PROJEKTİF VE AFİN DÜZLEMLERDE İNDİRGENMİŞ TOPOLOJİK GRAF İNDEKSLERİ

Elif HANEDAN

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PROJEKTİF VE AFİN DÜZLEMLERDE İNDİRGENMİŞ TOPOLOJİK GRAF İNDEKSLERİ

Elif HANEDAN
0000-0001-5385-6468

Doç. Dr. Fatma ÖZEN ERDOĞAN
(Danışman)

Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
(İkinci Danışman)

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2023
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans

PROJEKTİF VE AFİN DÜZLEMLERDE İNDİRGENMİŞ TOPOLOJİK GRAF İNDEKSLERİ

Elif HANEDAN

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Fatma ÖZEN ERDOĞAN

İkinci Danışman: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

Bu tezde; k-mertebeli afin ve projektif düzlemlerden "Patika Metodu" kullanılarak elde edilen Afin ve Projektif Patika grafları için düzlemin mertebesine bağlı olarak köşe ve kenar parçalanış tabloları hesaplanmış ve k. mertebeden grafların karakterizasyonu için sonuçlar elde edilmiştir. Literatürde ilk defa düzlemin mertebesine bağlı olarak genellenen köşe ve kenar parçalanış tabloları kullanılarak, Afin ve Projektif Patika graflarının bazı t-indirgenmiş topolojik indekslerinin genel formülleri verilmiştir. Geometri ile graf teori arasındaki ilişkilere ek olarak; mertebe k=2,3,4,5 alınarak oluşturulan afin ve projektif patika grafları örneklendirilerek, bu grafların köşe-komşuluk matrisleri, graf enerjileri de hesaplanmıştır. Ayrıca graf teoride en çok kullanılan 13 farklı graf çeşidi için köşe-kenar parçalanış tabloları verilerek, önce bu grafların 12 farklı 1-indirgenmiş topolojik indeksleri hesaplanıp tablolar halinde sunulmuştur. Daha sonra bu indeksler t-indirgenmiş olarak genelleştirmiştir. Son olarak; üzerinde çalışılan t-indirgenmiş bazı topolojik graf indeksleri için eşitlikler elde edilerek ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Graf, Topolojik Graf İndeks, İndirgenmiş Topolojik Graf İndeks, Afin düzlem, Projektif düzlem, Komşuluk matrisi, Enerji

2023, viii + 110 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

REDUCED TOPOLOGICAL GRAPH INDICES ON PROJECTIVE AND AFINE PLANES

Elif HANEDAN

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Fatma ÖZEN ERDOĞAN
Second Supervisor: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

In this thesis; vertex and edge partition tables are calculated depending on the order of the plane for Affine and Projective Path graphs that are obtained from affine and projective planes of order k using the "Path Method" and some combinatorial results are obtained for the characterization of these graphs of order k. General formulas of some t-reduced topological indices of Affine and Projective Path graphs are given by using vertex and edge partition tables that are generalized depending on the order of the plane. In addition to the relations between geometry and graph theory; The affine and projective path graphs formed by taking the order k=2,3,4,5 are exemplified and the vertex-adjacent matrices and graph energies of these graphs are also calculated. In addition, vertex-edge partition tables are given for 13 different graph types most commonly used in graph theory and 12 different 1-reduced topological indices of these graphs are calculated and presented in tables. Later, these indices were generalized as t-reduced. Finally; It is proved by obtaining the equations for some t-reduced topological graph indices studied.

Key words: Graph,Topological Graph Index, Reduced Topological Graph Index, Afine plane, Projective Plane, Adjacency matrix, Energy

2023, viii + 110 pages.

TEŞEKKÜR

Hayatımın birçok alanında önemli ilerlemeler ve başarılar kaydettiğim bu süreçte, güler yüzüyle her daim yanı başımda motivasyon ve cesaret kaynağı olarak beni destekleyen, karakteri, çalışmaları ve samimiyetiyle hayatımda bana rol model olan biricik danışmanım Doç. Dr. Fatma Özen ERDOĞAN'a,

Öğrencisi olmaktan gurur duyduğum, ikinci danışmanım olup beni her zaman yukarı taşıyan, alanında sayısız başarılara imza atan sayın bölüm başkanımız Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL'e,

Lisans hayatım boyunca benden katkılarını esirgemeyen, her birinden hayata dair çok şey öğrendiğim hocalarım; Prof. Dr. Atilla AKPINAR, Prof. Dr. Basri ÇELİK ve Dr. Öğr. Üyesi Nisa ÇELİK'e,

Ve bu süreçte beni yalnız bırakmayan arkadaşlarıma ve en çok da bu yaşıma kadar her zaman arkamda hissettiğim, birçok zorluğa birlikte göğüs gerdiğimiz, en olumsuz anlarda bile beni başaracağıma inandıran en büyük zenginliğim olan canım anneme, babama ve biricik kardeşime,

Son olarak 2210/A Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında tez çalışmamı destekleyen TÜBİTAK'a,

Sonsuz Teşekkürler…

Elif HANEDAN
22/06/2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
SİMGELER DİZİNİ v
ŞEKİLLER DİZİNİ vi
ÇİZELGELER DİZİNİ vii
1. GİRİŞ…… 1
2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI 4
2.1. Geometri ile İlgili Temel Kavramlar 4
2.2. Graf Teori İle İlgili Temel Kavramlar 5
2.3. Graf Çeşitleri 12
2.4. Grafların İndirgenmiş Topolojik İndeksleri 20
3. MATERYAL ve YÖNTEM 36
3.1. Sonlu Afin Düzlemlerden Graf Elde Etme Yöntemi "Patika Yöntem" 36
3.2. Sonlu Projektif Düzlemlerden Graf Elde Etme Yöntemi ″Patika Yöntemi″ 37
4. BULGULAR 38
4.1. Afin Patika Graflarının Bazı İndirgenmiş Topolojik İndeksleri ve Enerjileri 38
4.2. Projektif Patika Graflarının Bazı İindirgenmiş Topolojik İndeksleri ve Enerjileri 46
4.3. Grafların Köşe-Kenar Parçalanış ve $\mathbf{1}-$ İndirgenmiş İndeks Tabloları 57
4.4. $\boldsymbol{t}-$ İndirgenmiş Topolojik İndekslerin Hesaplanması 92
4.5. İndirgenmiş Topolojik İndeksler İle İlgili Eşitlikler 100
5. TARTIŞMA ve SONUÇ 105
KAYNAKLAR 107
ÖZGEÇMİŞ 110

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
A	Afin düzlem
P	Projektif düzlem
k	Afin ve projektif düzlemin mertebesi
$\mathbb{G}$	Graf
$V(\mathbb{G})$	$\mathbb{G}$ grafının köşe kümesi
$E(\mathbb{G})$	$\mathbb{G}$ grafının kenar kümesi
$\|V(G)\|$	$\mathbb{G}$ grafının köşe sayısı
$\|E(G)\|$	$\mathbb{G}$ grafının kenar sayısı
$d(u), d_{\mathbb{G}}(u)$	$\mathbb{G}$ grafının derecesi
$\Delta(\mathbb{G})$	$\mathbb{G}$ grafının maksimum derecesi
$\delta(\mathbb{G})$	$\mathbb{G}$ grafının minimum derecesi
$DS(\mathbb{G})$	$\mathbb{G}$ grafının derece dizisi
λ_n	Matrisin özdeğeri
P_n	Patika grafı
C_n	Devir grafı
S_n	Yıldız grafı
K_n	Tam graf
$K_{a,b}$	İki parçalı graf
$T_{c,d}$	Larva grafı
W_n	Tekerlek grafı
L_n	Merdiven grafı
W_n^m	Yel değirmeni grafı
D_r^s	Dostluk grafı
P	Petersen grafı
T_n	Taç grafı
CP_{2n}	Kokteyl grafı
$\mathbb{G}_A$	Afin patika grafı
$\mathbb{G}_P$	Projektif patika grafı
P	Afin ve projektif düzlemin nokta kümesi
L	Afin ve projektif düzlemin doğru kümesi
$R^t M_1(\mathbb{G})$	$t-$ indirgenmiş birinci Zagreb indeksi
$R^t M_2(\mathbb{G})$	$t-$ indirgenmiş ikinci Zagreb indeksi
$R^t M_3(\mathbb{G})$	$t-$ indirgenmiş üçüncü Zagreb indeksi
$R^t H(\mathbb{G})$	$t-$ indirgenmiş harmonik indeksi
$R^t Alb(\mathbb{G})$	$t-$ indirgenmiş Albertson düzensizlik indeksi
$R^t SCI(\mathbb{G})$	$t-$ indirgenmiş toplam bağlantılılık indeksi
$R^t \sigma(\mathbb{G})$	$t-$ indirgenmiş sigma Zagreb indeksi
$R^t ISI(\mathbb{G})$	$t-$ indirgenmiş ters toplam indeksi
$R^t ABC(\mathbb{G})$	$t-$ indirgenmiş atom-bağ bağlantılılığı indeksi
$R^t \pi_1(\mathbb{G})$	$t-$ indirgenmiş çarpımsal birinci Zagreb indeksi
$R^t \pi_2(\mathbb{G})$	$t-$ indirgenmiş çarpımsal ikinci Zagreb indeksi
$R^t NK(\mathbb{G})$	$t-$ indirgenmiş Narumi-Katayama indeksi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1. Bir $\mathbb{G}$ grafı 6
Şekil 2.2. İzole ve sallantılı köşe içeren bir $\mathbb{G}$ grafı 7
Şekil 2.3. Köşe dereceleri verilen bir $\mathbb{G}$ grafı 8
Şekil 2.4. Sallantılı köşe içeren bir graf 9
Şekil 2.5. Döngü içeren bir graf 9
Şekil 2.6. Paralel kenarlar içeren bir graf 10
Şekil 2.7. $2-$ regüler graf örneği 11
Şekil 2.8. P_8 patika grafı 12
Şekil 2.9. C_6 devir grafı 13
Şekil 2.10. S_6 yıldız grafı 13
Şekil 2.11. K_4 Tam grafı 14
Şekil 2.12. $K_{2,3}$ iki parçalı tam grafı 15
Şekil 2.13. $T_{2,1}$ larva grafı 15
Şekil 2.14. W_5 tekerlek grafı 16
Şekil 2.15. L_3 merdiven grafı 16
Şekil 2.16. W_3^3 Yel değirmeni grafı 17
Şekil 2.17. D_4^2 dostluk grafı 18
Şekil 2.18. P Petersen grafı 18
Şekil 2.19. T_3 taç grafı 19
Şekil 2.20. CP_8 taç grafı 19
Şekil 2.21. P Petersen grafı 21
Şekil 2.22. W_4^2 yel değirmeni grafı 22
Şekil 2.23. L_3 merdiven grafı 24
Şekil 2.24. $T_{3,1}$ larva grafı 25
Şekil 2.25. $K_{2,3}$ iki parçalı tam grafı 26
Şekil 2.26. D_3^2 dostluk grafı grafı 27
Şekil 2.27. W_4 tekerlek grafı 29
Şekil 2.28. K_4 tam grafı 30
Şekil 2.29. S_5 yıldız grafı 31
Şekil 2.30. P_6 grafı 32
Şekil 2.31. C_5 devir grafı 34

ÇİZELGELER DİZİNİ

		Sayfa
Çizelge 4.1.	Afin patika grafının köşe parçalanışı	41
Çizelge 4.2.	Afin patika grafının kenar parçalanışı	42
Çizelge 4.3.	Projektif patika grafının köşe parçalanışı	51
Çizelge 4.4.	Projektif patika grafının kenar parçalanışı	51
Çizelge 4.5.	P_n grafının köşe ve kenar parçalanışları	57
Çizelge 4.6.	P_n grafının $RM_1(P_n)$, $RM_2(P_n)$, $RM_3(P_n)$, $RH(P_n)$, $RAlb(P_n)$ ve $RSCI(Pn)$ indeksleri	58
Çizelge 4.7.	P_n grafının $R\sigma(G)$, $RISI(G)$, $R\pi_1(G)$, $R\pi_2(G)$, $RNK(G)$ indeksleri.	59
Çizelge 4.8.	C_n grafının köşe ve kenar parçalanışları	60
Çizelge 4.9.	C_n grafının $RM_1(C_n)$, $RM_2(C_n)$, $RM_3(C_n)$, $RH(C_n)$, $RAlb(C_n)$, $RSCI(C_n)$ indeksleri	60
Çizelge 4.10.	C_n grafının $R\sigma(C_n)$, $RISI(C_n)$, $RABC(C_n)$, $R\pi_1(C_n)$, $R\pi_2(C_n)$, $RNK(Cn)$ indeksleri	61
Çizelge 4.11.	S_n grafının köşe ve kenar parçalanışları	62
Çizelge 4.12.	S_n grafının $RM_1(S_n)$, $RM_2(S_n)$, $RM_3(S_n)$, $RH(S_n)$, $RAlb(S_n)$, $RSCI(Sn)$ indeksleri	63
Çizelge 4.13.	S_n grafının $R\sigma(S_n)$, $RISI(S_n)$, $R\pi_1(S_n)$, $R\pi_2(S_n)$, $RNK(S_n)$ indeksleri	64
Çizelge 4. 14.	K_n grafının köşe ve kenar parçalanışları	64
Çizelge 4.15.	K_n grafının $RM_1(K_n)$, $RM_2(K_n)$, $RM_3(K_n)$, $RH(K_n)$, $RAlb(K_n)$ ve $RSCI(Kn)$ indeksleri	65
Çizelge 4.16.	K_n grafının $R\sigma(K_n)$, $RISI(K_n)$, $RABC(K_n)$, $R\pi_1(K_n)$, $R\pi_2(K_n)$, $RNK(Kn)$ indeksleri	66
Çizelge 4.17.	$K_{a,b}$ grafının köşe ve kenar parçalanışları	67
Çizelge 4.18.	$K_{a,b}$ grafının $RM_1(G)$, $RM_2(G)$, $RM_3(G)$ ve $RH(G)$ grafı	67
Çizelge 4.19.	$K_{a,b}$ grafının $RAlb(G)$, $RSCI(G)$, $R\sigma(G)$, $RISI(G)$ indeksleri	68
Çizelge 4.20.	$K_{a,b}$ grafının $RABC(G)$, $R\pi_1(G)$, $R\pi_2(G)$, $RNK(G)$ indeksleri	69
Çizelge 4.21.	$W_{n,m}$ grafının köşe ve kenar parçalanışları	69
Çizelge 4.22.	$W_{n,m}$ grafının $RM_1(G)$, $RM_2(G)$, $RM_3(G)$ indeksleri	70
Çizelge 4.23.	$W_{n,m}$ grafının $RH(G)$, $RAlb(G)$ ve $RSCI(G)$ indeksleri	71
Çizelge 4.24.	$W_{n,m}$ grafının $R\sigma(G)$, $RISI(G)$, $R\pi_1(G)$ indeksleri	72
Çizelge 4.25.	$W_{n,m}$ grafının $R\pi_2(G)$, $RABC(G)$, $RNK(G)$ indeksleri	73
Çizelge 4.26.	L_n grafının köşe ve kenar parçalanışları	74
Çizelge 4.27.	L_n grafının $RM_1(G)$, $RM_2(G)$, $RM_3(G)$, $RH(G)$, $RAlb(G)$ ve $RSCI(G)$ indeksleri	74
Çizelge 4.28.	L_n grafının $R\sigma(G)$, $RISI(G)$, $RABC(G)$, $R\pi_1(G)$, $R\pi_2(G)$, $RNK(G)$ indeksleri	75
Çizelge 4.29.	D_r^s grafının köşe ve kenar parçalanışları	75
Çizelge 4.30.	D_r^s grafının $RM_1(G)$, $RM_2(G)$, $RM_3(G)$ indeksleri	76
Çizelge 4.31.	D_r^s grafının $RH(G)$, $RAlb(G)$, $RSCI(G)$ indeksleri	77
Çizelge 4.32.	D_r^s grafının $R\sigma(G)$, $RISI(G)$, $RABC(G)$ indeksleri	78
Çizelge 4.33.	D_r^s grafının $R\pi_1(G)$, $R\pi_2(G)$ ve $RNK(G)$ indeksleri	79
Çizelge 4.34.	T_n grafının köşe ve kenar parçalanışları	79
Çizelge 4.35.	T_n grafının $RM_1(G)$, $RM_2(G)$, $RM_3(G)$, $RH(G)$, $RAlb(G)$, $RSCI(G)$ indeksleri	80

Çizelge 4.36. T_n grafının $R\sigma(G)$, $RISI(G)$, $RABC(G)$, $R\pi_1(G)$, $R\pi_2(G)$ ve $RNK(G)$ indeksleri 81
Çizelge 4.37. P grafının köşe ve kenar parçalanışları 81
Çizelge 4.38. P grafının $RM_1(P)$, $RM_2(P)$, $RM_3(P)$, $RH(P)$, $RAlb(P)$ ve $RSCI(P)$ indeksleri 82
Çizelge 4.39. P grafının $R\sigma(P)$, $RISI(P)$, $RABC(P)$, $R\pi_1(P)$, $R\pi_2(P)$, $RNK(P)$ indeksleri 82
Çizelge 4.40. CP_{2n} grafının köşe ve kenar parçalanışları 82
Çizelge 4.41. CP_{2n} grafının $RM_1(CP_{2n})$, $RM_2(CP_{2n})$, $RM_3(CP_{2n})$ indeksleri 82
Çizelge 4.42. CP_{2n} grafının $RH(CP_{2n})$, $RAlb(CP_{2n})$, $RSCI(CP_{2n})$ indeksleri..... 83
Çizelge 4.43. CP_{2n} grafının $R\sigma(CP_{2n})$, $RISI(CP_{2n})$, $RABC(CP_{2n})$ indeksleri 84
Çizelge 4.44. CP_{2n} grafının $R\pi_1(CP_{2n})$, $R\pi_2(CP_{2n})$, $RNK(CP_{2n})$ indeksleri..... 84
Çizelge 4.45. W_n grafının köşe ve kenar parçalanışları 85
Çizelge 4.46. W_n grafının $RM_1(W_n)$, $RM_2(W_n)$, $RM_3(W_n)$ indeksleri 85
Çizelge 4.47. W_n grafının $RH(W_n)$, $RAlb(W_n)$, $RSCI(W_n)$ indeksleri 86
Çizelge 4.48. W_n grafının $R\sigma(W_n)$, $RISI(W_n)$, $RABC(W_n)$ indeksleri..... 87
Çizelge 4.49. W_n grafının $R\pi_1(W_n)$, $R\pi_2(W_n)$, $RNK(Wn)$ indeksleri..... 88
Çizelge 4.50. $T_{c,d}$ grafının $d = 1$ için köşe ve kenar parçalanışları 88
Çizelge 4.51. $T_{c,d}$ grafının $d > 1$ için köşe ve kenar parçalanışları 89
Çizelge 4.52. $T_{c,d}$ grafının $RM_1(T_{c,d})$, $RM_2(T_{c,d})$, $RM_3(T_{c,d})$, $RH(T_{c,d})$, $RAlb(T_{c,d})$, $RSCI(T_{c,d})$ indeksleri..... 89
Çizelge 4.53. $T_{c,d}$ grafının $R\sigma(T_{c,d})$, $RISI(T_{c,d})$, $R\pi_1(T_{c,d})$, $R\pi_2(T_{c,d})$, $RNK(T_{c,d})$ indeksleri..... 91

1. GİRİŞ

Leonhard Euler tarafından ispatı yapılan Königsberg' deki yedi köprü problemi Graf Teori'nin başlangıcı kabul edilmektedir. Köşe adı verilen noktalar ve bu noktaları birbirine bağlayan hatlardan meydana gelen topluluğa bir graf adı verilir. Aralarında ilişki olan en az bir nesnenin geçtiği her olay graf teori ile açıklanabilmektedir. Graf Teori; matematik başta olmak üzere kimya, fizik, biyoloji, bilgisayar bilimi, gök bilimi, farmakoloji, tıp ve sosyal ağlar gibi pek çok uygulama alanına temel oluşturan, farklı yöntem ve sonuçlar veren faydalı çalışma alanlarına sahiptir. Bu temel alan, teknolojik gelişmelere aktarılmış ve günlük hayatta da birçok probleme çözüm sağlayan bir küme teorisidir. Günümüzde bu alana olan ilginin hızla artmasının önemli nedenlerinden biri de grafların, aslında gerçek hayattaki olayların matematiksel modelleri olmasıdır. Bu modellerin kullanılmasıyla, graflar ile temsil edilen olaylar birçok alanda çözüme kavuşmaktadır. Örneğin; ulaşım teknolojisinde en kısa ve en uygun yollar, Graf Teori sayesinde matematiksel olarak hesaplanabilir hale gelmektedir. Yine kimya ve fizik alanlarında molekülleri çalışmak için graf teorisi kullanılmaktadır. Moleküllerin özelliklerinin incelenmesi, bunlara karşılık gelen graflar yardımıyla çok kolaylaşmıştır. Atomların bir grafın köşeleri ve kimyasal bağların bir grafın kenarları olarak modellenmesiyle oluşan kimyasal grafları tanımlamak için, topolojik graf indeksleri kullanılmaktadır.

Graf teoride birçok alanda uygulaması bulunan topolojik indeksler, 1940 lı yılların başlarında tanımlanmaya başlanmıştır. Günümüzde bilgisayar teknolojisinde ilerlemelere bağlı olarak eski yöntemlerin yerini topolojik indeks kavramının kullanımı almıştır. Bu sebeple köşelerin derecelerine, köşeler arasındaki uzaklıklara ya da grafların matrislerine bağlı olarak çok sayıda topolojik graf indeksleri tanımlanmıştır ve halen de kullanım alanına göre tanımlanmaya devam etmektedir. En bilinen ilk topolojik indeksler birinci ve ikinci Zagreb indekslerdir. Bu indeksler ilk kez, Gutman ve Trinastic tarafından kimya alanında eşlenik sistemlerin toplam elektron enerjilerini hesaplamada keşfedilmiş ve daha sonra da kimya literatüründe yapı-özellik modellemeleri gibi çok sayıda çalışmada kullanılmıştır. Daha ayrıntılı bilgi için (Nikolić et al., 2003a) , (Gutman & Das, 2004a), (Zhou & Gutman, 2004), (Zhou & Gutman, 2005) ve (Khalifeh et al., 2009) çalışmalarına bakılabilir. İlk olarak 1972 yılında ele alınan bu indeksler hakkında uzun süre hiç sonuç

bulunamamıştır. Fakat Das ve Gutman 2004 yılında yaptıkları çalışmalarında, ikinci Zagreb indeksi ve coindeks kavramları için bazı sonuçlar, sınırlar ve tanımlamalar vermişlerdir. Böylece tekrar popüler olan bu indeksler hakkında günümüze kadar matematik ve kimya literatüründe çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bunlara örnek olarak (Gutman & Trinajstić, 1972a), (Nikolić et al., 2003b), (Gutman & Das, 2004b), (Zhou & Gutman, 2005), (Zhou & Stevanović, 2006) çalışmaları verilebilir. Todeschini ve Consonni 2010 yılında yaptıkları çalışmaları ile birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri bulmuşlardır. Bu indekslerin özellikleri ve uygulama alanları için (Todeschini & Consonni, 2010), (Eliasi et al., 2012), (Liu & Zhang, 2012) ve (Xu et al., 2013) çalışmalarına bakılabilir. Zagreb indeksleri dışında özellikle literatürdeki kullanım alanlarına göre pek çok topolojik graf indeksi tanımlanmış olup, bu indekslerle ilgili geçmişten günümüze kadar farklı alanlarda çok sayıda bilim insanı tarafından çalışmalar yapılmıştır ve yapılmaya da devam etmektedir. Bu tez çalışmasına kaynak oluşturmak için (Güngör et al., 2010), (Lokesha et al., 2013), (Das, Yurttas, et al., 2013), (Das, Xu, et al., 2013), (Das et al., 2016), (Cangul et al., 2017), (Prakasha et al., 2017), (Yurtas et al., 2019), (Akgunes et al., 2019), (Prakasha et al., 2019), (YURTTAS GUNES et al., 2020), (Gunes et al., 2021), (Oz & Cangul, 2021), (Büyükköse & Cangul, 2022) çalışmaları incelenmiştir.

Özel birer lineer uzay örnekleri olan afin ve projektif düzlemler sonlu geometrilerde çalışılan en temel kavramlardır. Bu sonlu yapılarda tanımlanan "mertebe" kavramı ile düzlemin önemli bazı sayısal özellikleri hesaplanabilmektedir. Bunlar, düzlemin toplam nokta ve doğru sayısı, düzlemin bir doğrusu üzerindeki nokta sayısı ve düzlemin bir noktasından geçen doğru sayısıdır. Daha ayrıntılı bilgi için (Petersen & Coxeter, 1961), (Wilson, 1987), (Bennett, 1995) ve (Boehm & Prautzsch, 2002) kaynaklarına bakılabilir. Son yıllarda yapılan çalışmalarda, sonlu afin ve projektif düzlemlerin doğrularının kırılması ile graf yapılarına geçiş sağlanmıştır. Ele alınan sonlu düzlemlerin doğrularının bir “Devir” veya bir “Patika” olarak kabul edilmesi yöntemleri sırasıyla “Devir Metodu” ve “Patika Metodu” olarak adlandırılmış ve bu yöntem ile elde edilen grafların bazı kombinatoryal özellikleri de incelenmiştir. Daha ayrıntılı bilgi için (Özen Erdoğan & Dayioğlu, 2018), (Dayioglu, 2021), (Dogan & Akpinar, 2021) ve (Akpinar, 2022) çalışmalarına bakılabilir.

Bu tezin amacı; literatürde yer alan çalışmaların devamı niteliğinde, matematik biliminin önemli iki alanı olan Geometri ve Graf Teori disiplinleri arasında kurulan köprünün devamlılığını sağlamak ve elde edilen teorem ve sonuçlarla yeni çalışma alanına katkıda bulunmaktır. Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümü giriş bölümü olup bu bölümde Graf teorinin özet olarak başlangıcından ve tarihçesinden bahsedilerek kullanım alanları ile ilgili bazı örnekler verilmiştir. Ayrıca topolojik graf indekslerinin tarihsel gelişim süreçleri ile ilgili literatürde yapılan çalışmalar hakkında kaynak taraması da yapılarak tezin amacı vurgulanmıştır. Tezin ikinci bölümü kuramsal temeller olup bu bölüm dört alt başlık halinde düzenlenmiştir. Bu bölümde tez çalışması boyunca ileriki bölümlerde kullanılacak olan Geometri ve Graf teori ile ilgili temel kavramlar, graf çeşitleri ve tezin amacı olan indirgenmiş topolojik graf indeksleri verilmiştir. Tezin üçüncü bölümü materyal ve yöntem olup bu bölüm iki alt başlık halinde düzenlenmiştir. Bu bölümde sonlu k-mertebeli afin ve projektif düzlemlerden graf elde etme metodu olan "Patika Metodu" verilmiştir. Tezin dördüncü bölümü Bulgular olup tez çalışması boyunca elde edilen orijinal bulgu ve sonuçlar beş alt başlık halinde düzenlenmiştir. Bu bölümde Afin Patika ve Projektif Patika graflarının bazı indirgenmiş topolojik graf indeksleri ve enerjileri, graf teoride en çok kullanılan 13 farklı graf çeşidi için köşe-kenar parçalanış tabloları ve bu grafların 12 farklı 1-indirgenmiş topolojik indeks tabloları, t-indirgenmiş topolojik indekslerin genellemeleri ve son olarak da üzerinde çalışılan t-indirgenmiş bazı topolojik graf indeksleri için eşitlikler verilmiştir. Tezin beşinci ve son bölümü tartışma ve sonuç olup bu bölümde tez çalışmasının öneminden ve konu ile ilgili açık problemlerden bahsedilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Geometri ile İlgili Temel Kavramlar

Bu bölümde; afin ve projektif düzlemler ile ilgili kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Daha detaylı bilgi için (Wilson, 1987), (Bennett, 1995), (Petersen & Coxeter, 1961), (Boehm & Prautzsch, 2002) veya diğer geometri kitaplarına bakılabilir.

2.1.1. Tanım. Aşağıdaki özelliklere sahip olan bir A lineer uzayına bir ***afin düzlem*** denir.

$\boldsymbol{A1}$) Bir l doğrusuna, dışındaki bir $\mathcal{N}$ noktasından bir tek paralel çizilebilir.

$\boldsymbol{A2}$) Doğrudaş olmayan 3 nokta vardır.

2.1.2. Önerme. A bir afin düzlem olsun. Bu taktirde A'nın tüm doğruları aynı sayıda nokta kapsar ve A'nın tüm noktalarından aynı sayıda doğru geçer.

2.1.3. Önerme. Bir afin düzlemin herhangi bir doğrusu üzerindeki nokta sayısına ***afin düzlemin mertebesi*** denir.

2.1.4. Önerme. A, k mertebeli bir afin düzlem olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler geçerlidir:

i) A'nın toplam nokta sayısı k^2 dir.

ii) A nın toplam doğru sayısı k^2+k dir.

iii) A da $k+1$ tane paralel sınıf vardır.

iv) Her paralel sınıfta k tane doğru vardır.

2.1.5. Tanım. Aşağıdaki aksiyomlara sahip olan bir P lineer uzayına bir ***projektif düzlem*** denir.

$\boldsymbol{P1}$) Herhangi iki doğru kesişir.

$\boldsymbol{P2}$) Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

2.1.6. Önerme. P bir projektif düzlem olsun. Bu taktirde P'nin tüm doğruları aynı sayıda nokta kapsar ve P'nın tüm noktalardan aynı sayıda doğru geçer.

2.1.7. Önerme. Bir projektif düzlemin herhangi bir doğrusu üzerindeki nokta sayısının 1 eksiğine o ***projektif düzlemin mertebesi*** denir.

2.1.8. Önerme. P, k mertebeli bir projektif düzlem olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler geçerlidir:

i) P'nın toplam nokta sayısı $k^2 + k + 1$ dir.

ii) P'nın toplam doğru sayısı $k^2 + k + 1$ dir.

iii) P da $k + 1$ tane paralel sınıf vardır.

iv) Her paralel sınıfta $k + 1$ tane doğru vardır.

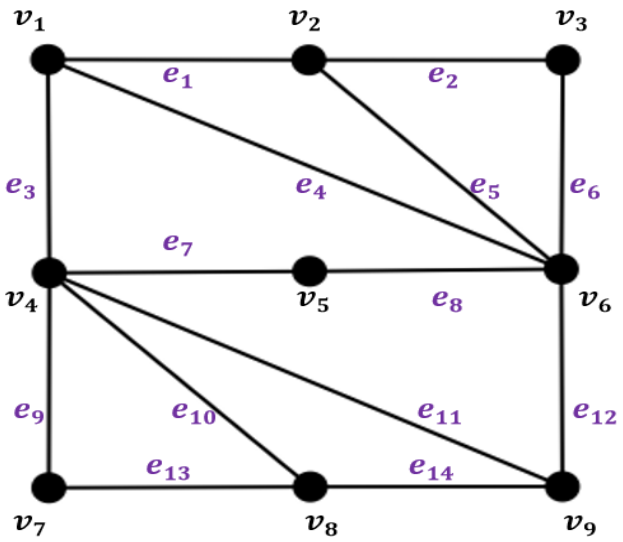
2.2. Graf Teori İle İlgili Temel Kavramlar

Bu bölümde tezde kullanılacak olan graf ile ilgili temel kavramlara yer verilip her bir tanımı açıklayacak nitelikte örnekler verilecektir. Daha detaylı bilgi için (Biggs et al., 1999) (Diestel, 2000), (Voloshin, 2009), (Gross et al., 2018), (Sucar, 2021), (Gross et al., 2018) veya diğer temel graf teori kitapları incelenebilir.

2.2.1. Tanım. Köşe veya düğüm (vertex) olarak adlandırılan noktalardan ve bu noktaların birleştirilmesiyle elde edilen kenar (edge) adı verilen bağlantılardan oluşan çizgiler topluluğuna ***graf*** denir. Bu tez boyunca bir graf $\mathbb{G}$ ile gösterilecektir. Bir $\mathbb{G}$ grafının noktaları $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ ile kenarları ise $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ ile ifade edilir. Bu tezde bir grafın sahip olduğu köşeler $V(\mathbb{G})$, kenarları da $E(\mathbb{G})$ ile adlandırılacaktır. Bir $\mathbb{G}$ grafındaki toplam köşe sayısı $|V(\mathbb{G})|$ ile toplam kenar sayısı ise $|E(\mathbb{G})|$ ile gösterilir. Bir $\mathbb{G}$ grafı köşe ve kenarların birleşiminden meydana geldiği için $\mathbb{G} = (V, E)$ ile temsil edilir. İki köşeyi örneğin, v_1 ve v_2 köşelerini bir çizgiyle birleştirildiğinde bir kenar oluşur. Bir graf en az bir köşeye sahip olmalıdır.

