

**HECKE GRUPLARI VE DÜZGÜN FİGÜRLER**

**Aydın ÖZBEK**



T. C.  
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

## **HECKE GRUPLARI VE DÜZGÜN FİGÜRLER**

Aydın ÖZBEK  
0000-0002-4307-2974

Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL  
(Danışman)

DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2022  
**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ ONAYI

Aydın ÖZBEK tarafından hazırlanan “Hecke Grupları ve Düzgün Figürler” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** : Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

- |   |      |
|---|------|
| <b>Üye:</b> Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL<br>0000-0002-0700-5774<br>Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi<br>Matematik Anabilim Dalı                                  | İmza |
| <b>Üye:</b> Prof. Dr. Musa DEMİRCİ<br>0000-0002-6439-8439<br>Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi<br>Matematik Anabilim Dalı                                    | İmza |
| <b>Üye:</b> Prof. Dr. Saliha ŞAHİN<br>0000-0003-2887-5688<br>Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi<br>Kimya Anabilim Dalı  | İmza |
| <b>Üye:</b> Prof. Dr. Recep ŞAHİN<br>0000-0002-4407-2028<br>Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi<br>Matematik Anabilim Dalı  | İmza |
| <b>Üye:</b> Doç. Dr. Nazlı YILDIZ İKİKARDEŞ<br>0000-0001-8756-8085<br>Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi<br>Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı | İmza |

**Yukarıdaki sonucu onaylarım**

**Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN**

**Enstitü Müdürü**

**B. U. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;**

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim.**

**10/01/2022**

**İmza**

**Aydın ÖZBEK**

**TEZ YAYINLAMA**  
**FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI**

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezin tümünü veya bir kısmını, basılı (kâğıt) veya elektronik formatta arşivleme ve aşağıda belirtilen koşullarla kullanıma açma izni Bursa Uludağ Üniversitesi'ne aittir. Bu izinle üniversiteye verilen kullanım hakları dışında kalan fikri mülkiyet hakları ile tezin tümünün veya bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, lisans, kitap veya patent vb.) kullanım hakları tarafımıza ait olacaktır. Tezde telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınıp kullanılması zorunlu olan metinlerin bu izin alınarak kullandığını ve gerektiğinde üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederiz.

Yüksek Öğretim Kurulu tarafından yayımlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**" kapsamında yönergede belirtilen kısıtlamaların olmaması durumunda tezin YÖK Ulusal Tez Merkezi / B. U. Ü. Kütüphanesi Açık Erişim Sistemi ve üye olunan diğer veri tabanlarının (Proquest veri tabanı gibi) erişimine açılması uygundur.

Prof. Dr. Naci CANGÜL

Aydın ÖZBEK

27/01/2022

27/01/2022

## ÖZET

Doktora Tezi

HECKE GRUPLARI VE DÜZGÜN FİGÜRLER

**Aydın ÖZBEK**

Bursa Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

**Danışman:** Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL

Bu doktora tezinde 1936 yılında Erich Hecke tarafından tanımlanmış olan Hecke gruplarının normal alt gruplarının özellikleri ve birbiriyle ilişkileri incelenmiştir. 1994 yılında cinsi 1 ile 7 arasındaki tüm normal alt grupların sınıflandırılması yapılmıştır. Son yıllarda cinsi 101'e kadar olan tüm düzgün figürler listelendiğinden bu listelerdeki bilgiler yardımıyla Hecke gruplarının cinsi 101'e kadar olan normal alt gruplarını hesaplamak da mümkün olabilmektedir.

2019 yılında graflarla ilgili bir invaryant olarak tanımlanan omega invaryantı da birer graf olan düzgün figürlerin yeni özelliklerinin elde edilebilmesinde ve dolayısıyla Hecke gruplarının normal alt gruplarının çalışılmasında kullanılmaya başlanmıştır. Bu tezde de omega invaryant yardımıyla çeşitli grup parametreleri arasında ilişkiler kurulmuştur.

Bu tezde beş bölüm yer almaktadır. Giriş adı verilen ilk bölümde tezin geri kalan bölümlerinde kullanılacak olan Hecke gruplarının normal alt grupları ve düzgün figürler ile ilgili temel tanım, kavramlar ve teoriler verilmiştir. İkinci bölümde kuramsal temellerden, üçüncü bölümde ise kullanılan materyal ve yöntemden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde, elde edilen sonuçlardan bahsedilmiştir. Beşinci ve son bölümde ise tartışma ve sonuç verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Hecke grubu, omega invaryantı, düzgün figür, normal altgrup, cins 2022, vii + 65 sayfa.

## **ABSTRACT**

PhD Thesis

HECKE GROUPS AND REGULAR MAPS

**Aydın ÖZBEK**

Bursa Uludag University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

**Supervisor:** Prof. Dr. Ismail Naci CANGUL

In this PhD thesis, the characteristics of the normal subgroups of Hecke groups which were defined by Erich Hecke in 1936, and the relations between them are examined. In 1994, all normal subgroups of genus 1 to 7 were classified. Since all regular figures up to genus 101 have been listed in recent years, it has been possible to calculate the normal subgroups of Hecke groups up to genus 101 with the help of the information in these lists.

In 2019, the omega invariant, which was defined as an invariant related to graphs, started to be used in obtaining new properties of regular figures, which are graphs, and therefore in the study of normal subgroups of Hecke groups. In this thesis, relations between various group parameters were established with the help of omega invariant.

There are five chapters in this thesis. In the first chapter, called the introduction, basic definitions, concepts and theories about normal subgroups of Hecke groups and regular figures, which will be used in the rest of the thesis, are given. In the second part, the theoretical foundations and in the third part, the materials and methods used are mentioned. In the fourth chapter, the obtained results are mentioned. In the fifth and last chapter, discussion and conclusion are given.

**Key words:** Hecke group, omega invariant, regular map, normal subgroup, genus

2022, vii + 65 pages.

## ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Eğitim hayatım boyunca akademik kimliği ve başarılarıyla örnek aldığım, bu yoldaki en büyük destekçim, emeğini hiçbir zaman esirgemeyen, öğrencisi olmaktan gurur duyduğum değerli danışman hocam Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL'e ve matematik öğrenimime katkısı olan tüm hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu süreçte manevi desteklerini esirgemeyen her koşulda yanımda olan canım anneme babama, abime, eşime ve oğluma sonsuz teşekkürler...

Aydın ÖZBEK

10/01/2022



## İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	vi
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Temel Kavramlar.....	2
2. KURAMSAL TEMELLER .....	26
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	27
4. BULGULAR .....	28
4.1. Omega invaryantı .....	28
4.2. Hecke gruplarının normal alt gruplarının düzgün figürler ile ilişkileri .....	34
5. TARTIŞMA VE SONUÇ .....	62
KAYNAKLAR.....	63
ÖZGEÇMİŞ.....	65

## SİMGELER DİZİNİ

### Simge

$\mathbb{R}$   
 $\mathbb{Z}$   
 $H(\lambda_q)$   
 $(g; 2, q, \infty)$   
 $U$   
 $\Gamma$   
 $F_{\lambda_q}$   
 $F$   
 $PSL(2, \mathbb{R})$   
 $(l, m, n)$   
 $g$   
 $t$   
 $n$   
 $\mu$   
 $C_n$   
 $D_n$   
 $S_n$   
 $A_n$   
 $\Sigma$   
 $[g, h]$   
 $F_n$   
 $\langle g, \infty^{(t)} \rangle$   
 $r$   
 $A \star B$   
 $\{m, n\}$   
 $X(G)$   
 $\text{Aut}(G)$   
 $\text{Aut}^0(G)$   
 $G$   
 $V(G)$   
 $E(G)$   
 $n$   
 $m$   
 $d_u, d_G(u), \text{deg}(u)$   
 $K_n$   
 $C_n$   
 $P_n$   
 $S_n$   
 $T_n$   
 $K_{r,s}$

### Açıklama

reel sayılar kümesi  
tam sayılar kümesi  
Hecke grubu  
Hecke grubunun simgesi  
üst yarı düzlem  
Fuchsian grup  
 $H(\lambda_q)$  grubunun temel bölgesi  
 $H(\lambda_3)$  modüler grubunun temel bölgesi  
reel katsayılı projektif özel lineer grup  
 $\Gamma = \langle x, y | x^l = y^m = (xy)^n = I \rangle$  üçgen grubunun simgesi  
yüzeyin cinsi  
parabolik sınıf sayısı  
seviye  
grup mertebesi  
 $n$  mertebeli devirli grup  
dihedral grup  
simetrik grup  
alterne grup  
Schreier transversali  
 $g$  ile  $h$ 'nin kamütatörü  
 $n$  ranklı serbest grup  
serbest grubun gösterimi  
serbest grubun rankı  
 $A$  ile  $B$  gruplarının serbest çarpımları  
Düzgün figürün tipi  
 $G$  düzgün figürünün Euler Karakteristiği  
 $G$ 'nin otomorfizmalarının grubu  
 $G$ 'nin tüm otomorfizmalarının bileşke işlemine göre grubu  
graf  
 $G$  grafının köşe kümesi  
 $G$  grafının kenar kümesi  
 $G$  grafının köşe sayısı  
 $G$  grafının kenar sayısı  
 $u$  köşesinin derecesi  
 $n$  köşeli tam graf  
 $n$  köşeli devir graf  
 $n$  köşeli yol graf  
 $n$  köşeli yıldız graf  
 $n$  köşeli ağaç graf  
iki parçalı tam graf

$T_{r,s}$	larva graf
$\Delta(G)$	$G$ grafinın maksimum derecesi
$\delta(G)$	$G$ grafinın minimum derecesi
$DS$	derece dizisi
$\Omega(G)$	omega invaryantı

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 1.1. Üst yarı düzlemde bir ayrık grubun hareketi.....	2
Şekil 1.2. Hecke grubunun bir temel bölgesi .....	6
Şekil 1.3. Modüler grubun bir temel bölgesi .....	7
Şekil 1.4. Bir üçgen grubu .....	10
Şekil 1.5. Hecke grubunun üzerinde hareket ettiği üçgenler.....	11
Şekil 1.6. Küp ve düzgün sekiz yüzlü .....	21
Şekil 1.7. Bir $\alpha$ dartı .....	24
Şekil 4.1. Bir derece dizisinin iki farklı çizimi .....	29
Şekil 4.2. $\Omega(G)=10$ olan bir G grafi .....	31

## 1. GİRİŞ

Hecke grupları, Erich Hecke tarafından 1936 yılında “Über die Bestimmung Dirichletcher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen” adlı çalışmasında Dirichlet serilerinin hesaplanmasını kolaylaştırmak adına tanımlanmıştır. En önemli ayrık gruplardan olan modüler grup ve genellemesi Hecke grubu kullanım alanları gittikçe artan gruplardandır. Bu şekildeki ilgi çeken bir grubun alt grupları, normal alt grupları da doğal olarak ilgi çekmeye ve araştırılmaya başlanmıştır. David Singerman ve Gareth A. Jones tarafından Hecke gruplarının normal alt grupları ile  $(2, m, n)$  tipindeki üçgen grupları arasında ve düzgün figürler ile  $(2, m, n)$  tipindeki üçgen grupları arasında bire bir eşleme olduğunu ispatlamışlardır. Hecke grubu ile düzgün figürler arasındaki ilişkiden dolayı Hecke grubunun normal alt grubu bulma problemine farklı bir çözüm getirmiş oldular. Hecke grupları ile ilgili bu tezde ihtiyaç duyulan bilgilere daha detaylı erişmek için bkz. (Cangul, (1994)), (Cangul 2, (1994)), (Cangul, (1995)), (Cangul, (1996)), (Cangul & Singerman, (1998)), (Demirci & ark., (2021)), (Demirci ve ark., (2006)), (Fine, (1976)), (Fine & Rosenberger, (1999)), (Hecke, (1936)), (Jones & Singerman, (1978)), (Jones & Singerman, (1987)), (Ozdemir ve ark., (2006)).

Düzgün figürlerin tarihçesine bakıldığında ilk çalışmalar 1619’da cinsi 0 olan küre üzerindeki düzgün figürleri inceleyen Kepler tarafından incelenmiştir. 1957’de ise cinsi 1 olan tor yüzeyi üzerindeki düzgün figürleri Coxeter ve Moser tarafından incelenmiştir. 1978 yılına gelindiğinde ise David Singerman ve Gareth A. Jones tarafından ilk defa tanımlanan yönlendirilebilen yüzeyler üzerinde düzgün figürler kavramı bir grubun normal alt gruplarının bulunması problemi ile ilişkilendirilen düzgün figürler teorisinin temellerinin ortaya atılmasını sağladılar. Küre ve tor yüzeyi üzerindeki düzgün figürlerin sayısı sonsuz çokluktur. Cinsi  $\geq 2$  olan düzgün figürlerin sayıları ise sonlu çokluktur (Cangul, (1993)). Üstelik cinsi  $< 7$  olan düzgün figürler de Cangul tarafından incelenmiştir. Bu tezde ise cinsi  $> 7$  olan düzgün figürler arasındaki ilişkiler incelenecektir. Bu tezde Marston Conder tarafından sınıflandırılan ve cinsi 2 ile 101 arasında olan düzgün figürlerin aralarındaki ilişkiler daha önceden belirli olan metotlar yardımıyla incelenecektir. Gözlemediğimiz ve ispatladığımız sonuçlar verilecektir.

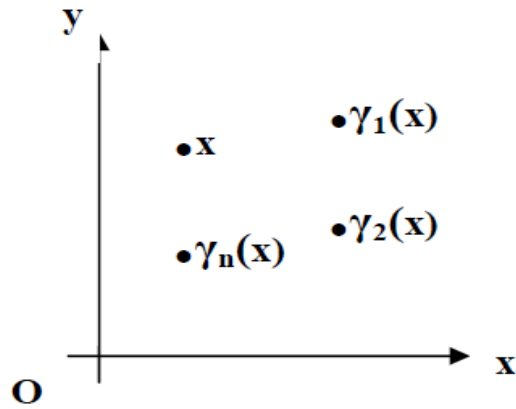
Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez boyunca kullanılacak olan Hecke grubu ve düzgün figürler ile ilgili tanım ve kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde kuramsal temellerden, üçüncü bölümde materyal ve yöntemden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde alt başlıklar halinde cinsi 2 ile 101 arasında olan Hecke gruplarının düzgün figürler ile ilişkileri incelenecektir. Beşinci ve son bölümde ise tartışma ve sonuçlardan bahsedilmiştir.

