) Millî Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 21.01.2020 tarih ve 1563890 sayılı 2020 / 2 No'lu Genelgesi,
b) Bursa Uludağ Üniversitesi Rektörlüğü Öğrenci İşleri Daire Başkanlığı'nın 07.03.2023 tarih ve 99627 sayılı yazısı.

İlgi (b) yazı ve ekinde; Bursa Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Doktora Programı öğrencisi Şafak YILDIZ'ın "Ortaöğretim Öğrencilerinin Dörtgenler, Çember ve Daire Kavramlarına Yönelik Bilgi Oluşturma Süreçlerinin Apos Teorisi Çerçevesinde İncelenmesi" konu başlıklı çalışması kapsamında [redacted] İli [redacted] İlçesi [redacted] Anadolu Lisesi, [redacted] Anadolu Lisesi [redacted] Anadolu Lisesi [redacted] Anadolu Lisesi 10 ve 11. sınıf öğrencilerine yönelik bir araştırma yapmak istediği belirtilmektedir.

Müdürlüğümüze bağlı resmi/özel okul ve kurumlarda öğrenci, öğretmen ve okul yöneticilerinin katılımıyla yapılması planlanan uygulamanın denetimi il/ilçe millî eğitim müdürlükleri ve okul/kurum idaresinde olmak üzere, kurum faaliyetlerini aksatmadan, gönüllülük esasına göre; onaylı bir örneği Müdürlüğümüzde muhafaza edilen ve uygulama sırasında mühürlenmiş ve paraflanmış örnekten çoğaltılan veri toplama araçlarının kullanılması kaydı ile 2022-2023 eğitim-öğretim yılında uygulanması Müdürlük Makamından alınan 15.03.2023 tarih ve 72367742 sayılı Olur ile uygun görülmüştür.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

[redacted]
Müdür a.
İl Millî Eğitim Müdür Yardımcısı