Bunun gibi birçok özelliğe sahip olan graflarla ilgili diğer terimler de aşağıdaki örnekten sonra verilecektir.

2.2.2. Örnek. Şekil 2.1.'deki $\mathbb{G}$ grafının köşeleri $v_1, v_2, v_3, \dots, v_9$ iken kenarları ise $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{14}$' dir. Bu grafın, v_1 ile v_2 köşesini birleştiren kenar e_1, v_2 ile v_3 köşesini birleştiren kenar e_2 ve benzer şekilde v_8 ile v_9 köşesini birleştiren kenar e_{14} olarak isimlendirilir. Aşağıda görüldüğü üzere $\mathbb{G}$ grafının toplam 9 köşesi ve 14 kenarı mevcuttur.

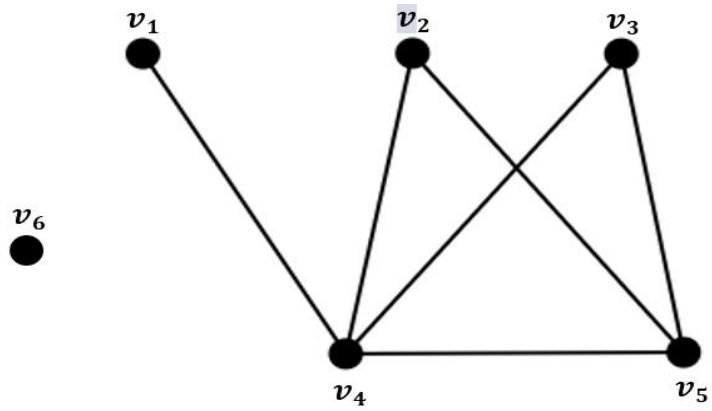


Şekil 2.1. Bir $\mathbb{G}$ grafı

2.2.3. Tanım. Bir düğümden yani köşeden çıkan hatların sayısı ***köşe derecesi (degree of vertex)*** olarak adlandırılır. u köşesinin derecesi $d(u)$ veya $d_{\mathbb{G}}(u)$ ile v köşesinin derecesi ise $d(v)$ veya $d_{\mathbb{G}}(v)$ ile gösterilir. Grafdaki köşelerden çıkan kenar sayısının en fazla olduğu sayıya yani köşe derecelerinin en büyüğüne ***grafın derecesi (degree of graph)*** denir. Graftaki köşe derecelerinin en büyüğüne, grafın maksimum derecesi denir. $\Delta(\mathbb{G})$ ile gösterilir. En küçük derece de grafın minimum derecesidir ve $\delta(\mathbb{G})$ ile gösterilir.

2.2.4. Tanım. Köşe derecesi 0 olan bir graftaki köşeye ***izole köşe (isolated edge)*** denmektedir.

2.2.5. Örnek. Aşağıdaki grafın her bir köşe derecesi hesaplanırsa:



Şekil 2.2. İzole ve sallantılı köşe içeren bir $\mathbb{G}$ grafı

Şekil 2.2.'deki grafın sahip olduğu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ köşelerinin derecesi sırasıyla $d(v_1) = 1$, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 2$, $d(v_4) = 4$, $d(v_5) = 3$, $d(v_6) = 0$'dır. v_1 köşesinin derecesi hesaplanırken bu köşeden çıkan kenar sayısına bakılır ve 1 kenar çıktığından dolayı köşenin derecesi 1'dir. v_2 ve v_3 köşelerine bakıldığında 2 kenar çıkmaktadır. Bu yüzden v_2 ve v_3 köşelerinin derecesi 2'dir. v_4 ve v_5 köşelerinden de üçer kenar çıktığından bu köşelerin dereceleri 3'tür. Son olarak v_6 köşesinin derecesine bakılırsa bu köşeden hiçbir kenar çıkmadığından dolayı v_6 köşesinin derecesi 0'dır. Bu grafta en büyük derece 4 olduğu için bu grafın maksimum derecesi, $\Delta(\mathbb{G}) = 3$'tür. Graftaki köşeler arasındaki en küçük dereceli köşenin derecesi 0 olduğundan $\delta(\mathbb{G}) = 0$'dır.

2.2.6. Tanım. Bir $\mathbb{G}$ grafındaki köşe derecelerinden oluşan kümeye grafın ***derece dizisi*** denilir ve

$$DS(\mathbb{G}) = \{1^{|d_{\mathbb{G}}(1)|}, 2^{|d_{\mathbb{G}}(2)|}, 3^{|d_{\mathbb{G}}(3)|}, \dots, \Delta^{|(d_{\mathbb{G}}(\Delta))|}\}$$

ile gösterilir.

2.2.7. Lemma. (Handshaking Lemma) Bir $\mathbb{G}$ grafında

$$\sum_{u\epsilon V(\mathbb{G})} d_{\mathbb{G}}(u) = 2|E(G)|$$

dir. Yani herhangi bir $\mathbb{G}$ grafında köşe derecelerinin toplamı kenar sayısının iki katıdır.

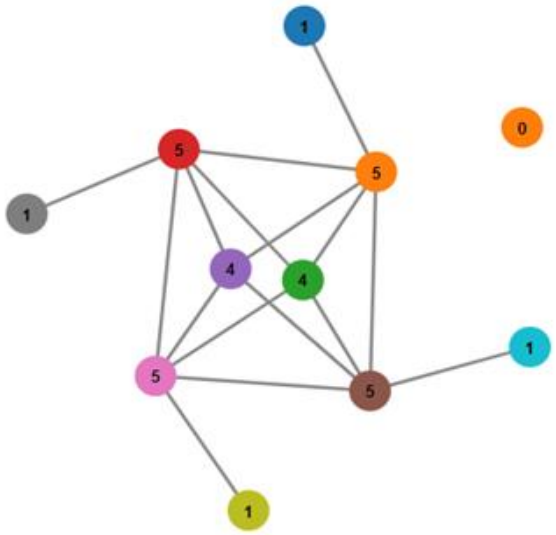
2.2.8. Örnek. Aşağıda verilen graf: köşe derecesi 0 olan 1 tane köşeye, köşe derecesi 1 olan 4 tane köşeye, köşe derecesi 4 olan 2 tane köşeye ve köşe derecesi 5 olan 4 tane köşeye sahiptir. O halde bu grafın köşe derece dizisi,

$$DS(\mathbb{G}) = \{0^1, 1^4, 4^2, 5^4\}$$

olarak hesaplanır. Bu grafın köşe dereceleri toplamı ise

$$0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 + 4 + 5 + 5 + 5 + 5 = 32$$

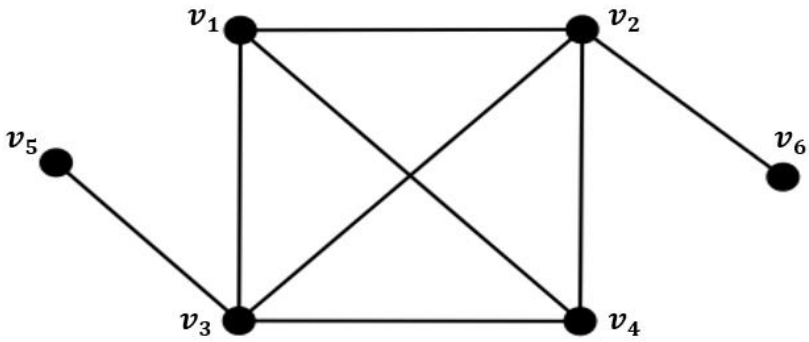
bulunur. Lemma 2.2.7. gereği köşe derecelerinin toplamının yarısı, grafın kenar sayısını verdiğinden bu graf için kenar sayısının 16 olduğu görülür.



Şekil 2.3. Köşe dereceleri verilen bir $\mathbb{G}$ grafı

2.2.9. Tanım. Bir graftaki köşe, bir kenarla sadece bir köşeye bağlanıyorsa yani bir kenar bağlantısı varsa bu köşeye ***sallantılı köşe*** denir.

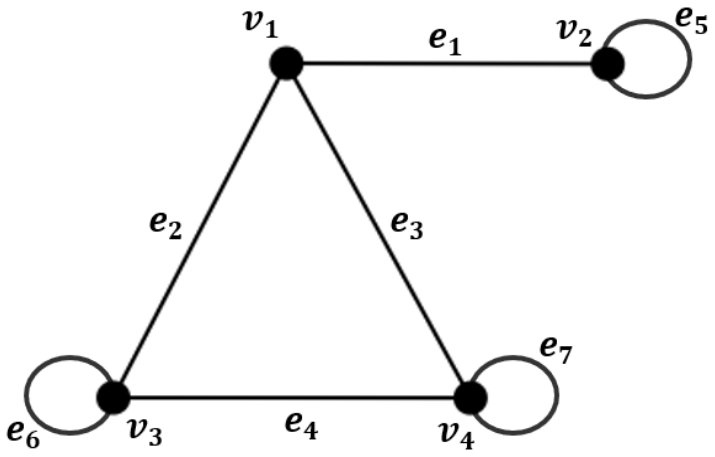
2.2.10. Örnek. Şekil 2.4.' deki grafta iki tane sallantılı köşe vardır. Bunlardan biri v_5 diğeri de v_6' dır. Bu köşelerin derecesi 1' dir yani köşeden sadece 1 kenar çıkmaktadır.



Şekil 2.4. Sallantılı köşe içeren bir graf

2.2.11. Tanım. Bir $\mathbb{G}$ grafındaki kenarın başlangıç ve bitiş köşesi aynı köşe ise bu kenara ***döngü (loop)*** adı verilir.

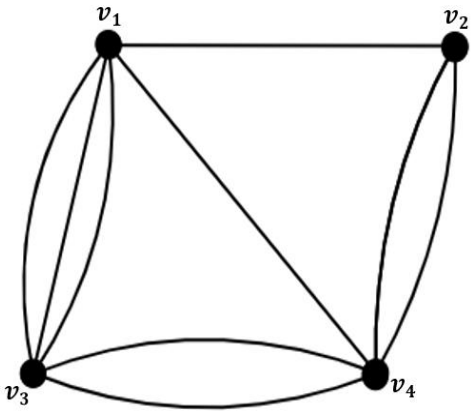
2.2.12. Örnek. Şekil 2.5.'deki graf 3 adet döngü içermektedir. Bu döngüler v_2, v_3, v_4 köşelerinden çıkan e_5, e_6, e_7 döngüleridir.



Şekil 2.5. Döngü içeren bir graf

2.2.13. Tanım. Bir grafta iki köşe arasında birden fazla kenar bulunuyorsa, bu kenarlara paralel kenar denir. Paralel kenar içeren grafa da ***çoklu (multi) graf*** denir.

2.2.14. Örnek. Aşağıda verilen graf örneğinde v_1, v_2 ve v_1, v_4 köşeleri arasında birer kenar vardır. Bu yüzden bu kenarlar paralel kenar değildir. Ama diğer kenarlara bakılırsa: v_2 ile v_4 ve v_3 ile v_4 köşeleri arasında ikişer kenar bulunmaktadır. v_1 ve v_3 köşeleri arasında ise 3 kenar bulunmaktadır. O halde bu kenarlar paralel kenardır.



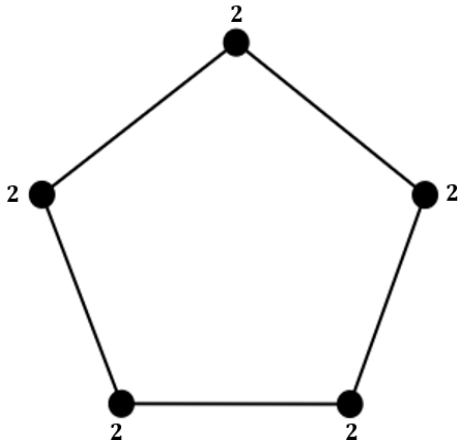
Şekil 2.6. Paralel kenarlar içeren bir graf

Şimdi de bir $\mathbb{G}$ grafının derecesini ve bu grafın sahip olduğu köşelerin derecelerini tanımlayıp nasıl hesaplandığı aşağıda bir örnek ile açıklanacaktır.

2.2.15. Tanım. Graftaki bir köşe, bir kenarla başka bir köşeye bağlanıyorsa yani iki köşe arasında bir kenar varsa bu iki köşeye ***komşu köşe*** denir.
Örneğin, Şekil 2.6.'da v_1 köşesi ile v_4 köşesi arasında bir kenar bulunduğu için v_1 köşesi v_4 köşesine komşudur.

2.2.16. Tanım. Bir $\mathbb{G}$ grafında her bir noktadan aynı sayıda kenar çıkıyorsa yani her köşenin derecesi eşit ise bu graf ***regüler graf*** olarak adlandırılır. Graftaki bütün köşelerin derecesi r olursa bu grafa ***r-regüler graf*** denir.
Regüler graflara verilecek en güzel örnek diğer bölümde anlatılacak olan C_n devir grafıdır.

2.2.17. Örnek. Aşağıda özel bir graf örneği olan C_5 devir grafı verilmiştir. Bu grafın her köşesinden ikişer kenar çıktığından bütün köşelerin derecesi eşit olup, 2'dir. Bundan dolayı bu graf $2-$ regüler graf olarak adlandırılmaktadır.



Şekil 2.7. $\mathbf{2}-$ regüler graf örneği

2.2.18. Tanım. İki köşeyi birleştiren kenarlar üzerinde yön bulunmaması bu grafın yönsüz olduğu anlamına gelmektedir. Yönsüz bir $\mathbb{G}$ grafı, köşe ve kenarlarda bir ağırlık bulundurmuyor ve döngü, çoklu kenar içermiyorsa bu şekildeki sonlu grafa ***basit graf*** denmektedir.

Bu tez boyunca basit graflarla çalışılacaktır.

Buraya kadar graflarla ilgili temel kavramlar verilmiştir. Tezin 4.1. ve 4.2. alt bölümlerinde $k = 2, 3, 4, 5.$ mertebeden afin ve projektif düzlemlere karşılık gelen afin ve projektif patika grafların köşe-komşuluk matrisleri ve bu grafların enerjileri de hesaplanacaktır. Bunun için önce köşe-komşuluk matrislerini daha sonra da graflar için enerji kavramını tanımlanacaktır.

2.2.19. Tanım. Bir grafın n adet köşesi olsun. Bu köşeler arasındaki ilişkiyi gösteren $n \times n$ boyutlarında olan kare matris çeşidine ***komşuluk matrisi*** denmektedir. Yani graftaki köşe sayısı, matrisin satır ve sütun sayısıdır. Bu matrisin elemanları,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, v_i \; ve \; v_j \; köşeleri \; komşu \; ise \\ 0, v_i \; ve \; v_j \; köşeleri \; komşu \; değil \; ise \end{cases}$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

Bu komşuluk matrisin karakteristik polinomunun köklerine, matrisin özdeğerleri denir ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olarak gösterilir. Komşuluk matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerleri alınıp, toplanması ile grafın enerjisi hesaplanmaktadır.

2.3. Graf Çeşitleri

Bu bölümde tezde kullanılan graf türlerinin tanımları ve her bir graf türüne birer örnek verilmiştir.

2.3.1. Tanım. (Patika Grafı) Basit bir graf yapısına sahip olan patika grafı, $i = 1, 2, \dots, n$ için birbirinden farklı v_i köşelerinin $v_i v_{i+1}$ şeklinde birleşmesiyle oluşur ve P_n ile gösterilir. Bu graf n köşeye ve $n-1$ kenara sahiptir. v_1 ve v_n köşelerine patika grafının uç köşeleri, kenar sayısına da uzunluğu denir.

Bu tez çalışmasında patika grafı için köşe sayısı en az iki alınacaktır.

2.3.2. Örnek. P_8 patika grafı, 8 tane köşeye 7 tane de kenara sahiptir.

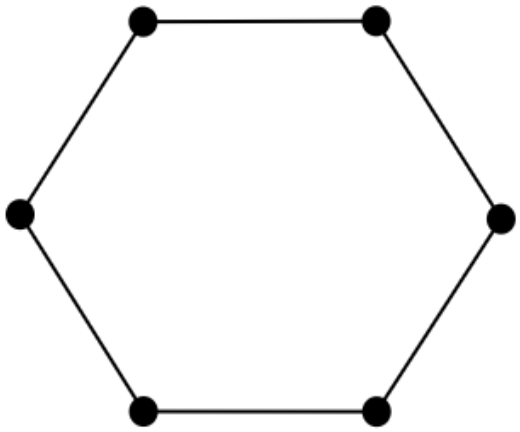


Şekil 2.8. P_8 patika grafı

2.3.3. Tanım. (Devir Grafı) Patika grafındaki uç köşelerin bir kenarla birleştirilmesi sonucu oluşan grafa devir grafı adı verilir. n köşeli olan bu graf C_n ile gösterilir. Bu grafın kenar ve köşe sayısı birbirine eşittir. Her bir köşenin derecesi 2'dir. Köşe sayısının 1 ve 2 olduğu durumlarda devir grafı, patika grafı ile aynıdır.

Bu tez çalışmasında devir grafı için köşe sayısı en az üç alınacaktır.

2.3.4. Örnek. Devir grafının bir örneği aşağıda verilmiştir. 6 köşeye ve 6 kenara sahip olduğundan bu graf, C_6 devir grafıdır.

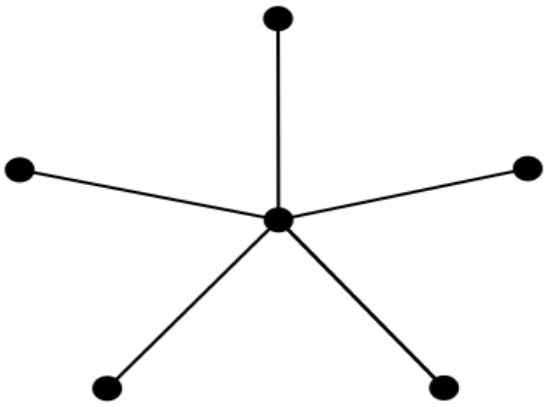


Şekil 2.9. C_6 devir grafı

2.3.5. Tanım. (Yıldız Grafı) Merkezdeki bir köşenin 1 uzunluğundaki $n-1$ tane köşe ile birleştirilmesiyle oluşan grafa yıldız grafı denir. Bu grafta kenar sayısı, köşe sayısının bir eksiğidir. S_n ile gösterilir.

Bu tez çalışmasında yıldız grafı için köşe sayısı en az iki alınacaktır.

2.3.6. Örnek. Aşağıda S_6 yıldız grafının çizimi verilmiştir. Bu grafta $n = 6$ olduğu için köşe sayısı 6, kenar sayısı ise 5'tir.



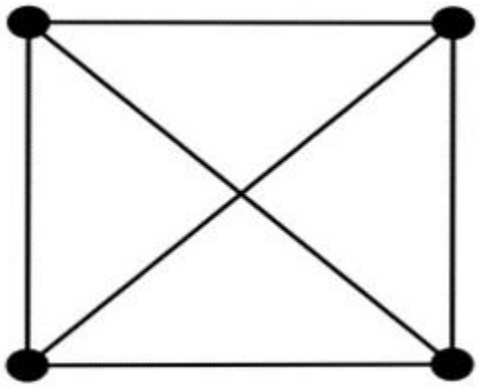
Şekil 2.10. S_6 yıldız grafı

2.3.7. Tanım. (Tam Grafı) Devir grafındaki bütün köşelerin birleştirilmesi ile oluşan grafa tam graf denir. Toplam köşe sayısının bir eksiği bize grafın köşe derecesini verir ve

devir grafında tüm köşelerin derecesi birbirine eşittir. K_n tam grafının her bir köşesinden $n-1$ tane kenar çıkmaktadır.

Bu tez çalışmasında tam grafı için köşe sayısı en az iki alınacaktır.

2.3.8. Örnek. Aşağıda K_4 tam grafı verilmiştir. Bu grafın 4 köşesi ve 6 kenarı bulunmaktadır.

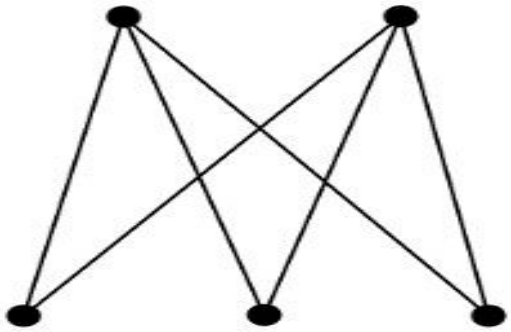


Şekil 2.11. K_4 Tam grafı

2.3.9. Tanım (İki Parçalı Graf) Bir grafı oluşturan köşeler birbirinden farklı iki kümeye ayrılıyorsa ve aynı kümedeki köşeler kendi aralarında bir kenar oluşturmuyorsa bu grafa iki parçalı graf denir. Graftaki köşelerin sadece karşısındaki kümede bulunan köşelerle bir kenar oluşturması gerekir. Eğer kümedeki her bir eleman yani bahsedilen köşeler karşı kümedeki her bir köşeyle birleşiyorsa bu graf iki parçalı tam graf olarak adlandırılır. Bahsedilen kümelerden birinin köşe sayısına a diğer kümenin köşe sayısına ise b denilirse bu graf $K_{a,b}$ ile gösterilir. İki parçalı tam grafın köşe sayısı $a+b$, kenar sayısı da $a \cdot b$' dir.

Bu tez çalışmasında $a \geq 1, b \geq 2$ durumu ele alınacaktır.

2.3.10. Örnek. Köşe sayısı 5, kenar sayısı 6 olan $K_{2,3}$ iki parçalı tam grafı aşağıda verilmiştir.

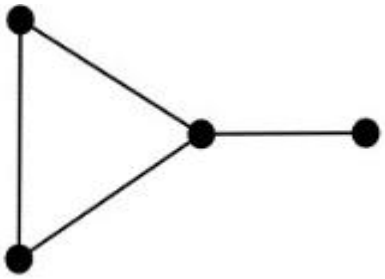


Şekil 2.12. $K_{2,3}$ iki parçalı tam grafı

2.3.11. Tanım. (Larva Grafı) Devir grafı ile patika grafının ortak bir köşede birleştirilmesi ile oluşan grafa larva grafı denir. Devir grafının uzunluğu c, patika grafının uzunluğu da d olmak üzere larva grafı $T_{c,d}$ ile gösterilir. $T_{c,d}$ larva grafı $c + d$ tane köşe ve kenara sahiptir.

Bu tez çalışmasında $c \geq 1, d \geq 2$ durumu ele alınacaktır.

2.3.12. Örnek. C_3 devir grafı ile P_2 patika grafının bir köşede birleşmesiyle oluşan $T_{3,1}$ larva grafı aşağıda verilmiştir. Bu grafın 4 köşesi ve 4 kenarı vardır.

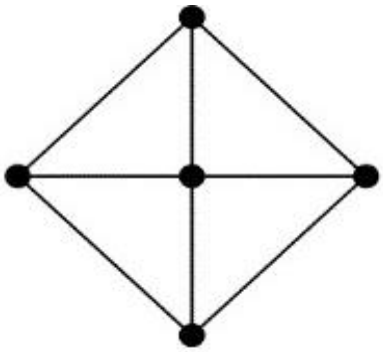


Şekil 2.13. $T_{3,1}$ larva grafı

2.3.13. Tanım. (Tekerlek Grafı) $n \geq 3$ olmak üzere devir grafının bütün köşeleriyle bağlantısı olacak şekilde tam ortasına yeni bir köşe eklenmesi ile tekerlek grafı oluşur. n köşeli tekerlek grafı W_n ile gösterilir. n köşe ve $2n - 2$ tane kenara sahiptir.

Bu tez çalışmasında $n \geq 4$ durumu ele alınacaktır.

2.3.14. Örnek. 5 köşeye ve 8 kenara sahip olan W_5 tekerlek grafının çizimi aşağıdaki gibidir.

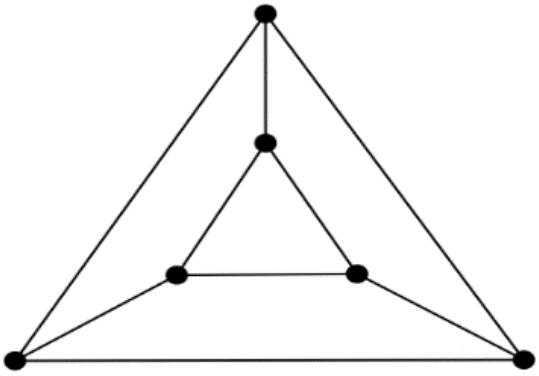


Şekil 2.14. W_5 tekerlek grafı

2.3.15. Tanım. (Merdiven Grafı) Bir devir grafının içerisine aynı devir grafını ekleyip, bu iki graftaki köşelerin birer kenar oluşturmasıyla ortaya çıkan grafa merdiven grafı denir. Başka bir deyişle de iki n-genin karşılıklı birer köşelerinden birleştirilmesiyle elde edilir. L_n ile gösterilir. Bu grafın köşe sayısı $2n$, kenar sayısı ise $3n$ ile hesaplanır.

Bu tez çalışmasında $n \geq 4$ durumu ele alınacaktır.

2.3.16. Örnek. İki tane üçgenin karşılıklı birer köşeleri ile birleştirilmesi ile oluşan L_3 merdiven grafı Şekil 2.15'te gösterildiği gibidir.



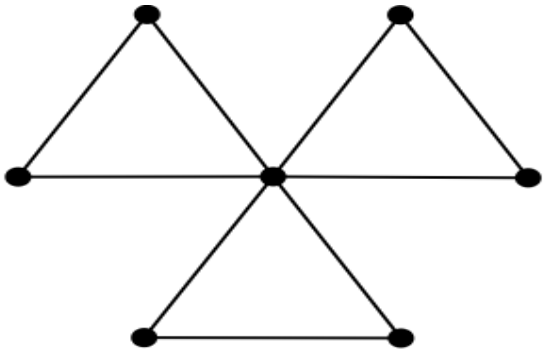
Şekil 2.15. L_3 merdiven grafı

2.3.17. Tanım. (Yel Değirmeni) Bir köşeye m tane tam grafın eklenmesiyle oluşan grafa yel değirmeni grafı denir. Yani birer köşelerinden bitiştirilmiş m adet K_n tam grafından

oluşur. W_n^m ile gösterilir. Gösterimdeki n, graftaki bir devrin uzunluğu, m ise kaç tane devir birleştiyse bunun sayısıdır. Yel değirmeni grafının köşe sayısı $(n-1)m+1$ ile kenar sayısı ise $\frac{mn(n-1)}{2}$ ile hesaplanabilir.

Bu tez çalışmasında $n \geq 3, m \geq 2$ durumu ele alınacaktır.

2.3.18. Örnek. 3 tane K_3 tam grafının ortak bir köşeyle birleştirimesiyle Şekil 2.16. da verilen W_3^3 yel değirmeni grafı elde edilir.

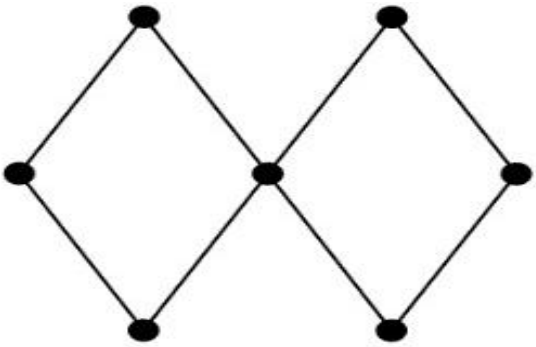


Şekil 2.16. W_3^3 Yel değirmeni grafı

2.3.19. Tanım. (Dostluk Grafı) Yel değirmeni grafı ile benzer olup tek farkının tam graf yerine devir graflarından oluşmasıdır. Bu şekilde s tane r köşeli devir grafının bir ortak köşe ile birleşmesi ile oluşan grafa dostluk grafı denir. Sembolü D_r^s'dir. Köşe sayısı, yel değirmeni grafı ile aynı olup kenar sayısı ise grafta bulunan bir devrin uzunluğunun, devir sayısı ile çarpımı bulunarak hesaplanabilir.

Bu tez çalışmasında $r \geq 3, s \geq 2$ durumu ele alınacaktır.

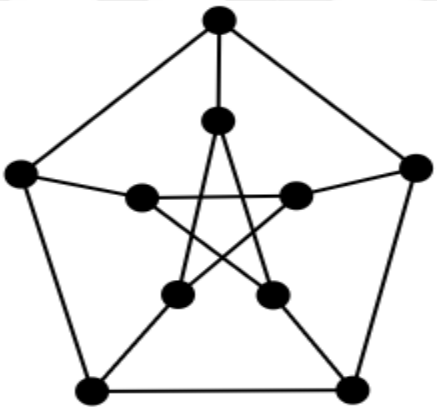
2.3.20. Örnek. 2 tane C_4 devir grafının ortak bir köşede birleştirilmesiyle aşağıda çizimi verilen D_4^2 dostluk grafı elde edilir.



Şekil 2.17. $\boldsymbol{D_4^2}$ dostluk grafı

2.3.21. Tanım. (Petersen grafı) Tek bir örneği olup graf teoride oldukça öneme sahip olan bu grafın 10 köşesi ve 15 kenarı vardır. Petersen tarafından adlandırılan bu graf P ile gösterilir.

2.3.22. Örnek. Petersen grafı Şekil 2.18. deki gibidir.

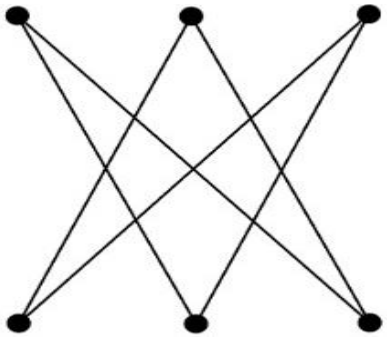


Şekil 2.18. $\boldsymbol{P}$ Petersen grafı

2.3.23. Tanım. (Taç grafı) Taç grafı olarak adlandırılan bu graf, iki parçalı tam grafla benzer olup farkı, kümelerin köşe sayısının aynı olması ve karşısındaki köşelerle bir hat oluşturmamasıdır. Köşe sayısı $2n$ olup kenar sayısı $n(n-1)$ olan taç grafı T_n ile gösterilir.

Bu tez çalışmasında $n \geq 2$ durumu ele alınacaktır.

2.3.24. Örnek. Köşe sayısı ve kenar sayısının 6 olduğu T_3 taç grafı aşağıdaki gibidir.

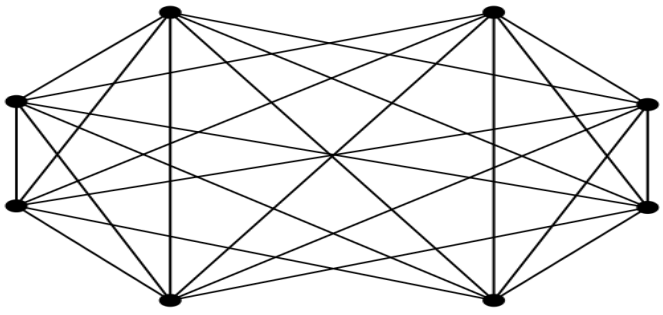


Şekil 2.19. $\boldsymbol{T_3}$ taç grafı

2.3.25. Tanım. (Kokteyl Grafı) CP_{2n} kokteyl grafının $2n$ köşesi iki gruba ayrılır. Bir gruptaki bir köşe, bulunduğu gruptaki tüm köşelere komşudur, diğer gruptakilerden de karşısındaki köşe hariç diğerlerine komşudur. Dolayısıyla n köşeli iki tam graf mevcuttur. Kokteyl grafının köşe sayısı, taç grafının köşe sayısı ile aynı olup kenar sayısı ise 2 katıdır.

Bu tez çalışmasında $n \geq 2$ durumu ele alınacaktır.

2.3.26. Örnek. 4 köşeli iki tane tam grafın bahsedildiği şekilde birleştirilmesi ile ortaya çıkan graf Şekil 2.20. de gösterildiği gibidir. 2 gruba ayrılan köşeler karşısındaki köşe hariç diğer tüm köşelerle birleşmektedir.