## 1.1. Temel Kavramlar

Bu kısımda tez boyunca kullanılacak olan Hecke grubu ve düzgün figürler ile ilgili tanım ve kavramlar verilmiştir.

**1.1.1. Tanım (Ayrık grup).**  $\Gamma$  bir grup olsun.  $U$  üst yarı düzleminde alınan her  $x$  noktası ve her  $\gamma \in \Gamma$  için  $D(x, \varepsilon) \cap \{\gamma(x)\} = \emptyset$  olacak şekilde bir  $\varepsilon$  sayısı varsa  $\Gamma$  grubuna ayrık grup denilir.

Bu tezde ele alınacak olan Hecke grupları birer ayrık grup olduklarından ayrık grup kavramı en önemli temel kavramlardan birisidir. Görsel olarak tanımdaki arakesitin boş küme olma şartı Şekil 1.1'deki gibi yorumlanabilir.  $\Gamma$  grubunun elemanları altında üst yarı düzlemdeki herhangi bir  $x$  noktasının görüntüleri bir yığılma noktasına sahip olamazlar. Yani ayrıktırlar. Bu da bu gruplara ayrık grup denilmesinin sebebidir.



Şekil 1.1. Üst yarı düzlemde bir ayrık grubun hareketi

**1.1.2. Tanım (Hecke grubu).**  $\lambda$  bir pozitif reel sayı olmak üzere

$$R(z) = -\frac{1}{z} \quad \text{ve} \quad T(z) = z + \lambda$$

üreteçleri tarafından üretilen gruplar  $H(\lambda)$  ile gösterilir ve Hecke grubu adını alır. Bu gruplar,  $\lambda < 2$  ve  $\lambda = \lambda_q = 2 \cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$ ;  $q \in \mathbb{Z}, q \geq 3$  veya  $\lambda \geq 2$  olacak şekildeki tüm  $\lambda$  reel sayıları için ayrık grup olmaktadır. Dolayısıyla Hecke grupları ile ilgili tüm kaynaklarda  $\lambda$  parametresinin bu iki sınıfına göre çalışmalar yapılmaktadır. Bu tezde, geneldeki birçok çalışma gibi  $\lambda$ 'nın 0 ile 2 arasında olan ve  $\lambda = \lambda_q = 2 \cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$ ;  $q \in \mathbb{Z}, q \geq 3$  şartını sağlayan değerlerinin var olduğu Hecke grupları, yani birinci tip Hecke grupları, çalışılmıştır. Bu durumda karşılık gelen Hecke grubu  $H(\lambda_q)$  ile gösterilecektir.  $\lambda \geq 2$  olan durumda Hecke gruplarına ikinci tip Hecke grupları denilmektedir.

Burada ilk üretelimiz olan  $R(z) = -\frac{1}{z}$  dönüşümü, karmaşık düzlemde birim diskin üst yarı düzleminde kalan kısmının içini dışına ve dışını da içine resmeden bir dönüşümdür. Birim diskin sınırındaki noktalar ise kendilerine resmedilir. Diğer yandan ikinci üretelimiz olan  $T(z) = z + \lambda$  dönüşümü ise bir öteleme dönüşümüdür.

$R(z)$  ve  $T(z)$  üreteçlerinin matris gösterimleri sırasıyla

$$R(z) = -\frac{1}{z} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(z) = z + \lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.  $R$  üreticinin mertebesi

$$R^2(z) = -\frac{1}{-\frac{1}{z}} = z = I(z)$$

olduğundan  $o(R) = 2$ 'dir.  $T$  üretcinin mertebesi ise

$$T^2(z) = z + 2\lambda$$

$$T^3(z) = z + 3\lambda$$

$$T^4(z) = z + 4\lambda$$

$$T^n(z) \neq I(z)$$

olduğundan hiçbir zaman sonlu olamayacaktır ve dolayısıyla  $o(T) = \infty$  olarak alınır. Tabii vurgulanması gereken önemli bir özellik de grubun kapalılık özelliği nedeniyle  $T$  dönüşümünün tüm kuvvetlerini ve tabii ki diğer birçok elemanı bulunduracağından, Hecke gruplarının sonsuz gruplar olmasıdır. O halde çalıştığımız birinci tip Hecke gruplarının gösterimi

$$H(\lambda_q) \cong \langle R, T \mid R^2 = T^\infty = I \rangle$$

şeklinde tanımlanabilir.

Grupların temsil edilmesinde genel olarak sonlu mertebeli elemanlar kullanılır. Bu son temsilde  $T$  elemanının mertebesi sonsuz olarak alındı. Bu tür durumlarda çalışılmakta olan grubun farklı bir temsili elde edilmeye çalışılabilir. Burada da böyle bir temsil elde edebilmek mümkündür. Bunun için  $S = R \circ T$  bileşke dönüşümü kullanılır. Bu dönüşüm için

$$S(z) = R(T(z)) = -\frac{1}{z + \lambda}$$

olup bu üretcin matris gösterimi  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$  şeklindedir ve karşılık gelen lineer dönüşümün mertebesi  $q$  olur. Böylece  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunu  $R$  ve  $S$  sonlu mertebeli üretçileri ile de üretmek mümkün olmaktadır. Yani bu son temsil



$$H(\lambda_q) \cong \langle R, S \mid R^2 = S^q = I \rangle$$

şeklinde ifade edilebilir.

Özel olarak  $q = 3$  iken

$$H(\lambda) = H(\lambda_q) = H\left(2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = H(1) = \Gamma$$

grubu, modüler grup olarak tanımlanır ve ayrık gruplar teorisinde oldukça önemli bir yere sahiptir. Bunun nedeni modüler grup dediğimiz bu özel Hecke grubunun tüm elemanlarının katsayılarının birer tamsayı olmalarıdır. Diğer tüm Hecke gruplarının katsayıları tamsayıların genişletilmesiyle elde edilmiş daha karmaşık cebirsel yapılardan, yani rasyonel sayılar cisminin cisim genişlemelerinden, alınmaktadır ve bu durum modüler grupla ilgili çalışmaları diğer Hecke gruplarıyla yapılan benzer çalışmalardan daha basit yapmaktadır. Tabii bu, şu şekilde de yorumlanabilir: Diğer Hecke gruplarıyla yapılacak çalışmalar modüler grupla yapılmış olan çalışmalardan daha zengin sonuçlar verecektir. Bu tezde de bununla ilgili örnekler verilmiştir.

**1.1.3. Tanım (Temel bölge).** Bir  $G$  grubu için  $U$  üst yarı düzleminin bir  $F$  açık alt kümesi,

(i) her bir  $G(z), z \in U$ , orbiti için  $\bar{F}$  ile en az bir kez kesişir

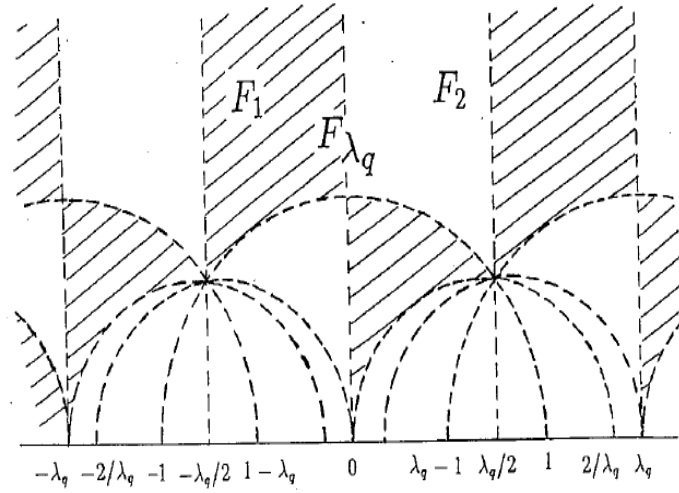
(ii) her bir  $G(z), z \in U$ , orbiti için  $F$  ile en fazla bir kere kesişir

şartlarını sağlıyorsa  $F$  bir temel bölgedir (Cangül, 1993).

$H(\lambda_q)$  Hecke grubunun bir temel bölgesi

$$F_{\lambda_q} = \{z \in U : |Re(z)| < \frac{\lambda_q}{2}, |z| > 1\}$$

şeklinde verilir. Şekil 1.2’de bu temel bölge,  $F_1$  ve  $F_2$  bölgelerinin birleşimidir ve dikkat edilirse sınırsız bir bölgedir. Ancak bir ayrık grup için temel bölge bir tek olmadığından Hecke grubunun bir temel bölgesi olarak herhangi bir taralı bölge ile bir beyaz bölgenin birleşimi de alınabilir ve sınırlı görünen temel bölgeler de elde edilebilir. Euclid uzayında bu bir farklılık olsa da hiperbolik düzlemde hem Şekil 1.2’de verilen sınırsız temel bölgenin hem de seçilecek herhangi bir sınırlı temel bölgenin hiperbolik alanı aynıdır.



**Şekil 1.2.** Hecke grubunun bir temel bölgesi.

Özel olarak  $\Gamma$  modüler grubu için bir temel bölge ise

$$F = \{z \in U: |Re(z)| < \frac{1}{2}, |z| > 1\}$$

şeklindedir, bkz. Şekil 1.3.



olarak yazılabilir.

**1.1.5. Tanım (Fuchs grubu).**  $PSL(2, \mathbb{R})$ 'nin sonlu üreteçli bir ayrık alt grubuna bir Fuchs grubu denilir.

Bir  $\Gamma$  Fuchs grubu aşağıdaki şekilde bir temsile sahiptir:

$a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$  (hiperbolik)

$x_1, \dots, x_r$  (eliptik)

$p_1, \dots, p_t$  (parabolik)

$h_1, \dots, h_u$  (hiperbolik sınır)

olmak üzere

$$x_j^{m_j} = \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^r x_j \prod_{k=1}^t p_k \prod_{l=1}^u h_l = 1$$

bağıntısı sağlanır. Bu grubun kısa gösterimi ise

$$\Gamma = (g; m_1, \dots, m_r; t; u)$$

şeklindedir. Burada  $g$  sayısı  $\Gamma$  grubunun üzerinde hareket ettiği bölüm uzayı olan  $U/\Gamma$  Riemann yüzeyinin cinsidir. Çalışacağımız Riemann yüzeyleri ise kompakt, bağlantılı ve yönlendirilebilir olacaktır. Riemann yüzeylerinin cinsi olan  $g$  sayısını yüzeyin delik sayısı olarak da düşünebiliriz. Kürede delik olmadığı için  $g = 0$ , tor yüzeyi üzerindeki delik sayısı 1 olduğu için  $g = 1$  ve ikili tor yüzeyinde delik sayısı 2 olduğundan  $g = 2$ 'dir. Bu tez çalışmasında  $g$ 'nin 3 ile 101 arasındaki değerleri ele alınacağından yüzeyin delik sayısı da  $g$  sayısı ile aynı olacaktır.  $m_i \geq 2$  tamsayıları eliptik üreteçlerin mertebeleri olup grubun periyotları olarak da adlandırılırlar. Üstelik gruptaki tüm sonlu elamanlar bu eliptik elemanlardır. Bunlar sabit noktalar etrafında  $2\pi/m_i$  açısıyla dönme yaparlar.  $t$

sayısı gruptaki parabolik sınıf sayısıdır. Parabolik elemanları ise üst yarı düzlemde birer öteleme hareketi olarak düşünebiliriz. Bu yüzden mertebeleri sonsuzdur. Hecke gruplarında hiperbolik sınır elemanları olmadığı için  $u = 0$  alınacak olup gösterime dahil edilmesine gerek yoktur. O halde bir Fuchs grubunu

$$\Gamma = (g; m_1, \dots, m_r; \infty^{(t)}) \quad \text{ya da} \quad \Gamma = (g; m_1, \dots, m_r; t)$$

şeklinde de gösterebiliriz.

**1.1.6. Tanım (Seviye).**  $N$ ,  $H(\lambda_q)$ 'nin  $\mu$  indeksli  $t$  parabolik sınıf sayısına sahip bir normal alt grubu olsun. Bu durumda  $\frac{\mu}{t} = n$  oranına  $N$  normal alt grubunun seviyesi (level) denir.

$\Gamma$  Fuchs grubunun hiperbolik alanı

$$\mu(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + t$$

sayısı ile  $2\pi$ 'nin çarpımıdır. Burada  $\mu(\Gamma) > 0$  olduğuna dikkat ediniz.

Bu tanımlamalara göre  $H(\lambda_q) \cong \langle R, S \mid R^2 = S^q = I \rangle$  Hecke grubunun simgesi

$$(g; 2, q, \infty) \quad \text{veya} \quad (2, q, \infty)$$

şeklinde elde edilir (Cangül, 1993). Bu gruplar küre üzerinde hareket ettiklerinden cinsleri sıfırdır. Sonuç olarak  $H(\lambda_q) = (0; 2, q, \infty)$  grubu için

$$\mu(H(\lambda_q)) = 2 \cdot 0 - 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{q}\right) + 1$$

ve denk olarak

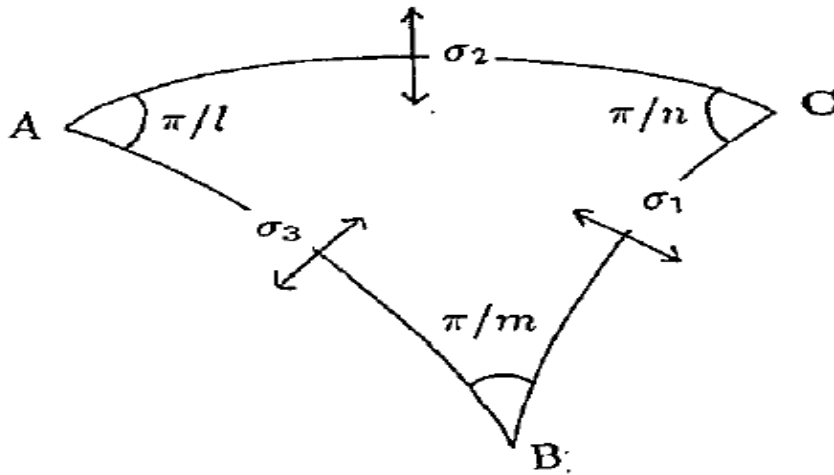
$$\mu(H(\lambda_q)) = \frac{q-2}{2q}$$

olmaktadır. Böylece bir  $\Gamma$  Fuchsian grubunun temel bölgesinin hiperbolik alanı  $2\pi\mu(\Gamma) = \pi \frac{q-2}{q}$  olarak ifade edilebilir. Bunlara ek olarak  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma$  grubunun sonlu indeksli bir alt grubu ise

$$\frac{\mu(\Gamma_1)}{\mu(\Gamma)} = [\Gamma:\Gamma_1]$$

ifadesine Riemann-Hurwitz formülü denilir. Burada basit ifadesini verdiğimiz Riemann-Hurwitz formülü, bu tezde sıklıkla kullanacağımız temel özelliklerden birisidir.