Şekil 2.20. $\boldsymbol{CP_8}$ taç grafı

2.4. Grafların İndirgenmiş Topolojik İndeksleri

Tezin amacı indirgenmiş topolojik indeksler olduğu için bu bölümde graf teoride çok sık kullanılan bazı çarpımsal ve toplamsal topolojik indeksler verilecektir. Bu indekslerin ilk önce tanımları verilip daha sonra da indirgenmiş halleri tanımlanacaktır ve örnekleri farklı graf türlerinden seçilecektir. Daha detaylı açıklanırsa; T, toplamsal veya çarpımsal olarak tanımlanan bir topolojik indeks olsun. Bu topolojik indeksin $t-$ indirgenmişini elde ederken bir $\mathbb{G}$ grafında yer alan köşe dereceleri yerine derecelerden t çıkarılmış veya başka bir deyişle t derece azaltılmış hali ele alınacaktır. Eğer derece 1 azaltılacaksa indeks, R^1T veya RT ile t derece azaltılacaksa R^tT ile gösterilir. Bu şekilde $t-$ indirgenmiş topolojik indeksleri elde edilip, özel olarak $t=1$ durumu çok sık kullanıldığı için $1-$ indirgenmiş topolojik indekslerini de tanımlayıp her birine birer örnek verilecektir.

İlk olarak Gutman ve Trinajstić tarafından tanımlanan, indeks türleri içerisinde en çok çalışılan birinci ve ikinci Zagreb indeksi verilecektir. (Gutman & Trinajstić, 1972b)

2.4.1. Tanım. Bir grafta yer alan köşe derecelerinin kareleri toplamı ile elde edilen sayıya ″Birinci Zagreb İndeksi″ denir. M_1 ile gösterilen bu indeks

$$M_1(\mathbb{G}) = \sum_{u\epsilon V(\mathbb{G})} [d_{\mathbb{G}}(u)]^2$$

veya

$$= \sum_{uv\in E(\mathbb{G})} \left(d_{\mathbb{G}}(u) + d_{\mathbb{G}}(v)\right)$$

ile de tanımlanabilir. (Gutman & Trinajstić, 1972b)

Zagreb indeksleri literatürde sıkça çalışılmış, uygulamaları yapılmış önemli bir indekstir. Şimdi graftaki köşelerin $″t″$ derece azaltılması ile elde edilen $t-$ indirgenmiş Zagreb indeksi aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

2.4.2. Tanım. Bir $\mathbb{G}$ grafında köşe derecelerinin t eksiğinin kareleri toplamı ile elde edilen sayıya $\boldsymbol{t-}$ **İndirgenmiş Birinci Zagreb İndeksi** denir ve $R^t M_1(\mathbb{G})$ ile gösterilir. Yani

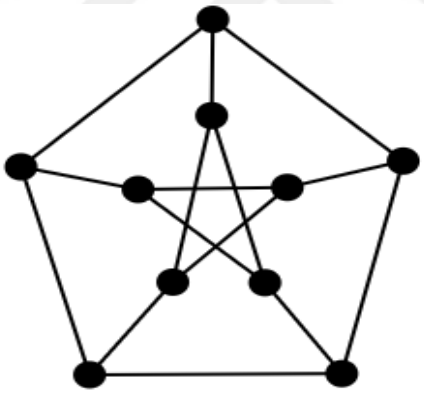
$$R^t M_1(\mathbb{G}) = \sum_{u \in V(\mathbb{G})} [d_{\mathbb{G}}(u) - t]^2$$

dir.

Özel olarak $t = 1$ alınırsa sıklıkla kullanılan $1-$ indirgenmiş birinci Zagreb indeksi elde edilir. Bu indeks köşe derecelerinin birer eksiğinin kareleri toplamı alınarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$R^1 M_1(\mathbb{G}) = \sum_{u \in V(\mathbb{G})} [d_{\mathbb{G}}(u) - 1]^2.$$

Örneğin, $t = 1$ alınarak $1-$ indirgenmiş birinci Zagreb indeksini P Petersen grafına uygulayalım.



Şekil 2.21. *P* Petersen grafı

$$\begin{aligned} R^1 M_1(P) &= \sum_{u \in V(\mathbb{G})} [d_{\mathbb{G}}(u) - 1]^2 \\ &= (3-1)^2 + (3-1)^2 + (3-1)^2 + (3-1)^2 + \\ &\quad (3-1)^2 + (3-1)^2 + (3-1)^2 + (3-1)^2 + \\ &\quad (3-1)^2 + (3-1)^2 \\ &= 10 \cdot (3-1)^2 \\ &= 40 \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

2.4.3. Tanım. Bir grafta kenar oluşturan her bir köşeye bağlı kenar sayısının çarpımlarının toplamlarından oluşan **ikinci Zagreb indeksi**, $\boldsymbol{M_2}(\mathbb{G})$ ile gösterilir ve

$$M_2(\mathbb{G}) = \sum_{uv \epsilon E(\mathbb{G})} [d_{\mathbb{G}}(u) \cdot d_{\mathbb{G}}(v)]$$

şekilde tanımlanır. (Gutman et al., 1975)

2.4.4. Tanım. $\mathbb{G}$ basit, bağlantılı bir graf olsun. Köşe derecelerinin t eksiğinin çarpımlarının toplamı ile elde edilen sayıya $\boldsymbol{t-}$ **indirgenmiş ikinci Zagreb indeksi** denir. $\boldsymbol{R^t M_2}(\mathbb{G})$ ile gösterilir. Yani

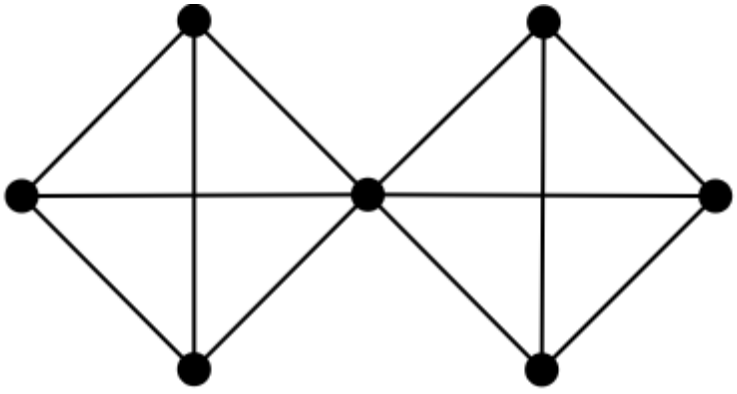
$$R^t M_2(\mathbb{G}) = \sum_{uv \epsilon E(\mathbb{G})} [(d_{\mathbb{G}}(u) - t) \cdot (d_{\mathbb{G}}(v) - t)]$$

şeklinde tanımlanır.

Özel olarak $t = 1$ alınırsa $1-$ indirgenmiş birinci Zagreb indeksi elde edilir. Köşe derecelerinin birer eksiği alınarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$R^1 M_2(\mathbb{G}) = \sum_{uv \epsilon E(\mathbb{G})} [(d_{\mathbb{G}}(u) - 1) \cdot (d_{\mathbb{G}}(v) - 1)].$$

Örneğin, $t = 1$ alınarak $1-$ indirgenmiş ikinci Zagreb indeksini W_4^2 yel değirmeni grafına uygulayalım.



Şekil 2.22. $\boldsymbol{W_4^2}$ yel değirmeni grafı

$$R^1M_2(W_4^2) = \sum_{uv\epsilon E(\mathbb{G})} [(d_{\mathbb{G}}(u)-1)\cdot(d_{\mathbb{G}}(v)-1)]$$
$$= 6(3-1)(3-1) + 6(3-1)(6-1)$$
$$= 6\cdot 2\cdot 2 + 6\cdot 2\cdot 5$$
$$= 84$$

olur.

2.4.5. Tanım. Üçüncü Zagreb indeksi veya **unutulmuş (Forgetten) indeksi** olarak adlandırılan bu indeks, birinci Zagreb indeksinden farklı olarak köşe derecelerinin küpleri toplanarak hesaplanır ve $\boldsymbol{M_3}(\mathbb{G})$ ile gösterilen bu indeks aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$M_3(\mathbb{G}) = \sum_{u\epsilon V(\mathbb{G})} d_{\mathbb{G}}(u)^3.$$

2.4.6. Tanım. Her bir köşe derecesinin t derece azaltılması ile oluşan indeks $\boldsymbol{t}-$ **indirgenmiş üçüncü Zagreb indeksi** olarak da adlandırılır. $\boldsymbol{R^tM_3}(\mathbb{G})$ ile gösterilir. Yani

$$R^tM_3(\mathbb{G}) = \sum_{u\epsilon V(\mathbb{G})} [d_{\mathbb{G}}(u)-t]^3$$

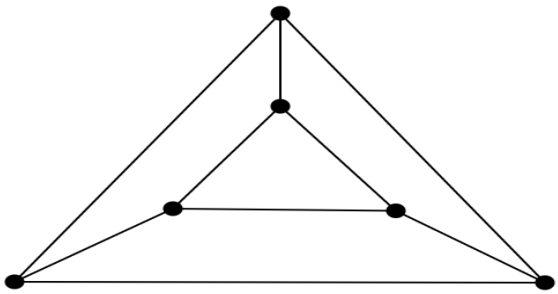
şeklinde ifade edilir.

$t = 1$ özel durumunda ise

$$R^1M_3(\mathbb{G}) = \sum_{u\epsilon V(\mathbb{G})} [d_{\mathbb{G}}(u)-1]^3$$

$1-$ indirgenmiş üçüncü Zagreb indeksi elde edilir.

Örneğin, L_3 merdiven grafına $1-$ indirgenmiş üçüncü Zagreb indeksini uygularsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.



Şekil 2.23. L_3 merdiven grafı

$$\begin{aligned} R^1M_3(L_3) &= \sum_{u\epsilon V(\mathbb{G})} [d_{\mathbb{G}}(u)-1]^3 \\ &= (3-1)^3+(3-1)^3+(3-1)^3+(3-1)^3+ \\ &\quad (3-1)^3+(3-1)^3 \\ &= 6\cdot(3-1)^3 \\ &= 48 \end{aligned}$$

dir.

2.4.7. Tanım. Çarpımsal bir topolojik indeks olan **Narumi-Katayama indeksi** graftaki her bir köşeden çıkan kenar sayılarının çarpımlarıyla ifade edilir. $\boldsymbol{NK}(\mathbb{G})$ ile gösterilir. Yani,

$$NK(\mathbb{G}) = \prod_{u\epsilon V(\mathbb{G})} d_{\mathbb{G}}(u)$$

şeklindedir.

2.4.8. Tanım. $\boldsymbol{t}$ **− indirgenmiş Narumi-Katayama** indeksi aşağıdaki gibi tanımlanır.

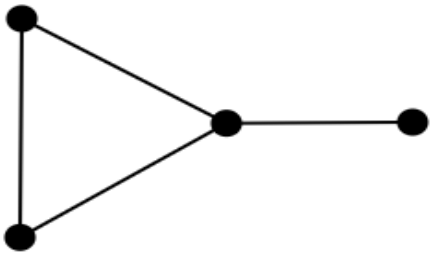
$$R^tNK(\mathbb{G}) = \prod_{u\epsilon V(\mathbb{G})} [d_{\mathbb{G}}(u)-t]$$

Sık kullanılan $t=1$ durumunda ise

$$R^1NK(\mathbb{G}) = \prod_{u\epsilon V(\mathbb{G})} [d_{\mathbb{G}}(u)-1]$$

şeklinde $1-$ indirgenmiş Narumi-Katayama indeksi olarak adlandırılır.

Örneğin, $T_{3,1}$ larva grafına $1-$ indirgenmiş Narumi-Katayama indeksi uygulandığında elde edilen sayıyı hesaplayacak olursak:



Şekil 2.24. $T_{3,1}$ larva grafı

$$\begin{aligned} R^1NK(T_{3,1}) &= \prod_{u\epsilon V(\mathbb{G})} [d_{\mathbb{G}}(u)-1] \\ &= (1-1)(2-1)(2-1)(3-1) \\ &= 0\cdot(2-1)^2\cdot 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

2.4.9. Tanım. $ABC(\mathbb{G})$ ile gösterilen **atom-bağ bağlantılılığı indeksi**, basit ve bağlantılı bir grafda ki kenarları oluşturan köşelerin, derecelerinin hesaplanmasıyla

$$ABC(\mathbb{G}) = \sum_{uv\epsilon E(\mathbb{G})} \sqrt{\frac{1}{d_{\mathbb{G}}(u)}+\frac{1}{d_{\mathbb{G}}(v)}-\frac{2}{d_{\mathbb{G}}(u)\cdot d_{\mathbb{G}}(v)}}$$

şeklinde ifade edilir.

2.4.10. Tanım. $t-$ **indirgenmiş ABC indeksi** yukarıda ifade edilen indeksin köşe derecelerinin, t derece azaltılması ile şu şekilde tanımlanır:

$$R^tABC(\mathbb{G}) = \sum_{uv\epsilon E(\mathbb{G})} \sqrt{\frac{d_{\mathbb{G}}(u)+d_{\mathbb{G}}(v)-2-2t}{(d_{\mathbb{G}}(u)-t)(d_{\mathbb{G}}(v)-t)}}$$

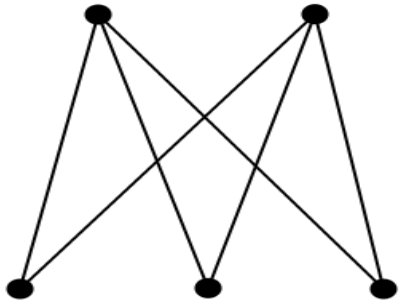
$\boldsymbol{R^t ABC}(\mathbb{G})$ ile gösterilir.

Özel olarak çok sık kullanılan $t = 1$ durumu ile $1-$ indirgenmiş ABC indeksi elde edilir. Yani,

$$R^1 ABC(\mathbb{G}) = \sum_{uv \epsilon E(\mathbb{G})} \sqrt{\frac{d_{\mathbb{G}}(u) + d_{\mathbb{G}}(v) - 4}{(d_{\mathbb{G}}(u) - 1)(d_{\mathbb{G}}(v) - 1)}}$$

şeklindedir.

Örneğin, $K_{2,3}$ iki parçalı tam grafında, $t = 1$ alınarak elde edilen $1-$ indirgenmiş ABC indeksi hesaplanırsa:



Şekil 2.25. $\boldsymbol{K_{2,3}}$ iki parçalı tam grafı

$$\begin{aligned} R^1 ABC(K_{2,3}) &= \sum_{uv \epsilon E(\mathbb{G})} \sqrt{\frac{d_{\mathbb{G}}(u) + d_{\mathbb{G}}(v) - 4}{(d_{\mathbb{G}}(u) - 1)(d_{\mathbb{G}}(v) - 1)}} \\ &= \sqrt{\frac{2+3-4}{(2-1)(3-1)}} + \sqrt{\frac{2+3-4}{(2-1)(3-1)}} + \sqrt{\frac{2+3-4}{(2-1)(3-1)}} + \\ &\quad \sqrt{\frac{2+3-4}{(2-1)(3-1)}} + \sqrt{\frac{2+3-4}{(2-1)(3-1)}} + \sqrt{\frac{2+3-4}{(2-1)(3-1)}} \\ &= 6 \cdot \sqrt{\frac{2+3-4}{(2-1)(3-1)}} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

2.4.11. Tanım. Bir grafın **birinci çarpımsal Zagreb indeksi**, graftaki herhangi bir u noktasına bağlı kenar sayılarının karelerinin çarpımları ile hesaplanan sayıdır. Yani,

$$\prod\nolimits_1(\mathbb{G}) = \prod_{u\epsilon V(\mathbb{G})} d_{\mathbb{G}}(u)^2$$

veya

$$\prod_{uv\in E(\mathbb{G})} (d_{\mathbb{G}}(u) + d_{\mathbb{G}}(v))$$

ile de tanımlanabilir.

2.4.12. Tanım. Bir graftaki herhangi bir u noktasına bağlı kenar sayılarını t derece azaltırsak,

$$R^t\prod\nolimits_1(\mathbb{G}) = \prod_{u\epsilon V(\mathbb{G})} (d_{\mathbb{G}}(u) - t)^2$$

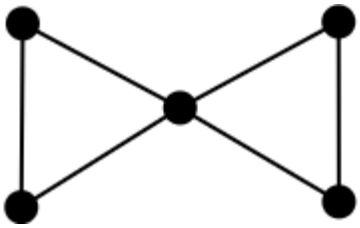
şeklinde $\boldsymbol{t}$ **− indirgenmiş birinci çarpımsal Zagreb indeksi** elde edilir.

$t = 1$ özel durumunu ele alırsak:

$$R^1\prod\nolimits_1(\mathbb{G}) = \prod_{u\epsilon V(\mathbb{G})} (d_{\mathbb{G}}(u) - 1)^2$$

$1-$ indirgenmiş birinci çarpımsal Zagreb indeksine ulaşırız.

Örneğin, D_3^2 dostluk grafı grafı için $t = 1$ durumu hesaplanırsa,



Şekil 2.26. $\boldsymbol{D_3^2}$ dostluk grafı grafı

$$R^1\prod\nolimits_1(D_3^2) = \prod_{u\epsilon V(\mathbb{G})}(d_{\mathbb{G}}(u)-1)^2$$
$$= (2-1)^2(2-1)^2(2-1)^2(2-1)^2(4-1)^2$$
$$= (1^2)^4\cdot 3^2$$
$$= 9$$

sonucunu elde ederiz.

2.4.13. Tanım. Basit, bağlantılı bir grafın sıralı olmayan köşe ikililerini yani kenarlarını oluşturan köşelerin derecelerinin çarpımları ile indeks şu şekilde ifade edilir

$$\prod\nolimits_2(\mathbb{G}) = \prod_{uv\epsilon E(\mathbb{G})} d_{\mathbb{G}}(u)\cdot d_{\mathbb{G}}(v)$$

ve bu indekse **ikinci çarpımsal Zagreb indeksi** denir.

2.4.14. Tanım. Bir grafın $t-$ **indirgenmiş ikinci çarpımsal Zagreb indeksi**,

$$R^t\prod\nolimits_2(\mathbb{G}) = \prod_{uv\epsilon E(\mathbb{G})}[(d_{\mathbb{G}}(u)-t)\cdot(d_{\mathbb{G}}(v)-t)]$$

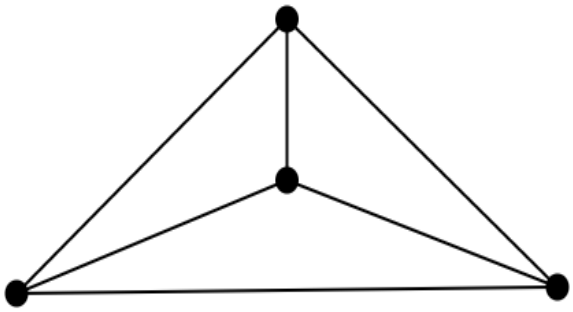
şeklinde tanımlanır.

Özel olarak $t=1$ hali ile elde edilen indeks,

$$R^1\prod\nolimits_2(\mathbb{G}) = \prod_{uv\epsilon E(\mathbb{G})}(d_{\mathbb{G}}(u)-1)\cdot(d_{\mathbb{G}}(v)-1)$$

şeklinde ifade edilip. $1-$ indirgenmiş ikinci çarpımsal Zagreb indeksi olarak adlandırılır.

Örneğin, W_4 tekerlek grafında bu indeks için $t=1$ alınırsa,



Şekil 2.27. $\boldsymbol{W_4}$ tekerlek grafı

$$R^t\prod\nolimits_2(W_4) = \prod_{uv\epsilon E(\mathbb{G})}[(d_{\mathbb{G}}(u)-1)\cdot(d_{\mathbb{G}}(v)-1)]$$
$$= [(3-1)(3-1)][(3-1)(3-1)][(3-1)(3-1)]$$
$$[(3-1)(3-1)][(3-1)(3-1)][(3-1)(3-1)]$$
$$= [2\cdot 2]^6$$
$$= 4^6$$

sonucuna ulaşılır.

2.4.15. Tanım. Harmonik indeks, bir $\mathbb{G}$ grafı için aşağıdaki gibi tanımlanır ve $\boldsymbol{H}(\mathbb{G})$ ile gösterilir.

$$H(\mathbb{G}) = \sum_{uv\epsilon E(\mathbb{G})}\frac{2}{d_{\mathbb{G}}(u)+d_{\mathbb{G}}(v)}.$$

2.4.16. Tanım. Basit, bağlantılı bir graf ele alalım. Bu graftaki köşe derecelerinin t derece eksiltilmesiyle elde edilen sayıya $\boldsymbol{t-}$ **indirgenmiş harmonik indeksi** denir. Yani

$$R^tH(\mathbb{G}) = \sum_{uv\epsilon E(\mathbb{G})}\frac{2}{d_{\mathbb{G}}(u)+d_{\mathbb{G}}(v)-2t}$$

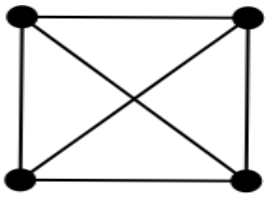
ile gösterilir.

Özel olarak $t=1$ durumunu ele alacak olursak $1-$ indirgenmiş harmonik indeksi,

$$R^1H(\mathbb{G}) = \sum_{uv\epsilon E(\mathbb{G})}\frac{2}{d_{\mathbb{G}}(u)+d_{\mathbb{G}}(v)-2}$$

şeklinde ifade edilir.

Örneğin, K_4 tam grafına, $t = 1$ alınarak oluşturulan $1-$ indirgenmiş harmonik indeksi uygulanırsa



Şekil 2.28. K_4 tam grafı

$$R^1H(K_4) = \sum_{uv\epsilon E(\mathbb{G})} \frac{2}{d_{\mathbb{G}}(u) + d_{\mathbb{G}}(v) - 2}$$
$$= \frac{2}{3+3-2} + \frac{2}{3+3-2} + \frac{2}{3+3-2} + \frac{2}{3+3-2}$$
$$= 4 \cdot \frac{2}{4}$$
$$= 2$$

sonucuna ulaşılır.

2.4.17. Tanım. Toplam-bağlantılılık (sum-connectivity) indeksi,

$$SCI(\mathbb{G}) = \sum_{uv\epsilon E(\mathbb{G})} \frac{1}{\sqrt{d_{\mathbb{G}}(u) + d_{\mathbb{G}}(v)}}$$

şeklinde tanımlıdır ve $\boldsymbol{SCI}(\mathbb{G})$ ile gösterilir.

2.4.18. Tanım. Bir grafın $\boldsymbol{t-}$ **indirgenmiş toplam-bağlantılılık (sum-connectivity) indeksi**, $\boldsymbol{R^tSCI(\mathbb{G})}$ ile gösterilmek üzere

$$R^tSCI(\mathbb{G}) = \sum_{uv\epsilon E(\mathbb{G})} \frac{1}{\sqrt{d_{\mathbb{G}}(u) + d_{\mathbb{G}}(v) - 2t}}$$

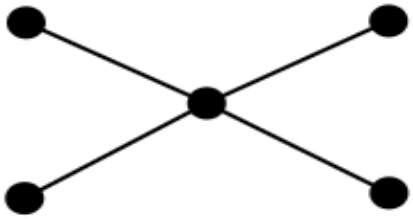
dir.

Çok sık kullanılan $t = 1$ özel durumu ile $1-$ indirgenmiş toplam-bağlantılılık (sum-connectivity) indeksi elde edilir ve

$$R^1SCI(\mathbb{G}) = \sum_{uv\epsilon E(\mathbb{G})} \frac{1}{\sqrt{d_{\mathbb{G}}(u) + d_{\mathbb{G}}(v) - 2}}$$

şeklinde tanımlanır.

Örneğin, S_5 yıldız grafının $t = 1$ alınarak $1-$ indirgenmiş toplam-bağlantılılık (sum-connectivity) indeksi,



Şekil 2.29. S_5 yıldız grafı

$$\begin{aligned} R^1SCI(S_5) &= \sum_{uv\epsilon E(\mathbb{G})} \frac{1}{\sqrt{d_{\mathbb{G}}(u) + d_{\mathbb{G}}(v) - 2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+4-2}} + \frac{1}{\sqrt{1+4-2}} + \frac{1}{\sqrt{1+4-2}} + \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{1+4-2}} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+4-2}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

2.4.19. Tanım. Bir grafı oluşturan ve kenarları birleştiren köşelerin, derecelerinin farkının mutlak değeri alınarak elde edilen indeks:

$$Alb(\mathbb{G}) = \sum_{uv\epsilon E(\mathbb{G})} |d_{\mathbb{G}}(u) - d_{\mathbb{G}}(v)|$$

şeklinde tanımlıdır. **Albertson düzensizlik (irregularity) indeksi** olarak adlandırılır.

2.4.20. Tanım. t -indirgenmiş Albertson düzensizlik (irregularity) indeksi aşağıdaki gibi ifade edilir ve $\boldsymbol{R^t Alb}(\mathbb{G})$ ile gösterilir. Yani

$$R^t Alb(\mathbb{G}) = \sum_{uv \epsilon E(\mathbb{G})} |(d_{\mathbb{G}}(u) - t) - (d_{\mathbb{G}}(v) - t)|$$
$$= \sum_{uv \epsilon E(\mathbb{G})} |d_{\mathbb{G}}(u) - d_{\mathbb{G}}(v)|$$

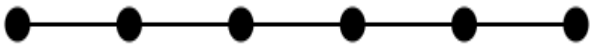
dir.

Özel olarak $t = 1$ alınmasıyla tanımlanan $1-$ indirgenmiş Albertson düzensizlik (irregularity) indeksi,

$$R^1 Alb(\mathbb{G}) = \sum_{uv \epsilon E(\mathbb{G})} |(d_{\mathbb{G}}(u) - 1) - (d_{\mathbb{G}}(v) - 1)|$$
$$= \sum_{uv \epsilon E(\mathbb{G})} |d_{\mathbb{G}}(u) - (d_{\mathbb{G}}(v)|$$

şeklinde ifade edilir ve bu indekse $R^1 Alb(\mathbb{G})$ adı verilir.

Örneğin, $t = 1$ alınarak $\mathbf{1-}$ **indirgenmiş Albertson düzensizlik (irregularity) indeksi** elde edilir.



Şekil 2.30. P_6 grafı

$$R^1 Alb(P_6) = \sum_{uv \epsilon E(\mathbb{G})} |d_{\mathbb{G}}(u) - d_{\mathbb{G}}(v)|$$
$$= |1-2| + |1-2| + |2-2| + |2-2| + |2-2|$$
$$= 2 \cdot |1-2| + 3 \cdot |2-2|$$
$$= 2$$

şeklinde sonuca ulaşılır.

2.4.21. Tanım. Sigma indeksi olarak adlandırılan bu indeks, bir graftaki tüm köşe ikililerinin derecelerine aşağıdaki formülün uygulanmasıyla,

$$\sigma(\mathbb{G}) = \sum_{uv \epsilon E(\mathbb{G})} (d_{\mathbb{G}}(u) - d_{\mathbb{G}}(v))^2$$

şeklinde ifade edilir. $\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{G})$ ile gösterilir.

2.4.22. Tanım. $\boldsymbol{t}$ − indirgenmiş sigma indeksi denilir. Yani

$$R^t\sigma(\mathbb{G}) = \sum_{uv \epsilon E(\mathbb{G})} ((d_{\mathbb{G}}(u) - t) - (d_{\mathbb{G}}(v) - t))^2$$
$$= \sum_{uv \epsilon E(\mathbb{G})} (d_{\mathbb{G}}(u) - d_{\mathbb{G}}(v))^2$$

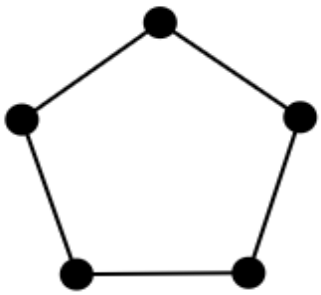
şeklindedir.

$t = 1$ özel durumu kullanılarak tanımlanan $1-$ indirgenmiş sigma indeksi aşağıda verilmiştir,

$$R^1\sigma(\mathbb{G}) = \sum_{uv \epsilon E(\mathbb{G})} ((d_{\mathbb{G}}(u) - 1) - (d_{\mathbb{G}}(v) - 1))^2$$
$$= \sum_{uv \epsilon E(\mathbb{G})} (d_{\mathbb{G}}(u) - d_{\mathbb{G}}(v))^2$$

dir. $R^1\sigma(\mathbb{G}\,)$ ile gösterilir.

Örneğin, C_5 devir grafına yukarıdaki $t = 1$ alınarak elde edilen $1-$ indirgenmiş sigma indeksi uygulanırsa,



Şekil 2.31. C_5 devir grafı

$$R^1\sigma(C_5) = \sum_{uv\epsilon E(\mathbb{G})} ((d_{\mathbb{G}}(u)-1)-(d_{\mathbb{G}}(v)-1))^2$$
$$= (2-2)^2+(2-2)^2+(2-2)^2+$$
$$(2-2)^2+(2-2)^2$$
$$= 5\cdot(0)^2$$
$$= 0$$

sonucuna ulaşılır.

2.4.23. Tanım. Bir grafı oluşturan köşelerin derecelerine aşağıdaki işlemlerin uygulanmasıyla

$$ISI(\mathbb{G}) = \sum_{uv\epsilon E(\mathbb{G})} \frac{1}{\frac{1}{d_{\mathbb{G}}(u)}+\frac{1}{d_{\mathbb{G}}(v)}} = \sum_{uv\epsilon E(\mathbb{G})} \frac{d_{\mathbb{G}}(u)\cdot d_{\mathbb{G}}(v)}{d_{\mathbb{G}}(u)+d_{\mathbb{G}}(v)}$$

elde edilir. **Ters toplam indeksi (İnverse sum indeg)** olarak adlandırılır ve $\boldsymbol{ISI}(\mathbb{G})$ ile gösterilir.

2.4.24. Tanım. Bir grafın köşe derecelerinin her birinin t derece azaltılarak çarpımlarının, toplamlarına oranları alınması üzere,

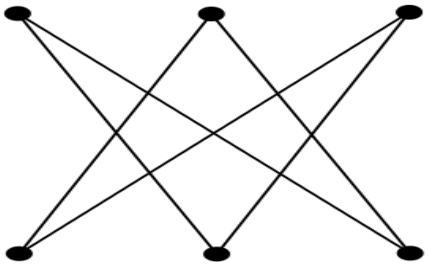
$$R^tISI(\mathbb{G}) = \sum_{uv\epsilon E(\mathbb{G})} \frac{1}{\frac{1}{d_{\mathbb{G}}(u)-t}+\frac{1}{d_{\mathbb{G}}(v)-t}} = \sum_{uv\epsilon E(\mathbb{G})} \frac{(d_{\mathbb{G}}(u)-t)(d_{\mathbb{G}}(v)-t)}{d_{\mathbb{G}}(u)+d_{\mathbb{G}}(v)-2t}$$

şeklinde ifade edilen indeks $\boldsymbol{t-}$ **indirgenmiş ters toplam indeks**idir.

$t=1$ özel durumunda elde edilen $1-$ indirgenmiş inverse sum indeksi aşağıda verilmiştir.

$$R^1ISI(\mathbb{G}) = \sum_{uv\epsilon E(G)} \frac{1}{\frac{1}{d_{\mathbb{G}}(u)-1}+\frac{1}{d_{\mathbb{G}}(v)-1}} = \sum_{uv\epsilon E(G)} \frac{(d_{\mathbb{G}}(u)-1)(d_{\mathbb{G}}(v)-1)}{d_{\mathbb{G}}(u)+d_{\mathbb{G}}(v)-2}.$$

Örneğin, yukarıda tanımlanan, $t = 1$ alınarak $1 -$ indirgenmiş inverse sum indeksinin T_3 taç grafına uygulanması sonucu



Şekil 2.32. T_3 taç grafı

$$R^1ISI(T_3) = \sum_{uv\epsilon E(G)} \frac{(d_{\mathbb{G}}(u)-1)(d_{\mathbb{G}}(v)-1)}{d_{\mathbb{G}}(u)+d_{\mathbb{G}}(v)-2}$$

$$= \frac{(2-1)(2-1)}{2+2-2} + \frac{(2-1)(2-1)}{2+2-2} + \frac{(2-1)(2-1)}{2+2-2} + \frac{(2-1)(2-1)}{2+2-2} + \frac{(2-1)(2-1)}{2+2-2} + \frac{(2-1)(2-1)}{2+2-2}$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 3$$

elde edilir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu kısımda sonlu afin ve projektif düzlemlerden graf elde etme yöntemi verilecektir. Bu konuda literatürde yapılan (Özen Erdoğan & Dayioğlu, 2018), (Dayioglu, 2021), (Dogan & Akpinar, 2021) ve (Akpinar, 2022) çalışmaları incelenebilir.

3.1. Sonlu Afin Düzlemlerden Graf Elde Etme Yöntemi "Patika Yöntem"

3.1.1. Tanım. $A = (P, L)$ sonlu bir afin düzlem olsun.

l_i; A düzleminde $v_i = v(l_i) = k, \quad k \geq 2$ özelliğinde bir doğru ise bu taktirde l_i doğrusu $l_i = \left(l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}, ..., l_{i(k-1)}, l_{ik}\right)$ şeklinde bir sıralı $k - lı$ olarak alınır.

Şimdi $A = (P, L)$ deki herhangi bir $l_i = \left(l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}, ..., l_{i(k-1)}, l_{ik}\right)$ doğrusu için aşağıdaki gibi tanımlanan yeni bir "$p\left(l_i\right)$" kümesi kurulacaktır:

Eğer $k = 2$ ise bu taktirde $l_i = \left(l_{i1}, l_{i2}\right)$ dir ve $p\left(l_i\right) := l_i$

ve

Eğer $k \geq 3$ ise $1 \leq j \leq k-1$ için $l_{i,j} = \left\{l_{ij}, l_{i(j+1)}\right\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} p\left(l_i\right) &:= \{l_{i,j} |\ j = 1, 2, \ldots, k-1\} \\ &:= \left\{l_{i,1}, l_{i,2}, l_{i,3}, \ldots, l_{i,k-1}\right\} \\ &:= \left\{\left\{l_{i1}, l_{i2}\right\}, \left\{l_{i2}, l_{i3}\right\}, \ldots, \left\{l_{i(k-1)}, l_{ik}\right\}\right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi aşağıdaki temel teorem verilecektir.

3.1.2. Teorem. (Temel Teorem) $A = (P, L)$ sonlu bir afin düzlem olsun. Bu taktirde $A = (P, L)$ den patika yöntemi kullanılarak, köşe ve kenar kümesi sırasıyla

$$V(\mathbb{G}_A) = P$$

$$E(\mathbb{G}_A) = \bigcup_{l_i \in L} p(l_i)$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{G}_A = (V(\mathbb{G}_A), E(\mathbb{G}_A))$ grafı elde edilir.

3.1.3. Tanım. Sonlu afin düzlemlerden Teorem 3.1.2.' deki gibi elde edilen graflara ***afin-patika grafları*** adı verilir.

3.2. Sonlu Projektif Düzlemlerden Graf Elde Etme Yöntemi "Patika Yöntemi"

3.2.1. Tanım. $\pi = (P, L)$, k. mertebeden sonlu bir projektif düzlem olsun.
l_i; π düzleminde $v_i = v(l_i) = k + 1$ özelliğinde bir doğru ise bu taktirde l_i doğrusunu $l_i = (l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}, \dots, l_{ik}, l_{i(k+1)})$ şeklinde bir sıralı $k + 1 - li$ olarak alınır.
Şimdi $\pi = (P, L)$ deki herhangi bir $l_i = (l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}, \dots, l_{ik}, l_{i(k+1)})$ doğrusunda $k \geq 2$ için aşağıdaki gibi tanımlanan yeni bir "$p(l_i)$" kümesi kurulacaktır:

$$l_{i,j} = \{l_{ij}, l_{i(j+1)}\}, \quad 1 \leq j \leq k,$$
$$p(l_i) \coloneqq \{l_{i,j} \mid j = 1, 2, \dots, k\}.$$

şeklinde tanımlanır.

3.2.2. Teorem. (Temel Teorem) $\pi = (P, L)$ sonlu bir projektif düzlem olsun. Bu taktirde $\pi = (P, L)$ den patika yöntemi kullanılarak, köşe ve kenar kümesi sırasıyla

$$V(\mathbb{G}_P) = P$$
$$E(\mathbb{G}_P) = \bigcup_{l_i \in L} p(l_i)$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{G}_P = (V(\mathbb{G}_P), E(\mathbb{G}_P))$ grafı elde edilir.

3.2.3. Tanım. Sonlu projektif düzlemlerden Teorem 3.2.2'de ki gibi elde edilen graflara ***projektif-patika grafları*** adı verilir.

4. BULGULAR

4.1. Afin Patika Graflarının Bazı İndirgenmiş Topolojik İndeksleri ve Enerjileri

Bu bölümde; ilk önce k. mertebeden afin düzlemden elde edilen afin patika grafları verilecektir. Daha sonra k. mertebeden afin düzlemden elde edilen afin patika grafının köşe ve kenar parçalanışlarının genel formülleri elde edilecektir. Bu nedenle, köşe dereceleri ile oluşturulan topolojik indekslerden, sık kullanılanların bazıları ele alınacaktır. Son olarak, $k = 2,3,4,5$. mertebeden afin düzlemlerden elde edilen afin patika graflarıyla ilgili köşe-komşuluk matrisleri ve enerjileri hesaplanacaktır.

4.1.1. Örnek. 2. mertebeden afin düzlemin noktalarının ve doğrularının kümesi aşağıdaki gibidir:

$$P = \{00,01,10,11\},$$

$$L = \big\{\{00,11\},\{01,10\},\{00,10\},\{01,11\},\{00,01\},\{10,11\}\big\}.$$

2. mertebeden afin düzlemden elde edilen afin patika grafının köşe ve kenar kümeleri aşağıdaki gibidir:

$$V(\mathbb{G}) = \{00,01,10,11\},$$

$$E(\mathbb{G}) = \{\{00,11\},\{01,10\},\{00,10\},\{01,11\},\{00,01\},\{10,11\}\}.$$

Burada $|E(\mathbb{G})| = 6$ dır. Şimdi her bir köşenin köşe derecesi belirlenirse:

$$d(00) = 3, d(01) = 3, d(10) = 3, d(11) = 3.$$

Sonuç olarak derece dizisi $D.S. = \{3^4\}$ olarak elde edilir.

4.1.2. Örnek. 3. mertebeden afin düzlemin noktalarının ve doğrularının kümesi aşağıdaki gibidir:

$$P = \{00,01,02,10,11,12,20,21,22\},$$

$$L = \begin{Bmatrix} \{00,11,22\},\{01,12,20\},\{02,10,21\},\{00,12,21\},\{01,10,22\},\{02,11,20\} \\ \{00,10,20\},\{01,11,21\},\{02,12,22\},\{00,01,02\},\{10,11,12\},\{20,21,22\} \end{Bmatrix}.$$

3. mertebeden afin düzlemden elde edilen afin patika grafının köşe ve kenar kümeleri aşağıdaki gibidir:

$$V(\mathbb{G}) = \{00,01,02,10,11,12,20,21,22\},$$

$$E(\mathbb{G}) = \begin{Bmatrix} \{00,11\},\{11,22\},\{01,12\},\{12,20\},\{02,10\},\{10,21\},\{00,12\},\{12,21\}, \\ \{01,10\},\{10,22\},\{02,11\},\{11,20\},\{00,10\},\{10,20\},\{01,11\},\{11,21\}, \\ \{02,12\},\{12,22\},\{00,01\},\{01,02\},\{10,11\},\{11,12\},\{20,21\},\{21,22\} \end{Bmatrix}.$$

Burada $|E(\mathbb{G})| = 24$ dır. Şimdi her bir köşenin köşe derecesi belirlenirse:

$$d(00) = 4, d(01) = 5, d(02) = 4, d(10) = 7, d(11) = 8,$$
$$d(12) = 7, d(20) = 4, d(21) = 5, d(22) = 4$$

elde edilir. Sonuç olarak derece dizisi $D.S. = \{4^4, 5^2, 7^2, 8^1\}$ olarak elde edilir.

4.1.3. Örnek. 4. mertebeden afin düzlemin noktalarının ve doğrularının kümesi aşağıdaki gibidir:

$$P = \{00,01,02,03,10,11,12,13,20,21,22,23,30,31,32,33\},$$

$$L = \begin{Bmatrix} \{00,11,22,33\},\{01,10,23,32\},\{02,13,20,31\},\{03,12,21,30\},\{00,12,23,31\}, \\ \{01,13,22,30\},\{02,10,21,33\},\{03,11,20,32\},\{00,13,21,32\},\{01,12,20,33\}, \\ \{02,11,23,30\},\{03,10,22,31\},\{00,10,20,30\},\{01,11,21,31\},\{02,12,22,32\}, \\ \{03,13,23,33\},\{00,01,02,03\},\{10,11,12,13\},\{20,21,22,23\},\{30,31,32,33\} \end{Bmatrix}.$$

4. mertebeden afin düzlemden elde edilen afin patika grafının köşe ve kenar kümeleri aşağıdaki gibidir:

$$V(\mathbb{G}) = \{00,01,02,03,10,11,12,13,20,21,22,23,30,31,32,33\},$$

$$E(\mathbb{G}) = \begin{Bmatrix} \{00,11\},\{11,22\},\{22,33\},\{01,10\},\{10,23\},\{23,32\},\{02,13\},\{13,20\},\{20,31\},\{03,12\}, \\ \{12,21\},\{21,30\},\{00,12\},\{12,23\},\{23,31\},\{01,13\},\{13,22\},\{22,30\},\{02,10\},\{10,21\}, \\ \{21,33\},\{03,11\},\{11,20\},\{20,32\},\{00,13\},\{13,21\},\{21,32\},\{01,12\},\{12,20\},\{20,33\}, \\ \{02,11\},\{11,23\},\{23,30\},\{03,10\},\{10,22\},\{22,31\},\{00,10\},\{10,20\},\{20,30\},\{01,11\}, \\ \{11,21\},\{21,31\},\{02,12\},\{12,22\},\{22,32\},\{03,13\},\{13,23\},\{23,33\},\{00,01\},\{01,02\}, \\ \{02,03\},\{10,11\},\{11,12\},\{12,13\},\{20,21\},\{21,22\},\{22,23\},\{30,31\},\{31,32\},\{32,33\} \end{Bmatrix}.$$

Burada $|E(\mathbb{G})| = 60$ dır. Şimdi her bir köşenin köşe derecesin belirlenirse:

$$d(00) = 5, d(01) = 6, d(02) = 6, d(03) = 5, d(10) = 9, d(11) = 10,$$
$$d(12) = 10, d(13) = 9, d(20) = 9, d(21) = 10, d(22) = 10, d(23) = 9,$$
$$d(30) = 5, d(31) = 6, d(32) = 6, d(33) = 5$$

elde edilir. Sonuç olarak derece dizisi $D.S. = \{5^4, 6^4, 9^4, 10^4\}$ olarak elde edilir.

4.1.4. Örnek. 5. mertebeden afin düzlemin noktalarının ve doğrularının kümesi aşağıdaki gibidir:

$P = \{00,01,02,03,04,10,11,12,13,14,20,21,22,23,24,30,31,32,33,34,40,41,42,43,44\}$,

$$L = \begin{Bmatrix} \{00,11,22,33,44\},\{01,12,23,34,40\},\{02,13,24,30,41\},\{03,14,20,31,42\}, \\ \{04,10,21,32,43\},\{00,12,24,31,43\},\{01,13,20,32,44\},\{02,14,21,33,40\}, \\ \{03,10,22,34,41\},\{04,11,23,30,42\},\{00,13,21,34,42\},\{01,14,22,30,43\}, \\ \{02,10,23,31,44\},\{03,11,24,32,40\},\{04,12,20,33,41\},\{00,14,23,32,41\}, \\ \{01,10,24,33,42\},\{02,11,20,34,43\},\{03,12,21,30,44\},\{04,13,22,31,40\}, \\ \{00,10,20,30,40\},\{01,11,21,31,41\},\{02,12,22,32,42\},\{03,13,23,33,43\}, \\ \{04,14,24,34,44\},\{00,01,02,03,04\},\{10,11,12,13,14\},\{20,21,22,23,24\}, \\ \{30,31,32,33,34\},\{40,41,42,43,44\} \end{Bmatrix}.$$

5. mertebeden afin düzlemden elde edilen afin patika grafının köşe ve kenar kümeleri aşağıdaki gibidir:

$V(G) = \{00,01,02,03,04,10,11,12,13,14,20,21,22,23,24,30,31,32,33,34,40,41,42,43,44\}$,

$$E(G)=\left\{\begin{matrix}\{00,11\},\{11,22\},\{22,33\},\{33,44\},\{01,12\},\{12,23\},\{23,34\},\{34,40\},\\ \{02,13\},\{13,24\},\{24,30\},\{30,41\},\{03,14\},\{14,20\},\{20,31\},\{31,42\},\\ \{04,10\},\{10,21\},\{21,32\},\{32,43\},\{00,12\},\{12,24\},\{24,31\},\{31,43\},\\ \{01,13\},\{13,20\},\{20,32\},\{32,44\},\{02,14\},\{14,21\},\{21,33\},\{33,40\},\\ \{03,10\},\{10,22\},\{22,34\},\{34,41\},\{04,11\},\{11,23\},\{23,30\},\{30,42\},\\ \{00,13\},\{13,21\},\{21,34\},\{34,42\},\{01,14\},\{14,22\},\{22,30\},\{30,43\},\\ \{02,10\},\{10,23\},\{23,31\},\{31,44\},\{03,11\},\{11,24\},\{24,32\},\{32,40\},\\ \{04,12\},\{12,20\},\{20,33\},\{33,41\},\{00,14\},\{14,23\},\{23,32\},\{32,41\},\\ \{01,10\},\{10,24\},\{24,33\},\{33,42\},\{02,11\},\{11,20\},\{20,34\},\{34,43\},\\ \{03,12\},\{12,21\},\{21,30\},\{30,44\},\{04,13\},\{13,22\},\{22,31\},\{31,40\},\\ \{00,10\},\{10,20\},\{20,30\},\{30,40\},\{01,11\},\{11,21\},\{21,31\},\{31,41\},\\ \{02,12\},\{12,22\},\{22,32\},\{32,42\},\{03,13\},\{13,23\},\{23,33\},\{33,43\},\\ \{04,14\},\{14,24\},\{24,34\},\{34,44\},\{00,01\},\{01,02\},\{02,03\},\{03,04\},\\ \{10,11\},\{11,12\},\{12,13\},\{13,14\},\{20,21\},\{21,22\},\{22,23\},\{23,24\},\\ \{30,31\},\{31,32\},\{32,33\},\{33,34\},\{40,41\},\{41,42\},\{42,43\},\{43,44\}\end{matrix}\right\}.$$

Burada $|E(\mathbb{G})|=120$ dır. Şimdi her bir köşenin köşe derecesi belirlenirse:

$$d(00)=6, d(01)=7, d(02)=7, d(03)=7, d(04)=6, d(10)=11,$$
$$d(11)=12, d(12)=12, d(13)=12, d(14)=11, d(20)=11, d(21)=12,$$
$$d(22)=12, d(23)=12, d(24)=11, d(30)=11, d(31)=12, d(32)=12,$$
$$d(33)=12, d(34)=11, d(40)=6, d(41)=7, d(42)=7, d(43)=7, d(44)=6$$

elde edilir. Sonuç olarak derece dizisini $D.S.=\{6^4, 7^6, 11^6, 12^9\}$ olarak elde edilir.

Şimdi, önce k. mertebeden afin düzlemden elde edilen afin patika grafının köşe ve kenar parçalanışlarının genel formülleri verilecektir. Ardından bu k. mertebeden grafların karakterizasyonu için iki sonuç verilecektir.

Çizelge 4.1. Afin patika grafının köşe parçalanışı

Köşe Parçalanışı	$\boldsymbol{d_{\mathbb{G}}(u)}$	$\boldsymbol{\lvert d_{\mathbb{G}}(u)\rvert}$
1.	k+1	4
2.	k+2	2(k-2)
3.	2k+1	2(k-2)
4.	2(k+1)	$(k-2)^2$

Çizelge 4.2. Afin patika grafının kenar parçalanışı

Kenar Parçalanışı	$\left(\boldsymbol{d}_{\mathbb{G}}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{d}_{\mathbb{G}}(\boldsymbol{v})\right)$	$\left\|\left(\boldsymbol{d}_{\mathbb{G}}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{d}_{\mathbb{G}}(\boldsymbol{v})\right)\right\|$
1.	(k+1, k+2)	4
2.	(k+1, 2k+1)	8
3.	(k+1, 2k+2)	4(k-2)
4.	(k+2, k+2)	2(k-3)
5.	(k+2, 2k+1)	4(k-2)
6.	(k+2, 2k+2)	$2(\mathrm{k}-2)^2$
7.	(2k+1, 2k+1)	4(k-3)
8.	(2k+1, 2k+2)	2(k-2)(2k-5)
9.	(2k+2, 2k+2)	(k-1)(k-2)(k-3)

4.1.5. Sonuç. k. mertebeden afin patika grafları, k^2 köşe ve $\left(k-1\right)\left(k^2+k\right)$ kenardan oluşur.

4.1.6. Sonuç. k. mertebeden afin patika graflarının köşe derece dizilerinin genel formülleri aşağıdaki biçimdedir:

$$D.S. = \left\{(k+1)^4, (k+2)^{2k-4}, (2k+1)^{2k-4}, (2k+2)^{(k-2)^2}\right\}.$$

Şimdi, afin patika grafları için köşe dereceleri cinsinden sık kullanılan bazı topolojik indekslerinin genel formülleri verilecektir.

4.1.7. Teorem. $\mathbb{G}$, k. mertebeden afin patika grafı olsun. Bu taktirde $t-$ indirgenmiş birinci, ikinci, üçüncü toplamsal ve birinci çarpımsal Zagreb indeksleri ve Narumi-Katayama indeksi; bu graflar için mertebeye bağlı olarak aşağıdaki gibi genellenebilir.

k. mertebeden afin patika grafının $t-$ indirgenmiş birinci Zagreb indeksi:

$$R^t M_1(\mathbb{G}_A) = \sum_{u \in V(\mathbb{G}_A)} \left(d_{\mathbb{G}_A}(u) - t\right)^2$$
$$= 4k^4 - 4k^3 t + 2k^3 + k^2 t^2 - 12k^2 + 4kt + 2k$$

şeklinde elde edilir.

k. mertebeden afin patika grafının $t-$ indirgenmiş ikinci Zagreb indeksi:

$$R^t M_2(\mathbb{G}_A) = \sum_{uv \in E(\mathbb{G}_A)} (d_{\mathbb{G}_A}(u) - t)(d_{\mathbb{G}_A}(v) - t)$$

$$= 4k^5 - 4k^4 t + 4k^4 + k^3 t^2 - 2k^3 t - 18k^3 + 12k^2 t - 10k^2 - kt^2 - 2kt + 16k - 4$$

sonucu elde edilmektedir.

k. mertebeden afin patika grafının $t-$ indirgenmiş üçüncü Zagreb indeksi:

$$R^t M_3(\mathbb{G}_A) = \sum_{u \in V(\mathbb{G}_A)} \left(d_{\mathbb{G}_A}(u) - t\right)^3$$

$$= 8k^5 - 12k^4 t + 10k^4 + 6k^3 t^2 - 6k^3 t - 36k^3 - k^2 t^3 + 36k^2 t - 36k^2 t - 16k^2 - 6kt^2 - 6kt + 22k$$

şeklinde genellenebilir.

k. mertebeden afin patika grafının $t-$ indirgenmiş birinci çarpımsal Zagreb indeksi:

$$R^t \prod\nolimits_1 (\mathbb{G}_A) = \prod_{u \in V(\mathbb{G}_A)} \left(d_{\mathbb{G}_A}(u) - t\right)^2$$

$$= (k + 1 - t)^8 (k + 2 - t)^{4(k-2)} (2k + 1 - t)^{4(k-2)} (2k + 2 - t)^{2(k-2)^2}$$

şeklinde elde edilir.

k. mertebeden projektif patika grafının $t-$ indirgenmiş Narumi-Katayama indeksi:

$$R^t NK(\mathbb{G}_A) = \prod_{u \in V(\mathbb{G}_A)} (d_{\mathbb{G}_A}(u) - t)$$

$$= (k + 1 - t)^4 (k + 2 - t)^{2(k-2)} (2k + 1 - t)^{2(k-2)} (2k + 2 - t)^{(k-2)^2}$$

dir. Son olarak; $k = 2, 3, 4, 5.$ mertebeden afin düzlemlerden elde edilen afin patika graflarıyla ilgili köşe-komşuluk matrisleri ve bu grafların enerjileri hesaplanacaktır.

4.1.8. Örnek. 2. mertebeden afin patika grafı için komşuluk matrisi aşağıda verilmiştir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir:

$$P(x) = (x-3)(x+1)^3.$$

Böylece 2. mertebeden afin patika grafının spektrumu $\{3, (-1)^3\}$ olarak elde edilir ve bu grafın enerjisi $E_{\mathbb{G}} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 6$ dır.

4.1.9. Örnek. 3. mertebeden afin patika grafı için komşuluk matrisi aşağıda verilmiştir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir:

$$P(x) = -x^3(x^2-2)(x^4-22x^2-48x-28)$$

Böylece 3. mertebeden afin patika grafının spektrumu $\{0^3, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1.20309\ldots, -1.36534\ldots, -3.03955\ldots, 5.60798\ldots\}$ olarak elde edilir ve bu grafın enerjisi $E_{\mathbb{G}} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cong 14.0444271247$ dir.

4.1.10. Örnek. 4. mertebeden afin patika grafı için komşuluk matrisi aşağıda verilmiştir:

$$\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

Bu matrisin karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir:

$$P(x) = (x^2 + x - 1)^4(x^4 - 6x^3 - 15x^2 - 8x - 1)(x^4 + 2x^3 - 19x^2 - 20x - 5).$$

Böylece 4. mertebeden afin patika grafının spektrumu,

$$\begin{Bmatrix}
8.0015423837059, 5.0273558249777, 4.0273558249777, (1.6180339887499)^4, \\
1.2889948171457, (0.6180339887499)^4, 0.5552198699781, 0.5294064287063 \\
0.4447801300219, 0.1831411378539
\end{Bmatrix}$$

olarak elde edilir ve bu grafın enerjisi $E_{\mathbb{G}} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cong 24.9747125024$ dir.

Böylece 4. mertebeden afin patika grafının spektrumu,

$$\begin{Bmatrix}
8.0015423837059, 5.0273558249777, 4.0273558249777, (1.6180339887499)^4, \\
1.2889948171457, (0.6180339887499)^4, 0.5552198699781, 0.5294064287063 \\
0.4447801300219, 0.1831411378539
\end{Bmatrix}$$

olarak elde edilir ve bu grafın enerjisi $E_{\mathbb{G}} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cong 24.9747125024$ dir.

4.1.11. Örnek. 5. mertebeden afin patika grafı için komşuluk matrisi aşağıda verilmiştir:

$$\begin{bmatrix}
0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&0
\end{bmatrix}$$

Bu matrisin karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir:

$$P(x) = -(x-1)^5x^2(x+1)^5(x^2-3)(x^{11}-111x^9-310x^8+2260x^7+$$
$$13371x^6+26194x^5+20111x^4+1555x^3-3039x^2+477x-21).$$

Böylece 5. mertebeden afin patika grafının spektrumu,

$$\begin{Bmatrix}(1)^5, 0^2, (-1)^5, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0.09219\ldots, 0.12162\ldots, 0.15896\ldots, -1.39538, -1.69564,\\ -1.71301\ldots, -1.72173\ldots, -3.51473\ldots, 6.57750\ldots, -7.13930\ldots, 10.22954\ldots\end{Bmatrix}$$

olarak elde edilir ve bu grafın enerjisi $E_{\mathbb{G}} = \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i| \cong 47.8238116151$ dir.

4.2. Projektif Patika Graflarının Bazı İndirgenmiş Topolojik İndeksleri ve Enerjileri

Bu bölümde; ilk önce k. mertebeden projektif düzlemden elde edilen projektif patika grafları verilecektir. Daha sonra k. mertebeden projektif düzlemden elde edilen projektif

patika grafının köşe ve kenar parçalanışlarının genel formülleri elde edilecektir. Bu nedenle, köşe dereceleri ile oluşturulan topolojik indekslerden, sık kullanılanların bazıları ele alınacaktır. Son olarak, $k = 2,3,4,5$. mertebeden projektif düzlemlerden elde edilen projektif patika graflarıyla ilgili köşe-komşuluk matrisleri ve enerjileri hesaplanacaktır.

4.2.1. Örnek. 2. mertebeden projektif düzlemin noktalarının ve doğrularının kümesi aşağıdaki gibidir:

$$P = \{00, 01, 10, 11, (0), (1), (\infty)\},$$

$$L = \begin{Bmatrix} \{00, 11, (1)\}, \{01, 10, (1)\}, \{00, 10, (0)\}, \{01, 11, (0)\}, \\ \{00, 01, (\infty)\}, \{10, 11, (\infty)\}, \{(0), (1), (\infty)\} \end{Bmatrix}$$

k. mertebeden projektif düzlemden elde edilen projektif patika grafının köşe ve kenar kümeleri aşağıdaki gibidir:

$$V(\mathbb{G}) = \{00, 01, 10, 11, (0), (1), (\infty)\},$$

$$E(\mathbb{G}) = \begin{Bmatrix} \{00, 11\}, \{11, (1)\}, \{01, 10\}, \{10, (1)\}, \{00, 10\}, \{10, (0)\}, \{01, 11\}, \\ \{11, (0)\}, \{00, 01\}, \{01, (\infty)\}, \{10,11\}, \{11, (\infty)\}, \{(0), (1)\}, \{(1), (\infty)\} \end{Bmatrix}$$

Burada $|E(\mathbb{G})| = 14$ dır. Şimdi her bir köşenin köşe derecesi belirlenirse:

$$d(00) = 3, d(01) = 4, d(10) = 5, d(11) = 6, d\big((0)\big) = 3, d\big((1)\big) = 4, d\big((\infty)\big) = 3$$

elde edilir. Sonuç olarak derece dizisi $D.S. = \{6^{(1)}, 5^{(1)}, 4^{(2)}, 3^{(3)}\}$ olarak elde edilir.

4.2.2. Örnek. 3. mertebeden afin düzlemin noktalarının ve doğrularının kümesi aşağıdaki gibidir:

$$P = \{00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22, (0), (1), (2), (\infty)\},$$

$$L(\mathbb{G}) = \left\{ \begin{matrix} \{00,11,22,(1)\},\{01,12,20,(1)\},\{02,10,21,(1)\}, \\ \{00,12,21,(2)\},\{01,10,22,(2)\},\{02,11,20,(2)\}, \\ \{00,10,20,(0)\},\{01,11,21,(0)\},\{02,12,22,(0)\}, \\ \{00,01,02,(\infty)\},\{10,11,12,(\infty)\},\{20,21,22,(\infty)\} \\ \{(0),(1),(2),(\infty)\} \end{matrix} \right\}$$

3. mertebeden projektif düzlemden elde edilen projektif patika grafının köşe ve kenar kümeleri aşağıdaki gibidir:

$$V(\mathbb{G}) = \{00,01,02,10,11,12,20,21,22,(0),(1),(2),(\infty)\},$$

$$E(\mathbb{G}) = \left\{ \begin{matrix} \{00,11\},\{11,22\},\{22,(1)\},\{01,12\},\{12,20\},\{20,(1)\},\{02,10\},\{10,21\}, \\ \{21,(1)\},\{00,12\},\{12,21\},\{21,(2)\},\{01,10\},\{10,22\},\{22,(2)\},\{02,11\}, \\ \{11,20\},\{20,(2)\},\{00,10\},\{10,20\},\{20,(0)\},\{01,11\},\{11,21\},\{21,(0)\}, \\ \{02,12\},\{12,22\},\{22,(0)\},\{00,01\},\{01,02\},\{02,(\infty)\},\{10,11\},\{11,12\}, \\ \{12,(\infty)\},\{20,21\},\{21,22\},\{22,(\infty)\},\{(0),(1)\},\{(1),(2)\},\{(2),(\infty)\} \end{matrix} \right\}.$$

Burada $|E(\mathbb{G})| = 39$ dır. Şimdi her bir köşenin köşe derecesi belirlenecektir:

$$d(00) = 4, d(01) = 5, d(02) = 5, d(10) = 7, d(11) = 8, d(12) = 8, d(20) = 7,$$
$$d(21) = 8, d(22) = 8, d\big((0)\big) = 4, d\big((1)\big) = 5, d\big((2)\big) = 5, d\big((\infty)\big) = 4.$$

Sonuç olarak derece dizisi $D.S. = \{4^{(3)}, 5^{(4)}, 7^{(2)}, 8^{(4)}\}$ olarak elde edilecektir.

4.2.3. Örnek. 4. mertebeden projektif düzlemin noktalarının ve doğrularının kümesi aşağıdaki gibidir:

$$P = \{00,01,02,03,10,11,12,13,20,21,22,23,30,31,32,33,(0),(1),(2),(3),(\infty)\}$$

$$L = \left\{ \begin{matrix} \{00,11,22,33,(1)\},\{01,10,23,32,(1)\},\{02,13,20,31,(1)\}, \\ \{03,12,21,30,(1)\},\{00,12,23,31,(2)\},\{01,13,22,30,(2)\}, \\ \{02,10,21,33,(2)\},\{03,11,20,32,(2)\},\{00,13,21,32,(3)\}, \\ \{01,12,20,33,(3)\},\{02,11,23,30,(3)\},\{03,10,22,31,(3)\}, \\ \{00,10,20,30,(0)\},\{01,11,21,31,(0)\},\{02,12,22,32,(0)\}, \\ \{03,13,23,33,(0)\},\{00,01,02,03,(\infty)\},\{10,11,12,13,(\infty)\}, \\ \{20,21,22,23,(\infty)\},\{30,31,32,33,(\infty)\},\{(0),(1),(2),(3),(\infty)\} \end{matrix} \right\}$$

4. mertebeden projektif düzlemden elde edilen projektif patika grafının köşe ve kenar kümeleri aşağıdaki gibidir:

$$V(\mathbb{G}) = \{00, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33, (0), (1), (2), (3), (\infty)\}$$

$$E(\mathbb{G}) = \left\{ \begin{array}{c} \{00, 11\}, \{11, 22\}, \{22, 33\}, \{33, (1)\}, \{01, 10\}, \\ \{10, 23\}, \{23, 32\}, \{32, (1)\}, \{02, 13\}, \{13, 20\}, \\ \{20, 31\}, \{31, (1)\}, \{03, 12\}, \{12, 21\}, \{21, 30\}, \\ \{30, (1)\}, \{00, 12\}, \{12, 23\}, \{23, 31\}, \{31, (2)\}, \\ \{01, 13\}, \{13, 22\}, \{22, 30\}, \{30, (2)\}, \{02, 10\}, \\ \{10, 21\}, \{21, 33\}, \{33, (2)\}, \{03, 11\}, \{11, 20\}, \\ \{20, 32\}, \{32, (2)\}, \{00, 13\}, \{13, 21\}, \{21, 32\}, \\ \{32, (3)\}, \{01, 12\}, \{12, 20\}, \{20, 33\}, \{33, (3)\}, \\ \{02, 11\}, \{11, 23\}, \{23, 30\}, \{30, (3)\}, \{03, 10\}, \\ \{10, 22\}, \{22, 31\}, \{31, (3)\}, \{00, 10\}, \{10, 20\}, \\ \{20,30\}, \{30, (0)\}, \{01,11\}, \{11,21\}, \{21,31\}, \\ \{31, (0)\}, \{02, 12\}, \{12, 22\}, \{22, 32\}, \{32, (0)\}, \\ \{03, 13\}, \{13, 23\}, \{23, 33\}, \{33, (0)\}, \{00, 01\}, \\ \{01, 02\}, \{02, 03\}, \{03, (\infty)\}, \{10, 11\}, \{11, 12\}, \\ \{12, 13\}, \{13, (\infty)\}, \{20, 21\}, \{21, 22\}, \{22, 23\}, \\ \{23, (\infty)\}, \{30,31\}, \{31,32\}, \{32,33\}, \{33, (\infty)\}, \\ \{(0), (1)\}, \{(1), (2)\}, \{(2), (3)\}, \{(3), (\infty)\} \end{array} \right\}$$

Burada $|E(\mathbb{G})| = 84$ dür. Şimdi her bir köşenin köşe derecesi belirlenirse:

$$d(00) = 5, d(01) = 6, d(02) = 6, d(03) = 6, d(10) = 9, d(11) = 10,$$
$$d(12) = 10, d(13) = 10, d(20) = 9, d(21) = 10, d(22) = 10, d(23) = 10,$$
$$d(30) = 9, d(31) = 10, d(32) = 10, d(33) = 10, d\big((0)\big) = 5, d\big((1)\big) = 6,$$
$$d\big((2)\big) = 6, d\big((3)\big) = 6, d\big((\infty)\big) = 5$$

bulunur. Sonuç olarak derece dizisi $D.S. = \{5^{(3)}, 6^{(6)}, 9^{(3)}, 10^{(9)}\}$ olarak elde edilecektir.