**1.1.7.Tanım (Üçgen grubu).**  $l, m, n \geq 2$  tam sayılar olmak üzere, Açılıarı  $\pi/l$ ,  $\pi/m$ ,  $\pi/n$  ve üç kenarındaki yansımaları  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  olan hiperbolik üçgeni  $\Delta$  ile gösterelim.



Şekil 1.4. Bir üçgen grubu

Bu üç yansıma ile üretilen grubu  $\Gamma^*$  ile gösterelim. O halde

$$\Gamma^* = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = (\sigma_2\sigma_3)^l = (\sigma_3\sigma_1)^m = (\sigma_1\sigma_2)^n \rangle$$

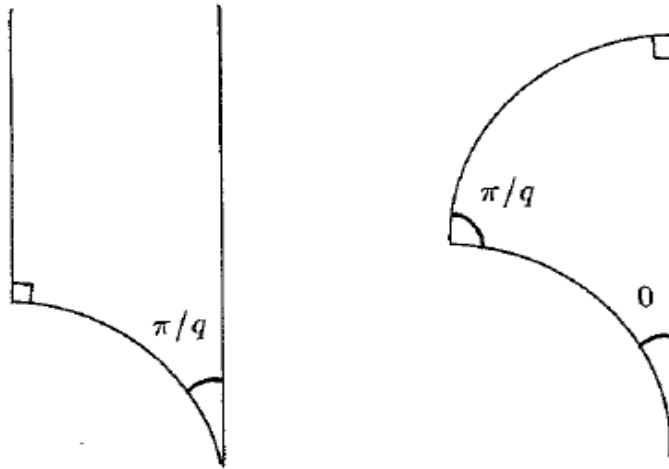
Burada  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  yön korumayan elamanlardır. Fakat  $x = \sigma_2\sigma_3$  ve  $y = \sigma_3\sigma_1$  alırsak,  $(xy)^n = I$  olarak bulunur ve  $x$ ; A köşesinde  $2\pi/l$ ,  $y$ ; B köşesinde  $2\pi/m$ ,  $xy$  ise C köşesinde  $2\pi/n$  açılık kadar dönüş yapar ve bunların hepsi yön koruyan izometrilere dir. Böylelikle  $\Gamma^*$  grubunun  $x$  ve  $y$  ile üretilen yön koruyan  $\Gamma$  alt grubu

$$\Gamma = \langle x, y | x^l = y^m = (xy)^n = I \rangle.$$

şeklinde elde edilir, bkz. Şekil 1.4., ve bu üçgen grubu aynı zamanda bir Fuchs grubudur. Fuchs grubunun simgesini  $(g; l, m, n)$  ile göstermekteydik. Burada kısaca  $(l, m, n)$  ile ifade edebiliriz.  $R^2 = I$  olduğundan  $\Gamma$ ,  $\Gamma^*$  grubunun 2 indeksli bir alt grubudur. Dolayısıyla normal alt grubudur. Üstelik daha önceden tanımladığımız birinci tip Hecke grupları aynı zamanda üçgen gruplarıdır. Gösterimleri ise

$$H(\lambda_q) \cong \langle R, S | R^2 = S^q = I \rangle = (g; 2, q, \infty) = (2, q, \infty)$$

şeklinde ifade edilebilir ve açıları  $\pi/2$ ,  $\pi/q$  ve  $\pi/\infty$  olan üçgenler üzerinde hareket eder, bkz. Şekil 1.5.



**Şekil 1.5.** Hecke grubunun üzerinde hareket ettiği üçgenler

Burada  $l = 2$  olduğundan  $(2, m, n)$  tipindeki grupları ele alırsak

kürede  $g = 0$  olup

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$$

$$(m - 2)(n - 2) < 4;$$

tor yüzeyinde  $g = 1$  olup

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$$

$$(m - 2)(n - 2) = 4,$$

$g \geq 2$  olan bir kompakt yönlendirilebilir yüzey üzerinde ise

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$$

$$(m - 2)(n - 2) > 4$$

bağıntıları sağlanmaktadır. Bazı çok iyi bilinen sonlu grup çeşitleri de aslında birer üçgen grubu olarak düşünülebilir ve bu bize izomorfizm teoremlerini, permütasyon metodunu ve Riemann-Hurwitz formülünü kullanarak normal alt grupları elde edebilme şansını verir:

**1.1.8. Tanım. (i)  $C_n$  devirli grupları:** Tek eleman tarafından üretilen gruplardır. Bir düzgün  $n$ -genin yön koruyan simetrilerinin grubudur. Gösterimleri



$$C_n \cong \langle \alpha : \alpha^n = I \rangle$$

şeklindedir. Mertebesi  $|C_n| = n$ 'dir ve üçgen grubu olarak gösterimleri ise  $n \in \mathbb{N}$  için  $(1, n, n)$  biçimindedir.

**(ii)  $D_n$  Dihedral grupları:** İki eleman tarafından üretilen gruplardır. Bir düzgün  $n$ -genin yön koruyan ve korumayan tüm simetrilerinin grubudur. Gösterimleri

$$D_n \cong \langle \alpha, \beta : \alpha^2 = \beta^2 = (\alpha\beta)^n = I \rangle$$

şeklindedir. Mertebesi  $|D_n| = 2n$ 'dir ve üçgen grubu olarak gösterimleri ise  $(2, 2, n)$ ,  $(2, n, 2)$  veya  $(n, 2, 2)$  şeklinde olabilir.

**(iii)  $S_n$  Simetrik ve  $A_n$  Alterne grupları:** Fonksiyonların bileşke işlemine göre  $n$  elemanlı bir kümenin bütün permütasyonlarının kümesine  $n$  elemanın simetrik grubu denilir ve  $S_n$  ile gösterilir. Bu grubun çift permütasyonlarının oluşturduğu alt grubuna ise  $n$  elemanın alterne grubu denilir ve  $A_n$  ile gösterilir. Mertebeleri ise  $|S_n| = n!$  ve  $|A_n| = \frac{n!}{2}$ 'dir. Burada karşılaşacağımız simetrik gruplardan bazıları  $S_3 \cong D_3 \cong (2, 2, 3)$ ,  $S_4 \cong (2, 3, 4)$ , alterne gruplar ise  $A_4 \cong (2, 3, 3)$  ve  $A_5 \cong (2, 3, 5)$ 'dir.

Aşağıdaki metod, ayırık gruplar teorisindeki hesaplamalarda sıklıkla kullanılan ve normal altgrupların üreteçlerinin elde edilmesinde kullanılan bir algoritma bulundurur:

**1.1.9. Teorem.**  $\theta: G_1 \rightarrow G_2$  bir epimorfizm ise  $\text{Ker}\theta \triangleleft G_1$  olur ve

$$G_2 \cong G_1/\text{Ker}\theta$$

dır.

Yukarıdaki teorem ile  $G_1$  grubundan çıkan tüm epimorfizmlerin çekirdeklerinin hesaplanmasıyla  $G_1$  grubunun normal alt grupları bulunabilir. Bu tezde  $Ker\theta = N \triangleleft H(\lambda_q)$  şeklinde normal alt grupları hesaplayabiliriz ve  $G$  grubunu değiştirip farklı normal alt grupları bulabiliriz. Bu sonuçtan hareketle aşağıdaki metodu  $H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının normal alt gruplarının simgelerini belirlemek için kullanacağız.

**1.1.10. Tanım (Permütasyon metodu).**  $p + q = r + t$  ve  $1 \leq i \leq q$  için  $1 < k_i \leq \infty$  olmak üzere

$$\Gamma = (g; m_1, \dots, m_p, n_1 k_1, \dots, n_q k_q)$$

simgesine sahiptir ve  $\Gamma_1, \Gamma$  grubunun  $\mu$  indeksli bir normal alt grubu ise  $\Gamma_1$  alt grubu

$$\left( g_1; k_1 \binom{\mu}{n_1}, \dots, k_q \binom{\mu}{n_q} \right)$$

simgesine sahiptir. Burada  $k_i \binom{\mu}{n_i}$ ,  $k_i$  mertebeli elemandan  $\mu/n_i$  tane var demektir.  $g_1$  cinsi Riemann-Hurwitz formülü ile bulunabilir. Permütasyon yöntemi, Jones ve Singerman tarafından verilmiştir (Jones ve Singerman (1978)) ve uygulamada Hecke gruplarının normal alt gruplarını bulmada oldukça kolaylık sağlar:

**1.1.11. Tanım (Reidemeister-Schreier yöntemi).**  $H(\lambda_q)$  grubunun bir alt grubu  $H$  olsun.  $H(\lambda_q)$ 'nin üreteçlerinin  $R$  ve  $S$  olduğunu görmüştük. İlk olarak  $H$  alt grubunun bir  $\Sigma$  Schreier transversali aşağıdaki gibi seçilir:

(i)  $I \in \Sigma$

(ii)  $\Sigma$  sağ sadeleştirme altında kapalıdır. Bunun anlamı eğer

$$g_{i_1} \cdot g_{i_2} \cdots g_{i_r} \in \Sigma \text{ ise } g_{i_1} \cdot g_{i_2} \cdots g_{i_{r-1}} \in \Sigma$$

olmalıdır. Bu durumda H alt grubunun üreteçleri aşağıdaki formdaki elemanların tümünden oluşur:

$$(\Sigma\text{'nin bir elamanı})x(H(\lambda_q) \text{ üreteçlerinden biri})x(\text{önceki çarpımın koset temsilcisi})^{-1}$$

dır (Johnson (1980)).

**1.1.12. Tanım (Kamütatör alt grubu).**  $G$  bir grup,  $g, h \in G$  ve  $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$  olmak üzere

$$G' = \langle [g, h]: g, h \in G \rangle$$

şeklinde tanımlı  $G'$  alt grubuna  $G$  grubunun kamütatör alt grubu denir.

Kamütatör alt grubu, değişmeliliğin çalışılmasında kullanılmaktadır. Aşağıdaki sonuç, uygulamada oldukça faydalıdır:

**1.1.13. Teorem.**  $G/G'$  bölüm grubu,  $G$  grubunun en büyük değişmeli bölüm grubudur.

Yani  $G/N$ ,  $G$ 'nin başka bir değişmeli bölüm grubu ise

$$G' \triangleleft N \triangleleft G$$

olmalıdır (Allenby, (1991)).

**1.1.14. Tanım (Serbest (Free) grup).** Bir grubun üreteçleri arasında hiçbir bağıntı yoksa bu gruba serbest grup denilir.

Serbest grup kavramını biraz daha açarsak;  $X, F$ 'nin bir serbest tabanı ve alt kümesi olsun.  $F$ , aşağıdaki şartları sağlayan  $X$  tabanına sahip bir serbest gruptur.  $\Phi, X$  kümesinden  $H$  grubu içine herhangi bir fonksiyon ise  $\Phi$  homomorfizminin  $F$ 'den  $H$ 'ye bir  $\Phi^*$  homomorfizmine tek bir genişlemesi vardır.  $X$  serbest tabanının mertebesine  $F$ 'nin rankı denir.  $|X| = n$  ve  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ise  $F, \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  üzerinde serbesttir denilir ve  $F_n$  ile gösterilir (Lyndon ve Schupp, (1977)). İki serbest grup, ancak ranklarının eşit olması durumunda izomorf olurlar. Ek olarak 0 ranklı bir grup aşikâr ve 1 ranklı bir grup ise sonsuz devirlidir.

Bir serbest grupta hiçbir üretelin sonlu bir kuvveti etkisiz elemana eşit olamaz. Ayrıca üreteçlerin sonlu kuvvetleri yardımıyla bir eşitlik elde edilemez. Bir serbest grupta bulunan üreteç sayısına grubun rankı denilir. Rankı  $n$  olan bir serbest grup

$$F_n \cong \mathbb{Z} * \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n \text{ tane}}$$

şeklinde gösterilir. Burada  $n = 0$  ise  $G = \{e\}$  ve  $n = 1$  ise  $G = \mathbb{Z}$  olduğuna dikkat ediniz. Ek olarak free gruplarda sonlu mertebeli olduğunu bildiğimiz eliptik elemanlar yoktur. Grubun gösterimi ise

$$G \cong \langle g, \infty^{(t)} \rangle$$

şeklindedir.

**1.1.15. Teorem (Nielsen–Schreier).** Bir serbest grubun her bir alt grubu da serbesttir (Fine & Rosenberger, (1999)).

**1.1.16. Teorem.**  $G$  bir serbest grup ise

$$G \cong \langle g, \infty^{(t)} \rangle \cong F_{2g+t-1}$$

**1.1.17. Teorem.**  $F$  grubunun bir serbest grup olması için gerek ve yeter koşul  $F = \langle X; \rangle$  biçiminde gösterilmesidir.