4.2.4. Örnek. 5. mertebeden projektif düzlemin noktalarının ve doğrularının kümesi aşağıdaki gibidir:

$$P = \{00, 01, 02, 03, 04, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23, 24, 30,$$
$$31, 32, 33, 34, 40, 41, 42, 43, 44, (0), (1), (2), (3), (4), (\infty)\}$$

$$L = \left\{ \begin{array}{c} \{00,11,22,33,44,(1)\},\{01,12,23,34,40,(1)\},\{02,13,24,30,41,(1)\}, \\ \{03,14,20,31,42,(1)\},\{04,10,21,32,43,(1)\},\{00,12,24,31,43,(2)\}, \\ \{01,13,20,32,44,(2)\},\{02,14,21,33,40,(2)\},\{03,10,22,34,41,(2)\}, \\ \{04,11,23,30,42,(2)\},\{00,13,21,34,42,(3)\},\{01,14,22,30,43,(3)\}, \\ \{02,10,23,31,44,(3)\},\{03,11,24,32,40,(3)\},\{04,12,20,33,41,(3)\}, \\ \{00,14,23,32,41,(4)\},\{01,10,24,33,42,(4)\},\{02,11,20,34,43,(4)\}, \\ \{03,12,21,30,44,(4)\},\{04,13,22,31,40,(4)\},\{00,10,20,30,40,(0)\}, \\ \{01,11,21,31,41,(0)\},\{02,12,22,32,42,(0)\},\{03,13,23,33,43,(0)\}, \\ \{04,14,24,34,44,(0)\},\{00,01,02,03,04,(\infty)\},\{10,11,12,13,14,(\infty)\}, \\ \{20,21,22,23,24,(\infty)\},\{30,31,32,33,34,(\infty)\},\{40,41,42,43,44,(\infty)\}, \\ \{(0),(1),(2),(3),(4),(\infty)\} \end{array} \right\}$$

5. mertebeden projektif düzlemden elde edilen projektif patika grafının köşe ve kenar kümeleri aşağıdaki gibidir:

$$V(\mathbb{G}) = \left\{ \begin{array}{l} 00,01,02,03,04,10,11,12,13,14,20,21,22,23,24,30, \\ 31,32,33,34,40,41,42,43,44,(0),(1),(2),(3),(4),(\infty) \end{array} \right\}$$

$$E(\mathbb{G}) = \left\{ \begin{array}{c} \{00,11\},\{11,22\},\{22,33\},\{33,44\},\{44,(1)\},\{01,12\},\{12,23\},\{23,34\},\{34,40\},\{40,(1)\}, \\ \{02,13\},\{13,24\},\{24,30\},\{30,41\},\{41,(1)\},\{03,14\},\{14,20\},\{20,31\},\{31,42\},\{42,(1)\}, \\ \{04,10\},\{10,21\},\{21,32\},\{32,43\},\{43,(1)\},\{00,12\},\{12,24\},\{24,31\},\{31,43\},\{43,(2)\}, \\ \{01,13\},\{13,20\},\{20,32\},\{32,44\},\{44,(2)\},\{02,14\},\{14,21\},\{21,33\},\{33,40\},\{40,(2)\}, \\ \{03,10\},\{10,22\},\{22,34\},\{34,41\},\{41,(2)\},\{04,11\},\{11,23\},\{23,30\},\{30,42\},\{42,(2)\}, \\ \{00,13\},\{13,21\},\{21,34\},\{34,42\},\{42,(3)\},\{01,14\},\{14,22\},\{22,30\},\{30,43\},\{43,(3)\}, \\ \{02,10\},\{10,23\},\{23,31\},\{31,44\},\{44,(3)\},\{03,11\},\{11,24\},\{24,32\},\{32,40\},\{40,(3)\}, \\ \{04,12\},\{12,20\},\{20,33\},\{33,41\},\{41,(3)\},\{00,14\},\{14,23\},\{23,32\},\{32,41\},\{41,(4)\}, \\ \{01,10\},\{10,24\},\{24,33\},\{33,42\},\{42,(4)\},\{02,11\},\{11,20\},\{20,34\},\{34,43\},\{43,(4)\}, \\ \{03,12\},\{12,21\},\{21,30\},\{30,44\},\{44,(4)\},\{04,13\},\{13,22\},\{22,31\},\{31,40\},\{40,(4)\}, \\ \{00,10\},\{10,20\},\{20,30\},\{30,40\},\{40,(0)\},\{01,11\},\{11,21\},\{21,31\},\{31,41\},\{41,(0)\}, \\ \{02,12\},\{12,22\},\{22,32\},\{32,42\},\{42,(0)\},\{03,13\},\{13,23\},\{23,33\},\{33,43\},\{43,(0)\}, \\ \{04,14\},\{14,24\},\{24,34\},\{34,44\},\{44,(0)\},\{00,01\},\{01,02\},\{02,03\},\{03,04\},\{04,(\infty)\}, \\ \{10,11\},\{11,12\},\{12,13\},\{13,14\},\{14,(\infty)\},\{20,21\},\{21,22\},\{22,23\},\{23,24\},\{24,(\infty)\}, \\ \{30,31\},\{31,32\},\{32,33\},\{33,34\},\{34,(\infty)\},\{40,41\},\{41,42\},\{42,43\},\{43,44\},\{44,(\infty)\}, \\ \{(0),(1)\},\{(1),(2)\},\{(2),(3)\},\{(3),(4)\},\{(4),(\infty)\} \end{array} \right\}$$

Burada $|E(\mathbb{G})| = 155$ dir. Şimdi her bir köşenin köşe derecesi belirlenirse:

$$d(00) = 6, d(01) = 7, d(02) = 7, d(03) = 7, d(04) = 7, d(10) = 11, d(11) = 12,$$
$$d(12) = 12, d(13) = 12, d(14) = 12, d(20) = 11, d(21) = 12, d(22) = 12,$$
$$d(23) = 12, d(24) = 12, d(30) = 11, d(31) = 12, d(32) = 12, d(33) = 12,$$
$$d(34) = 12, d(40) = 11, d(41) = 12, d(42) = 12, d(43) = 12, d(44) = 12,$$

$$d\big((0)\big) = 6, d\big((1)\big) = 7, d\big((2)\big) = 7, d\big((3)\big) = 7, d(4) = 7, d\big((\infty)\big) = 6$$

elde edilir. Sonuç olarak derece dizisi $D.S. = \{6^{(3)}, 7^{(8)}, 11^{(4)}, 12^{(16)}\}$ olarak elde edilir. Şimdi, önce k. mertebeden projektif düzlemden elde edilen projektif patika grafının köşe ve kenar parçalanışlarının genel formülleri verilip ardından bu k. mertebeden grafların karakterizasyonu için iki sonuç verilecektir.

Çizelge 4.3. Projektif patika grafının köşe parçalanışı

Köşe Parçalanışı	$\boldsymbol{d_{\mathbb{G}}(u)}$	$\lvert\boldsymbol{d_{\mathbb{G}}(u)}\rvert$
1.	k+1	3
2.	k+2	2(k-1)
3.	2k+1	k-1
4.	2(k+1)	$(\mathrm{k}-1)^2$

Çizelge 4.4. Projektif patika grafının kenar parçalanışı

Kenar Parçalanışı	$\big(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v)\big)$	$\big\lvert\big(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v)\big)\big\rvert$
1.	(k+1, k+2)	4
2.	(k+1, 2k+1)	2
3.	(k+1, 2k+2)	3(k-1)
4.	(k+2, k+2)	2(k-2)
5.	(k+2, 2k+1)	2(k-1)
6.	(k+2, 2k+2)	$2(\mathrm{k}-1)^2$
7.	(2k+1, 2k+1)	k-2
8.	(2k+1, 2k+2)	(k-1)(2k-3)
9.	(2k+2, 2k+2)	(k-1)(k-1)(k-2)

4.2.5. Sonuç. k. mertebeden projektif patika grafları, $k^2 + k + 1$ köşe ve $(k-1)(k^2 + k + 1)$ kenardan oluşur.

4.2.6. Sonuç. k. mertebeden projektif patika graflarının köşe derece dizilerinin genel formülleri aşağıdaki biçimdedir:

$$D.S. = \{(2k+2)^{(k-1)^2}, (2k+1)^{(k-1)}, (k+2)^{2(k-1)}, (k+1)^3\}$$

Şimdi, projektif patika grafları için köşe dereceleri cinsinden sık kullanılan bazı topolojik indekslerin genel formülleri verilecektir.

4.2.7. Teorem. $\mathbb{G}$, k. mertebeden projektif patika grafı olsun. Bu taktirde $t-$ indirgenmiş birinci, ikinci, üçüncü toplamsal ve birinci çarpımsal Zagreb indeksleri ve Narumi-Katayama indeksi; bu graflar için mertebeye bağlı olarak aşağıdaki gibi genellenebilir.

k. mertebeden projektif patika grafının $t-$ indirgenmiş birinci Zagreb indeksi:

$$R^t M_1(\mathbb{G}_P) = \sum_{u \in V(\mathbb{G}_P)} \left(d_{\mathbb{G}_P}(u) - t\right)^2$$

$$= 3(k+1-t)^2 + 2(k-1)(k+2-t)^2 + (k-1)(2k+1-t)^2 + (k-1)^2$$

$$(2k+2-t)^2$$

$$= 4k^4 - 4k^3t + 6k^3 + k^2t^2 - 4k^2t + k^2 + kt^2 - 4kt + 3k + t^2 - 2$$

elde edilir.

k. mertebeden projektif patika grafının $t-$ indirgenmiş ikinci Zagreb indeksi:

$$R^t M_2(\mathbb{G}_P) = \sum_{UV \in E(\mathbb{G}_P)} (d_{\mathbb{G}_P}(u) - t)(d_{\mathbb{G}_P}(v) - t)$$

$$= 4(k+1-t)(k+2-t) + 2(k+1-t)(2k+1-t) + 3(k-1)(k+1-t)$$

$$(2k+2-t) + 2(k-2)(k+2-t)^2 + 2(k-1)(k+2-t)(2k+1-t) +$$

$$2(k-1)^2(k+2-t)(2k+2-t) + (k-2)(2k+1-t)^2 + (k-1)$$

$$(2k-3)(2k+1-t)(2k+2-t) + k(k-1)(k-2)(2k+2-t)^2$$

$$= 4k^5 - 4k^4t + 8k^4 + k^3t^2 - 6k^3t + k^2t^2 - k^2t - 2k^2 + kt^2 - 3kt + 3k + 2t - 4$$

yukarıdaki gibi elde edilmektedir.

k. mertebeden projektif patika grafının $t-$ indirgenmiş üçüncü Zagreb indeksi:

$$R^t M_3(\mathbb{G}_P) = \sum_{u \in V(\mathbb{G}_P)} \left(d_{\mathbb{G}_P}(u) - t\right)^3$$

$$= 3(k+1-t)^3 + 2(k-1)(k+2-t)^3 + (k-1)(2k+1-t)^3 + (k-1)^2$$

$$(2k+2-t)^3$$

$$= 8k^5 - 12k^4t + 18k^4 + 6k^3t^2 - 18k^3t + k^3 - k^2t^3 + 6k^2t^2 - 3k^2t - k^2$$
$$-kt^3 + 6kt^2 - 9kt + 4k - t^3 + 6t - 6$$

sonucu elde edilir.

k. mertebeden projektif patika grafının $t-$ indirgenmiş birinci çarpımsal Zagreb indeksi:

$$R^t\prod\nolimits_1(\mathbb{G}_P) \prod_{u\in V(\mathbb{G}_P)} d_{\mathbb{G}_P}(u) - t)^2$$
$$= (k+1-t)^6(k+2-t)^{4(k-1)}(2k+1-t)^{2(k-1)}(2k+2-t)^{2(k-2)^2}$$

şeklinde genellenir.
k. mertebeden projektif patika grafının $t-$ indirgenmiş Narumi-Katayama indeksi:

$$R^t NK(\mathbb{G}_P) = \prod_{u\in V(\mathbb{G}_P)} (d_{\mathbb{G}_P}(u) - t)$$
$$= (k+1-t)^3(k+2-t)^{2(k-1)}(2k+1-t)^{(k-1)}(2k+2-t)^{(k-1)^2}$$

sonucu elde edilir.

Son olarak; $k = 2, 3, 4, 5.$ mertebeden projektif düzlemlerden elde edilen projektif patika graflarıyla ilgili köşe-komşuluk matrisleri ve bu grafların enerjileri hesaplanacaktır.

4.2.8. Örnek. 2. mertebeden projektif patika grafı için komşuluk matrisi aşağıda verilmiştir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir:

$$P(x) = -(x-1)(x+1)^2(x+2)(x^3 - 3x^2 - 6x + 4).$$

Böylece 2. mertebeden projektif patika grafının spektrumu

$$\left\{ 1 + \frac{3}{\sqrt[3]{2+i\sqrt{23}}} + \sqrt[3]{2+i\sqrt{23}}, -2, 1 - \frac{3(1+i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{2+i\sqrt{23}}} - \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{2+i\sqrt{23}}, (-1)^2, 1, \right.$$
$$\left. 1 - \frac{3(1-i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{2+i\sqrt{23}}} - \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{2+i\sqrt{23}} \right\}$$

$$\{-2, -1.7466, (-1)^2, 0.54510, 1, 4.2015\}$$

olarak elde edilir ve bu grafın enerjisi $E_{\mathbb{G}} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 11.4932$ dir.

4.2.9. Örnek. 3. mertebeden projektif patika grafı için komşuluk matrisi aşağıda verilmiştir:

$$\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

Bu matrisin karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir:

$$P(x) = -x^3(x^2 - 2x - 4)(x^2 + 5x + 5)(x^6 - 3x^5 - 21x^4 - 12x^3 + 36x^2 + 38x + 8).$$

Böylece 3. mertebeden projektif patika grafının spektrumu,

$$\left\{ 0^3, 3.23606797749979 \ldots, -1.23606797749979 \ldots, -1.38196601125011 \ldots, \right.$$
$$-3.61803398874989 \ldots, -2.15344929035874 \ldots, -1.53128092406942 \ldots,$$
$$-0.871412616631792 \ldots, -0.300125528607059 \ldots, 1.44741620568415 \ldots,$$
$$\left. 6.40885215398286 \right\}$$

olarak elde edilir ve bu grafın enerjisi $E_{\mathbb{G}} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cong 22.184679$ dir.

4.2.10. Örnek. 4. mertebeden projektif patika grafı için komşuluk matrisi aşağıda verilmiştir:

$$\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

Bu matrisin karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir:

$$P(x) = -x(x^2 - 5x - 3)(x^2 + x - 1)^4(x^2 + 3x + 1)(x^8 - 2x^7 - 57x^6 - 38x^5 + 336x^4 + 286x^3 - 423x^2 - 486x - 121)$$

Böylece 4. mertebeden projektif patika grafının spektrumu,

$$\left\{\begin{array}{c} 0, -0.381966011250105\ldots, -2.61803398874989\ldots, (0.618033988749895\ldots)^4, \\ (1.61803398874989\ldots)^4, -0.54138126514911\ldots, 5.54138126514911\ldots, \\ -5.47996662474189\ldots, -2.38071538495072\ldots, -1.2440938967276\ldots, \\ -0.610478339106327\ldots, -0.450073760748002\ldots, 1.57439735054296\ldots, \\ 2.00787448224546\ldots, 8.58305617348611\ldots \end{array}\right\}$$

olarak elde edilir ve bu grafın enerjisi $E_{\mathbb{G}} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cong 40.357675$ dir.

4.2.11. Örnek. 5. mertebeden projektif patika grafı için komşuluk matrisi aşağıda verilmiştir:

$$\begin{bmatrix}
0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0
\end{bmatrix}$$

Bu matrisin karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir:

$$P(x) = -(x-1)^5x^2(x+1)^5(x^2-3)(x^{11}-111x^9-310x^8+2260x^7+$$
$$13371x^6+26194x^5+20111x^4+1555x^3-3039x^2+477x-21).$$

Böylece 5. mertebeden projektif patika grafının spektrumu,

$$\begin{Bmatrix}
-7.44356, -4.69611, -2.54576, -1.76482, -1.72531, -1.72182, -1.70787, -1.70017,\\
-1.56748,\ (-1)^5, -0.782614, -0.486418, 0.0690535, 0.0920858, 0.141744, 0.155832,\\
0.322221, 0.581955,\ (1)^5, 2.27951, 3.90785, 7.86463, 10.727
\end{Bmatrix}$$

olarak elde edilir ve bu grafın enerjisi $E_{\mathbb{G}} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cong 62.2838133$'dir

4.3. Grafların Köşe-Kenar Parçalanış ve $1-$ İndirgenmiş İndeks Tabloları

Bu bölümde tezde kullanılan 13 farklı graf çeşidine uygulanan sonuçlar tablolar halinde verilmiştir. İlk olarak bu graf çeşitlerinin köşe dereceleri hesaplanmış daha sonra da hesaplanan bu sonuçlar genelleştirilerek tablolar halinde köşe-kenar parçalanışları olarak verilmiştir. Elde edilen köşe-kenar parçalanışları sayesinde tezin 2.3. alt bölümünde bahsedilen 12 farklı graf çeşidine: $RM1(\mathbb{G})$, $RM_2(\mathbb{G})$, $RM_3(\mathbb{G})$, $RH(\mathbb{G})$, $RAlb(\mathbb{G})$, $RSCI(\mathbb{G})$, $R\sigma(\mathbb{G})$, $RISI(\mathbb{G})$, $RABC(\mathbb{G})$, $R\pi_1(\mathbb{G})$, $R\pi_2(\mathbb{G})$, $RNK(\mathbb{G})$ topolojik indeksleri uygulanmış olup elde edilen sonuçlar ise önce $n = 1$ için ele alınıp daha sonra da en genel haliyle aşağıda tablolar ile verilmiştir. Bu tablolarda sadece $1-$ indirgenmiş topolojik indekslerin sonuçlarına yer verilmiştir. Bir sonraki bölümde de tezde kullanılan graflara $t-$ indirgenmiş topolojik indeksler uygulanıp elde edilen sonuçlar verilecektir.

P_n patika grafı için elde edilen köşe-kenar parçalanış tablosu aşağıdaki gibidir. Köşe parçalanışı $n \geq 2$, kenar parçalanışı $n \geq 3$ için geçerlidir.

Çizelge 4.5. P_n grafının köşe ve kenar parçalanışları

$P_n\ Grafı$			
$Köşe\ Parçalanışı$		$Kenar\ Parçalanışı$	
$d_{\mathbb{G}}(u)$	$\lvert d_{\mathbb{G}}(u)\rvert$	$(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))$	$\lvert(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))\rvert$
1	2	(1,2)	2
2	$n-2$	(2,2)	$n-3$

Çizelge 4.6. $\boldsymbol{P_n}$ grafının $\boldsymbol{RM_1(P_n)}$, $\boldsymbol{RM_2(P_n)}$, $\boldsymbol{RM_3(P_n)}$, $\boldsymbol{RH(P_n)}$, $\boldsymbol{RAlb(P_n)}$ ve $\boldsymbol{RSCI(P_n)}$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$\boldsymbol{RM_1(P_n)}$	$\boldsymbol{RM_2(P_n)}$	$\boldsymbol{RM_3(P_n)}$	$\boldsymbol{RH(P_n)}$	$\boldsymbol{RAlb(P_n)}$	$\boldsymbol{RSCI(P_n)}$
$\boldsymbol{P_1}$	1	Ø	-1	Ø	Ø	Ø
$\boldsymbol{P_2}$	0	0	0	$Tanımsız$	0	$Tanımsız$
$\boldsymbol{P_3}$	1	0	1	4	2	2
$\boldsymbol{P_4}$	2	1	2	5	2	$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\boldsymbol{P_5}$	3	2	3	6	2	$2+\sqrt{2}$
$\boldsymbol{P_6}$	4	3	4	7	2	$2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\boldsymbol{P_7}$	5	4	5	8	2	$2+2\sqrt{2}$
$\boldsymbol{P_8}$	6	5	6	9	2	$2+\frac{5\sqrt{2}}{2}$
$\boldsymbol{P_9}$	7	6	7	10	2	$2+3\sqrt{2}$
$\boldsymbol{P_{10}}$	8	7	8	11	2	$2+\frac{7\sqrt{2}}{2}$
$\boldsymbol{P_{11}}$	9	8	9	12	2	$2+\sqrt{4}$
$\boldsymbol{P_{12}}$	10	9	10	13	2	$2+\frac{9\sqrt{2}}{2}$
$\boldsymbol{P_{13}}$	11	10	11	14	2	$2+\sqrt{5}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\boldsymbol{P_n}$	$n-2$; $n>1$	$n-3$; $n>2$	$n-2$	$n+1$; $n>2$	2 ; $n>2$	$2+\frac{(n-3)\sqrt{2}}{2}$; n > 2

Aşağıdaki tabloda P_n grafı için tüm indeksler hesaplanmıştır fakat $RABC(P_n)$ indeksi 1 indirgendiğinde tanımsız hale geldiğinden tabloda yer verilmemiştir.

Çizelge 4.7. $\boldsymbol{P_n}$ grafının $\boldsymbol{R\sigma}(\mathbb{G})$, $\boldsymbol{RISI}(\mathbb{G})$, $\boldsymbol{R\pi_1}(\mathbb{G})$, $\boldsymbol{R\pi_2}(\mathbb{G})$, $\boldsymbol{RNK}(\mathbb{G})$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$\boldsymbol{R\sigma(P_n)}$	$\boldsymbol{RISI(P_n)}$	$\boldsymbol{R\pi_1(P_n)}$	$\boldsymbol{R\pi_2(P_n)}$	$\boldsymbol{RNK(P_n)}$
$\boldsymbol{P_1}$	Ø	Ø	1	Ø	-1
$\boldsymbol{P_2}$	0	$Tanımsız$	0	0	0
$\boldsymbol{P_3}$	2	0	0	0	0
$\boldsymbol{P_4}$	2	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\boldsymbol{P_5}$	2	$\frac{2}{2}$	0	0	0
$\boldsymbol{P_6}$	2	$\frac{3}{2}$	0	0	0
$\boldsymbol{P_7}$	2	$\frac{4}{2}$	0	0	0
$\boldsymbol{P_8}$	2	$\frac{5}{2}$	0	0	0
$\boldsymbol{P_9}$	2	$\frac{6}{2}$	0	0	0
$\boldsymbol{P_{10}}$	2	$\frac{7}{2}$	0	0	0
$\boldsymbol{P_{11}}$	2	$\frac{8}{2}$	0	0	0
$\boldsymbol{P_{12}}$	2	$\frac{9}{2}$	0	0	0
$\boldsymbol{P_{13}}$	2	$\frac{10}{2}$	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{P_n}$	2; $n > 2$	$\frac{n-3}{2}$; $n > 2$	0; $n > 1$	0; $n > 1$	0; $n > 1$

C_n devir grafı için aşağıda verilen iki tablo $n \geq 3$ için sağlanmaktadır.

Çizelge 4.8. C_n grafının köşe ve kenar parçalanışları

$C_n\ Grafı$			
$Köşe\ Parçalanışı$		$Kenar\ Parçalanışı$	
$d_{\mathbb{G}}(u)$	$\lvert d_{\mathbb{G}}(u)\rvert$	$(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))$	$\lvert(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))\rvert$
2	n	(2,2)	n

Çizelge 4.9. $\boldsymbol{C_n}$ grafının $\boldsymbol{RM_1(C_n)}$, $\boldsymbol{RM_2(C_n)}$, $\boldsymbol{RM_3(C_n)}$, $\boldsymbol{RH(C_n)}$, $\boldsymbol{RAlb(C_n)}$, $\boldsymbol{RSCI(C_n)}$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$\boldsymbol{RM_1(C_n)}$	$\boldsymbol{RM_2(C_n)}$	$\boldsymbol{RM_3(C_n)}$	$\boldsymbol{RH(C_n)}$	$\boldsymbol{RAlb(C_n)}$	$\boldsymbol{RSCI(C_n)}$
$\boldsymbol{C_3}$	3	3	3	3	0	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\boldsymbol{C_4}$	4	4	4	4	0	$\frac{4\sqrt{2}}{2}$
$\boldsymbol{C_5}$	5	5	5	5	0	$\frac{5\sqrt{2}}{2}$
$\boldsymbol{C_6}$	6	6	6	6	0	$\frac{6\sqrt{2}}{2}$
$\boldsymbol{C_7}$	7	7	7	7	0	$\frac{7\sqrt{2}}{2}$
$\boldsymbol{C_8}$	8	8	8	8	0	$\frac{8\sqrt{2}}{2}$
$\boldsymbol{C_9}$	9	9	9	9	0	$\frac{9\sqrt{2}}{2}$
$\boldsymbol{C_{10}}$	10	10	10	10	0	$\frac{10\sqrt{2}}{2}$
$\boldsymbol{C_{11}}$	11	11	11	11	0	$\frac{11\sqrt{2}}{2}$
$\boldsymbol{C_{12}}$	12	12	12	12	0	$\frac{12\sqrt{2}}{2}$
$\boldsymbol{C_{13}}$	13	13	13	13	0	$\frac{13\sqrt{2}}{2}$
$\boldsymbol{C_{14}}$	14	14	14	14	0	$\frac{14\sqrt{2}}{2}$
$\boldsymbol{C_{15}}$	15	15	15	15	0	$\frac{15\sqrt{2}}{2}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\boldsymbol{C_n}$	n	n	n	n	0	$\frac{n\sqrt{2}}{2}$

Çizelge 4.10. C_n grafının $R\sigma(C_n)$, $RISI(C_n)$, $RABC(C_n)$, $R\pi_1(C_n)$, $R\pi_2(C_n)$, $RNK(C_n)$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$R\sigma(C_n)$	$RISI(C_n)$	$RABC(C_n)$	$R\pi_1(C_n)$	$R\pi_2(C_n)$	$RNK(C_n)$
C_3	0	$\frac{3}{2}$	0	1	1	1
C_4	0	$\frac{4}{2}$	0	1	1	1
C_5	0	$\frac{5}{2}$	0	1	1	1
C_6	0	$\frac{6}{2}$	0	1	1	1
C_7	0	$\frac{7}{2}$	0	1	1	1
C_8	0	$\frac{8}{2}$	0	1	1	1
C_9	0	$\frac{9}{2}$	0	1	1	1
C_{10}	0	$\frac{10}{2}$	0	1	1	1
C_{11}	0	$\frac{11}{2}$	0	1	1	1
C_{12}	0	$\frac{12}{2}$	0	1	1	1
C_{13}	0	$\frac{13}{2}$	0	1	1	1
C_{14}	0	$\frac{14}{2}$	0	1	1	1
C_{15}	0	$\frac{15}{2}$	0	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C_n	0	$\frac{n}{2}$	0	1	1	1

S_n yıldız grafı için elde edilen köşe-kenar parçalanış tablosu aşağıdaki gibidir. Bu tablodaki değerler $n \geq 2$ için geçerlidir.

Çizelge 4.11. S_n grafının köşe ve kenar parçalanışları

$S_n\ Grafı$			
$Köşe\ Parçalanışı\ n \geq 2$		$Kenar\ Parçalanışı\ n \geq 3$	
$d_{\mathbb{G}}(u)$	$\lvert d_{\mathbb{G}}(u)\rvert$	$(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))$	$\lvert((d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))\rvert$
1	$n-1$	$(1, n-1)$	$n-1$
$n-1$	1		

Aşağıdaki tabloda S_n yıldız grafı için tüm indeksler hesaplanmıştır fakat $RABC(S_n)$ indeksi 1 indirgendiğinde $n = 1$ için Ø iken $n \geq 2$ için tanımsız hale geldiğinden tabloda yer verilmemiştir.

Çizelge 4.12. S_n grafının $RM_1(S_n)$, $RM_2(S_n)$, $RM_3(S_n)$, $RH(S_n)$, $RAlb(S_n)$, $RSCI(S_n)$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$RM_1(S_n)$	$RM_2(S_n)$	$RM_3(S_n)$	$RH(S_n)$	$RAlb(S_n)$	$RSCI(S_n)$
S_1	$(-1)^2$	Ø	$(-1)^3$	Ø	Ø	Ø
S_2	0^2	0	0^3	$Tanımsız$	1·0	$Tanımsız$
S_3	1^2	0	1^3	$\frac{2.2}{1}$	2·1	$\frac{2}{\sqrt{1}}$
S_4	2^2	0	2^3	$\frac{2.3}{2}$	3·2	$\frac{3}{\sqrt{2}}$
S_5	3^2	0	3^3	$\frac{2.4}{3}$	4·3	$\frac{4}{\sqrt{3}}$
S_6	4^2	0	4^3	$\frac{2.5}{4}$	5·4	$\frac{5}{\sqrt{4}}$
S_7	5^2	0	5^3	$\frac{2.6}{5}$	6·5	$\frac{6}{\sqrt{5}}$
S_8	6^2	0	6^3	$\frac{2.7}{6}$	7·6	$\frac{7}{\sqrt{6}}$
S_9	7^2	0	7^3	$\frac{2.8}{7}$	8·7	$\frac{8}{\sqrt{7}}$
S_{10}	8^2	0	8^3	$\frac{2.9}{8}$	9·8	$\frac{9}{\sqrt{8}}$
S_{11}	9^2	0	9^3	$\frac{2.10}{9}$	10·9	$\frac{10}{\sqrt{9}}$
S_{12}	10^2	0	10^3	$\frac{2.11}{10}$	11·10	$\frac{11}{\sqrt{10}}$
S_{13}	11^2	0	11^3	$\frac{2.12}{11}$	12·11	$\frac{12}{\sqrt{11}}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
S_n	$(n-2)^2$; $n \geq 1$	0; $n \geq 2$	$(n-2)^3$; $n \geq 1$	$\frac{2(n-1)}{n-2}$; $n \geq 3$	$(n-1)(n-2)$; $n \geq 2$	$\frac{n-1}{\sqrt{n-2}}$; $n \geq 3$

Çizelge 4.13. S_n grafının $R\sigma(S_n)$, $RISI(S_n)$, $R\pi_1(S_n)$, $R\pi_2(S_n)$, $RNK(S_n)$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$R\sigma(S_n)$	$RISI(S_n)$	$R\pi_1(S_n)$	$R\pi_2(S_n)$	$RNK(S_n)$
S_1	Ø	0	1	Ø	-1
S_2	0	0	0	0^1	0.0^1
S_3	$2\cdot 1$	0	0	0^2	1.0^2
S_4	$3\cdot 4$	0	0	0^3	2.0^3
S_5	$4\cdot 9$	0	0	0^4	3.0^4
S_6	$5\cdot 16$	0	0	0^5	4.0^5
S_7	$6\cdot 25$	0	0	0^6	5.0^6
S_8	$7\cdot 36$	0	0	0^7	6.0^7
S_9	$8\cdot 49$	0	0	0^8	7.0^8
S_{10}	$9\cdot 64$	0	0	0^9	8.0^9
S_{11}	$10\cdot 81$	0	0	0^{10}	9.0^{10}
S_{12}	$11\cdot 100$	0	0	0^{11}	10.0^{11}
S_{13}	$12\cdot 121$	0	0	0^{12}	11.0^{12}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
S_n	$(n-1)(2-n)^2;$ $n\geq 2$	0	0; $n\geq 2$	$0^{n-1};$ $n\geq 2$	$(n-2)\cdot 0^{(n-1)};$ $n\geq 2$

K_n tam grafı için elde edilen köşe-kenar parçalanış tablosu aşağıdaki gibidir. Köşe parçalanışı $n\geq 1$ iken kenar parçalanışı ise $n\geq 2$ için geçerlidir.