Yani eğer hiçbir bağıntı mevcut değilse bu grup bir serbest gruptur. Aşağıdaki sonuç, grupların önemli bir özelliğidir:

**1.1.18. Teorem.** Her  $G$  grubu bir serbest grubun homomorfik görüntüsüdür (Fine & Rosenberger, (1999)).

**1.1.19. Teorem.** Bir serbest grup bükümsüzdür (torsion-free) (Fine & Rosenberger, (1999)).

Bunun anlamı ise serbest grupta birim elaman dışında sonlu mertebeli eleman yoktur.

Şimdi ise bu tezde kullanacağımız serbest çarpım gruplarını ele alalım.

**1.1.20. Tanım.**  $A = \langle a_1, \dots; R_1, \dots \rangle$  ve  $B = \langle b_1, \dots; S_1, \dots \rangle$  iki grup olmak üzere  $A$  ve  $B$  gruplarının serbest çarpımı

$$A \star B = \langle a_1, \dots, b_1, \dots; R_1, \dots, S_1, \dots \rangle$$

ile gösterilir. Bu serbest çarpım bir grup olmakla birlikte grubun üreteçleri  $A$  ve  $B$ 'nin üreteçlerinin tümünden, bağıntıları ise  $A$ 'nın  $R_i$  ve  $B$ 'nin  $S_j$  bağıntılarının tümünden oluşur. Bu grubun çarpanları ise  $A$  ve  $B$ 'dir.

Yukarıda serbest çarpım kavramını iki grup için tanımladık. Şimdi ise bu tanımları istenilen sayıda grup için genişletebiliriz:

**1.1.21. Teorem.**  $A_\alpha = \langle \text{ür } A_\alpha: \text{bağ } A_\alpha \rangle, \alpha \in I$ , gruplarının koleksiyonu olmak üzere bu grupların serbest çarpımını  $G = \star A_\alpha$  serbest çarpımını üreteçleri  $A_\alpha$ 'ların üreteçlerinin ayrık birleşiminden ve bağıntıları ise  $A_\alpha$ 'ların bağıntılarının ayrık birleşiminden oluşan gruptur.

**1.1.22. Teorem.**  $G = A \star B$  olmak üzere,  $A \rightarrow G$  ve  $B \rightarrow G$  eşlemeleri bire-bir eşlemelerdir.  $A$ 'nın üreteçleri tarafından üretilen  $G$ 'nin alt grubu

$$\langle A' \text{nin üreteçleri}, A' \text{nin bağıntıları} \rangle$$

gösterimine sahiptir ve  $A$ 'ya izomorftur. Benzer biçimde  $B$ 'nin üreteçleri tarafından üretilen  $G$ 'nin alt grubu da

$$\langle B' \text{nin üreteçleri}, B' \text{nin bağıntıları} \rangle$$

gösterimine sahiptir ve  $B$ 'ye izomorftur. Yani  $A$  ve  $B$ ,  $G$ 'nin birer alt grubu olarak da düşünülebilir.

Bir  $G$  grubunu serbest çarpım olarak ayrıştırabiliriz:

$$G = \langle R \cup S; \{ \text{sadece } R' \text{ deki üreteçleri içeren bağıntılar} \} \cup \{ \text{sadece } S' \text{ deki üreteçleri içeren bağıntılar} \} \rangle$$

biçiminde yazarsak  $G$  grubu

$$G_1 = \langle R; R' \text{ deki üreteçleri içeren bağıntılar} \rangle$$

ve

$$G_2 = \langle S; S' \text{ deki üreteçleri içeren bağıntılar} \rangle$$

gruplarının serbest çarpımıdır.

Şimdi verilecek olan Kurosh teoremi ile serbest gruplar için verilmiş olan Nielsen–Schreier teoremi serbest çarpımlara genişletilebilir.

**1.1.23. Teorem (Kurosh).**  $G, A_\alpha$  alt gruplarının serbest çarpımı olarak

$$G = \prod_{\alpha}^* A_\alpha$$

şeklinde gösterilsin.  $H, G$ 'nin bir alt grubu ise

$$H = F \star \prod_{\beta} \star B_{\beta}$$

şeklindedir. Burada  $F$  bir serbest grup ve her bir  $\beta$  için  $B_{\beta}, A_{\alpha}$  grubunun bir alt grubuna eşleniktir.

**1.1.24. Teorem.**  $G = A \star B, H \subset A$  ve  $K \subset B$  ise  $H$  ve  $K$  ile üretilen alt grup bunların serbest çarpımıdır. Yani  $\langle H, K \rangle = H \star K$ 'dir.

**1.1.25. Teorem.**  $H(\lambda_q) \cong C_2 \star C_q$ 'dir (Macbeath, (1963)).

Bunun anlamı ise  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunun 2 ve  $q$  mertebeli iki sonlu devirli grubun serbest çarpımına izomorf olmasıdır. Yani aslında bu tezin konusu olan Hecke grupları birer serbest çarpımdır.

Şimdi düzgün figürler kavramını irdeleyelim.

**1.1.26. Tanım (Figür).** Bir  $G$  grafi, sonlu ve bağlantılı olsun.  $G$  grafinin kompakt, bağlantılı ve yönlendirilebilir bir  $S$  yüzeyine  $S - G$  kümesi çokgenlerin bir ailesi olacak şekilde gömülmesine  $S$  üzerinde bir figür denir. Burada  $S - G$  açık disklerden oluşur ve bu disklerin her birine figürün bir yüzü (face) denir. Dolayısıyla bir figür  $v$  (vertex) köşe,  $e$  (edge) kenar ve  $f$  (face) yüzden oluşur. Bu tez boyunca figürler  $G$  notasyonu ile gösterilecektir.  $G, S$  yüzeyi üzerinde bir figür olmak üzere,  $G$  figürünün cinsi  $S$  yüzeyinin cinsi olarak tanımlanır.

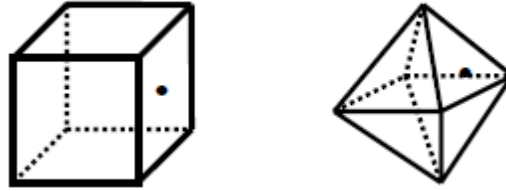
Graflarla ilgili daha detaylı bilgi için bkz. (Bondy ve ark., (2008)), (Diestel, (2010)), (Foulds, (1992)), (Hakimi, (1962)), (Havel, (1955)), (Hecke, (1936)) ve (Wallis, (2007)).



**1.1.27. Tanım (Dual figür).** Esas figür ile aynı yüzey üzerinde bulunan, fakat esas figürün köşelerini yüz merkezleri, yüz merkezlerini ise köşe kabul eden figüre dual ya da eşlenik figür denir.  $G^*$  ile gösterilir.

**1.1.28. Tanım (Figürün tipi).**  $G$  bir figür olsun.  $G$ 'nin her bir yüzünün kenar sayılarının ekok'una  $G$ 'nin yüz katlılığı (face valency),  $G$ 'nin her bir köşesinden çıkan kenar sayılarının ekok'una da  $G$ 'nin köşe katlılığı (vertex valency) denir ve bu durumda  $G$ 'nin tipi  $\{m, n\}$ 'dir denir. Dual figürün tipi ise  $\{n, m\}$  olduğu açıktır.

Örnek vermek gerekirse küp  $\{4, 3\}$ , düzgün sekiz yüzlü  $\{3, 4\}$ , düzgün dört yüzlü  $\{3, 3\}$  tipindeki düzgün figürlerdir. Burada görüldüğü gibi küp ve düzgün sekiz yüzlü birbirinin eşleniğidirler, bkz. Şekil 1.6.



**Şekil 1.6.** Küp ve Düzgün sekiz yüzlü

Yani sezgisel olarak küp, düzgün dört yüzlü, düzgün sekiz yüzlü gibi her köşesinden bakıldığında aynı görünen figürlere düzgün figürler diyeceğiz.

**1.1.29. Tanım. (Euler-Poincare formülü).**  $G$ , cinsi  $g$  olan  $\{m, n\}$  tipinde bir düzgün figürünün dartlarının sayısı  $|Aut^0(M)|$  eşittir ve  $|G| = |V| \cdot n = |E| \cdot 2 = |F| \cdot m$  olmak üzere Euler-Poincare karakteristiği

$$X(G) = |V| - |E| + |F| = \begin{cases} 2 - 2g, & \text{M yönlendirilebilir} \\ 2 - g, & \text{M yönlendirilemez} \end{cases}$$

dir. Buradan  $G$  yüzeyinin cinsi  $g$  olmak üzere şu bağıntılar sağlanır:

$$g = g(G) = \begin{cases} |Aut(G)| \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{4m} - \frac{1}{4n} \right) + 1, & \text{M yönlendirilebilir ve yansımali} \\ |Aut(G)| \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2m} - \frac{1}{2n} \right) + 1, & \text{M yönlendirilebilir ve chiral} \\ |Aut(G)| \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2m} - \frac{1}{2n} \right) + 2, & \text{M yönlendirilemez.} \end{cases}$$

Biz bu tezde yönlendirilebilir yüzeyler üzerinde çalışacağız. O halde Euler-Poincare karakteristiği

$$X(G) = |V| - |E| + |F| = 2 - 2g = Aut^0(G) \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right)$$

şeklinde bulunur.

Şimdi ise  $\{m, n\}$  ikilisindeki  $m$  ve  $n$  sayılarının ekstremum değerleri için Conder ve Dobcsanyi tarafından verilen özellikleri inceleyelim, (Conder ve Dobcsanyi, (2001)). Burada cinsi 2 veya daha büyük olan yansımali yönlendirilebilir figürler için beş farklı sınıf verilmiştir.

**1.1.30. Teorem.**  $g \geq 2$  iken yansımali yönlendirilebilir figürler için beş farklı sınıf aşağıda verilmiştir:

(a)  $\{4g, 4g\}$  tipindeki tek köşeye ve  $2g$  tane kenara sahip tek yüzlü olan figürler. Bunların otomorfizm grubu  $4g$  mertebeli  $D_{2g}$  dihedral grubudur.

(b)  $\{2g + 1, 4g + 2\}$  tipindeki tek köşeye,  $2g + 1$  kenara ve iki yüze sahip figürler. Bunların otomorfizm grubu  $8g + 4$  mertebeli  $D_{4g+2}$  dihedral grubudur.

(c)  $\{2g + 2, 2g + 2\}$  tipindeki iki köşeli,  $2g + 2$  kenarlı ve iki yüze sahip figürler. Bunların otomorfizm grubu  $8g + 8$  mertebeli  $D_{2g+2} \times C_2$  direk çarpım gruplarıdır.

(d)  $\{4, 4g\}$  tipindeki iki köşeli,  $4g$  kenarlı ve  $2g$  yüze sahip figürler. Bunların otomorfizm grubu  $16g$  mertebelidir.

(e)  $\{4, 2g + 2\}$  tipindeki dört köşeli,  $4g + 4$  kenarlı ve  $2g + 2$  yüze sahip figürler. Bunların otomorfizm grubu  $16g + 16$  mertebelidir.

Böylece  $g \geq 2$  iken Hecke gruplarının normal alt gruplarının karşılık getirilerek bulunacağı tüm yansımaları, yönlendirilebilir  $\{m, n\}$  tipindeki figürler için  $m$  veya  $n$ 'nin alabileceği maksimum değer  $4g + 2$  olabilir. Bu şekilde bir üst limit, çalışılan değerleri kısıtlayarak işimizi kolaylaştırdığından oldukça faydalı olacaktır.

Bu sonuçta  $g \geq 2$  alındığına dikkat ediniz. Bunun sebebi, küre ve tor yüzeyi üzerindeki figürler için  $m$  ve  $n$ 'nin çok daha geniş bir aralığı kapsayan değerler alabilmesidir.

İlk olarak  $g = 0$  ise, yani Hecke grubunun bölüm grubu küre üzerinde hareket ediyorsa, o zaman ilk olarak bir  $H(\lambda_q)$  Hecke grubunu  $\frac{H(\lambda_q)}{N} \cong D_n = (2, 2, n)$  üzerine resmederek bu işlem sonucunda bu epimorfizmin çekirdeği olarak elde edilecek olan  $N$  normal alt grubuna karşılık gelecek  $\{2, n\}$  tipinde bir düzgün figür elde ederiz. Tabii bu normal alt grup küre üzerinde hareket etmektedir.

Burada  $n$  sayısının üzerinde hiçbir kısıt yoktur. Dolayısıyla istenildiği kadar büyük seçilebilir. Yani küre üzerinde hareket eden bir düzgün figürün tipi  $\{m, n\}$  ise  $m$  ve  $n$  için bir üst sınır elde edilemez.

İkinci olarak  $H(\lambda_q)$  grubunu  $D_n = (2, n, 2)$  üzerine resmedebiliriz. Burada homomorfizmin tanımlanabilmesi için  $n|q$  olmalıdır. Bu bize  $\{n, 2\}$  tipinde bir düzgün figür verecektir. Özetle  $m$  ve  $n$  için bir üst sınır yoktur, en küçük değerleri de 1 olabilir.

Tor üzerinde hareket eden bölüm gruplarına gelince  $H(\lambda_q)$ 'yu ancak  $(2,3,6)$ ,  $(2,6,3)$  veya  $(2,4,4)$  üzerine resmetmek mümkündür. Dolayısıyla elde edilebilecek figürler  $\{3, 6\}$ ,  $\{6, 3\}$  veya  $\{4, 4\}$  tipinde olabilir. Yani

$$\min\{m, n\} = 3 \text{ ve } \max\{m, n\} = 6$$

olur.

Şimdi düzgün figür kavramını ele almak için otomorfizmlerden bahsedeceğiz ve otomorfizmleri ok (dart) adını verdiğimiz bir kavramdan yararlanarak ifade edeceğiz:

**1.1.31. Tanım (Otomorfizm).**  $G, S$  yüzeyi üzerinde bir figür olmak üzere  $S$  yüzeyinin  $f(G) = G$  şartlarını sağlayan bir  $f$  otomorfizmasına  $G$  figürünün bir otomorfizması denir ve bu otomorfizma  $G$  figürünün köşelerini köşelerine, kenarlarını kenarlara ve yüzlerini ise yüzlere resmeder. Ek olarak  $G$  figürünün tüm otomorfizmaları bir grup oluşturur ve  $\text{Aut}(G)$  ile gösterilir. Üstelik  $G$  figürünün tüm otomorfizmalarının grubu da bileşke işleme göre bir grup oluşturur ve  $\text{Aut}^0(G)$  ile gösterilir ve  $\text{Aut}(G)$ 'nin 2 indeksli bir alt grubudur.

**1.1.32. Tanım (Dart).** Bir figürde herhangi bir köşeye doğru yönlendirilmiş köşe-kenar ilişkisine bir dart denir, bkz. Şekil 1.7.



Şekil 1.7. Bir  $\alpha$  dartı

**1.1.33. Tanım (Düzgün figür).**  $G$ ,  $S$  yüzeyi üzerinde bir figür olmak üzere  $\text{Aut}^0(G)$  grubu dartlar üzerinde geçişli ise  $G$ 'ye bir düzgün figür denir.  $f \in \text{Aut}(G)$  olmak üzere  $G$  figürünün bir kenarına ait olan iki dartını birbirine götürür ve bu kenara komşu olan iki yüzünü sabit bırakırsa  $f$  otomorfizmasına  $G$  figürünün bir yansıması denir. Eğer  $G$  figürünün en az bir yansıması varsa yansımalıdır denir.

Bu tezde çalışacağımız düzgünlük kavramı figürler için oldukça önemli bir kavramdır. Jones ve Singerman,  $(2, m, n)$  türü üçgen gruplarının normal alt grupları ile  $\{m, n\}$  tipindeki düzgün figürler arasında 1 – 1 eşleme olduğunu göstermiştir, (Jones ve Singerman, (1978)). Bu özellik sayesinde Hecke gruplarının alt grupları ve bu alt gruplardan da düzgün figürler hakkında bilgi edineceğiz.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

Hecke grupları, ayrık gruplar olarak 1936 yılında Alman matematikçi Erich Hecke tarafından Dirichlet bölgeleri ile ilgili olarak çalışılmış olan gruplardır. En önemli Hecke grubu da modüler gruptur. 1980'li yıllardan itibaren Hecke grupları ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır. 1994 yılında Cangül, doktora tezinde (Cangul, (1994)) o gün bilinen tüm düzgün figürlerin cinsinin 7 veya daha küçük olmasından hareketle Hecke gruplarının cinsi 7'ye kadar olan tüm normal alt gruplarını hesaplamıştı. Conder ve Dobcsanyi tarafından daha sonra cinsi 101'e kadar olan tüm düzgün figürlerin listeleri (Conder & Dobcsanyi, (2001))'de verildiğinden Hecke gruplarının normal alt gruplarının da cinsi 101'e kadar olanlarının çalışılması mümkün olabilmıştır.

2018 yılında Delen ve Cangül tarafından omega invaryant adı verilen yeni bir graf invaryantı tanımlandı. Verilen bir derece dizisine karşılık olarak çizilebilecek tüm graflar hakkında birçok bilgi veren ve işlemleri kolaylaştıran bu invaryant ile ilgili çok sayıda çalışma yapıldı ve birçok alandaki uygulamaları elde edildi. Bunlar arasında bileşen sayısı, loop sayısı, katlı kenar sayısı, yüz sayısı, giriş sayısı, bağımsızlık sayısı, matching sayısı gibi graf parametreleri yer almaktadır. Ayrıca omega invaryantı, sayılar teorisiyle ilişkili olarak Fibonacci, Lucas ve Tribonacci graflarının tanımlanmasında ve çalışılmasında da kullanılmıştır.

Bu tezde de omega invaryanttan ve Conder tarafından verilen listelerden faydalanarak Hecke gruplarının normal altgruplarının parametreleri arasında yeni bağıntılar elde edilmiş, bu normal altgruplarla ilgili birçok yeni sonuç ortaya konulmuştur.

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Hecke gruplarının normal alt gruplarının çalışılmasında, doğal olarak temel soyut cebir yöntemleri kullanılmıştır. Bunlar arasında serbest gruplar, serbest çarpımlar, Kurosh alt grup teoremi, alt gruplarla ilgili kombinatorik sonuçlar, Sylow teoremleri ve izomorfizm teoremleri ilk akla gelenlerdir.

Jones ve Singerman'ın meşhur permütasyon yöntemi de her bir normal alt gruba bir düzgün figür karşılık geldiği gerçeğinden hareketle kullanılmakta ve Hecke grupların normal alt gruplarının çalışılmasında faydalı olmaktadır. Düzgün figürlerle ilgili tüm yöntemler ve formüller de bu alt grupların hesaplanmasında kullanılmıştır.

Ayrık gruplar teorisinde alt grupların çalışılmasında sıklıkla kullanılan bir yöntem olan Riemann-Hurwitz formülü de Hecke grubunun ve herhangi bir normal alt grubunun temel bölgelerinin hiperbolik alanları arasında bir bağıntı verdiği için bu tezde de hesaplamalarda yoğun bir şekilde kullanılmıştır. Bir normal alt grubun üreteçlerinin hesaplanması için kullanılan metod olan Reidemeister-Schreier metodu da normal alt grupların çalışılmasında kullanılmıştır.

Sonlu grupların üçgen grubu olarak temsil edilebilmesi de izomorfizm teoremlerinin kullanıldığı yerlerde oldukça faydalı olmuştur.

Son olarak omega invaryantı ve onun birçok temel özelliği de bu tezdeki hesaplamalarda kullanılmıştır.

## 4. BULGULAR

### 4.1. Omega invaryantı

Bu alt bölümde omega invaryantı ile ilgili verilen tanım ve sonuçlar hakkında daha detaylı bilgi için (Cangul & Delen, (2018)) ve (Cangul & Delen 2, (2018)) makalelerine bakınız.

$G = (V, E)$  bir graf olmak üzere  $G$  grafının köşelerinin bir kümesi  $V(G)$ , kenarlarının kümesi ise  $E(G)$  olsun.  $G$  grafının köşe elemanlarının sayısı  $|V(G)| = n$  ve kenar elemanlarının sayısı ise  $|E(G)| = m$ 'dir. Burada  $n$ 'ye  $G$  grafının mertebesi,  $m$ 'ye ise  $G$  grafının boyutu diyeceğiz.  $v \in V(G)$  için  $v$  köşesinin derecesini  $d_v$  ile göstereceğiz. Derecesi 1 olan köşeye sallanan (pendant) köşe, bu köşeye bitişik olan kenara da sallanan (pendant) kenar denilir. Bir grafın en küçük ve en büyük köşesinin derecesi  $\delta$  ve  $\Delta$  ile gösterilecektir.  $u, v \in V(G)$  köşeleri arasında bir kenar mevcutsa bu iki köşeye komşu (adjacent) köşeler denilir.  $u$  ve  $v$  komşu köşeler ise ve  $e$  kenarı bu köşelere bağlıysa  $e = uv$  şeklinde gösterilir.  $uv \in E(G)$  ise  $uv$  kenarına  $u$  ve  $v$  köşelerine bitişiktir (incident) denilir. Komşuluk ve bitişiklik kavramı graf enerjisinde, graf teorisinin alt alanlarında ve grafların lineer cebirsel çalışılmalarında çok önemli rol oynamaktadır.

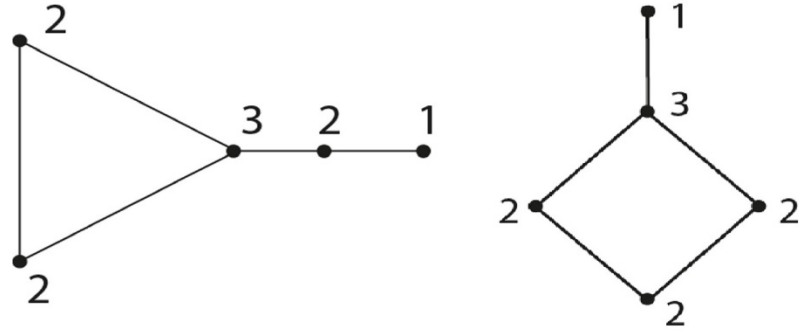
Genel olarak bir derece dizisi bir  $G$  grafının köşe derecelerinin oluşturduğu kümeye denir ve

$$DS = \{0^{(a_0)}, 1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$$

şeklinde gösterilir.

Şekil 4.1'de  $\{1,2,2,2,3\}$  kümesinin iki farklı çizimi görülmektedir. Bu çok da büyük bir derece dizisi olmamakla beraber basit iki çizimi mevcuttur. Aslında basit olmayan başka çizimler de mevcuttur. Bu küme biraz daha büyük olduğunda bu kümenin derece dizisi olduğu binlerce hatta milyonlarca graf çizilebilmektedir. Bu grafların sayısı halen bir açık problemdir.





**Şekil 4.1.** Bir derece dizisinin iki farklı çizimi

$D$  negatif olmayan tamsayılardan oluşan bir küme olmak üzere  $D$  kümesi bir  $G$  grafının derece dizisine eşit ise  $D$  'ye bir çizilebilir (realizable) derece kümesi diyeceğiz. Tanımdan anlaşılacağı üzere çizilebilir bir derece dizisi için bu derece dizisine sahip en az bir graf olduğu açıktır. Şekil 4.1' deki graflar yukarıda belirttiğimiz gibi tamamen farklı olmalarına karşın aynı derece dizisine sahiptir. Böyle bir kümeye derece dizisi denildiğinde bu kümenin çizilebilir olduğu anlaşılacaktır.

Negatif olmayan tamsayılardan oluşan belirli bir kümenin bir graf olarak çizilip çizilemeyeceğini belirlemek için çok sayıda sonuç vardır. Bunlardan en iyi bilineni Havel-Hakimi tarafından verilen sonuçtur, bkz. (Havel, (1955)), (Hakimi, (1962)). Graf teorisinin el sıkışma lemmasından doğan en önemli sonuçlarından biri de, tüm köşe derecelerinin toplamının kenar sayısının iki katına eşit olması yani çift tamsayı olmasını ifade eder.

Burada grafları en az bir devire sahip olup olmamasına göre sınıflandıracğıız. Bağlantılı bir grafa hiçbir devir bulunmazsa bu grafa ağaç (tree) denir ve  $n$  köşeli bir ağaç  $T_n$  ile gösterilir. Eğer devir içermeyen bir graf bağlantılı değilse bu grafa orman (forest) denilir.

Omega invaryantının özel bir değerinin ağaçların sallanan yaprak sayısını bulmaya yaradığı iyi bilinen bir sonuçtur. Daha net bir ifadeyle bir ağaçtaki yaprakların sayısını veren formül

$$a_1 = 2 + a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \cdots + (\Delta - 2)a_\Delta$$

şeklindedir. Buradaki bir ağaçtaki yaprakların sayısı, bir başka ifade ile de  $a_1$  sayısı sallanan kenar sayısını vermektedir.

Bu eşitliği aşağıdaki şekilde düzenlediğimizde

$$-2 = a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \cdots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1$$

elde edilir. Delen ve Cangül, bu eşitliğin ağaçlar için  $-2$  değerine eşit olan sağ tarafının ağaçlar dışındaki graflar için de belli değerleri aldığını gördüler, bkz. (Delen & Cangul, (2018)). Bu da Delen ve Cangül'ün sağ taraftaki ifadeye bir isim vermelerine sebep olmuştur:

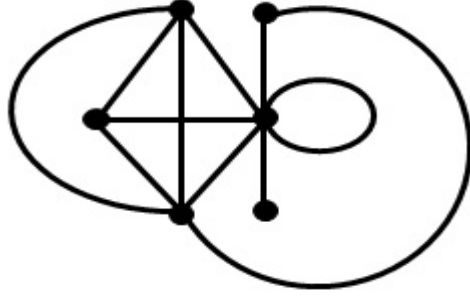
**4.1.1. Tanım (Omega invaryantı).**  $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$  çizilebilir bir derece dizisi olmak üzere  $G$  bu derece dizisine sahip bir graf olsun.  $G$  grafının omega invaryantı

$$\Omega(G) = a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \cdots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1 = \sum_{i=1}^{\Delta} (i - 2)a_i$$

şeklinde tanımlanır.

$G$  grafının omega invaryantının aynı zamanda  $D$  derece dizisinin de omega invaryantı olduğuna dikkat ediniz.

Omega invaryantını daha iyi anlayabilmek için bir örnek verelim:



Şekil 4.2.  $\Omega(G) = 10$  olan bir  $G$  grafi

Şekil 4.2'deki  $G$  grafinin derece dizisi  $\{1^{(1)}, 2^{(1)}, 3^{(1)}, 4^{(1)}, 5^{(1)}, 7^{(1)}\}$  olup omega invaryantı

$$\Omega(G) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 10$$

olmaktadır. Doğal olarak bu aşamada elde edilen bu 10 değerinin çok bir anlamı olduğunu göremesek de bu sayının,  $D$  derece dizisinin tüm çizimleri hakkında ortak bilgilere ulaşmamızı sağlayacağını not edelim.

Şimdi omega invaryantı için önemli bir özelliği vereceğiz:

**4.1.2. Teorem.**  $m$  kenar ve  $n$  köşeye sahip bir  $G$  grafinin omega invaryantı

$$\Omega(G) = 2(m - n)$$

bağıntısı ile hesaplanır.

**İspat.** El sıkışma lemması gereği köşe dereceleri toplamı kenar sayısının iki katına eşit olduğundan

$$\begin{aligned}
2m &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + \Delta a_\Delta \\
&= a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \cdots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1 + 2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_\Delta)
\end{aligned}$$

elde edilir.  $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_\Delta = n$  olduğundan

$$2m = \Omega(G) + 2n$$

ve buradan da  $\Omega(G) = 2(m - n)$  istenen sonucu elde edilir.