Çizelge 4. 14. K_n grafının köşe ve kenar parçalanışları

$K_n\ Grafı$			
$Köşe\ Parçalanışı$		$Kenar\ Parçalanışı$	
$d_{\mathbb{G}}(u)$	$\lvert d_{\mathbb{G}}(u)\rvert$	$(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))$	$\lvert((d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))\rvert$
$n-1$	n	$(n-1, n-1)$	$\binom{n}{2}$

Çizelge 4.15. K_n grafının $RM_1(K_n)$, $RM_2(K_n)$, $RM_3(K_n)$, $RH(K_n)$, $RAlb(K_n)$ ve $RSCI(K_n)$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$RM_1(K_n)$	$RM_2(K_n)$	$RM_3(K_n)$	$RH(K_n)$	$RAlb(K_n)$	$RSCI(K_n)$
K_1	1	Ø	-1	Ø	0	Ø
K_2	0	0	0	$Tanımsız$	0	$Tanımsız$
K_3	3	3	3	3	0	$\frac{3}{\sqrt{2}}$
K_4	16	24	32	3	0	3
K_5	45	90	135	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{10}{\sqrt{6}}$
K_6	96	240	384	$\frac{15}{4}$	0	5
K_7	175	525	875	$\frac{21}{5}$	0	$\frac{21}{\sqrt{10}}$
K_8	288	1008	1728	$\frac{28}{6}$	0	$\frac{28}{2\sqrt{3}}$
K_9	441	1764	3087	$\frac{36}{7}$	0	$\frac{36}{\sqrt{14}}$
K_{10}	640	2880	5120	$\frac{45}{8}$	0	$\frac{45}{\sqrt{4}}$
K_{11}	891	4455	8019	$\frac{55}{9}$	0	$\frac{55}{\sqrt{18}}$
K_{12}	1200	6600	12000	$\frac{66}{10}$	0	$\frac{66}{\sqrt{20}}$
K_{13}	1573	7986	17303	$\frac{78}{11}$	0	$\frac{78}{\sqrt{22}}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
K_n	$n(n-2)^2$; $n \geq 2$	$\binom{n}{2}(n-2)^2$; $n \geq 1$	$n(n-2)^3$; $n \geq 1$	$\frac{\binom{n}{2}}{n-2}$; $n \geq 3$	0; $n \geq 2$	$\frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{2n-4}}$; $n \geq 3$

Çizelge 4.16. K_n grafının $R\sigma(K_n)$, $RISI(K_n)$, $RABC(K_n)$, $R\pi_1(K_n)$, $R\pi_2(K_n)$, $RNK(K_n)$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$R\sigma(K_n)$	$RISI(K_n)$	$RABC(K_n)$	$R\pi_1(K_n)$	$R\pi_2(K_n)$	$RNK(K_n)$
K_1	0	Ø	$Tanımsız$	$(-1)^{2.1}$	Ø	$(-1)^1$
K_2	0	$Tanımsız$	$Tanımsız$	$0^{2.2}$	0	0^2
K_3	0	$\binom{3}{2}\frac{1}{2}$	$\binom{3}{2}\frac{\sqrt{0}}{1}$	$1^{2.3}$	$(1)^{3.2}$	1^3
K_4	0	$\binom{4}{2}\frac{2}{2}$	$\binom{4}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2^{2.4}$	$(2)^{4.3}$	2^4
K_5	0	$\binom{5}{2}\frac{3}{2}$	$\binom{5}{2}\frac{\sqrt{4}}{3}$	$3^{2.5}$	$(3)^{5.4}$	3^5
K_6	0	$\binom{6}{2}\frac{4}{2}$	$\binom{6}{2}\frac{\sqrt{6}}{4}$	$4^{2.6}$	$(4)^{6.5}$	4^6
K_7	0	$\binom{7}{2}\frac{5}{2}$	$\binom{7}{2}\frac{\sqrt{8}}{5}$	$5^{2.7}$	$(5)^{7.6}$	5^7
K_8	0	$\binom{8}{2}\frac{6}{2}$	$\binom{8}{2}\frac{\sqrt{10}}{6}$	$6^{2.8}$	$(6)^{8.7}$	6^8
K_9	0	$\binom{9}{2}\frac{7}{2}$	$\binom{9}{2}\frac{\sqrt{12}}{7}$	$7^{2.9}$	$(7)^{9.8}$	7^9
K_{10}	0	$\binom{10}{2}\frac{8}{2}$	$\binom{10}{2}\frac{\sqrt{14}}{8}$	$8^{2.10}$	$(8)^{10.9}$	8^{10}
K_{11}	0	$\binom{11}{2}\frac{9}{2}$	$\binom{11}{2}\frac{\sqrt{16}}{9}$	$9^{2.11}$	$(9)^{11.10}$	9^{11}
K_{12}	0	$\binom{12}{2}\frac{10}{2}$	$\binom{12}{2}\frac{\sqrt{18}}{10}$	$10^{2.12}$	$(10)^{12.11}$	10^{12}
K_{13}	0	$\binom{13}{2}\frac{11}{2}$	$\binom{13}{2}\frac{\sqrt{20}}{11}$	$11^{2.13}$	$(11)^{13.12}$	11^{13}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
K_n	0	$\binom{n}{2}\frac{(n-2)}{2}$; $n \geq 3$	$\binom{n}{2}\frac{\sqrt{2n-6}}{n-2}$; $n \geq 3$	$(n-2)^{2n}$; $n \geq 1$	$(n-2)^{n(n-1)}$; $n \geq 2$	$(n-2)^n$; $n \geq 1$

$K_{a,b}$ grafı için elde edilen köşe ve kenar parçalanış tablosu aşağıdaki gibidir. $a \leq b$ olmak üzere $b = 1$ ve $b \neq 1$ için sonuçlar elde edilmiştir. Tabloda bu ayrım verilmediyse sonuçlar bu iki durum içinde geçerlidir.

Çizelge 4.17. $K_{a,b}$ grafının köşe ve kenar parçalanışları

$K_{a,b}$ *Grafı*			
Köşe Parçalanışı		*Kenar Parçalanışı*	
$d_{\mathbb{G}}(u)$	$\lvert d_{\mathbb{G}}(u)\rvert$	$(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))$	$\lvert(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))\rvert$
a	b	(a, b)	ab
b	a		

Çizelge 4.18. $K_{a,b}$ grafının $RM_1(\mathbb{G})$, $RM_2(\mathbb{G})$, $RM_3(\mathbb{G})$ ve $RH(\mathbb{G})$ grafı

$\mathbb{G}$	$RM_1(K_{a,b})$	$RM_2(K_{a,b})$	$RM_3(K_{a,b})$	$RH(K_{a,b})$
$K_{1,3}$	$3 \cdot 0^2 + 2^2$	1·0·2	$3 \cdot 0^3 + 2^3$	$\frac{6}{1}$
$K_{2,3}$	$3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2$	6·1·2	$3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 2^3$	$\frac{12}{3}$
$K_{2,4}$	$4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 3^2$	8·1·3	$4 \cdot 1^3 + 2 \cdot 3^3$	$\frac{16}{4}$
$K_{3,4}$	$3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 2^2$	12·2·3	$3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 2^3$	$\frac{24}{5}$
$K_{3,5}$	$3 \cdot 4^2 + 5 \cdot 2^2$	15·2·4	$3 \cdot 4^3 + 5 \cdot 2^3$	$\frac{30}{6}$
$K_{3,3}$	$6 \cdot 2^2$	9·2·2	$6 \cdot 2^3$	$\frac{18}{4}$
$K_{4,4}$	$8 \cdot 3^2$	16·3·3	$8 \cdot 3^3$	$\frac{16}{3}$
$K_{5,5}$	$10 \cdot 4^2$	25·4·4	$10 \cdot 4^3$	$\frac{50}{8}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$K_{a,b}$	$\mathrm{b}(a-1)^2 + a(b-1)^2;$ $b \neq a$ $2\mathrm{b}(\mathrm{b}-1)^2;$ $b = a$	$ab(a-1)(b-1)$	$\mathrm{b}(a-1)^3 + a(b-1)^3;$ $b \neq a$ $2b \cdot (b-1)^3;$ $b = a$	$\frac{2ab}{a+b-2}$

Çizelge 4.19. $\boldsymbol{K_{a,b}}$ grafının $\boldsymbol{RAlb}(\mathbb{G})$, $\boldsymbol{RSCI}(\mathbb{G})$, $\boldsymbol{R\sigma}(\mathbb{G})$, $\boldsymbol{RISI}(\mathbb{G})$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$\boldsymbol{RAlb}(\boldsymbol{K_{a,b}})$	$\boldsymbol{RSCI}(\boldsymbol{K_{a,b}})$	$\boldsymbol{R\sigma}(\boldsymbol{K_{a,b}})$	$\boldsymbol{RISI}(\boldsymbol{K_{a,b}})$
$\boldsymbol{K_{1,3}}$	6	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	12	0
$\boldsymbol{K_{2,3}}$	6	$\frac{6}{\sqrt{3}}$	6	$6 \cdot \frac{1 \cdot 2}{3}$
$\boldsymbol{K_{2,4}}$	16	$\frac{8}{\sqrt{4}}$	32	$8 \cdot \frac{1 \cdot 3}{4}$
$\boldsymbol{K_{3,4}}$	12	$\frac{12}{\sqrt{5}}$	12	$12 \cdot \frac{2 \cdot 3}{5}$
$\boldsymbol{K_{3,5}}$	30	$\frac{15}{\sqrt{6}}$	60	$15 \cdot \frac{2 \cdot 4}{6}$
$\boldsymbol{K_{3,3}}$	0	$\frac{9}{\sqrt{4}}$	0	$9 \cdot \frac{2 \cdot 2}{4}$
$\boldsymbol{K_{4,4}}$	0	$\frac{16}{\sqrt{6}}$	0	$16 \cdot \frac{3 \cdot 3}{6}$
$\boldsymbol{K_{5,5}}$	0	$\frac{25}{\sqrt{8}}$	0	$25 \cdot \frac{4 \cdot 4}{8}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{K_{a,b}}$	$ab\lvert a-b\rvert$	$\frac{ab}{\sqrt{a+b-2}}$	$ab(a-b)^2$	$\frac{ab(a-1)(b-1)}{a+b-2}$

Çizelge 4.20. $K_{a,b}$ grafının $RABC(\mathbb{G})$, $R\pi_1(\mathbb{G})$, $R\pi_2(\mathbb{G})$, $RNK(\mathbb{G})$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$RABC(K_{a,b})$	$R\pi_1(K_{a,b})$	$R\pi_2(K_{a,b})$	$RNK(K_{a,b})$
$K_{1,3}$	$Tanımsız$	$0^6 \cdot 2^2$	0	0
$K_{2,3}$	$6 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$	$1^6 \cdot 2^4$	2^6	$1^3 \cdot 2^2$
$K_{2,4}$	$8 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$	$1^8 \cdot 3^4$	3^8	$2^4 \cdot 3^2$
$K_{3,4}$	$12 \cdot \sqrt{\frac{3}{6}}$	$2^8 \cdot 3^6$	6^{12}	$2^4 \cdot 3^2$
$K_{3,5}$	$15 \cdot \sqrt{\frac{4}{8}}$	$2^{10} \cdot 4^6$	8^{15}	$2^5 \cdot 4^3$
$K_{3,3}$	$9 \cdot \sqrt{\frac{2}{4}}$	2^{12}	4^9	2^6
$K_{4,4}$	$16 \cdot \sqrt{\frac{4}{9}}$	3^{16}	9^{16}	3^8
$K_{5,5}$	$25 \cdot \sqrt{\frac{6}{16}}$	4^{20}	16^{25}	4^{10}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$K_{a,b}$	$ab\sqrt{\frac{b+a-4}{(a-1)(b-1)}}$	$(b-1)^{4b}$; $a=b$ $(a-1)^{2b}(b-1)^{2a}$; $a \neq b$	$[(a-1)(b-1)]^{ab}$	$(b-1)^{2b}$; $a=b$ $(a-1)^{b}(b-1)^{a}$; $a \neq b$

W_n^m grafı için elde edilen köşe-kenar parçalanış tablosu aşağıdaki gibidir.

Çizelge 4.21. W_n^m grafının köşe ve kenar parçalanışları

W_n^m $Grafı$			
$Köşe\ Parçalanışı$		$Kenar\ Parçalanışı$	
$d_{\mathbb{G}}(u)$	$\lvert d_{\mathbb{G}}(u)\rvert$	$(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))$	$\lvert((d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))\rvert$
$n-1$	$m(n-1)$	$(n-1, n-1)$	$\frac{m(n-1)(n-2)}{2}$
$m(n-1)$	1		

Çizelge 4.22. W_n^m grafının $RM_1(\mathbb{G})$, $RM_2(\mathbb{G})$, $RM_3(\mathbb{G})$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$RM_1(W_n^m)$	$RM_2(W_n^m)$	$RM_3(W_n^m)$
W_3^2	$4 \cdot 1^2 + 3^2$	$2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 3\right)$	$2 \cdot 2 \cdot 1^3 + 3^3$
W_3^3	$6 \cdot 1^2 + 5^2$	$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 5\right)$	$3 \cdot 2 \cdot 1^3 + 5^3$
W_3^4	$8 \cdot 1^2 + 7^2$	$4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 7\right)$	$4 \cdot 2 \cdot 1^3 + 7^3$
W_4^2	$6 \cdot 1^2 + 5^2$	$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{4}{2} + 5\right)$	$2 \cdot 3 \cdot 2^3 + 5^3$
W_4^3	$9 \cdot 1^2 + 8^2$	$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{4}{2} + 8\right)$	$3 \cdot 3 \cdot 2^3 + 8^3$
W_5^2	$8 \cdot 1^2 + 7^2$	$2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{9}{2} + 7\right)$	$2 \cdot 4 \cdot 3^3 + 7^3$
W_5^3	$12 \cdot 1^2 + 11^2$	$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{9}{2} + 11\right)$	$3 \cdot 4 \cdot 3^3 + 11^3$
W_6^2	$10 \cdot 4^2 + 9^2$	$2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \left(\frac{16}{2} + 7\right)$	$2 \cdot 5 \cdot 4^3 + 9^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
W_n^m	$m(n-1)(n-2)^2 + (mn-m-1)^2$	$m(n-1)(n-2) \cdot \left[\frac{(n-2)^2}{2} + nm - m - 1\right]$	$m(n-1)(n-2)^3 + (mn-m-1)^3$

Çizelge 4.23. $\boldsymbol{W_n^m}$ grafının $\boldsymbol{RH}(\mathbb{G})$, $\boldsymbol{RAlb}(\mathbb{G})$ ve $\boldsymbol{RSCI}(\mathbb{G})$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$\boldsymbol{RH}(\boldsymbol{W_n^m})$	$\boldsymbol{RAlb}(\boldsymbol{W_n^m})$	$\boldsymbol{RSCI}(\boldsymbol{W_n^m})$
$\boldsymbol{W_3^2}$	$\frac{4}{2}+\frac{8}{4}$	$2\cdot 2\cdot\lvert-2\rvert$	$\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{4}}$
$\boldsymbol{W_3^3}$	$\frac{6}{2}+\frac{12}{6}$	$3\cdot 2\cdot\lvert-4\rvert$	$\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{6}{\sqrt{6}}$
$\boldsymbol{W_3^4}$	$\frac{8}{2}+\frac{16}{8}$	$4\cdot 2\cdot\lvert-6\rvert$	$\frac{4}{\sqrt{2}}+\frac{8}{\sqrt{8}}$
$\boldsymbol{W_4^2}$	$\frac{6}{2}+\frac{12}{7}$	$2\cdot 3\cdot\lvert-3\rvert$	$\frac{6}{\sqrt{4}}+\frac{6}{\sqrt{7}}$
$\boldsymbol{W_4^3}$	$\frac{9}{2}+\frac{18}{10}$	$3\cdot 3\cdot\lvert-6\rvert$	$\frac{9}{\sqrt{4}}+\frac{9}{\sqrt{10}}$
$\boldsymbol{W_5^2}$	$\frac{8}{2}+\frac{16}{10}$	$2\cdot 4\cdot\lvert-4\rvert$	$\frac{12}{\sqrt{6}}+\frac{8}{\sqrt{10}}$
$\boldsymbol{W_5^3}$	$\frac{12}{2}+\frac{24}{14}$	$3\cdot 4\cdot\lvert-8\rvert$	$\frac{18}{\sqrt{6}}+\frac{12}{\sqrt{14}}$
$\boldsymbol{W_6^2}$	$\frac{10}{2}+\frac{20}{13}$	$2\cdot 5\cdot\lvert-5\rvert$	$\frac{20}{\sqrt{8}}+\frac{10}{\sqrt{13}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{W_n^m}$	$\frac{m(n-1)}{2}+\frac{2m(n-1)}{mn-m+n-3}$	$m(n-1)\lvert(n-1)(1-m)\rvert$	$\frac{m(n-1)(n-2)}{2\sqrt{2n-4}}+\frac{m(n-1)}{\sqrt{(n-1)(1+m)-2}}$

Çizelge 4.24. W_n^m grafının $R\sigma(\mathbb{G})$, $RISI(\mathbb{G})$, $R\pi_1(\mathbb{G})$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$R\sigma(W_n^m)$	$RISI(W_n^m)$	$R\pi_1(W_n^m)$
W_3^2	$2 \cdot 2^3(-1)^2$	$\frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{4} + \frac{4 \cdot 3}{4}$	$1^8 \cdot 3^2$
W_3^3	$3 \cdot 2^3(-2)^2$	$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{4} + \frac{6 \cdot 5}{6}$	$1^{12} \cdot 5^2$
W_3^4	$4 \cdot 2^3(-3)^2$	$\frac{4 \cdot 2 \cdot 1}{4} + \frac{8 \cdot 7}{8}$	$1^{16} \cdot 7^2$
W_4^2	$2 \cdot 3^3(-1)^2$	$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{4} + \frac{12 \cdot 5}{7}$	$2^{12} \cdot 5^2$
W_4^3	$3 \cdot 3^3(-2)^2$	$\frac{3 \cdot 3 \cdot 4}{4} + \frac{18 \cdot 8}{10}$	$2^{18} \cdot 8^2$
W_5^2	$2 \cdot 4^3(-1)^2$	$\frac{2 \cdot 4 \cdot 9}{4} + \frac{24 \cdot 7}{10}$	$3^{16} \cdot 7^2$
W_5^3	$3 \cdot 4^3(-2)^2$	$\frac{3 \cdot 4 \cdot 9}{4} + \frac{36 \cdot 11}{14}$	$3^{24} \cdot 11^2$
W_6^2	$2 \cdot 5^3(-1)^2$	$\frac{2 \cdot 5 \cdot 16}{4} + \frac{40 \cdot 9}{13}$	$4^{20} \cdot 9^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
W_n^m	$m(n-1)^3(1-m)^2$	$\frac{m(n-1)(n-2)^2}{4} + \frac{m(n-1)(n-2)(mn-m-1)}{n-1+mn-m-2}$	$(n-2)^{2m(n-1)}$ $(nm-m-1)^2$

Çizelge 4.25. W_n^m grafının $R\pi_2(\mathbb{G})$, $RABC(\mathbb{G})$, $RNK(\mathbb{G})$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$R\pi_2(W_n^m)$	RABC(W_n^m)	RNK(W_n^m)
W_3^2	$2^4 \cdot 1^4$	$0 + 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$	$1^4 \cdot 3$
W_3^3	$2^6 \cdot 1^6$	$0 + 6 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}}$	$1^5 \cdot 5$
W_3^4	$2^8 \cdot 1^8$	$0 + 8 \cdot \sqrt{\frac{6}{7}}$	$1^8 \cdot 7$
W_4^2	$3^{12} \cdot 2^6$	$3\sqrt{2} + 6 \cdot \sqrt{\frac{5}{10}}$	$2^6 \cdot 5$
W_4^3	$3^{18} \cdot 2^9$	$\frac{9\sqrt{2}}{2} + 9 \cdot \sqrt{\frac{8}{16}}$	$2^9 \cdot 8$
W_5^2	$4^{24} \cdot 3^8$	$4\sqrt{4} + 8 \cdot \sqrt{\frac{8}{21}}$	$3^8 \cdot 7$
W_5^3	$4^{36} \cdot 3^{12}$	$6\sqrt{4} + 12 \cdot \sqrt{\frac{12}{33}}$	$3^{12} \cdot 11$
W_6^2	$5^{40} \cdot 4^{10}$	$5\sqrt{6} + 10 \cdot \sqrt{\frac{11}{36}}$	$4^{10} \cdot 9$
⋮	⋮	⋮	⋮
W_n^m	$(n-1)^{m(n-1)(n-2)} \cdot ((n-2)(mn-m-1))^{m(n-1)}$	$\frac{m(n-1)(n-2)\sqrt{2n-6}}{2(n-2)} + \frac{m(n-1)\sqrt{n+mn-m-5}}{\sqrt{(n-2)(mn-m-1)}}$	$(n-2)^{m(n-1)} \cdot (m(n-1)-1)$

L_n grafı için elde edilen tablolar $n \geq 3$ için geçerlidir. Köşe ve kenar parçalanış tablosu aşağıdaki gibidir.

Çizelge 4.26. L_n grafının köşe ve kenar parçalanışları

L_n $Grafı$			
$Köşe\ Parçalanışı$		$Kenar\ Parçalanışı$	
$d_{\mathbb{G}}(u)$	$\lvert d_{\mathbb{G}}(u)\rvert$	$(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))$	$\lvert((d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))\rvert$
3	$2n$	(3,3)	$3n$

Çizelge 4.27. L_n grafının $\boldsymbol{RM_1}(\mathbb{G})$, $\boldsymbol{RM_2}(\mathbb{G})$, $\boldsymbol{RM_3}(\mathbb{G})$, $\boldsymbol{RH}(\mathbb{G})$, $\boldsymbol{RAlb}(\mathbb{G})$ ve $\boldsymbol{RSCI}(\mathbb{G})$ indeksleri

$\boldsymbol{L_n}$	$\boldsymbol{RM_1(L_n)}$	$\boldsymbol{RM_2(L_n)}$	$\boldsymbol{RM_3(L_n)}$	$\boldsymbol{RH(L_n)}$	$\boldsymbol{RAlb(L_n)}$	$\boldsymbol{RSCI(L_n)}$
$\boldsymbol{L_3}$	24	36	48	$\frac{9}{2}$	0	$\frac{9}{2}$
$\boldsymbol{L_4}$	32	48	64	$\frac{12}{2}$	0	$\frac{12}{2}$
$\boldsymbol{L_5}$	40	60	80	$\frac{15}{2}$	0	$\frac{15}{2}$
$\boldsymbol{L_6}$	48	72	96	$\frac{18}{2}$	0	$\frac{18}{2}$
$\boldsymbol{L_7}$	56	84	112	$\frac{21}{2}$	0	$\frac{21}{2}$
$\boldsymbol{L_8}$	64	96	128	$\frac{24}{2}$	0	$\frac{24}{2}$
$\boldsymbol{L_9}$	72	108	144	$\frac{27}{2}$	0	$\frac{27}{2}$
$\boldsymbol{L_{10}}$	80	120	160	$\frac{30}{2}$	0	$\frac{30}{2}$
$\boldsymbol{L_{11}}$	88	132	176	$\frac{33}{2}$	0	$\frac{33}{2}$
$\boldsymbol{L_{12}}$	96	144	192	$\frac{36}{2}$	0	$\frac{36}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{L_n}$	$8n$	12n	16n	$\frac{3n}{2}$	0	$\frac{3n}{2}$

Çizelge 4.28. L_n grafının $R\sigma(\mathbb{G})$, $RISI(\mathbb{G})$, $RABC(\mathbb{G})$, $R\pi_1(\mathbb{G})$, $R\pi_2(\mathbb{G})$, $RNK(\mathbb{G})$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$R\sigma(L_n)$	$RISI(L_n)$	$RABC(L_n)$	$R\pi_1(L_n)$	$R\pi_2(L_n)$	$RNK(L_n)$
L_3	0	9	$\frac{9}{\sqrt{2}}$	2^{12}	2^{18}	2^6
L_4	0	12	$\frac{12}{\sqrt{2}}$	2^{16}	2^{24}	2^8
L_5	0	15	$\frac{15}{2}$	2^{20}	2^{30}	2^{10}
L_6	0	18	$\frac{18}{\sqrt{2}}$	2^{24}	2^{36}	2^{12}
L_7	0	21	$\frac{21}{\sqrt{2}}$	2^{28}	2^{42}	2^{14}
L_8	0	24	$\frac{24}{\sqrt{2}}$	2^{32}	2^{48}	2^{16}
L_9	0	27	$\frac{27}{\sqrt{2}}$	2^{36}	2^{54}	2^{18}
L_{10}	0	30	$\frac{30}{\sqrt{2}}$	2^{40}	2^{60}	2^{20}
L_{11}	0	33	$\frac{33}{\sqrt{2}}$	2^{44}	2^{66}	2^{22}
L_{12}	0	36	$\frac{36}{\sqrt{2}}$	2^{48}	2^{72}	2^{24}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
L_n	0	$3n$	$\frac{3n}{\sqrt{2}}$	2^{4n}	2^{6n}	2^{2n}

D_r^s grafı için elde edilen köşe-kenar parçalanış tablosu aşağıdaki gibidir.

Çizelge 4.29. D_r^s grafının köşe ve kenar parçalanışları

D_r^s *Grafı*			
Köşe Parçalanışı		*Kenar Parçalanışı*	
$d_{\mathbb{G}}(u)$	$\lvert d_{\mathbb{G}}(u)\rvert$	$(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))$	$\lvert((d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))\rvert$
2	$s(r-1)$	(2,2)	$s(r-2)$
$2s$	1	$(2,2s)$	$2s$

Çizelge 4.30. D_r^s grafının $RM1(\mathbb{G})$, $RM_2(\mathbb{G})$, $RM_3(\mathbb{G})$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$RM_1(D_r^s)$	$RM_2(D_r^s)$	$RM_3(D_r^s)$
D_3^2	$2\cdot 2+3^2$	$2\cdot 1+4\cdot 3$	$2\cdot 2+3^3$
D_3^3	$3\cdot 2+5^2$	$3\cdot 1+6\cdot 5$	$3\cdot 2+5^3$
D_3^4	$4\cdot 2+7^2$	$4\cdot 1+8\cdot 7$	$4\cdot 2+7^3$
D_4^2	$2\cdot 3+3^2$	$2\cdot 2+4\cdot 3$	$2\cdot 3+3^3$
D_4^3	$3\cdot 3+5^2$	$3\cdot 2+6\cdot 5$	$3\cdot 3+5^3$
D_4^4	$4\cdot 3+7^2$	$4\cdot 2+8\cdot 7$	$4\cdot 3+7^3$
D_5^2	$2\cdot 4+3^2$	$2\cdot 3+4\cdot 3$	$2\cdot 4+3^3$
D_5^3	$3\cdot 4+5^2$	$3\cdot 3+6\cdot 5$	$3\cdot 4+5^3$
D_5^4	$4\cdot 4+7^2$	$4\cdot 3+8\cdot 7$	$4\cdot 4+7^3$
D_6^2	$2\cdot 5+3^2$	$2\cdot 4+4\cdot 3$	$2\cdot 5+3^3$
D_6^3	$3\cdot 5+5^2$	$3\cdot 4+6\cdot 5$	$3\cdot 5+5^3$
D_6^6	$6\cdot 5+11^2$	$6\cdot 4+12\cdot 11$	$6\cdot 5+11^3$
D_7^2	$2\cdot 6+3^2$	$2\cdot 5+4\cdot 3$	$2\cdot 6+3^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
D_r^s	$s(r-1)+(2s-1)^2$	$s(r-2)+2s(2s-1)$	$s(r-1)+(2s-1)^3$

Çizelge 4.31. D_r^s grafının $RH(\mathbb{G})$, $RAlb(\mathbb{G})$, $RSCI(\mathbb{G})$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$RH(D_r^s)$	$RAlb(D_r^s)$	$RSCI(D_r^s)$
D_3^2	$2 \cdot 1 + 2$	$2 \cdot 2 \cdot \lvert -2 \rvert$	$\frac{2 \cdot 1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{4}}$
D_3^3	$3 \cdot 1 + 2$	$2 \cdot 3 \cdot \lvert -4 \rvert$	$\frac{3 \cdot 1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}$
D_3^4	$4 \cdot 1 + 2$	$2 \cdot 4 \cdot \lvert -6 \rvert$	$\frac{4 \cdot 1}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{8}}$
D_4^2	$2 \cdot 2 + 2$	$2 \cdot 2 \cdot \lvert -2 \rvert$	$\frac{2 \cdot 2}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{4}}$
D_4^3	$3 \cdot 2 + 2$	$2 \cdot 3 \cdot \lvert -4 \rvert$	$\frac{3 \cdot 2}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{6}}$
D_4^4	$4 \cdot 2 + 2$	$2 \cdot 4 \cdot \lvert -6 \rvert$	$\frac{4 \cdot 2}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{8}}$
D_5^2	$2 \cdot 3 + 2$	$2 \cdot 2 \cdot \lvert -2 \rvert$	$\frac{2 \cdot 3}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{4}}$
D_5^3	$3 \cdot 3 + 2$	$2 \cdot 3 \cdot \lvert -4 \rvert$	$\frac{3 \cdot 3}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{6}}$
D_5^4	$4 \cdot 3 + 2$	$2 \cdot 4 \cdot \lvert -6 \rvert$	$\frac{4 \cdot 3}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{8}}$
D_6^2	$2 \cdot 4 + 2$	$2 \cdot 2 \cdot \lvert -2 \rvert$	$\frac{2 \cdot 4}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{4}}$
D_6^3	$3 \cdot 4 + 2$	$2 \cdot 3 \cdot \lvert -4 \rvert$	$\frac{3 \cdot 4}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{6}}$
D_6^6	$6 \cdot 4 + 2$	$2 \cdot 6 \cdot \lvert -10 \rvert$	$\frac{6 \cdot 4}{\sqrt{2}} + \frac{12}{\sqrt{12}}$
D_7^2	$2 \cdot 5 + 2$	$2 \cdot 2 \cdot \lvert -2 \rvert$	$\frac{2 \cdot 5}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{4}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
D_r^s	$s(r-2)+2$	$2s\lvert 2-2s \rvert$	$\frac{s(r-2)}{\sqrt{2}} + \frac{2s}{\sqrt{2s}}$

Çizelge 4.32. D_r^s grafının $R\sigma(\mathbb{G})$, $RISI(\mathbb{G})$, $RABC(\mathbb{G})$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$R\sigma(D_r^s)$	$RISI(D_r^s)$	$RABC(D_r^s)$
D_3^2	$8 \cdot 2 \cdot 1^2$	$\frac{8}{2}$	$4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$
D_3^3	$8 \cdot 3 \cdot 2^2$	$\frac{13}{2}$	$6 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}}$
D_3^4	$8 \cdot 4 \cdot 3^2$	$\frac{18}{2}$	$8 \cdot \sqrt{\frac{6}{7}}$
D_4^2	$8 \cdot 2 \cdot 1^2$	$\frac{10}{2}$	$4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$
D_4^3	$8 \cdot 3 \cdot 2^2$	$\frac{16}{2}$	$6 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}}$
D_4^4	$8 \cdot 4 \cdot 3^2$	$\frac{22}{2}$	$8 \cdot \sqrt{\frac{6}{7}}$
D_5^2	$8 \cdot 2 \cdot 1^2$	$\frac{12}{2}$	$4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$
D_5^3	$8 \cdot 3 \cdot 2^2$	$\frac{19}{2}$	$6 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}}$
D_5^4	$8 \cdot 4 \cdot 3^2$	$\frac{26}{2}$	$8 \cdot \sqrt{\frac{6}{7}}$
D_6^2	$8 \cdot 2 \cdot 1^2$	$\frac{14}{2}$	$4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$
D_6^3	$8 \cdot 3 \cdot 2^2$	$\frac{22}{2}$	$6 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}}$
D_6^6	$8 \cdot 6 \cdot 5^2$	$\frac{46}{2}$	$12 \cdot \sqrt{\frac{10}{11}}$
D_7^2	$8 \cdot 2 \cdot 1^2$	$\frac{16}{2}$	$4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
D_r^s	$8s(s-1)^3$	$\frac{sr+2s-2}{2}$	$2s\sqrt{\frac{2s-2}{2s-1}}$

Çizelge 4.33. D_r^s grafının $R\pi_1(\mathbb{G})$, $R\pi_2(\mathbb{G})$ ve $RNK(\mathbb{G})$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$R\pi_1(D_r^s)$	$R\pi_2(D_r^s)$	$RNK(D_r^s)$
D_3^2	$1^8 \cdot 3^2$	$1^2 \cdot 3^4$	$1^4 \cdot (3)$
D_3^3	$1^{12} \cdot 5^2$	$1^3 \cdot 5^6$	$1^6 \cdot (5)$
D_3^4	$1^{16} \cdot 7^2$	$1^4 \cdot 7^8$	$1^8 \cdot (7)$
D_4^2	$1^{12} \cdot 3^2$	$1^4 \cdot 3^4$	$1^6 \cdot (3)$
D_4^3	$1^{18} \cdot 5^2$	$1^6 \cdot 5^6$	$1^9 \cdot (5)$
D_4^4	$1^{24} \cdot 7^2$	$1^8 \cdot 7^8$	$1^{12} \cdot (7)$
D_5^2	$1^{16} \cdot 3^2$	$1^6 \cdot 3^4$	$1^8 \cdot (3)$
D_5^3	$1^{24} \cdot 5^2$	$1^9 \cdot 5^6$	$1^{12} \cdot (5)$
D_5^4	$1^{32} \cdot 7^2$	$1^{12} \cdot 7^8$	$1^{16} \cdot (7)$
D_6^2	$1^{20} \cdot 3^2$	$1^8 \cdot 3^4$	$1^{10} \cdot (3)$
D_6^3	$1^{30} \cdot 5^2$	$1^{12} \cdot 5^6$	$1^{15} \cdot (5)$
D_6^6	$1^{60} \cdot 11^2$	$1^{24} \cdot 11^{12}$	$1^{30} \cdot (11)$
D_7^2	$1^{24} \cdot 3^2$	$1^{10} \cdot 3^4$	$1^{12} \cdot (3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
D_r^s	$1^{2s(r-1)}(2s-1)^2$	$1^{s(r-2)}(2s-1)^{2s}$	$1^{s(r-1)}(2s-1)$

T_n grafı için elde edilen köşe-kenar parçalanış tablosu aşağıdaki gibidir. $n \geq 3$ için geçerlidir.

Çizelge 4.34. T_n grafının köşe ve kenar parçalanışları

T_n *Grafı*			
Köşe Parçalanışı		*Kenar Parçalanışı*	
$d_{\mathbb{G}}(u)$	$\lvert d_{\mathbb{G}}(u)\rvert$	$(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))$	$\lvert((d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))\rvert$
$n-1$	$2n$	$(n-1, n-1)$	$n(n-1)$

Çizelge 4.35. T_n grafının $RM_1(\mathbb{G})$, $RM_2(\mathbb{G})$, $RM_3(\mathbb{G})$, $RH(\mathbb{G})$, $RAlb(\mathbb{G})$, $RSCI(\mathbb{G})$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$RM_1(T_n)$	$RM_2(T_n)$	$RM_3(T_n)$	$RH(T_n)$	$RAlb(T_n)$	$RSCI(T_n)$
T_3	6	6	6	6	0	$\frac{6}{\sqrt{2}}$
T_4	32	48	64	6	0	$\frac{12}{\sqrt{4}}$
T_5	90	180	270	$\frac{20}{3}$	0	$\frac{20}{\sqrt{6}}$
T_6	192	480	768	$\frac{30}{4}$	0	$\frac{30}{\sqrt{8}}$
T_7	350	1050	1750	$\frac{42}{5}$	0	$\frac{42}{\sqrt{10}}$
T_8	576	2016	3456	$\frac{56}{6}$	0	$\frac{56}{\sqrt{12}}$
T_9	882	3528	6174	$\frac{72}{7}$	0	$\frac{72}{\sqrt{14}}$
T_{10}	1280	5760	10240	$\frac{90}{8}$	0	$\frac{90}{\sqrt{16}}$
T_{11}	1782	8910	16038	$\frac{110}{9}$	0	$\frac{110}{\sqrt{18}}$
T_{12}	2400	13200	24000	$\frac{132}{10}$	0	$\frac{132}{\sqrt{20}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
T_n	$2n(n-2)^2$	$n(n-1)(n-2)^2$	$2n(n-2)^3$	$\frac{n(n-1)}{n-2}$	0	$\frac{n(n-1)}{\sqrt{2n-4}}$

Çizelge 4.36. T_n grafının $R\sigma(\mathbb{G})$, $RISI(\mathbb{G})$, $RABC(\mathbb{G})$, $R\pi_1(\mathbb{G})$, $R\pi_2(\mathbb{G})$ ve $RNK(\mathbb{G})$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$R\sigma(T_n)$	$RISI(T_n)$	$RABC(T_n)$	$R\pi_1(T_n)$	$R\pi_2(T_n)$	$RNK(T_n)$
T_3	0	3	0	1^{12}	1^{12}	1^{6}
T_4	0	12	$\frac{12\sqrt{2}}{2}$	2^{16}	2^{24}	2^{8}
T_5	0	30	$\frac{20\sqrt{4}}{3}$	3^{20}	3^{40}	3^{10}
T_6	0	60	$\frac{30\sqrt{6}}{4}$	4^{24}	4^{60}	4^{12}
T_7	0	105	$\frac{42\sqrt{8}}{5}$	5^{28}	5^{84}	5^{14}
T_8	0	168	$\frac{56\sqrt{10}}{6}$	6^{32}	6^{112}	6^{16}
T_9	0	252	$\frac{72\sqrt{12}}{7}$	7^{36}	7^{144}	7^{18}
T_{10}	0	360	$\frac{90\sqrt{14}}{8}$	8^{40}	8^{180}	8^{20}
T_{11}	0	495	$\frac{110\sqrt{16}}{9}$	9^{44}	9^{220}	9^{22}
T_{12}	0	660	$\frac{132\sqrt{18}}{10}$	10^{48}	10^{264}	10^{24}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
T_n	0	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$	$\frac{n(n-1)\sqrt{2n-6}}{n-2}$	$(n-2)^{4n}$	$(n-2)^{2n(n-1)}$	$(n-2)^{2n}$

P grafı için elde edilen köşe-kenar parçalanış tablosu aşağıdaki gibidir.

Çizelge 4.37. ***P*** grafının köşe ve kenar parçalanışları

$P\ Grafı$			
$Köşe\ \ Parçalanışı$		$Kenar\ \ Parçalanışı$	
$d_{\mathbb{G}}(u)$	$\lvert d_{\mathbb{G}}(u)\rvert$	$(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))$	$\lvert(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))\rvert$
3	10	(3,3)	15

Çizelge 4.38. $\boldsymbol{P}$ grafının $\boldsymbol{RM_1(P)}$, $\boldsymbol{RM_2(P)}$, $\boldsymbol{RM_3(P)}$, $\boldsymbol{RH(P)}$, $\boldsymbol{RAlb(P)}$ ve $\boldsymbol{RSCI(P)}$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$\boldsymbol{RM_1(P)}$	$\boldsymbol{RM_2(P)}$	$\boldsymbol{RM_3(P)}$	$\boldsymbol{RH(P)}$	$\boldsymbol{RAlb(P)}$	$\boldsymbol{RSCI(P)}$
$\boldsymbol{P}$	40	60	80	$\frac{15}{2}$	0	$\frac{15}{2}$

Çizelge 4.39. $\boldsymbol{P}$ grafının $\boldsymbol{R\sigma(P)}$, $\boldsymbol{RISI(P)}$, $\boldsymbol{RABC(P)}$, $\boldsymbol{R\pi_1(P)}$, $\boldsymbol{R\pi_2(P)}$, $\boldsymbol{RNK(P)}$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$\boldsymbol{R\sigma(P)}$	$\boldsymbol{RISI(P)}$	$\boldsymbol{RABC(P)}$	$\boldsymbol{R\pi_1(P)}$	$\boldsymbol{R\pi_2(P)}$	$\boldsymbol{RNK(P)}$
$\boldsymbol{P}$	0	15	$\frac{15}{\sqrt{2}}$	2^{20}	2^{30}	2^{10}

CP_{2n} kokteyl grafı için elde edilen köşe-kenar parçalanış tablosu aşağıdaki gibidir.

Çizelge 4.40. $\boldsymbol{CP_{2n}}$ grafının köşe ve kenar parçalanışları

$CP_{2n}\ Grafı$			
$Köşe\ Parçalanışı$		$Kenar\ Parçalanışı$	
$d_{\mathbb{G}}(u)$	$\lvert d_{\mathbb{G}}(u)\rvert$	$(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))$	$\lvert(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))\rvert$
$2(n-1)$	$2n$	$(2(n-1), 2(n-1))$	$2n(n-1)$

Çizelge 4.41. $\boldsymbol{CP_{2n}}$ grafının $\boldsymbol{RM_1(CP_{2n})}$, $\boldsymbol{RM_2(CP_{2n})}$, $\boldsymbol{RM_3(CP_{2n})}$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$\boldsymbol{RM_1(CP_{2n})}$	$\boldsymbol{RM_2(CP_{2n})}$	$\boldsymbol{RM_3(CP_{2n})}$
$\boldsymbol{CP_2}$	$2\cdot 1\cdot(-1)^2$	$2\cdot 1\cdot 0\cdot(-1)^2$	$2\cdot 1\cdot(-1)^3$
$\boldsymbol{CP_4}$	$2\cdot 2\cdot 1^2$	$2\cdot 2\cdot 1\cdot 1^2$	$2\cdot 2\cdot 1^3$
$\boldsymbol{CP_6}$	$2\cdot 3\cdot 3^2$	$2\cdot 3\cdot 2\cdot 3^2$	$2\cdot 3\cdot 3^3$
$\boldsymbol{CP_8}$	$2\cdot 4\cdot 5^2$	$2\cdot 4\cdot 3\cdot 5^2$	$2\cdot 4\cdot 5^3$
$\boldsymbol{CP_{10}}$	$2\cdot 5\cdot 7^2$	$2\cdot 5\cdot 4\cdot 7^2$	$2\cdot 5\cdot 7^3$
$\boldsymbol{CP_{12}}$	$2\cdot 6\cdot 9^2$	$2\cdot 6\cdot 5\cdot 9^2$	$2\cdot 6\cdot 9^3$
$\boldsymbol{CP_{14}}$	$2\cdot 7\cdot 11^2$	$2\cdot 7\cdot 6\cdot 11^2$	$2\cdot 7\cdot 11^3$
$\boldsymbol{CP_{16}}$	$2\cdot 8\cdot 13^2$	$2\cdot 8\cdot 7\cdot 13^2$	$2\cdot 8\cdot 13^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{CP_{2n}}$	$2n(2n-3)^2$	$2n(n-1)(2n-3)^2$	$2n(2n-3)^3$

Çizelge 4.42. $\boldsymbol{CP_{2n}}$ grafının $\boldsymbol{RH(CP_{2n})}$, $\boldsymbol{RAlb(CP_{2n})}$, $\boldsymbol{RSCI(CP_{2n})}$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$\boldsymbol{RH(CP_{2n})}$	$\boldsymbol{RAlb(CP_{2n})}$	$\boldsymbol{RSCI(CP_{2n})}$
$\boldsymbol{CP_2}$	$\frac{0}{-1}$	0	$Tanımsız$
$\boldsymbol{CP_4}$	$\frac{4}{1}$	0	$\frac{4}{\sqrt{2}}$
$\boldsymbol{CP_6}$	$\frac{12}{3}$	0	$\frac{12}{\sqrt{6}}$
$\boldsymbol{CP_8}$	$\frac{24}{5}$	0	$\frac{24}{\sqrt{10}}$
$\boldsymbol{CP_{10}}$	$\frac{40}{7}$	0	$\frac{40}{\sqrt{14}}$
$\boldsymbol{CP_{12}}$	$\frac{20}{3}$	0	$\frac{60}{\sqrt{18}}$
$\boldsymbol{CP_{14}}$	$\frac{84}{11}$	0	$\frac{84}{\sqrt{22}}$
$\boldsymbol{CP_{16}}$	$\frac{112}{13}$	0	$\frac{112}{\sqrt{26}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{CP_{2n}}$	$\frac{2n(n-1)}{2n-3}$	0	$\frac{2n(n-1)}{\sqrt{4n-6}}$

Çizelge 4.43. $\boldsymbol{CP_{2n}}$ grafının $\boldsymbol{R\sigma(CP_{2n})}$, $\boldsymbol{RISI(CP_{2n})}$, $\boldsymbol{RABC(CP_{2n})}$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$\boldsymbol{R\sigma(CP_{2n})}$	$\boldsymbol{RISI(CP_{2n})}$	$\boldsymbol{RABC(CP_{2n})}$
$\boldsymbol{CP_2}$	0	$1\cdot0\cdot(-1)$	$Tanımsız$
$\boldsymbol{CP_4}$	0	$2\cdot1\cdot1$	0
$\boldsymbol{CP_6}$	0	$3\cdot2\cdot3$	$\frac{24\sqrt{6}}{3}$
$\boldsymbol{CP_8}$	0	$4\cdot3\cdot5$	$\frac{48\sqrt{2}}{5}$
$\boldsymbol{CP_{10}}$	0	$5\cdot4\cdot7$	$\frac{80\sqrt{3}}{7}$
$\boldsymbol{CP_{12}}$	0	$6\cdot5\cdot9$	$\frac{120\sqrt{4}}{9}$
$\boldsymbol{CP_{14}}$	0	$7\cdot6\cdot11$	$\frac{168\sqrt{5}}{11}$
$\boldsymbol{CP_{16}}$	0	$8\cdot7\cdot13$	$\frac{224\sqrt{6}}{13}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{CP_{2n}}$	0	$n(n-1)(2n-3)$	$\frac{4n(n-1)\sqrt{n-2}}{2n-3}$

Çizelge 4.44. $\boldsymbol{CP_{2n}}$ grafının $\boldsymbol{R\pi_1(CP_{2n})}$, $\boldsymbol{R\pi_2(CP_{2n})}$, $\boldsymbol{RNK(CP_{2n})}$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$\boldsymbol{R\pi_1(CP_{2n})}$	$\boldsymbol{R\pi_2(CP_{2n})}$	$\boldsymbol{RNK(CP_{2n})}$
$\boldsymbol{CP_2}$	$(-1)^4$	$(-1)^0$	$(-1)^2$
$\boldsymbol{CP_4}$	1^8	1^8	1^4
$\boldsymbol{CP_6}$	3^{12}	3^{24}	3^6
$\boldsymbol{CP_8}$	5^{16}	5^{48}	5^8
$\boldsymbol{CP_{10}}$	7^{20}	7^{80}	7^{10}
$\boldsymbol{CP_{12}}$	9^{24}	9^{120}	9^{12}
$\boldsymbol{CP_{14}}$	11^{28}	11^{168}	11^{14}
$\boldsymbol{CP_{16}}$	13^{32}	13^{224}	13^{16}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{CP_{2n}}$	$(2n-3)^{4n}$	$(2n-3)^{4n(n-1)}$	$(2n-3)^{2n}$

W_n tekerlek grafı için elde edilen sonuçlar $n \geq 3$ için geçerlidir. Köşe-kenar parçalanış tablosu aşağıdaki gibidir.

Çizelge 4.45. $\boldsymbol{W_n}$ grafının köşe ve kenar parçalanışları

$W_n\ Grafı$			
$Köşe\ Parçalanışı$		$Kenar\ Parçalanışı$	
$d_{\mathbb{G}}(u)$	$\lvert d_{\mathbb{G}}(u)\rvert$	$(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))$	$\lvert((d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))\rvert$
3	$n-1$	(3,3)	$n-1$
$n-1$	1	$(3, n-1)$	$n-1$

Çizelge 4.46. $\boldsymbol{W_n}$ grafının $\boldsymbol{RM_1(W_n)}$, $\boldsymbol{RM_2(W_n)}$, $\boldsymbol{RM_3(W_n)}$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$\boldsymbol{RM_1(W_n)}$	$\boldsymbol{RM_2(W_n)}$	$\boldsymbol{RM_3(W_n)}$
$\boldsymbol{W_4}$	4^2	24	32
$\boldsymbol{W_5}$	5^2	40	59
$\boldsymbol{W_6}$	6^2	60	104
$\boldsymbol{W_7}$	7^2	84	173
$\boldsymbol{W_8}$	8^2	112	272
$\boldsymbol{W_9}$	9^2	144	407
$\boldsymbol{W_{10}}$	10^2	180	584
$\boldsymbol{W_{11}}$	11^2	220	809
$\boldsymbol{W_{12}}$	12^2	264	1088
$\boldsymbol{W_{13}}$	13^2	312	1427
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{W_n}$	n^2	$2n(n-1)$	$8(\mathrm{n}-1)+(n-2)^3$

Çizelge 4.47. W_n grafının $RH(W_n)$, $RAlb(W_n)$, $RSCI(W_n)$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$RH(W_n)$	$RAlb(W_n)$	$RSCI(W_n)$
W_4	$\frac{24}{8}$	0	$\frac{3}{2}+\frac{3}{\sqrt{4}}$
W_5	$\frac{36}{10}$	4	$\frac{4}{2}+\frac{4}{\sqrt{5}}$
W_6	$\frac{50}{12}$	10	$\frac{5}{2}+\frac{5}{\sqrt{6}}$
W_7	$\frac{66}{14}$	18	$\frac{6}{2}+\frac{6}{\sqrt{7}}$
W_8	$\frac{84}{16}$	28	$\frac{7}{2}+\frac{7}{\sqrt{8}}$
W_9	$\frac{104}{18}$	40	$\frac{8}{2}+\frac{8}{\sqrt{9}}$
W_{10}	$\frac{126}{20}$	54	$\frac{9}{2}+\frac{9}{\sqrt{10}}$
W_{11}	$\frac{150}{22}$	70	$\frac{10}{2}+\frac{10}{\sqrt{11}}$
W_{12}	$\frac{176}{24}$	88	$\frac{11}{2}+\frac{11}{\sqrt{12}}$
W_{13}	$\frac{204}{26}$	108	$\frac{12}{2}+\frac{12}{\sqrt{13}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
W_n	$\frac{(n+4)(n-1)}{2n}$	$(n-1)\lvert 4-n\rvert$	$\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{\sqrt{n}}$

Çizelge 4.48. $\boldsymbol{W_n}$ grafının $\boldsymbol{R\sigma(W_n)}$, $\boldsymbol{RISI(W_n)}$, $\boldsymbol{RABC(W_n)}$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$\boldsymbol{R\sigma(W_n)}$	$\boldsymbol{RISI(W_n)}$	$\boldsymbol{RABC(W_n)}$
$\boldsymbol{W_4}$	0	$3\cdot(1+\frac{2\cdot 2}{4})$	$2^3\cdot 2^2$
$\boldsymbol{W_5}$	$4\cdot(-1)^2$	$3\cdot(1+\frac{2\cdot 3}{5})$	$2^4\cdot 3^2$
$\boldsymbol{W_6}$	$5\cdot(-2)^2$	$3\cdot(1+\frac{2\cdot 4}{6})$	$2^5\cdot 4^2$
$\boldsymbol{W_7}$	$6\cdot(-3)^2$	$3\cdot(1+\frac{2\cdot 5}{7})$	$2^6\cdot 5^2$
$\boldsymbol{W_8}$	$7\cdot(-4)^2$	$3\cdot(1+\frac{2\cdot 6}{8})$	$2^7\cdot 6^2$
$\boldsymbol{W_9}$	$8\cdot(-5)^2$	$3\cdot(1+\frac{2\cdot 7}{9})$	$2^8\cdot 7^2$
$\boldsymbol{W_{10}}$	$9\cdot(-6)^2$	$3\cdot(1+\frac{2\cdot 8}{10})$	$2^{10}\cdot 8^2$
$\boldsymbol{W_{11}}$	$10\cdot(-7)^2$	$3\cdot(1+\frac{2\cdot 9}{11})$	$2^{11}\cdot 9^2$
$\boldsymbol{W_{12}}$	$11\cdot(-8)^2$	$3\cdot(1+\frac{2\cdot 10}{12})$	$2^{12}\cdot 10^2$
$\boldsymbol{W_{13}}$	$12\cdot(-9)^2$	$3\cdot(1+\frac{2\cdot 11}{13})$	$2^{13}\cdot 11^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{W_n}$	$(n-1)(4-n)^2$	$(n-1)\left[1+\frac{2(n-2)}{n}\right]$	$2^{n-1}\cdot(n-2)^2$

Çizelge 4.49. W_n grafının $R\pi_1(W_n)$, $R\pi_2(W_n)$, $RNK(W_n)$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$R\pi_1(W_n)$	$R\pi_2(W_n)$	$RNK(W_n)$
W_4	$(8\cdot 2)^3$	$3\sqrt{2}$	$2^3\cdot 2$
W_5	$(8\cdot 3)^4$	$4\sqrt{2}$	$2^4\cdot 3$
W_6	$(8\cdot 4)^5$	$5\sqrt{2}$	$2^5\cdot 4$
W_7	$(8\cdot 5)^6$	$6\sqrt{2}$	$2^6\cdot 5$
W_8	$(8\cdot 6)^7$	$7\sqrt{2}$	$2^7\cdot 6$
W_9	$(8\cdot 7)^8$	$8\sqrt{2}$	$2^8\cdot 7$
W_{10}	$(8\cdot 8)^9$	$9\sqrt{2}$	$2^9\cdot 8$
W_{11}	$(8\cdot 9)^{10}$	$10\sqrt{2}$	$2^{10}\cdot 9$
W_{12}	$(8\cdot 10)^{11}$	$11\sqrt{2}$	$2^{11}\cdot 10$
W_{13}	$(8\cdot 11)^{12}$	$12\sqrt{2}$	$2^{12}\cdot 11$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
W_n	$[8(n-2)]^{n-1}$	$(n-1)\sqrt{2}$	$2^{n-1}\cdot(n-2)$

$T_{c,d}$ larva grafı için elde edilen köşe-kenar parçalanış tablosu aşağıdaki gibidir.

Çizelge 4.50. $T_{c,d}$ grafının $d = 1$ için köşe ve kenar parçalanışları

$T_{c,d}\ Grafı$			
$Köşe\ Parçalanışı$		$Kenar\ Parçalanışı$	
$d_{\mathbb{G}}(u)$	$\lvert d_{\mathbb{G}}(u)\rvert$	$(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))$	$\lvert((d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))\rvert$
1	1	(1,3)	1
2	$c+d-2$	(2,2)	$c-2$
3	1	(2,3)	1

Çizelge 4.51. $T_{c,d}$ grafının $d > 1$ için köşe ve kenar parçalanışları

$T_{c,d}$ $Grafı$			
$Köşe\ Parçalanışı$		$Kenar\ Parçalanışı$	
$d_{\mathbb{G}}(u)$	$\lvert d_{\mathbb{G}}(u)\rvert$	$(d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))$	$\lvert((d_{\mathbb{G}}(u), d_{\mathbb{G}}(v))\rvert$
1	1	(1,2)	1
2	$c+d-2$	(2,2)	$c+d-4$
3	1	(2,3)	3

Aşağıdaki tabloda $T_{c,d}$ grafı için tüm indeksler hesaplanmıştır fakat $RABC(T_{c,d})$ indeksi 1 indirgendiğinde tanımsız hale geldiğinden tabloda yer verilmemiştir.

Çizelge 4.52. $T_{c,d}$ grafının $RM_1(T_{c,d})$, $RM_2(T_{c,d})$, $RM_3(T_{c,d})$, $RH(T_{c,d})$, $RAlb(T_{c,d})$, $RSCI(T_{c,d})$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$RM_1(T_{c,d})$	$RM_2(T_{c,d})$	$RM_3(T_{c,d})$	$RH(T_{c,d})$	$RAlb(T_{c,d})$	$RSCI(T_{c,})$
$T_{3,1}$	6	3 + 2	10	$3+\frac{1}{3}$	4	$\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}$
$T_{3,2}$	7	7	11	5	4	$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}$
$T_{3,3}$	8	8	12	6	4	$1+\frac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}$
$T_{3,4}$	9	9	13	7	4	$1+\frac{3}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}$
$T_{3,5}$	10	10	14	8	4	$1+\frac{4}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}$
$T_{4,1}$	7	4 + 2	11	$4+\frac{1}{3}$	4	$\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}$
$T_{4,2}$	8	8	12	6	4	$1+\frac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}$
$T_{4,3}$	9	9	13	7	4	$1+\frac{3}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}$

Çizelge 4.53. $T_{c,d}$ grafının $RM_1(T_{c,d})$, $RM_2(T_{c,d})$, $RM_3(T_{c,d})$, $RH(T_{c,d})$, $RAlb(T_{c,d})$, $RSCI(T_{c,d})$ indeksleri (devam)

$\mathbf{T_{4,4}}$	10	10	14	8	4	$1+\frac{4}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}$
$\mathbf{T_{4,5}}$	11	11	15	9	4	$1+\frac{5}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}$
$\mathbf{T_{5,1}}$	8	5+2	12	$5+\frac{1}{3}$	4	$\frac{4}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\mathbf{T_{5,2}}$	9	9	13	7	4	$1+\frac{3}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}$
$\mathbf{T_{5,3}}$	10	10	14	8	4	$1+\frac{4}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}$
$\mathbf{T_{5,4}}$	11	11	15	9	4	$1+\frac{5}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}$
$\mathbf{T_{5,5}}$	12	12	16	10	4	$1+\frac{6}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathbf{T_{c,d}}$	$c+d+2$	$c+2$; $d=1$ $c+d+2$; $d>1$	$c+d+6$	$c+\frac{1}{3}$; $d=1$ $c+d$; $d>1$	4	$\frac{c-1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}$; $d=1$ $1+\frac{c+d-4}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}$; $d>1$

Çizelge 4.54. $\mathbf{T_{c,d}}$ grafının $\mathbf{R\sigma(T_{c,d})}$, $\mathbf{RISI(T_{c,d})}$, $\mathbf{R\pi_1(T_{c,d})}$, $\mathbf{R\pi_2(T_{c,d})}$, $\mathbf{RNK(T_{c,d})}$ indeksleri

$\mathbb{G}$	$R\sigma(\mathrm{T}_{c,d})$	$RISI(\mathrm{T}_{c,d})$	$R\pi_1(\mathrm{T}_{c,d})$	$R\pi_2(\mathrm{T}_{c,d})$	$RNK(\mathrm{T}_{c,d})$
$\mathbf{T_{3,1}}$	6	$\frac{3.3+2}{6}$	0	0	0
$\mathbf{T_{3,2}}$	4	$\frac{5}{2}$	0	0	0
$\mathbf{T_{3,3}}$	4	$\frac{6}{2}$	0	0	0
$\mathbf{T_{3,4}}$	4	$\frac{7}{2}$	0	0	0
$\mathbf{T_{3,5}}$	4	$\frac{8}{2}$	0	0	0
$\mathbf{T_{4,1}}$	6	$\frac{3.4+2}{6}$	0	0	0
$\mathbf{T_{4,2}}$	4	$\frac{6}{2}$	0	0	0
$\mathbf{T_{4,3}}$	4	$\frac{7}{2}$	0	0	0
$\mathbf{T_{4,4}}$	4	$\frac{8}{2}$	0	0	0
$\mathbf{T_{4,5}}$	4	$\frac{9}{2}$	0	0	0
$\mathbf{T_{5,1}}$	6	$\frac{3.5+2}{6}$	0	0	0
$\mathbf{T_{5,2}}$	4	$\frac{7}{2}$	0	0	0
$\mathbf{T_{5,3}}$	4	$\frac{8}{2}$	0	0	0
$\mathbf{T_{5,4}}$	4	$\frac{9}{2}$	0	0	0
$\mathbf{T_{5,5}}$	4	$\frac{10}{2}$	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathbf{T_{r,d}}$	$6\,;\ d=1$ $4\,;\ d>1$	$\frac{3c+2}{6};\ d=1$ $\frac{c+d}{2};\ d>1$	0	0	0

4.4. $t-$ İndirgenmiş Topolojik İndekslerin Hesaplanması

Bu alt bölümde, yukarıda 12 çeşit graf türü için $1-$indirgenmişlerini hesapladığımız indeksleri genelleştirip, $t-$ indirgenmiş topolojik indekslerini hesaplayacağız.