Aşağıdaki sonuç aşikârdır:

**4.1.3. Teorem.** Herhangi bir  $G$  grafi için  $\Omega(G)$  çifttir.

Bu sonuç şu şekilde yorumlanabilir:

**4.1.4. Sonuç.**  $D$  derece dizisinin çizilebilir olması için  $\Omega(D)$  çift olmalıdır.

Her derece dizisine karşılık bir omega invaryantı bulunabilir, fakat tersi her zaman doğru değildir. Gerçekte her bir omega değeri için sonsuz çoklukta grafin mevcut olacağı kolayca söylenebilir.

Sık karşılaşılan graf türleri  $n = r + s$  olmak üzere  $P_n$  yol,  $C_n$  devir,  $S_n$  yıldız,  $K_n$  tam,  $T_{r,s}$  larva,  $K_{r,s}$  iki parçalı grafıdır. Şimdi ağaçlarla birlikte bu graf türlerinin omega değerlerini verelim:

$$\Omega(C_n) = 0$$

$$\Omega(P_n) = -2$$

$$\Omega(S_n) = -2$$

$$\Omega(T_n) = -2$$

$$\Omega(K_n) = n(n - 3)$$

$$\Omega(K_{r,s}) = 2(rs - (r + s))$$

$$\Omega(T_{r,s}) = 0.$$

Bir  $G$  grafindaki kapalı bölgelerin (devirlerin) sayısı  $r$  olsun. Burada grafin dışındaki sınırsız bölge hesaba katılmayacaktır. Örnek vermek gerekirse,  $C_n$  için  $r = 1$ ,  $T_n$  için  $r = 0$ ,  $K_4$  için  $r = 3$  olarak alınacaktır. Devir bulunduran graflar için  $n \geq 3$  olması gerektiği aşikârdır.

**4.1.4. Teorem.**  $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$  ve  $G$  grafi  $D$  derece dizisine sahip bağlantılı bir graf olsun.  $G$  grafinin kapalı bölge veya devir sayısı

$$r = \frac{\Omega(G)}{2} + 1$$

şeklindedir.

Grafin bağlantılı olmaması durumunda da eğer grafin  $c$  tane bileşeni varsa kapalı bölge sayısı

$$r = \frac{\Omega(G)}{2} + c$$

ile verilmektedir.

#### 4.2. Hecke gruplarının normal alt gruplarının düzgün figürler ile ilişkileri

Jones ve Singerman'ın  $H(\lambda_q)$  Hecke gruplarının normal alt grupları ile düzgün figürler arasındaki 1 – 1 eşlemenin varlığını gösterdiklerini daha önceden söylemiştik (Jones & Singerman, (1978)). Şimdi daha ayrıntılı olarak ifade edersek  $m|q$  olmak üzere her  $m \in \mathbb{N}$  için

$$\theta : H(\lambda_q) \cong (2, q, \infty) \rightarrow (2, m, n)$$

$R$  üreticini iki uzunluklu devirlere,  $S$  üreticini  $m$  uzunluklu devirlere ve son olarak da  $T = R \cdot S$  üreticini  $n$  uzunluklu devirlere taşıyan bir epimorfizm elde ederiz.  $|G| = \mu$  ise,  $R$ 'nin devir sayısı  $\mu/2$ ,  $S$ 'nin devir sayısı  $\mu/m$  ve  $T$ 'nin devir sayısı  $\mu/n$  olarak bulunur.  $R$ 'nin  $H(\lambda_q)/N$  bölüm grubundaki permütasyonların sayısı

$$e = \frac{\mu}{2} = \frac{|G|}{2}$$

olup her bir devir,  $N$  normal alt grubuna karşılık gelen düzgün figürdeki bir kenara denktir. Benzer şekilde  $S$ 'nin  $H(\lambda_q)/N$  bölüm grubundaki permütasyonların sayısı

$$f = \frac{\mu}{m} = \frac{|G|}{m}$$

olup her bir devir  $N$  normal alt grubuna karşılık gelen düzgün figürdeki bir yüze denktir. Son olarak  $T$ 'nin  $H(\lambda_q)/N$  bölüm grubundaki permütasyonlarının sayısı

$$v = \frac{\mu}{n} = \frac{|G|}{n}$$

olup her bir devir  $N$  normal alt grubuna karşılık gelen düzgün figürdeki bir köşeye denktir. Böylece  $f = \mu/m$  ve  $v = \mu/n$  olur. Buradan  $\frac{q}{m} = d$  ile gösterirsek

$$N \cong \left( g; \frac{q}{m} \binom{\mu}{m}, \infty \binom{\mu}{n} \right) = \left( g; \frac{q}{m} \binom{f}{m}, \infty \binom{v}{n} \right) = (g; d^{(f)}, \infty^{(v)})$$

elde edilir. Burada  $g$ ,  $N$ 'ye karşılık gelen düzgün figürün üzerinde olduğu yüzeyin minimum cinsidir ve Riemann-Hurwitz formülü yardımıyla hesaplanabilir.

**4.2.1. Teorem.**  $N \cong (g; d^{(f)}, \infty^{(v)}) \triangleleft H(\lambda_q)$  ise

$$N \cong F_{1+e-f} * \prod_{i=1}^f C_d$$

dir (Demirci ve ark., (2021)).

**İspat.** Cangül tarafından (Cangul, (1994))'de ispatlanan  $N$  normal alt grubunun serbest kısmının rankı

$$r(N) = 2g + v - 1$$

şeklindedir. Cinsi  $g$  olan yönlendirilebilir bir yüzeydeki herhangi bir graf için Euler formülü

$$v - e + f = 2 - 2g$$

dir. Buradan  $v = t$  olduğu hatırlanırsa

$$r(N) = 2g + v - 1 = 2 - v + e - f + t - 1 = 1 + e - f$$

elde edilir. Sonuç olarak, her bir  $d = \frac{q}{m}$  değeri için serbest çarpımda  $f$  tane  $d$  uzunluğunda  $C_d$  deviri elde ederiz. Bu alt grubun gösterimi ise

$$N \cong F_{1+e-f} * \prod_{i=1}^f C_d$$

şeklindedir. 4.2.1. Teorem'den aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

**4.2.2. Sonuç.**  $m = \frac{q}{d}$  ve  $N \cong (g; d^{(f)}, \infty^{(v)}) \triangleleft H(\lambda_q)$  ise

$$N \cong F_{1 + \left(\frac{2-m}{2m}\right)\mu} * \prod_{i=1}^f C_d$$

olur.

**İspat.** Teorem 4.2.1.'de  $e = \mu/2$  ve  $f = \mu/m$  yazılarak kolayca görülür.

**4.2.3. Sonuç.**  $H(\lambda_q)$ 'nin küre üzerindeki bir normal alt grubu  $N \cong (0; d^{(f)}, \infty^{(v)})$  ise  $N$ 'in rankı

$$r(N) = v - 1$$

dir.

**4.2.4. Sonuç.**  $H(\lambda_q)$ 'nin tor üzerindeki bir normal alt grubu  $N \cong (1; d^{(f)}, \infty^{(v)})$  ise  $N$ 'in rankı

$$r(N) = v + 1$$

dir.

**4.2.5. Sonuç.**  $H(\lambda_q)$ 'nin iki delikli tor üzerindeki bir normal alt grubu

$$N \cong (2; d^{(f)}, \infty^{(v)})$$

ise  $N$ 'nin rankı

$$r(N) = v + 3$$

dir.

(Delen & Cangül, (2018))'de tanımlanan ve çalışılan,  $\Omega$  ile gösterilen ve omega değişmezi olarak adlandırılan yeni bir topolojik graf invariantı ve özellikleri incelendi.



Omega değişmezinin özelliklerini görmek için (Delen & Cangul, (2018)) ile (Delen & Cangul 2, (2018))'e bakılabilir. (Delen & Cangul, (2018))'de herhangi bir  $G$  grafi için  $\Omega(G) = 2(m - n)$  'dir. Bir düzgün figür aynı zamanda bir graf olduğundan bu gösterimi düzgün figürler için de kullanabiliriz. Örneęin bir  $G$  düzgün figürü için  $G$ 'nin yüz sayısı (Delen & Cangul, (2018))'de  $f = \frac{\Omega(G)}{2} + c(G)$  olarak verilmiştir.  $c(G)$ ,  $G$ 'nin bileşenlerinin sayısını gösterir. (Delen & Cangul 2, (2018))'de  $f = \frac{\Omega(G)}{2} + \chi(G)$  olarak verilmiştir.  $\chi(G)$ ,  $G$ 'nin Euler karakteristiğini gösterir. Bu ikisinden  $v$ ,  $H(\lambda_q)$  nun köşelerinin sayısı olmak üzere,  $H(\lambda_q)$ 'nun bir  $N$  normal alt grubunun rankının

$$r(N) = 1 + v - \chi(G)$$

olduğu sonucuna ulaşıyoruz.

(Delen & Cangul 2, (2018))'de aşığıdaki sonuç verilmiştir:

**4.2.6. Lemma.**  $N$ ,  $H(\lambda_q)$ 'nun bir normal alt grubu olsun.  $G$ ,  $N$ 'ye karşılık gelen bir düzgün figür ve  $v$ ,  $G$ 'nin köşelerinin sayısını göstere.  $H(\lambda_q)$ 'nun bir  $N$  normal alt grubunun rankı

$$r(N) = 1 + v - \chi(G)$$

ile verilir.

**4.2.7. Teorem.**  $N$ ,  $H(\lambda_q)$ 'nun bir normal alt grubu olsun.  $G$ ,  $N$ 'ye karşılık gelen bir düzgün figür,  $v$ ,  $G$ 'nin köşelerinin sayısı ve  $f$ ,  $G$ 'nin yüzlerinin sayısını göstere.  $H(\lambda_q)$ 'nun bir  $N$  normal alt grubunun rankı

$$r(N) = 1 + v - f + \frac{\Omega(G)}{2}$$

dır.

**4.2.8. Teorem.** 4.2.6. Lemma'dan

$$r(N) = 1 + v - \chi(G)$$

olduğunu biliyoruz. (Delen & Cangul, (2018))’de Delen ve Cangul, herhangi bir  $G$  grafinin Omega değişmezi ve Euler karakteristiği arasında  $\Omega(G) = 2(f - \chi(G))$  bağlantısı olduğunu göstermiştir. Bir düzgün figürün aynı zamanda bir graf olduğunu hatırlarsak,

$$\chi(G) = f - \frac{\Omega(G)}{2}$$

olur. Bunu (1) eşitliğinde yerine yazıp ispatı yapabiliriz. Teorem 4.2.7’yi aşağıdaki gibi  $e, f, g$  ve  $\Omega(G)$  ile yeniden ifade edelim:

**4.2.9. Sonuç.**  $H(\lambda_q)$ ’nun bir  $N$  normal alt grubunun rankı

$$r(N) = 3 + e - 2f - 2g + \frac{\Omega(G)}{2}$$

ile verilir.

**İspat.** Euler karakteristiği özelliğinden dolayı  $v = 2 - 2g + e - f$  olduğunu biliyoruz. Bunu Teorem 4.2.7’de yerine yazarak sonuca ulaşırız.

Bu sonuç oldukça kullanışlıdır ve  $f, q, g$  ve  $v$  arasında bir bağıntı verir.

Şimdi  $m|q$  olmak üzere her  $m \in \mathbb{N}$  için,

$$\theta : H(\lambda_q) \cong (2, q, \infty) \rightarrow (2, m, n)$$

epimorfizminin çekirdeği  $\ker\theta = N$  ise  $N \triangleleft H(\lambda_q)$  olduğunu biliyoruz.  $G$ , cinsi  $g$  olan  $\{m, n\}$  tipinde bir düzgün figür ve  $|G| = \mu$  olsun. O halde aşağıdaki teoremi verebiliriz:

**4.2.10. Teorem.** Yönlendirilebilir ve yansımali bir  $G$  düzgün figürü için

$$n \leq \frac{4\mu}{\mu - 8g + 8} \leq m$$

dir.

**İspat.** (Conder & Dobcsanyi, (2001))’de yönlendirilebilir ve yansımali bir  $G$  düzgün figürü için

$$g = |G| \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{4m} - \frac{1}{4n} \right) + 1$$

olduğu verilmiştir. Burada genelliği bozmadan  $\max\{m, n\} = m$  ve  $3 \leq n \leq m$  olarak alırsak

$$\frac{1}{4m} + \frac{1}{4n} = \frac{1}{8} - \frac{g-1}{|G|}$$

elde edilir.  $n \leq m$  olduğundan  $n$  yerine  $m$  yazarsak

$$\frac{1}{4m} + \frac{1}{4m} \leq \frac{1}{8} - \frac{g-1}{|G|}$$

$$\frac{1}{2m} \leq \frac{\mu - 8g + 8}{8\mu}$$

$$m \geq \frac{4\mu}{\mu - 8g + 8}$$

elde ederiz. Benzer şekilde  $m$  yerine  $n$  koyarsak

$$\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{8} - \frac{g-1}{|G|}$$

elde ederiz.

Şimdi ise  $\{m, n\}$  ikilisindeki  $m$  ve  $n$  sayılarının ekstremum değerleri için Conder ve Dobcsanyi tarafından verilen özellikleri daha önceden giriş bölümünde belirtmiştik. (Conder ve Dobcsanyi, (2001)). Burada cinsi 2 veya daha büyük olan yansımali yönlendirilebilir figürler için verdiğimiz sınıflardan  $g \geq 2$  iken Hecke gruplarının normal alt gruplarının karşılık getirilerek bulunacağı tüm yansımali, yönlendirilebilir  $\{m, n\}$  tipindeki figürler için  $m$  veya  $n$ 'nin alabileceği maksimum değer  $4g + 2$  olabilir. Bu şekilde bir üst limit, çalışılan değerleri kısıtlayarak işimizi kolaylaştırdığından oldukça faydalı olacaktır. Buradan  $g > 2$  için  $Ekok\{m, n\}$  değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir. Üstelik bu değerler  $g' = 2g + 1$  olmak üzere

$$Ekok\{m, n\} = k_g \cdot ((g')^3 - g')$$

olacak şekilde bir  $k_g$  sayısı bulunmuştur ve  $2k_g$  alınarak asal çarpanlar olarak yazılmıştır. Fakat bu sayı sayılar teorisi olarak incelendiğinde herhangi bir bağıntı şu an için bulunamamıştır ve ucu açık bir problem olarak ilgi çekeceği düşünülmektedir. Diğer yandan aşağıdaki tablo yardımıyla

$m|q$  olmak üzere her  $m \in \mathbb{N}$  için,

$$\theta : H(\lambda_q) \cong (2, q, \infty) \rightarrow (2, m, n)$$

epimorfizminin çekirdeği  $ker\theta = N$  ise  $N \triangleleft H(\lambda_q)$  olduğunu daha önceden söylemiştik. Buna ek olarak  $g > 2$  için  $Ekok\{m, n\} = Z$  ise  $(Z, q) = 1$  olduğunda  $H(\lambda_q)$  hecke grubunun normal alt grubunun bulunmayacağını söyleyebiliriz.