4.4.1. Sonuç. P_n grafı için elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır,

$$R^t M_1(P_n) = n(t-2)^2 + 4t - 6\,; n \geq 2$$
$$R^t M_2(P_n) = (2-t)(t + n(2-t) - 4)\,;\ n \geq 3$$
$$R^t M_3(P_n) = 2(1-t)^3 + (n-2)(2-t)^3;\ n \geq 2$$
$$R^t H(P_n) = \frac{-2tn + 2t + 3n - 1}{2t^2 - 7t + 6}$$
$$R^t Alb(P_n) = Alb(P_n) = 2$$
$$R^t SCI(P_n) = \frac{2}{\sqrt{3-2t}} + \frac{n-3}{\sqrt{4-2t}}$$
$$R^t \sigma(P_n) = 2$$
$$R^t ISI(P_n) = \frac{2(1-t)(2-t)}{3-2t} + \frac{(n-3)(2-t)}{2}$$
$$R^t ABC(P_n) = 2\sqrt{\frac{-2t+1}{(2-t)(1-t)}} + (n-3)\frac{\sqrt{2-2t}}{2-t}$$
$$R^t \prod_1(P_n) = (1-t)^4(2-t)^{2(n-2)}$$
$$R^t \prod_2(P_n) = (1-t)(2-t)^{2(n-2)}$$
$$R^t \mathrm{NK}(P_n) = (1-t)^2(2-t)^{(n-2)}.$$

4.4.2. Sonuç. C_n grafı için elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır,

$$R^t M_1(C_n) = n(2-t)^2$$
$$R^t M_2(C_n) = n(2-t)^2$$
$$R^t M_3(C_n) = n(2-t)^3$$
$$R^t H(C_n) = \frac{n}{2-t}$$
$$R^t Alb(C_n) = Alb(C_n) = 0$$
$$R^t SCI(C_n) = \frac{n}{\sqrt{4-2t}}$$
$$R^t \sigma(C_n) = 0$$

$$R^t ISI(C_n) = \frac{n(2-t)}{2}$$
$$R^t ABC(C_n) = \frac{n\sqrt{2-2t}}{2-t}$$
$$R^t \prod_1(C_n) = (2-t)^{2n}$$
$$R^t \prod_2(C_n) = (2-t)^{2n}$$
$$R^t \mathrm{NK}(C_n) = (2-t)^n.$$

4.4.3. Sonuç. S_n grafı için elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır,

$$R^t M_1(S_n) = n(1-t)^2(n-1-t)^2$$
$$R^t M_2(S_n) = n(1-t)(n-1-t)$$
$$R^t M_3(S_n) = n(1-t)^3(n-1-t)^3$$
$$R^t H(S_n) = \frac{2(n-1)}{n-2t}$$
$$R^t Alb(S_n) = Alb(S_n) = (n-1)|2-n|$$
$$R^t SCI(S_n) = \frac{n-1}{\sqrt{n-2t}}$$
$$R^t \sigma(S_n) = (n-1)(2-t)$$
$$R^t ISI(S_n) = \frac{(n-1)(1-t)(n-1-t)}{n-2t}$$
$$R^t ABC(S_n) = (n-1)\sqrt{\frac{n-2t-2}{(1-t)(n-1-t)}}$$
$$R^t \prod_1(S_n) = (1-t)^{2\cdot(n-2)}(n-1-t)^2$$
$$R^t \prod_2(S_n) = [(1-t)(n-1-t)]^{n-1}$$
$$R^t \mathrm{NK}(S_n) = (1-t)^{n-1}(n-1-t).$$

4.4.4. Sonuç. K_n grafı için elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır,

$$R^t M_1(K_n) = n(n-1-t)^2$$
$$R^t M_2(K_n) = \binom{n}{2}(n-1-t)^2$$
$$R^t M_3(K_n) = n(n-1-t)^3$$

$$R^t H(K_n) = \frac{\binom{n}{2}}{n-1-t}$$

$$R^t Alb(K_n) = Alb(K_n) = 0$$

$$R^t SCI(K_n) = \frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{2n-2t-2}}$$

$$R^t \sigma(K_n) = 0$$

$$R^t ISI(K_n) = \binom{n}{2}\frac{(n-1-t)}{2}$$

$$R^t ABC(K_n) = \binom{n}{2}\frac{\sqrt{2n-2t-4}}{n-1-t}$$

$$R^t \prod_1(K_n) = (n-1-t)^{2n}$$

$$R^t \prod_2(K_n) = (n-1-t)^{2\binom{n}{2}}$$

$$R^t \mathrm{NK}(K_n) = (n-1-t)^n.$$

4.4.5. Sonuç. $K_{r,s}$ grafı için elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır,

$$R^t M_1(K_{r,s}) = s(r-t)^2 + r(s-t)^2 \,; r \neq s$$

$$R^t M_1(K_{r,s}) = 2s(s-t)^2 \,; r = s$$

$$R^t M_2(K_{r,s}) = rs(r-t)(s-t)$$

$$R^t M_3(K_{r,s}) = s(r-t)^3 + r(s-t)^3 \,; r \neq s$$

$$R^t M_3(K_{r,s}) = 2s(s-t)^3; s = r$$

$$R^t H(K_{r,s}) = \frac{2rs}{r+s-2t}$$

$$R^t Alb(K_{r,s}) = Alb(K_{r,s}) = rs|r-s|$$

$$R^t SCI(K_{r,s}) = \frac{rs}{\sqrt{r+s-2t}}$$

$$R^t \sigma(K_{r,s}) = rs(r-s)^2$$

$$R^t ISI(K_{r,s}) = \frac{rs(r-t)(s-t)}{r+s-2t}$$

$$R^t ABC(K_{r,s}) = rs\sqrt{\frac{r+s-2t-2}{(r-t)\cdot(s-t)}}$$

$$R^t \prod_1(K_{r,s}) = (r-t)^{2s}(s-t)^{2r} \,; r \neq s$$

$$R^t \prod_1(K_{r,s}) = (s-t)^{4s} \,; r = s$$

$$R^t\prod_2(K_{r,s}) = [(r-t)(s-t)]^{rs}$$
$$R^t\mathrm{NK}(K_{r,s}) = (r-t)^s(s-t)^r\ ; r \neq s$$
$$R^t\mathrm{NK}(K_{r,s}) = (s-t)^{2s}\ ; r = s.$$

4.4.6. Sonuç. W_n^m grafı için elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır,

$$R^tM_1(\mathrm{W}_n^m) = m(n-1)(n-1-t)^2 + (mn-m-t)^2$$
$$R^tM_2(\mathrm{W}_n^m) = \frac{m(n-1)(n-2)}{2}(n-1-t)^2 + m(n-1)(n-1-t)(mn-m-t)$$
$$R^tM_3(\mathrm{W}_n^m) = m(n-1)(n-1-t)^3 + (mn-m-t)^3$$
$$R^tH(\mathrm{W}_n^m) = \frac{m(n-1)(n-2)}{2n-2-2t} + \frac{2m(n-1)}{n-1+mn-m-2t}$$
$$R^tAlb(\mathrm{W}_n^m) = Alb(P_n) = m(n-1)|n-1-nm+m|$$
$$R^tSCI(\mathrm{W}_n^m) = \frac{m(n-1)(n-2)}{2\sqrt{2n-2-2t}} + \frac{m(n-1)}{\sqrt{n-1+mn-m-2t}}$$
$$R^t\sigma(P_n) = m(n-1)(n-1-mn+m)^2$$
$$R^tISI(\mathrm{W}_n^m) = \frac{m(n-1)(n-2)(n-1-t)^2}{2(2n-2-2t)} + \frac{m(n-1)(n-1-t)(mn-m-t)}{n-1+mn-m-2t}$$
$$R^tABC(\mathrm{W}_n^m) = \frac{m(n-1)(n-2)}{2}\cdot\frac{\sqrt{2n-2t-4}}{n-1-t} + m(n-1)\sqrt{\frac{n+m(n-1)-2t-3}{(n-1-t)(mn-m-t)}}$$
$$R^t\prod_1(\mathrm{W}_n^m) = (n-1-t)^{2m(n-1)}(mn-m-t)^2$$

$$R^t\prod_2(\mathrm{W}_n^m) = (n-1-t)^{m(n-1)(n-2)}[(n-1-t)(mn-m-t)]^{m(n-1)}$$
$$R^t\mathrm{NK}(\mathrm{W}_n^m) = (mn-m-t)(n-1-t)^{m(n-1)}.$$

4.4.7. Sonuç. L_n patika grafı için elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır,

$$R^tM_1(L_n) = 2n(3-t)^2$$
$$R^tM_2(L_n) = 3n(3-t)^2$$
$$R^tM_3(L_n) = 2n(3-t)^3$$
$$R^tH(L_n) = \frac{3n}{3-t}$$

$$R^t Alb(L_n) = Alb(W_n) = 0$$

$$R^t SCI(L_n) = \frac{3n}{\sqrt{6-2t}}$$

$$R^t \sigma(L_n) = 0$$

$$R^t ISI(L_n) = \frac{3n(3-t)}{2}$$

$$R^t ABC(L_n) = 3n\frac{\sqrt{4-2t}}{3-t}$$

$$R^t \prod_1(L_n) = (3-t)^{4n}$$

$$R^t \prod_2(L_n) = (3-t)^{6n}$$

$$R^t \mathrm{NK}(L_n) = (3-t)^{2n}$$

4.4.8. Sonuç. D_r^s dostluk grafı için elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır,

$$R^t M_1(\mathrm{D}_r^s) = s(r-1)(2-t)^2 + (2s-t)^2$$

$$R^t M_2(\mathrm{D}_r^s) = s(2-t)[(r-2)(2-t) + 2(2s-t)^2]$$

$$R^t M_3(\mathrm{D}_r^s) = s(r-1)(2-t)^3 + (2s-t)^3$$

$$R^t H(\mathrm{D}_r^s) = \frac{s(r-2)}{2-t} + \frac{2s}{s-t+1}$$

$$R^t Alb(\mathrm{D}_r^s) = Alb(\mathrm{D}_r^s) = 2s|2-2s|$$

$$R^t SCI(\mathrm{D}_r^s) = \frac{s(r-2)}{\sqrt{4-2t}} + \frac{2s}{\sqrt{2+2s-2t}}$$

$$R^t \sigma(\mathrm{D}_r^s) = 8s(s-1)^2$$

$$R^t ISI(\mathrm{D}_r^s) = \frac{s(r-2)(2-t)}{2} + \frac{s(2-t)(2s-t)}{1+s-t}$$

$$R^t ABC(\mathrm{D}_r^s) = \frac{s(r-2)\sqrt{2-2t}}{2-t} + 2s\sqrt{\frac{2s-2t}{(2-t)\cdot(2s-t)}}$$

$$R^t \prod_1(\mathrm{D}_r^s) = (2-t)^{2s(r-1)}(2s-t)^2$$

$$R^t \prod_2(\mathrm{D}_r^s) = (2-t)^{2s(r-1)}(2s-t)^{2\cdot s}$$

$$R^t \mathrm{NK}(\mathrm{D}_r^s) = (2s-t)(2-t)^{s\cdot(r-1)}.$$

4.4.9. Sonuç. T_n taç grafı için elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır,

$$R^t M_1(T_n) = 2n(n-1-t)^2$$

$$R^t M_2(T_n) = n(n-1)(n-1-t)^2$$
$$R^t M_3(T_n) = 2n(n-1-t)^3$$
$$R^t H(T_n) = \frac{2n(n-1)}{2n-2-2t}$$
$$R^t Alb(T_n) = Alb(T_n) = 0$$
$$R^t SCI(T_n) = \frac{n(n-1)}{\sqrt{2n-2-2t}}$$
$$R^t \sigma(T_n) = 0$$
$$R^t ISI(T_n) = \frac{n(n-1)(n-1-t)}{2}$$
$$R^t ABC(T_n) = \frac{n(n-1)\sqrt{2n-2t-4}}{n-1-t}$$
$$R^t \prod_1(T_n) = (n-1-t)^{4n}$$
$$R^t \prod_2(T_n) = (n-1-t)^{2n(n-1)}$$
$$R^t \mathrm{NK}(T_n) = (n-1-t)^{2n}.$$

4.4.10. Sonuç. *P* petersen grafı için elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır,

$$R^t M_1(P) = 10t^2 - 60t + 90$$
$$R^t M_2(P) = 15(3-t)^2$$
$$R^t M_3(P) = 10(3-t)^3$$
$$R^t H(P) = \frac{15}{3-t}$$
$$R^t Alb(P) = Alb(P) = 0$$
$$R^t SCI(P) = \frac{15}{\sqrt{6-2t}}$$
$$R^t \sigma(P) = 0$$
$$R^t ISI(P) = \frac{15(3-t)}{2}$$
$$R^t ABC(P) = \frac{15\sqrt{4-2t}}{3-t}$$
$$R^t \prod_1(P) = (3-t)^{20}$$
$$R^t \prod_2(P) = (3-t)^{30}$$
$$R^t \mathrm{NK}(P) = (3-t)^{10}.$$

4.4.11. Sonuç. CP_{2n} kokteyl grafı için elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır,

$$R^t M_1(CP_{2n}) = 2n(2n-2-t)^2$$

$$R^t M_2(CP_{2n}) = 2n(n-1)(2n-2-t)^2$$

$$R^t M_3(CP_{2n}) = 2n(2n-2-t)^3$$

$$R^t H(CP_{2n}) = \frac{2n(n-1)}{2n-2-t}$$

$$R^t Alb(CP_{2n}) = Alb(P_n) = 0$$

$$R^t SCI(CP_{2n}) = \frac{2n(n-1)}{\sqrt{4n-4-2t}}$$

$$R^t \sigma(CP_{2n}) = 0$$

$$R^t ISI(CP_{2n}) = n(n-1)(2n-2-t)$$

$$R^t ABC(CP_{2n}) = \frac{2n(n-1)\sqrt{4n-6-2t}}{2n-2-t}$$

$$R^t \prod_1(CP_{2n}) = (2n-2-t)^{4n}$$

$$R^t \prod_2(CP_{2n}) = (2n-2-t)^{4n(n-1)}$$

$$R^t \mathrm{NK}(CP_{2n}) = (2n-2-t)^{2n}.$$

4.4.12. Sonuç. W_n tekerlek grafı için elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır,

$$R^t M_1(W_n) = (n-1)(3-t)^2 + (n-1-t)^2$$

$$R^t M_2(W_n) = (n-1)[(3-t)^2 + (3-t)(n-1-t)]$$

$$R^t M_3(W_n) = (n-1)(3-t)^3 + (n-1-t)^3$$

$$R^t H(W_n) = \frac{2(n-1)(n-4t+8)}{(6-2t)(n+2-2t)}$$

$$R^t Alb(W_n) = Alb(W_n) = (n-1)|4-n|$$

$$R^t SCI(W_n) = \frac{n-1}{\sqrt{6-2t}} + \frac{1}{\sqrt{n+2-2t}}$$

$$R^t \sigma(W_n) = (n-1)(n-4)^2$$

$$R^t ISI(W_n) = (n-1)\left[\frac{(3-t)^2}{6-2t} + \frac{(3-t)(n-1-t)}{n+2-2t}\right]$$

$$R^t ABC(W_n) = (n-1)\left[\frac{\sqrt{4-2t}}{3-t} + \sqrt{\frac{n-2t}{(3-t)(n-1-t)}}\right]$$

$$R^t \prod_1(W_n) = (3-t)^{2(n-1)}(n-1-t)^2$$

$$R^t\prod_2(W_n) = (3-t)^{3(n-1)}(n-1-t)^{n-1}$$
$$R^t\mathrm{NK}(W_n) = (3-t)^{n-1}(n-1-t).$$

4.4.13. Sonuç. $T_{r,s}$ larva grafı için elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır,

$$R^tM_1(T_{r,s}) = (r+s)(t-2)^2+2$$
$$R^tM_2(T_{r,s}) = t^2+t^2r-4tr+4r-6t+7\,;s=1$$
$$R^tM_2(T_{r,s}) = 4[1+r(1-t)+s(1-t)]+t^2(r+s)-2t\,;s>1$$
$$R^tM_3(T_{r,s}) = -12rt+6rt^2-rt^3+8s-12st+6st^2-st^3-6t+12+8r$$
$$R^tH(T_{r,s}) = -\frac{2rt-5r+2t-3}{(2t-5)(t-2)}\,;s=1$$
$$R^tH(T_{r,s}) = \frac{15r-16rt+4rt^2+15s-16st+4st^2+4t-4}{(2-t)(3-2t)(5-2t)}\,;s>1$$
$$R^tAlb(T_{r,s}) = Alb(T_{r,s}) = 4$$
$$R^tSCI(T_{r,s}) = \frac{1}{\sqrt{4-2t}}+\frac{r-2}{\sqrt{4-2t}}+\frac{2}{\sqrt{5-2t}}\,;s=1$$
$$R^tSCI(T_{r,s}) = \frac{1}{\sqrt{3-2t}}+\frac{r+s-4}{\sqrt{4-2t}}+\frac{3}{\sqrt{5-2t}}\,;s>1$$
$$R^t\sigma(T_{r,s}) = 6\,;\ s=1$$
$$R^t\sigma(T_{r,s}) = 4;\ s>1$$
$$R^tISI(T_{r,s}) = \frac{15t^2-2t^3+20r-28rt+13rt^2-2rt^3-34t+23}{2(2-t)(5-2t)}\,;s=1$$
$$R^tISI(T_{r,s})$$
$$= \frac{(2-t)(2t^2+15r-11rt+2rt^2+15s-11st-2st^2-6t+4)}{2(3-t)(5-2t)}\,;s>1$$
$$R^tABC(T_{r,s}) = \sqrt{\frac{2-2t}{(1-t)(3-t)}}+(r-2)\sqrt{\frac{2-2t}{2-t}}+2\sqrt{\frac{3-2t}{(2-t)\cdot(3-t)}}\,;s=1$$
$$R^tABC(T_{r,s}) = \sqrt{\frac{1-t}{(1-t)(2-t)}}+(r+s-4)\sqrt{\frac{2-2t}{2-t}}+3\sqrt{\frac{3-2t}{(2-t)(3-t)}}\,;s>1$$
$$R^t\prod_1(T_{r,s}) = (1-t)^2(2-t)^{2(r+s-2)}(3-t)^2$$
$$R^t\prod_2(T_{r,s}) = (1-t)(3-t)(2-t)^{2\cdot(r-2)}[(2-t)(3-t)]^2;s=1$$
$$R^t\prod_2(T_{r,s}) = (1-t)(2-t)(2-t)^{2(r+s-4)}[(2-t)(3-t)]^3;s>1$$

$$R^t\mathrm{NK}(T_{r,s}) = (1-t)(2-t)^{r+s-2}(3-t).$$

4.5. İndirgenmiş Topolojik İndeksler İle İlgili Eşitlikler

Bu bölümde, tezde kullanılan bazı $t-$ indirgenmiş topolojik indekslerden eşitlikler elde edilmiştir. Bulunan eşitlikler sonuçlar halinde verilip bazıları ise ispat edilmiştir.

4.5.1. Sonuç. Bir $\mathbb{G}$ grafının, $t-$ indirgenmiş birinci Zagreb indeksi ile birinci Zagreb indeksi arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir:

$$R^tM_1(\mathbb{G}) = M_1(\mathbb{G}) - 4tm + nt^2.$$

İspat. $t-$ indirgenmiş birinci Zagreb indeksinin tanımı gereği,

$$\begin{aligned} R^tM_1(\mathbb{G}) &= \sum_{u\in V(\mathbb{G})} (d_u - t)^2 \\ &= \sum_{u\in V(\mathbb{G})} {d_u}^2 - 2t\sum_{u\in V(\mathbb{G})} d_u + t^2\sum_{u\in V(\mathbb{G})} 1 \\ &= M_1(\mathbb{G}) - 4tm + nt^2 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilerek sonuç görülür.

4.5.2. Sonuç. Birinci Zagreb indeksinin bir diğer tanımına aşağıdaki gibi $t-$ indirgeme uygulanıldığında:

$$R^tM_1(\mathbb{G}) = M_1(\mathbb{G}) - 2tm$$

yukarıdaki eşitlik elde edilir.

İspat. $t-$ indirgenmiş birinci Zagreb indeksi tanımından

$$R^tM_1(\mathbb{G}) = \sum_{uv\in E(\mathbb{G})} (d_u + d_v - 2t)$$

$$= \sum_{uv \in E(\mathbb{G})} (d_u + d_v) - 2t \sum_{uv \in E(\mathbb{G})} 1$$
$$= M_1(\mathbb{G}) - 2tm$$

eşitliği elde edilir.

4.5.3. Sonuç. Bir $\mathbb{G}$ grafının, $t-$ indirgenmiş ikinci Zagreb indeksi tanımıyla ikinci ve birinci Zagreb indeksleri arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir:

$$R^t M_2(\mathbb{G}) = M_2(\mathbb{G}) - tM_1(\mathbb{G}) + mt^2.$$

İspat. $R^t M_2(\mathbb{G})$ indeksinden elde edilen bağıntı,

$$R^t M_2(\mathbb{G}) = \sum_{uv \in E(\mathbb{G})} (d_u - t)(d_v - t)$$
$$= \sum_{uv \in E(\mathbb{G})} d_u \cdot d_v - t \sum_{uv \in E(\mathbb{G})} (d_u + d_v) + t^2 \sum_{uv \in E(\mathbb{G})} 1$$
$$= M_2(\mathbb{G}) - tM_1(\mathbb{G}) + mt^2$$

yukarıda ifade edildiği gibi sağlanır.

4.5.4. Sonuç. Bir $\mathbb{G}$ grafının, $t-$ indirgenmiş üçüncü Zagreb indeksi ile üçüncü ve birinci Zagreb indeksleri arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir:

$$R^t M_3(\mathbb{G}) = M_3(\mathbb{G}) - 3tM_1(\mathbb{G}) + 3t^2 2m - t^3 n.$$

İspat. $R^t M_3(\mathbb{G})$ indeksinin tanımı gereği,

$$R^t M_3(\mathbb{G}) = \sum_{u \in V(\mathbb{G})} (d_u - t)^3$$
$$= \sum_{u \in V(\mathbb{G})} ({d_u}^3 - 3\,{d_u}^2 t + 3 d_u t^2 - t^3)$$
$$= \sum_{u \in V(\mathbb{G})} ({d_u}^3 - 3t) \cdot \sum_{u \in V(\mathbb{G})} \left({d_u}^2 + 3t^2\right) \cdot$$
$$\sum_{u \in V(\mathbb{G})} (d_u - t^3) \cdot \sum_{u \in V(\mathbb{G})} 1$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte birinci ve üçüncü Zagreb indeksi ve de Lemma? gereği:

$$R^t M_3(\mathbb{G}) = M_3(\mathbb{G}) - 3tM_1(\mathbb{G}) + 3t^2 2m - t^3 n$$

olacaktır.

4.5.5. Sonuç. $R^t SCI(\mathbb{G})$ indeksi çarpımsal alınarak, $t-$ indirgenmiş çarpımsal birinci Zagreb indeksi ile arasındaki bağıntı:

$$R^t SCI\prod(\mathbb{G}) = \frac{1^m}{\sqrt{R^t \prod_1(\mathbb{G})}}$$

şeklindedir.

İspat. $SCI(\mathbb{G})$ indeksi, toplamsal değil de çarpımsal alınarak aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$SCI\prod(\mathbb{G}) = \prod_{uv\in E(\mathbb{G})} \frac{1}{\sqrt{d_u + d_v}}.$$

Bu indeksin $t-$ indirgemesiyle oluşan $R^t SCI\prod(\mathbb{G})$ indeksinin, $R^t \prod_1(\mathbb{G})$ indeksiyle arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi sağlanır.

$$R^t SCI\prod(\mathbb{G}) = \frac{\prod_{uv\in E(\mathbb{G})} 1}{\prod_{uv\in E(\mathbb{G})} \sqrt{d_u + d_v - 2t}} = \frac{1^m}{\sqrt{R^t \prod_1(\mathbb{G})}}$$

4.5.6. Sonuç. $t-$ indirgenmiş harmonik indeksini çarpımsal olarak tanımlarsak, $R^t \prod_1(\mathbb{G})$ ile arasında,

$$R^t H\prod(\mathbb{G}) = \frac{2^m}{R^t \prod_1(\mathbb{G})}$$

yukarıdaki gibi bir bağıntı elde edilir.

İspat. $t-$ indirgenmiş harmonik indeksi tanımını toplamsal olarak değil çarpımsal olarak tanımlarsak aşağıdaki gibi $R^tH\prod(\mathbb{G})$ indeksini elde ederiz:

$$R^tH\prod(\mathbb{G}) = \prod_{uv\in E(\mathbb{G})} \frac{2}{d_u + d_v - 2t}.$$

Elde edilen $t-$ indirgenmiş çarpımsal harmonik indeksinin,

$$R^tH\prod(\mathbb{G}) = \frac{2^m}{R^t\prod_1(\mathbb{G})}$$

eşitliğini sağladığı görülmektedir.

4.5.7. Sonuç. $R^tABC(\mathbb{G})$ indeksi, çarpımsal olarak ifade edilirse aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$R^tABC\prod(\mathbb{G}) = \sqrt{\frac{R^tM_1(\mathbb{G}) - 2}{R^t\prod_2(\mathbb{G})}}.$$

İspat. $ABC(\mathbb{G})$ indeksinin çarpımsal olarak alınmasıyla elde edilen indeks, $ABC\prod(\mathbb{G})$ olarak

$$ABC\prod(\mathbb{G}) = \prod_{uv\in E(\mathbb{G})} \sqrt{\frac{d_u + d_v - 2}{d_u \cdot d_v}}$$

şeklinde tanımlansın.

O halde bir $\mathbb{G}$ grafı için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$R^tABC\prod(\mathbb{G}) = \prod_{uv\in E(\mathbb{G})} \sqrt{\frac{d_u + d_v - 2 - 2t}{(d_u - t)(d_v - t)}}$$

$$= \sqrt{\frac{R^tM_1(\mathbb{G}) - 2}{R^t\prod_2(\mathbb{G})}}.$$

4.5.8. Sonuç. Sigma indeksinin $t-$ indirgemesiyle oluşan $R^t\sigma(\mathbb{G})$ indeksi aşağıdaki gibi indeksin kendine yani sigma indeksine eşit olur.

$$R^t\sigma(\mathbb{G}) = \sigma(\mathbb{G}).$$

İspat önceki ispatlara benzer şekilde yapılabilir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu yüksek lisans tezinde; k-mertebeli afin ve projektif düzlemlerden "Patika Metodu" kullanılarak elde edilen Afin ve Projektif Patika grafları için düzlemin mertebesine bağlı olarak köşe ve kenar parçalanış tabloları hesaplanmış ve k. mertebeden grafların karakterizasyonu için sonuçlar elde edilmiştir. Literatürde ilk defa düzlemin mertebesine bağlı olarak genellenen köşe ve kenar parçalanış tabloları kullanılarak, Afin ve Projektif Patika graflarının bazı t-indirgenmiş topolojik indekslerinin genel formülleri verilmiştir. Geometri ile graf teori arasındaki ilişkilere ek olarak; mertebe k=2,3,4,5 alınarak oluşturulan afin ve projektif patika grafları örneklendirilerek, bu grafların köşe-komşuluk matrisleri, graf enerjileri de hesaplanmıştır. Ayrıca graf teoride en çok kullanılan 13 farklı graf çeşidi için köşe-kenar parçalanış tabloları verilerek, önce bu grafların 12 farklı 1-indirgenmiş topolojik indeksleri hesaplanıp tablolar halinde sunulmuştur. Daha sonra bu indeksler t-indirgenmiş olarak genelleştirmiştir. Son olarak; üzerinde çalışılan t-indirgenmiş bazı topolojik graf indeksleri için eşitlikler elde edilerek ispatlanmıştır.

Bu çalışma ile matematik biliminin önemli iki alanı olan Geometri ve Graf Teori disiplinleri arasında kurulan köprünün devamlılığını sağlamak amacıyla sonlu düzlemler ile graf teori arasındaki ilişkiler incelenerek, elde edilen teorem ve sonuçlarla yeni çalışma alanına katkı sağlanmıştır. Elde edilen sonuçlarda, k-mertebeli afin-patika grafları ile k-mertebeli afin düzlemler arasında ve yine aynı şekilde k-mertebeli projektif-patika grafları ile k-mertebeli projektif düzlemler arasında bazı farklılıklar ve benzerlikler olduğu açıkça görülmektedir. O halde bu konularda literatürde bazı açık problemlerin mevcut olduğu söylenebilir. Bu problemlerin bazıları aşağıdaki gibi sıralanabilir:
Aynı mertebeli afin-patika ve projektif-patika graflar arasındaki ilişkiler nedir?
Verilen bir grafın bir afin-patika grafı veya bir projektif-patika grafı olup olmadığına hangi şartlar altında karar verilebilir?

Afin-patika grafları ve projektif-patika graflari için uzaklık cinsinden sık kullanılan bazı topolojik indekslerin genel formülleri nasıl hesaplanabilir ve bu indekslerin indirgenmiş halleri tanımlanabilir mi?

Tüm bunlara ilave olarak; bu çalışma ile hesaplanan graf teoride en iyi bilinen 13 farklı graf çeşidi için en çok kullanılan 12 adet t-indirgenmiş topolojik graf indeksleri ve bunlarla ilgili bulunan bazı eşitlikler; bundan sonra yapılacak çalışmalara temel oluşturacak ve ileriki çalışmalara katkı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

Akgunes, N., Cangul, I. N., & Cevik, A. S. (2019). *A Note on the Upper Bound of Average Distance via Irregularity Index*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-91065-9_14

Akpinar, A. (2022). THE CONNECTED GRAPHS OBTAINED FROM FINITE PROJECTIVE PLANES. *Rad Hrvatske Akademije Znanosti i Umjetnosti, Matematicke Znanosti*, *26*. https://doi.org/10.21857/mnlqgcrnxy

Bennett, M. K. (1995). Affine and Projective Geometry. In *Affine and Projective Geometry*. https://doi.org/10.1002/9781118032565

Biggs, N. L., Lloyd, E. K., & Wilson, R. J. (1999). Graph Theory 1736-1936. In *Oxford University Press*.

Boehm, W., & Prautzsch, H. (2002). Chapter 2 - Geometric Fundamentals. In *Handbook of Computer Aided Geometric Design*.

Büyükköse, Ş., & Cangul, I. N. (2022). Some Notes on Randić Index. *Boletim Da Sociedade Paranaense de Matematica*, *40*. https://doi.org/10.5269/bspm.47213

Cangul, I. N., Yurttas, A., Togan, M., & Cevik, A. S. (2017). New formulae for Zagreb indices. *AIP Conference Proceedings*, *1863*. https://doi.org/10.1063/1.4992462

Das, K. C., Akgunes, N., Togan, M., Yurttas, A., Cangul, I. N., & Cevik, A. S. (2016). On the first Zagreb index and multiplicative zagreb coindices of graphs. *Analele Stiintifice Ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, *24*(1). https://doi.org/10.1515/auom-2016-0008

Das, K. C., Xu, K., Cangul, I. N., Cevik, A. S., & Graovac, A. (2013). On the Harary index of graph operations. *Journal of Inequalities and Applications*, *2013*. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-339

Das, K. C., Yurttas, A., Togan, M., Cevik, A. S., & Cangul, I. N. (2013). The multiplicative Zagreb indices of graph operations. *Journal of Inequalities and Applications*, *2013*. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-90

Dayioglu, A. (2021). Affine Graphs and their Topological Indices. *Journal of Mathematics*, *2021*. https://doi.org/10.1155/2021/9983771

Diestel, R. (2000). Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics). In *Graduate Texts in Mathematics*.

Dogan, I., & Akpinar, A. (2021). On Distance in Some Finite Planes and Graphs Arising from Those Planes. *Journal of Mathematics*, *2021*. https://doi.org/10.1155/2021/6668682

Eliasi, M., Iranmanesh, A., & Gutman, I. (2012). Multiplicative versions of first Zagreb index. *Match*, *68*(1).

Gross, J. L., Yellen, J., & Anderson, M. (2018). Graph Theory and Its Applications. In *Graph Theory and Its Applications*. https://doi.org/10.1201/9780429425134

Gunes, A. Y., Togan, M., Demirci, M., & Cangul, I. N. (2021). Harmonic index and zagreb indices of vertex-semitotal graphs. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, *13*(5). https://doi.org/10.29020/NYBG.EJPAM.V13I5.3725

Güngör, A. D., Çevik, A. S., Karpuz, E. G., Ateş, F., & Cangül, I. N. (2010). Generalization for Estrada index. *AIP Conference Proceedings*, *1281*. https://doi.org/10.1063/1.3497839

Gutman, I., & Das, K. C. (2004a). The first Zagreb index 30 years after. *Match*, *50*.

Gutman, I., & Das, K. C. (2004b). The first Zagreb index 30 years after. *Match*, *50*.

Gutman, I., Ruščić, B., Trinajstić, N., & Wilcox, C. F. (1975). Graph theory and molecular orbitals. XII. Acyclic polyenes. *The Journal of Chemical Physics*, *62*(9). https://doi.org/10.1063/1.430994

Gutman, I., & Trinajstić, N. (1972a). Graph theory and molecular orbitals. Total φ-electron energy of alternant hydrocarbons. *Chemical Physics Letters*, *17*(4). https://doi.org/10.1016/0009-2614(72)85099-1

Gutman, I., & Trinajstić, N. (1972b). Graph theory and molecular orbitals. Total φ-electron energy of alternant hydrocarbons. *Chemical Physics Letters*, *17*(4). https://doi.org/10.1016/0009-2614(72)85099-1

Khalifeh, M. H., Yousefi-Azari, H., & Ashrafi, A. R. (2009). The first and second Zagreb indices of some graph operations. *Discrete Applied Mathematics*, *157*(4). https://doi.org/10.1016/j.dam.2008.06.015

Liu, J., & Zhang, Q. (2012). Sharp upper bounds for multiplicative Zagreb Indices. *Match*, *68*(1).

Lokesha, V., Shetty, B. S., Ranjini, P. S., Cangul, I. N., & Cevik, A. S. (2013). New bounds for randic and GA indices. *Journal of Inequalities and Applications*, *2013*. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-180

Nikolić, S., Kovačević, G., Miličević, A., & Trinajstić, N. (2003a). The Zagreb indices 30 years after. *Croatica Chemica Acta*, *76*(2).

Nikolić, S., Kovačević, G., Miličević, A., & Trinajstić, N. (2003b). The Zagreb indices 30 years after. *Croatica Chemica Acta*, *76*(2).

Oz, M. S., & Cangul, I. N. (2021). *Recurrence Relations of Edge-Zagreb and Sum-Edge Characteristic Polynomials of Some Graphs*. https://doi.org/10.1007/978-981-16-1402-6_9

Özen Erdoğan, F., & Dayioğlu, A. (n.d.). *Projective Graphs Obtained from Projective Planes*.

Petersen, G. M., & Coxeter, H. S. M. (1961). Introduction to Geometry. *The American Mathematical Monthly*, *68*(10). https://doi.org/10.2307/2311833

Prakasha, K. N., Reddy, P. S. K., & Cangul, I. N. (2017). Partition Laplacian energy of a graph. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics (Kyungshang)*, *27*(4). https://doi.org/10.17777/ascm2017.27.4.477

Prakasha, K. N., Reddy, P. S. K., & Cangul, I. N. (2019). SUM-CONNECTIVITY ENERGY OF GRAPHS. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, *28*(1).

Sucar, L. E. (2021). Graph Theory. In *Advances in Computer Vision and Pattern Recognition* (Vol. 2021). https://doi.org/10.1007/978-3-030-61943-5_3

Todeschini, R., & Consonni, V. (2010). New local vertex invariants and molecular descriptors based on functions of the vertex degrees. *Match*, *64*(2).

Voloshin, V. I. (2009). Introduction to graph theory. In *Introduction to Graph Theory*. https://doi.org/10.2307/2319240

Wilson, B. J. (1987). COMBINATORICS OF FINITE GEOMETRIES. *Bulletin of the London Mathematical Society*, *19*(1). https://doi.org/10.1112/blms/19.1.85

Xu, K., Das, K. C., & Tang, K. (2013). On the multiplicative zagreb coindex of graphs. *Opuscula Mathematica*, *33*(1). https://doi.org/10.7494/OpMath.2013.33.1.191

Yurtas, A., Togan, M., Lokesha, V., Cangul, I. N., & Gutman, I. (2019). Inverse problem for Zagreb indices. *Journal of Mathematical Chemistry*, *57*(2). https://doi.org/10.1007/s10910-018-0970-x

YURTTAS GUNES, A., TOGAN, M., DEMIRCI, M., & Naci CANGUL, I. (2020). Certain Topological Indices of Some Derived Graphs. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, *8*(4). https://doi.org/10.12691/tjant-8-4-2

Zhou, B., & Gutman, I. (2004). Relations between Wiener, hyper-Wiener and Zagreb indices. *Chemical Physics Letters*, *394*(1–3), 93–95. https://doi.org/10.1016/j.cplett.2004.06.117

Zhou, B., & Gutman, I. (2005). Further properties of zagreb indices. *Match*, *54*(1).

Zhou, B., & Stevanović, D. (2006). A note on Zagreb indices. *Match*, *56*(3).