Örnek olarak  $g = 3$  için  $Ekok\{m, n\} = 168$  olduğundan  $(q, 168) = 1$  olacak şekildeki  $q$  sayıları için  $H(\lambda_q)$  hecke grubunun normal alt grubu bulunamaz. Bu şekilde örnekleri  $3 \leq g \leq 101$  için aşağıdaki tablodan yararlanarak  $H(\lambda_q)$  hecke grubunun normal alt grubunun belirli  $q$  değerleri için bulunup bulunmayacağını söyleyebiliriz.

<b>g</b>	<b><math>E_{\text{kok}}\{m, n\}</math></b>	<b><math>g' = 2g + 1</math></b>	<b><math>2k_g</math></b>	<b><math>2k_g</math>'nün Asal çarpan yazılımı</b>
<b>3</b>	168	7	1	$2^0$
<b>4</b>	720	9	2	2
<b>5</b>	1320	11	2	2
<b>6</b>	32760	13	30	2.3.5
<b>7</b>	5040	15	3	3
<b>8</b>	24480	17	10	2.5
<b>9</b>	47880	19	14	2.7
<b>10</b>	27720	21	6	2.3
<b>11</b>	12144	23	2	2
<b>12</b>	109200	25	14	2.7
<b>13</b>	196560	27	20	$2^2 \cdot 5$
<b>14</b>	48720	29	4	$2^2$
<b>15</b>	3437280	31	231	3.7.11
<b>16</b>	538560	33	30	2.3.5
<b>17</b>	42840	35	2	2
<b>18</b>	46060560	37	1820	$2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
<b>19</b>	622440	39	21	3.7
<b>20</b>	2273040	41	66	2.3.11
<b>21</b>	158928	43	4	$2^2$
<b>22</b>	91080	45	2	2
<b>23</b>	23868480	47	460	$2^2 \cdot 5 \cdot 23$
<b>24</b>	233906400	49	3978	$2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 17$
<b>25</b>	183783600	51	2772	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$

<b>26</b>	57297240	53	770	2.5.7.11
<b>27</b>	1580040	55	19	19
<b>28</b>	2777040	57	30	2.3.5
<b>29</b>	2463840	59	24	2 <sup>3</sup> .3
<b>30</b>	908587680	61	8008	2 <sup>3</sup> .7.11.13
<b>31</b>	6874560	63	55	5.11
<b>32</b>	14002560	65	102	2.3.17
<b>33</b>	726180840	67	4830	2.3.5.7.23
<b>34</b>	985320	69	6	2.3
<b>35</b>	3936240	71	22	2.11
<b>36</b>	16812104400	73	86450	2.5 <sup>2</sup> .7.13.19
<b>37</b>	345454200	75	1638	2.3 <sup>2</sup> .7.13
<b>38</b>	27387360	77	120	2 <sup>3</sup> .3.5
<b>39</b>	5176080	79	21	3.7
<b>40</b>	695550240	81	2618	2.7.11.17
<b>41</b>	62887440	83	220	2 <sup>2</sup> .5.11
<b>42</b>	15278543280	85	49764	2 <sup>2</sup> .3.11.13.29
<b>43</b>	9876240	87	30	2.3.5
<b>44</b>	16212240	89	46	2.23
<b>45</b>	19527187680	91	51832	2 <sup>3</sup> .11.19.31
<b>46</b>	9289249200	93	23100	2 <sup>2</sup> .3.5 <sup>2</sup> .7.11
<b>47</b>	2571840	95	6	2.3
<b>48</b>	15125947200	97	33150	2.3.5 <sup>2</sup> .13.17
<b>49</b>	75675600	99	156	2 <sup>2</sup> .3.13
<b>50</b>	1031230200	101	2002	2.7.11.13
<b>51</b>	172088280	103	315	3 <sup>2</sup> .5.7

<b>52</b>	10417680	105	18	$2 \cdot 3^2$
<b>53</b>	1886401440	107	3080	$2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
<b>54</b>	82839917160	109	127946	$2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37$
<b>55</b>	11653321680	111	17043	$3 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23$
<b>56</b>	53346938400	113	73950	$2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 29$
<b>57</b>	127743840	115	168	$2^3 \cdot 3 \cdot 7$
<b>58</b>	112104720	117	140	$2^2 \cdot 5 \cdot 7$
<b>59</b>	1685040	119	2	2
<b>60</b>	601137055078560	121	678698748	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 163$
<b>61</b>	17193274560	123	18480	$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
<b>62</b>	2921688000	125	2992	$2^4 \cdot 11 \cdot 17$
<b>63</b>	598249491840	127	1168310	$2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 43$
<b>64</b>	8429541120	129	7854	$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$
<b>65</b>	2407565160	131	2142	$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17$
<b>66</b>	179366667480	133	152490	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$
<b>67</b>	396098640	135	322	$2 \cdot 7 \cdot 23$
<b>68</b>	539955360	137	420	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
<b>69</b>	757305360	139	564	$2^2 \cdot 3 \cdot 47$
<b>70</b>	5365095120	141	3828	$2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29$
<b>71</b>	14620320	143	10	2.5
<b>72</b>	116037144568800	145	76127870	$2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 37$
<b>73</b>	15004803177000	147	9447750	$2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$
<b>74</b>	1132398867600	149	684684	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19$
<b>75</b>	6892485600	151	4004	$2^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
<b>76</b>	698377680	153	390	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$
<b>77</b>	513873360	155	276	$2^2 \cdot 3 \cdot 23$

<b>78</b>	1550525820480	157	801360	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 53$
<b>79</b>	379844640	159	189	$3^3 \cdot 7$
<b>80</b>	63990622080	161	30668	$2^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 41$
<b>81</b>	63356443920	163	29260	$2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$
<b>82</b>	1792292040	165	798	$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$
<b>83</b>	512302560	167	220	$2^2 \cdot 5 \cdot 11$
<b>84</b>	993105313200	169	411510	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 43$
<b>85</b>	111650893200	171	44660	$2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29$
<b>86</b>	854294760	173	330	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$
<b>87</b>	948578400	175	354	$2 \cdot 3 \cdot 59$
<b>88</b>	2959479563040	177	1067430	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$
<b>89</b>	3693443040	179	1288	$2^3 \cdot 7 \cdot 23$
<b>90</b>	1345325476	181	2690650952	$2^3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 61$
<b>91</b>	94038824880	183	30690	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31$
<b>92</b>	9820063440	185	3102	$2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 47$
<b>93</b>	104362695360	187	31920	$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$
<b>94</b>	297047520	189	88	$2^3 \cdot 11$
<b>95</b>	6974647680	191	2002	$2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
<b>96</b>	64224771811200	193	17867850	$2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$
<b>97</b>	124789064400	195	33660	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17$
<b>98</b>	376907176800	197	98600	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19$
<b>99</b>	535409502427800	199	135883839	$3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 67$
<b>100</b>	1172774794791600	201	288846558	$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 41$
<b>101</b>	4893656040	203	1170	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$



**4.2.11.Teorem.**  $N \triangleleft H(\lambda_q)$  için

$$\frac{v+f}{2e} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

dır.

**İspat.**  $|G| = |V| \cdot n = |E| \cdot 2 = |F| \cdot m$  olduğunu ve yönlendirilebilir bir yüzey için Euler-Poincare karakteristiğinin

$$X(G) = |v| - |e| + |f| = 2 - 2g = |G| \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right)$$

olduğunu daha önceden söylemiştik. O halde  $|G| = |E| \cdot 2 = \mu$  eşitliğini denklemde yerine yazarsak

$$\frac{2-2g}{\mu} + \frac{1}{2} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

$$\frac{2-2g}{2e} + \frac{1}{2} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

$$\frac{2-2g+e}{2e} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

$$\frac{X(G)+e}{2e} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

$$\frac{v-e+f+e}{2e} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

$$\frac{v+f}{2e} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

elde edilir.

**4.2.12.Teorem.**  $N \triangleleft H(\lambda_q)$  bir serbest alt grup ise

$$K_q = \frac{4e}{(e-f) \cdot q}$$

dır.

**İspat.**  $|G| = |V| \cdot n = |E| \cdot 2 = |F| \cdot m$  eşitliğinde  $m|q$  olduğundan  $m = q$  alındığında

$$2e = qf \Rightarrow 4e = 2qf$$

$$\frac{4e}{e-f} = \frac{2qf}{e-f}$$

$$\frac{4e}{(e-f)q} = \frac{2f}{e-f}$$

ve böylece

$$\frac{4e}{(e-f) \cdot q} = K_q$$

elde edilir. Bunlara ek olarak

$$f = f(g, q) = \left(\frac{t}{2} + g - 1\right) \cdot k_q$$

olarak verilen bir  $3 \leq g \leq 101$  için  $k_q = \frac{4}{q-2}$  sayıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

$g \backslash q$	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	2	–	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	–	–
4	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	–	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
5	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
6	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
7	4	2	–	1	$\frac{4}{5}$	–	$\frac{4}{7}$	–
8	4	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
9	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	–	–
10	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	–
11	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	–
12	–	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
13	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	–	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
14	4	2	–	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
15	4	2	–	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
16	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
17	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$

<b>18</b>	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
<b>19</b>	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
<b>20</b>	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
<b>21</b>	4	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	–
<b>22</b>	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
<b>23</b>	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	–
<b>24</b>	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
<b>25</b>	4	2	–	1	–	–	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
<b>26</b>	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
<b>27</b>	4	2	$\frac{4}{3}$	–	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	–
<b>28</b>	4	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
<b>29</b>	–	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
<b>30</b>	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	–
<b>31</b>	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	–	–	–
<b>32</b>	–	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
<b>33</b>	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
<b>34</b>	–	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
<b>35</b>	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	–

<b>36</b>	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
<b>37</b>	4	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
<b>38</b>	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
<b>39</b>	4	2	–	–	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
<b>40</b>	4	2	–	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
<b>41</b>	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	–
<b>42</b>	–	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
<b>43</b>	4	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
<b>44</b>	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
<b>45</b>	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
<b>46</b>	4	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
<b>47</b>	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	–
<b>48</b>	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
<b>49</b>	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
<b>50</b>	4	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	–
<b>51</b>	4	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	–
<b>52</b>	4	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
<b>53</b>	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	–

54	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
55	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
56	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
57	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
58	4	2	–	1	–	–	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
59	–	2	–	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	–	–
60	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
61	–	2	$\frac{4}{3}$	1	–	–	–	$\frac{1}{2}$
62	–	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
63	4	2	–	–	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	–
64	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
65	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
66	4	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
67	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
68	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
69	4	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	–
70	–	2	$\frac{4}{3}$	1	–	–	–	–
71	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	–

72	–	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
73	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
74	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
75	4	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	–
76	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	–	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
77	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
78	4	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
79	4	2	–	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	–
80	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
81	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
82	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
83	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	–
84	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
85	4	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
86	4	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
87	4	2	–	–	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	–	–
88	–	2	–	1	–	–	–	$\frac{1}{2}$
89	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$

90	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	–
91	4	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
92	4	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
93	–	2	–	–	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	–	–
94	4	2	–	1	–	–	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
95	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	–
96	4	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
97	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
98	–	2	–	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$
99	4	2	–	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	–	–
100	4	2	–	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
101	–	2	$\frac{4}{3}$	1	–	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$

**4.2.13. Teorem.**  $N \triangleleft H(\lambda_q)$  serbest olmayan bir alt grup ise

$$K_q = \frac{4ed}{(e-f) \cdot q}$$

dır.

**İspat.**  $|G| = |V| \cdot n = |E| \cdot 2 = |F| \cdot m$  eşitliğinde  $m|q = d$  olduğundan  $m = \frac{q}{d}$  alınabilir. O halde



$$2e = \frac{q}{d} f$$

$$4e = \frac{2qf}{d}$$

$$\frac{4ed}{e-f} = \frac{2qf}{e-f}$$

$$\frac{4ed}{(e-f)q} = \frac{2f}{e-f}$$

$$\frac{4ed}{(e-f) \cdot q} = K_q$$

olarak bulunur. Bunlara ek olarak  $m|q = d$

$$f = f(g, q) = \left(\frac{t}{2} + g - 1\right) \cdot k_m$$

olarak verilen bir  $3 \leq g \leq 101$  için  $k_m = \frac{4}{m-2}$  sayıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

g \ q	3	4	5	6	7	8	9	10
3	-	-	-	4	-	2	4	-
4	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
5	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
6	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
7	-	-	-	4	-	2	4	-
8	-	-	-	4	-	2	4	-
9	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
10	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
11	-	-	-	-	-	2	-	-
12	-	-	-	-	-	2	-	$\frac{4}{3}$
13	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
14	-	-	-	4	-	2	4	-
15	-	-	-	4	-	2	4	-
16	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
17	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
18	-	-	-	-	-	2	-	-
19	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
20	-	-	-	-	-	2	-	-

21	-	-	-	4	-	2	4	-
22	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
23	-	-	-	-	-	2	-	-
24	-	-	-	-	-	2	-	-
25	-	-	-	4	-	2	4	-
26	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
27	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
28	-	-	-	4	-	2	4	-
29	-	-	-	-	-	2	-	$\frac{4}{3}$
30	-	-	-	-	-	2	-	-
31	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
32	-	-	-	-	-	2	-	$\frac{4}{3}$
33	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
34	-	-	-	-	-	2	-	$\frac{4}{3}$
35	-	-	-	-	-	2	-	-
36	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
37	-	-	-	4	-	2	4	-
38	-	-	-	-	-	2	-	-
39	-	-	-	4	-	2	4	-
40	-	-	-	4	-	2	4	-
41	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$

42	-	-	-	-	-	2	-	$\frac{4}{3}$
43	-	-	-	4	-	2	4	-
44	-	-	-	-	-	2	-	-
45	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
46	-	-	-	4	-	2	4	-
47	-	-	-	-	-	2	-	-
48	-	-	-	-	-	2	-	-
49	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
50	-	-	-	4	-	2	4	-
51	-	-	-	4	-	2	4	-
52	-	-	-	4	-	2	4	-
53	-	-	-	-	-	2	-	-
54	-	-	-	-	-	2	-	-
55	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
56	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
57	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
58	-	-	-	4	-	2	4	-
59	-	-	-	-	-	2	-	-
60	-	-	-	-	-	2	-	-
61	-	-	-	-	-	2	-	$\frac{4}{3}$
62	-	-	-	-	-	2	-	$\frac{4}{3}$
63	-	-	-	4	-	2	4	-

<b>64</b>	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
<b>65</b>	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
<b>66</b>	-	-	-	4	-	2	4	-
<b>67</b>	-	-	-	-	-	2	-	-
<b>68</b>	-	-	-	-	-	2	-	-
<b>69</b>	-	-	-	4	-	2	4	-
<b>70</b>	-	-	-	-	-	2	-	$\frac{4}{3}$
<b>71</b>	-	-	-	-	-	2	-	-
<b>72</b>	-	-	-	-	-	2	-	$\frac{4}{3}$
<b>73</b>	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
<b>74</b>	-	-	-	-	-	2	-	-
<b>75</b>	-	-	-	4	-	2	4	-
<b>76</b>	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
<b>77</b>	-	-	-	-	-	2	-	-
<b>78</b>	-	-	-	4	-	2	4	-
<b>79</b>	-	-	-	4	-	2	4	-
<b>80</b>	-	-	-	-	-	2	-	-
<b>81</b>	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
<b>82</b>	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
<b>83</b>	-	-	-	-	-	2	-	-
<b>84</b>	-	-	-	-	-	2	-	-
<b>85</b>	-	-	-	4	-	2	4	-

86	-	-	-	4	-	2	4	-
87	-	-	-	4	-	2	4	-
88	-	-	-	-	-	2	-	-
89	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
90	-	-	-	-	-	2	-	-
91	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
92	-	-	-	4	-	2	4	-
93	-	-	-	-	-	2	-	-
94	-	-	-	4	-	2	4	-
95	-	-	-	-	-	2	-	-
96	-	-	-	4	-	2	4	-
97	-	-	-	4	-	2	4	$\frac{4}{3}$
98	-	-	-	-	-	2	-	-
99	-	-	-	4	-	2	4	-
100	-	-	-	4	-	2	4	-
101	-	-	-	-	-	2	-	$\frac{4}{3}$

**4.2.14. Teorem.**  $N \triangleleft H(\lambda_q)$  için

$$g - 1 + \frac{t}{2} = \frac{e - f}{2}$$

dir.

**İspat.** Euler-Poincare karakteristiğinden

$$X = 2 - 2g = v - e + f$$

$$2g - 2 = e - v - f$$

$$2g - 2 + v = e - f$$

ve buradan  $v = t$  yazılarak

$$g - 1 + \frac{t}{2} = \frac{e - f}{2}$$

elde edilir.

**4.2.15. Teorem.**  $N \triangleleft H(\lambda_q)$  olmak üzere

a)  $N$  bir serbest grup ise  $K_q = \frac{f}{g-1+\frac{v}{2}}$  'dir.

b)  $N$  bir serbest grup değilse  $K_q = \frac{f}{g-1+\frac{v}{2}}$  'dir.

**İspat.** a)  $N$  bir serbest grup ise  $N \cong F_{2g+t-1}$  'dir ve  $q = m$  alınabilir.

$$2e = fq \Rightarrow q = \frac{2e}{f}$$

elde edilir.  $K_q = \frac{4}{q-2}$  ifadesinde  $q = \frac{2e}{f}$  değerini yerine yazarsak

$$K_q = \frac{4}{\frac{2e}{f} - 2} = \frac{4f}{2(e-f)} = \frac{2f}{e-f} = \frac{f}{\frac{e-f}{2}} = \frac{f}{g-1+\frac{v}{2}}$$

elde edilir.

b)  $N$  bir serbest grup değilse  $N \cong F_{2g+t-1} * \prod_{i=1}^f C_d$  şeklindedir.  $q = md$  ve  $2e = f \cdot \frac{q}{d}$  olarak alınırsa

$$K_q = \frac{4}{\frac{q}{d} - 2} = \frac{4}{\frac{2e}{f} - 2} = \frac{4f}{2(e-f)} = \frac{2f}{(e-f)} = \frac{2f}{2(g-1+\frac{t}{2})} = \frac{f}{g-1+\frac{t}{2}}$$

elde edilir. Buradaki ispatlardan görülüyor ki  $K_q = \frac{2f}{(e-f)}$  oranı her  $q$  için sabittir. O halde aşağıdaki sonuçları verebiliriz:

$q = 3$  iken

$$K_q = \frac{4}{q-2} = \frac{2f}{(e-f)} \Rightarrow 4 = \frac{2f}{(e-f)} \Rightarrow 4e = 6f \Rightarrow 2e = 3f$$

olarak bulunur. Bu ise  $2e = fq \Rightarrow 2e = 3f$  eşitliğini doğrulamış olur.

Bir başka sonuç ise  $q = 6$  ve  $N \cong F_{29} * \prod_{i=1}^{56} C_2$  ise bir serbest grup olmadığından

$$K_q = \frac{4}{\frac{q}{d} - 2} = \frac{2f}{(e-f)}$$

$$4 = \frac{2f}{(e-f)}$$

ve buradan

$$4e = 6f \Rightarrow 2e = 3f$$

olur.  $f = 56$  iken  $e = 84$  olarak bulunur. Diğer bir sonuç ise

$q = 6$  iken  $N \cong F_{13}$  bir serbest grup olduğundan



$$K_q = \frac{4}{q-2} = \frac{2f}{(e-f)}$$

$$1 = \frac{2f}{(e-f)}$$

ve buradan  $e = 3f$  olur ve  $f = 6$  iken  $e = 18$ 'dir.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Hecke grupları, 1936 yılında Alman matematikçi Erich Hecke tarafından Dirichlet bölgeleri ile ilgili olarak çalışılmış olan gruplardır. En önemli Hecke grubu modüler grup olarak bilinir ve katsayı cismi rasyonel sayılardır. 1980'li yıllardan itibaren Hecke grupları ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır. 1994 yılında Cangül, doktora tezinde (Cangul, (1994)) o gün bilinen tüm düzgün figürlerin cinsinin 7 veya daha küçük olmasından hareketle Hecke gruplarının cinsi 7'ye kadar olan tüm normal alt gruplarını hesaplamıştı. Conder ve Dobcsanyi tarafından daha sonra cinsi 101'e kadar olan tüm düzgün figürlerin listeleri (Conder & Dobcsanyi, (2001))'de verildiğinden Hecke gruplarının normal alt gruplarının da cinsi 101'e kadar olanlarının çalışılması mümkün olabilmektedir.

2018 yılında Delen ve Cangül tarafından omega invaryant adı verilen yeni bir graf invaryantı tanımlandı. Verilen bir derece dizisine karşılık olarak çizilebilecek tüm graflar hakkında birçok bilgi veren ve işlemleri kolaylaştıran bu invaryant ile ilgili çok sayıda çalışma yapıldı ve birçok alandaki uygulamaları elde edildi. Bunlar arasında bileşen sayısı, loop sayısı, katlı kenar sayısı, yüz sayısı, giriş sayısı, bağımsızlık sayısı, matching sayısı gibi graf parametreleri yer almaktadır. Ayrıca omega invaryantı, sayılar teorisiyle ilişkili olarak Fibonacci, Lucas ve Tribonacci graflarının tanımlanmasında ve çalışılmasında da kullanılmıştır.

Bu tezde de omega invaryantın temel özelliklerinden ve Conder ve Dobcsanyi tarafından verilen listelerden faydalanarak Hecke gruplarının normal alt gruplarının parametreleri arasında yeni bağıntılar elde edilmiş, bu normal alt gruplarla ilgili birçok yeni sonuç ortaya konulmuştur.

Elde edilen bu sonuçların matematiğin soyut cebir, topoloji, ayrık grup teorisi, graf teori ve kompleks analiz gibi dalları arasında yeni ilişkiler oluşmasına ve bu sayede yeni çalışmaların ortaya çıkmasına neden olacağı düşünülmektedir.

## KAYNAKLAR

- Bondy, J. A., Murty, U. S. R. (2008). *Graph Theory*. Springer NY.
- Cangul, I. N. (1994). *Normal Subgroups of Hecke Groups*, Ph.D. Thesis, Southampton University
- Cangul, I. N. (1994). *Normal Subgroups of the Hecke Group  $H(\sqrt{2})$* , Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, 43, 129-135.
- Cangul, I. N. (1995). *Normal Subgroups of the Hecke Groups and Regular Maps*, Hacettepe Bull. of Nat. Sci. and Eng., 24, 15-23.
- Cangul, I. N. (1996). *The Group Structure of Hecke Groups  $H(\lambda_q)$* , Tr. J. of Mathematics, 20, 203-207.
- Cangul, I. N., Singerman, D. (1998). *Normal Subgroups of Hecke Groups and Regular Maps*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 123, 59-74.
- Conder, M., Dobcsanyi, P. (2001). *Determination of All Regular Maps of Small Genus*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 81 (2), 224-242.
- Delen, S., Cangul, I. N. (2018). *A New Graph Invariant*, Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 6 (1), 30-33.
- Delen, S., Cangul, I. N. (2018). *Extremal Problems on Components and Loops in Graphs*, Acta Mathematica Sinica, English Series 35 (2), 161-171.
- Delen, S., Togan, M., Yurttas, A., Ana, U., Cangul, I. N. (2020). *The Effect of Edge and Vertex Deletion on Omega Invariant*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics 14, 1-11.
- Delen, S., Yurttas, A., Togan, M., Cangul, I. N. (2019). *Omega Invariant of Graphs and Cyclicity*, Applied Sciences 21, 91-95.
- Demirci, M., Akbayrak, O., Ozbek, A., Ana, U. (2021). *New relations for the normal subgroups of Hecke groups*, Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society, 24(2): 191-195, DOI: 10.17777/pjms2021.24.2.195.
- Demirci, M., Ozbek, A., Akbayrak, O., Cangul, I. N. (2021). *Lucas Graphs*, Journal of Applied Mathematics and Computing, 65(1-2): 93-106, DOI: 10.1007/s12190-020-01382-z.
- Demirci, M., Soydan, G., Cangul, I. N. (2006). *Diophantine Equations and Congruence Subgroups of the Hecke Groups  $H(\sqrt{2})$  and  $H(\sqrt{3})$* , Adv. Studies in Contemporary Maths., 12, 309-313.
- Diestel, R. (2010). *Graph Theory*, Springer GTM, New York.
- Fine, B. (1976). *Fuchsian Subgroups of The Picard Group*, Cand. J. Math., 28, 481-485.

- Fine, B., Rosenberger, G. (1999). *Algebraic Generalizations of Discrete Groups*, Marckel Dekker, Inc, New-York, 5-12
- Foulds, L. R. (1992). *Graph Theory Applications*, Springer Universitext, Berlin.
- Hakimi, S. L. (1962). *On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph*, J. SIAM Appl. Math., 10, 496-506.
- Havel, V. (1955). *A remark on the existence of finite graphs (Czech)*, Casopis Pest. Mat., 80, 477-480.
- Hecke, E. (1936). *Über die Bestimmung Dirichletscher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen*, Math. Ann., 112, 664-699.
- Jones, G. A., Singerman, D. (1978). *Theory of Maps on Orientable Surfaces*, Proc. L. M. S., 37 (3), 273-307.
- Jones, G. A., Singerman, D. (1987). *Complex Functions*, Cambridge University Press, 60.
- Ozdemir, H. B., Demirci, M., Cangul, I. N. (2006). *A method for finding normal subgroups of Hecke groups*, Proc. of the Jangjeon Math. Soc., 9, 51-55.
- Sanli, U., Celik, F., Delen, S., Cangul, I. N. (2020). *Connectedness Criteria for Graphs by Means of Omega Invariant*, FILOMAT, 34 (2), 647-652.
- Wallis, W. D. (2007). *A Beginner's Guide to Graph Theory*, Birkhauser, Boston.
- Yurttas Gunes, A., Delen, S., Demirci, M., Cevik, A. S., Cangul, I. N. (2020). *Fibonacci Graphs*, Symmetry-Basel, 12, 1383, doi:10.3390/sym12091383.

## ÖZGEÇMİŞ

<b>Adı Soyadı</b>	: Aydın ÖZBEK
<b>Doğum Yeri ve Tarihi</b>	: Bursa, 28/01/1986
<b>Yabancı Dili</b>	: İngilizce
<b>Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)</b>	
<b>Lise</b>	: İnegöl Lisesi, 2003
<b>Lisans</b>	: Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2008
<b>Yüksek Lisans</b>	: Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2011
<b>Doktora</b>	: Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2022
<b>Çalıştığı Kurum ve Yıl</b>	: M.E.B Matematik Öğretmeni - 8
<b>İletişim (e-posta)</b>	: aozbek16@gmail.com
<b>Yayınları</b>	:

Demirci, M., Ozbek, A., Akbayrak, O., Cangul, I. N. (2021). *Lucas Graphs*, Journal of Applied Mathematics and Computing, 65(1-2): 93-106, DOI: 10.1007/s12190-020-01382-z.

Demirci, M., Akbayrak, O., Ozbek, A., Ana, U. (2021). *New relations for the normal subgroups of Hecke groups*, Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society, 24(2): 191-195, DOI: 10.17777/pjms2021.24.2.195.